MAKALAH

APLIKASI TEOREMA NILAI RATA-RATA PADA FUNGSI SATU VARIABEL

Oleh :

DRA. MARLIANI

JURUSAN PENDIDIKAN MATEMATIKA
FAKULTAS PENDIDIKAN MATEMATIKA DAN IPA
IKIP PADANG
199[illegible]

KATA PENGANTAR

Puji syukur penulis panjatkan kehadirat Allah SWT, karena atas karuniaNya jualah penulis telah da[illegible]enyelesaikan makalah ini dengan judul **"Aplikasi Teorema Nilai Ra[illegible] Pada Fungsi Satu Variabel".**

Dalam menyelesaikan mak[illegible] ini penulis banyak mendapatkan bantuan dari berbagai pihak. Un[illegible]u pada kesempatan ini penulis menghaturkan terima kasih kepad[illegible]pak Drs. Mukhni, M.Pd yang telah memberikan masukan yang berha[illegible]emi kesempurnaan makalah ini.

Akhirnya penulis berharap [illegible] makalah ini bermanfaat bagi yang membutuhkan.

Padang, Mei 1999

Penulis,

DAFTAR ISI

Halaman

APLIKASI TEOREMA NILAI RATA-RATA

PADA FUNGSI SATU VARIABEL

A. PENDAHULUAN

Dalam kalkulus diferensial telah dipelajari bahwa fungsi satu variabel real f yang kontinu pada suatu selang dapat mencapai nilai maksimum atau minimum di titik (a , f(a)) pada sel[illegible] (a – r , a + r) untuk suatu r > 0, dimana selang buka (a – r , a + r) terletak pada daerah definisi fungsi f. Dalam hal ini dikatakan bahwa fu[illegible]encapai ekstrim relatif (lokal) di x = a. Konsep ini dikenal sebagai [illegible]elatif dari fungsi satu variabal real, yang lokasinya dapat ditentukan de[illegible]i turunan pertama atau uji turunan kedua.

Secara umum, suatu fung[illegible] yang terdefinisi pada suatu selang dapat mencapai ekstrim relatif pa[illegible] tersebut. Masalah yang muncul adalah dimanakah lokasi ekstrim re[illegible] mesti dicari. Bila diperhatikan bahwa suatu ciri ekstrim relatif da[illegible]ng terdiferensialkan adalah turunan pertama di titik ekstrim itu sa[illegible]n nol. Dengan perkataan lain, garis singgung di titik ekstrim rel[illegible]endatar atau sejajar dengan sumbu x.

Kemudian muncul lagi permasalahan, [illegible]at apakah yang menjamin adanya garis singgung mendatar di suatu [illegible]ada grafik fungsi yang terdiferensialkan? Tulisan ini mencoba men[illegible]ermasalahan tersebut yaitu melalui Teorema Rolle, dan selanjutnya da[illegible] diperumum yang dikenal sebagai Teorema Nilai Rata-rata (TNR). Kemudian dicoba melihat beberapa pemakaian TNR dalam menyelesaikan beberapa permasalahan matematika.

B. PEMBAHASAN

1. Teorema Rolle

Teorema Rolle ini menyatakan tentang adanya garis singgung yang mendatar atau sejajar dengan sumbu x dari suatu fungsi yang memenuhi syarat tertentu yaitu fungsinya kontinu pada suatu selang tertutup, terdiferensialkan pada selang terbuka dan nilai fungsi di titik ujung selangnya sama. Secara konsep matematis, Teorema Rolle dinyatakan sebagai berikut:

"Jika fungsi f memenuhi syarat

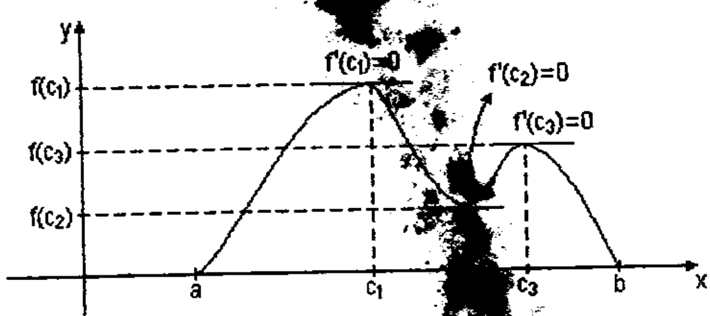
(1) kontinu pada selang tertutup [a , b],

(2) terdiferensialkan pada selang terbuka (a , b),

(3) f(a) = f(b) = 0,

maka terdapat $c \in (a , b)$ sehingga $f'(c) = 0$

Secara grafik, teorema ini dapat diilustrasikan sebagai berikut (lihat gambar 1)



Gambar 1.

Teorema ini dapat dibuktikan sebagai berikut :

<u>Keadaan 1</u> : Misalkan f(x) = k.

Karena f(a) = f(b) = 0, dan f(x) = k maka berarti f(x) = 0 dan

$f^{'}(x) = 0$, dengan $x \in (a , b)$.

Karena x diambil sebarang pada (a , b), berarti ada $c \in (a , b)$

sehingga $f^{'}(c) = 0$

<u>Keadaan 2</u> : Misalkan $f(x) \neq k$.

Karena f kontinu pad[illegible] a , [illegible], maka f mempunyai maksimum

maupun minimum, [illegible]lah satu nilai maksimum atau

minimum tersebut p[illegible] sama dengan nol (0).

Misalkan f(x) mem[illegible]aksimum $M \neq 0$ tercapai di titik

x = c. Akan ditunju[illegible]wa $f^{'}(c) = 0$.

$f(c + \Delta x) - f(c) < 0$, u[illegible] < 0 maupun $\Delta x > 0$

Akibatnya :

$$\frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x} > 0 \text{, [illegible]x} < 0,$$

dan

$$\frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x} < 0 \text{, un[illegible]} 0.$$

$$\lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x} = f_-^{1}(c) \geq 0 \,, \qquad \Delta x < 0, \ldots\ldots(1)$$

dan

$$\lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x} = f_+^{1}(c) \leq 0 \,, \qquad \Delta x > 0, \ldots\ldots(2)$$

Karena f' (x) ada pada (a , b), maka f' (c) juga ada dengan

c∈ (a , b).

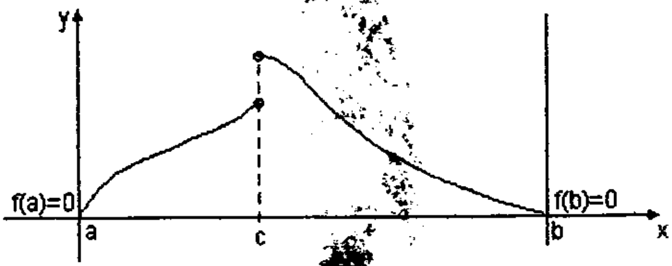
Mengingat (1) dan (2), maka haruslah

$$f'(c) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x} = 0 \quad \text{.......... (terbukti)}$$

Apa akibatnya, jika beberapa persyaratan atau ketentuan dalam Teorema Rolle ini diperlemah. Untuk itu perhatikan beberapa kasus berikut :

<u>Kasus 1</u> : Misal ada sebuah titik diskontinu dari f pada selang tertutup [a,b].

Apakah kesimpulan tersebut masih berlaku? Jawabanya tidak selalu. Contoh untuk tidak berlaku, secara grafik dapat diilustrasikan sebagai berikut (lihat gambar 2).



Gambar 2

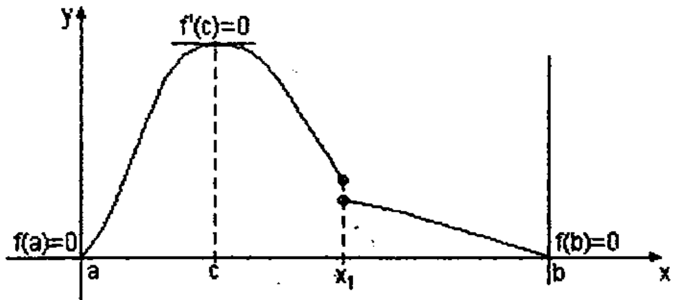
Gambar 2 tersebut memperlihatkan bahwa fungsi f diskontinu di c∈ (a , b).

Misalnya perhatikan fungsi f : [0 , 5] $\rightarrow$ R yang didefinisikan sebagai :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & , \text{jika } x < 1 \\ 5 - x & , \text{jika } x \geq 1 \end{cases}$$

Maka fungsi f diskontinu di c = 1 $\in$ (0 , 5). Jadi tidak ada c$\in$ (0,5) sehingga f' (c) = 0.

Contoh untuk yang berlaku, secara grafik dapat diilustrasikan sebagai berikut (lihat gambar 3).



Gambar 3.

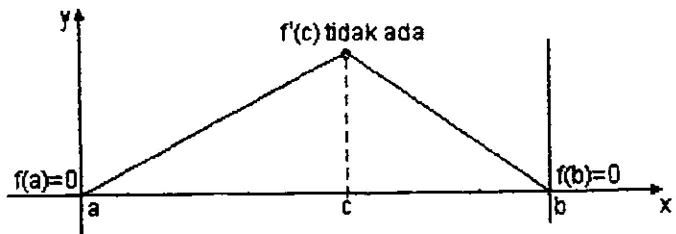
Dari gambar 3 tersebut terlihat ada $x_1 \in$ (a , b) sehingga fungsi f diskontinu di x = x_1, tetapi ada c $\in$ (a , b) sehingga f' (c) = 0.

Contoh fungsi seperti kasus ini, misalkan fungsi f : [0 , 3] $\rightarrow$ R yang didefinisikan sebagai :

$$f(x) = = \begin{cases} e^x - 1 & , \text{jika } x < 2 \\ 3 - x & , \text{jika } x \geq 2 \end{cases}$$

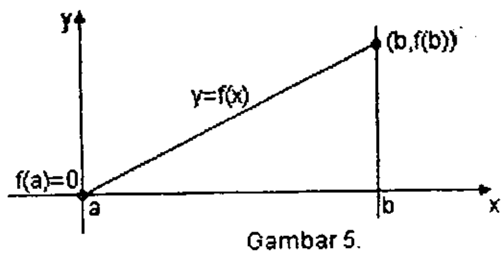
yang diskontinu di $x = 2$, dan tidak ada $c \in (0, 3)$ sehingga $f'(c) = 0$.

Kasus 2: Misalkan ada titik $c \in (a, b)$ sehingga $f'(c)$ tidak ada. Apakah kesimpulan pada teorema Rolle tersebut masih berlaku? Jawabannya tidak selalu. Sebagai contoh penyangkalnya (tidak berlaku), secara grafik dapat diilustrasikan sebagai berikut (lihat hambar 4).



Gambar 4.

Kasus 3: Misalkan pada teorema Rolle, jika $f(a) = 0$ dan $f(b) \neq 0$. Apakah kesimpulannya masih berlaku? Jawabannya juga tidak selalu. Sebagai contoh dapat diilustrasikan sebagai berikut (lihat gambang 5).



Gambar 5.

Pembaca mungkin dapat mencobanya untuk kasus-kasus y

Selanjudnya Teorema Rolle tersebut dapat diperumum se

"Jika fungsi f memenuhi syarat

(1) kontinu pada selang tutup $[a , b]$,

(2) terdiferensialkan pada selang buka (a,b)

(3) $f(a) = f(b) = k$,

maka ada $c \in (a , b)$ sehingga $f'(c) = 0$

Bukti :

Ambil $g(x) = f(x) - k$, $\quad x \in [a , b]$ sehingga fungsi g kontinu pada selang tertutup $[a , b]$ dan terdiferensialkan pada selang buka (a,b).

Untuk $x = a$, $\quad$ maka $g(a) = f(a) - k = k - k = 0$

Untuk $x = b$, $\quad$ maka $g(b) = f(b) - k = k - k = 0$

Jadi $g(a) = g(b) = 0$ dan $g'(x) = f'(x) - 0 = f'(x)$.

2. Teorema Nilai Rata-rata (TNR)

Teorema Nilai Rata-rata (TNR) merupakan perumuman dari teorema Rolle yairu dengan menghilangkan syarat yang ke tiga. Rumus ini menyatakan bahwa pada suatu fungsi yang terdiferensialkan, akan terdapat suatu titik pada grafiknya di mana garis singgungnya di titik itu sejajar dengan tali busurnya. Secara matematis, Teorema Nilai Rata-rata ini dapat dinyatakan sebagai berikut :

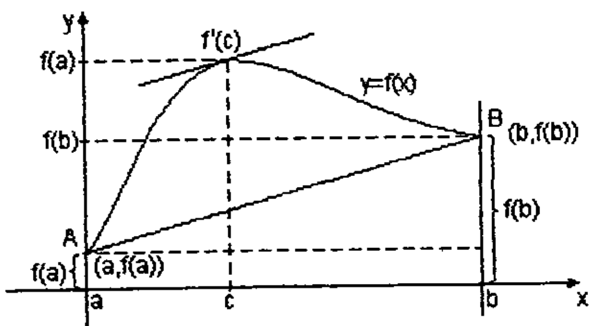
Jika fungsi f memenuhi syarat :

(1) kontinu pada selang tertutup [a , b],

(2) terdiferensialkan pada selang terbuka (a , b),

maka ada $c \in (a, b)$ sehingga $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Secara grafik, TNR ini dapat diilustrasikan sebagai berikut (lihat gambar 6).



Gambar 6.

$$\text{Gradien } AB = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Pembuktian TNR ini adalah sebagai berikut

Bukti :

Ambil $F(x) = f(x) - f(a) - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$, dengan $x \in [a, b]$,

sehingga diperoleh :

(1) F kontinu pada selang tutup [a , b],

(2) F terdiferensialkan pada selang (a , b), yaitu

$F'(x) = f'(x) - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ ada pada (a , b)

(3) $F(a) = f(a) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(a - a) = 0$, dan

$$F(b) = f(b) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(b - a) = 0$$

Dari (1), (2), dan (3) berarti fungsi f memenuhi kriteria Teorema Rolle, maka ada $c \in (a , b)$ sehingga $f'(c) = 0$

Karena $F'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$,

maka $F'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$,

Atau

$$0 = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a},$$

atau

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \quad \text{............terbukti.}$$

Kesimpulan TNR tersebut dapat juga dituliskan sebagai :

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{a-b},$$

dengan $b < c < a$.

Juga TNR tersebut dapat pula dinyatakan sebagai berikut :

"Jika fungsi f kontinu pada interval tertutup dengan titik-titik ujung a dan b dan mempunyai derivatif pada interval buka a dan b tersebut, maka ada c diantara a dan b sehingga

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a},$$

Kesimpulan Teorema Nilai Rata-rata yaitu :

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a},$$

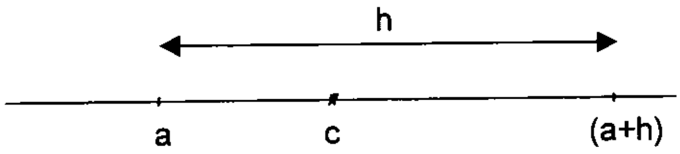
dapat ditulis dengan beberapa cara, diantaranya yaitu :

(1). $f(b) = f(a) + f'(c)(b-a)$, atau

(2). $f(a + h) = f(a) + f'(c)\,h$, dengan

$h = b - a$, atau

(3). $f(a + h) = f(a) + f'(a + \theta h)\,h$, dengan $0 < \theta \leq 1$,



Tulis :

$$c = a + (c - a)$$

$$= a + \frac{(c-a)}{h}h$$

$$= a + \theta h, \text{ dengan } 0 < \theta = \frac{(c-a)}{h} < 1$$

Perlu dicatat bahwa Teorema Nilai Rata-rata ini tidak memberikan kedudukan yang pasti mengenai satu atau lebih harga rata-rata c dimana letaknya. Teorema ini hanya bisa memberi petunjuk adanya c diantara a dan b.

Untuk beberapa fungsi tertentu kedudukan harga rata-rata tersebut dapat ditentukan dengan tepat, tetapi pada umumnya sangat sukar untuk membuat penentuan yang tepat mengenai titik-titik ini. Meskipun demikian kegunaan yang nyata dari teorema ini terletak pada kekuatannya yang dapat memberikan banyak kesimpulan yang diturunkan dari pengetahu[illegible]ng. tidak lebih mengenai adanya paling sedikit satu harga rata-[illegible]

Satu hal yang harus diperhatikan adalah bahwa Teorema Nilai Ra[illegible] rata tidak berlaku apabila ada suatu titik antara a dan b dimana turunannya tidak ada. Misalnya fungsi f didefinisikan oleh persamaan f(x) = | x | kontinu dimana-mana pada sumbu x riil dan mempunyai suatu turunan kecuali di 0. Misalkan A = (-1, f(-1)) dan B = (2, f(2)), koefisién arah tali busur AB adalah

$$\frac{f(2)-f(-1)}{2-(-1)} = \frac{2-1}{3} = \frac{1}{3}$$

Tetapi dimanapun f tak mempunyai suatu turunan sama dengan 1/3 (atau tidak ada nilai x yang memenuhi sehingga f'(x) = 1/3).

Contoh-contoh.

1). Misalkan $f(x) = x^3$. Perlihatkan bahwa syarat-syarat untuk Teorema Nilai Rata-rata dipenuhi oleh fungsi ini untuk a = -1 dan b = 2. Tentukan nilai c dalam interval buka (-1, 2) sehingga berlaku

$$f'(c) = \frac{f(2)-f(-1)}{2-(-1)}$$

Buatlah sketsa grafiknya dan gambar garis singgung di c.

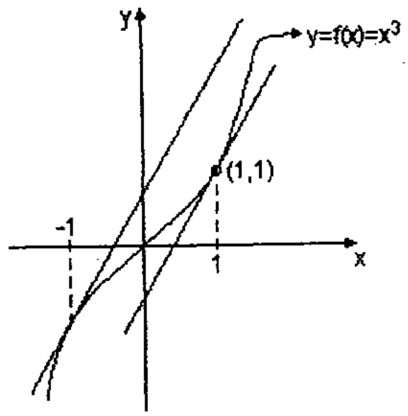
Jawab.

$f(x) = x^3$ merupakan suatu polinom, berarti dapat didiferensialkan di setiap x, kontinu di setiap x. Jadi juga pada interval tertutup [-1, 2]. Syarat (i) dan (ii) dari TNR dipenuhi oleh $f(x) = x^3$. Maka menurut TNR pasti ada c di (a,b) = (-1, 2) sehingga berlaku

$$f'(c) = \frac{f(2)-f(-1)}{2-(-1)} = \frac{2^3-(-1)^3}{2-(-1)} = 3$$

$$f'(c) = 3c^2$$

Jadi $3c^2 = 3$ atau c= 1 atau c = -1, (karena –1 diluar interval (-1, 2) maka untuk c = -1 tidak berlaku. Untuk c = 1 diperoleh f(c) = f(1) = 1, sehingga titik pada kurva $f(x) = x^3$ yang memenuhi adalah titik (1, 1). Secara grafik dari f dan garis singgungnya dapat dilihat pada grafik berikut.



2). Selidikilah apakah ada c pada interval tertutup [a, b] yang mem

kesimpulan Teorema Nilai Rata-rata jika didefinisikan fungsi $f(x) = 3(x-4)^{2/3}$

dengan a = 0 dan b = 5.

Jawab.

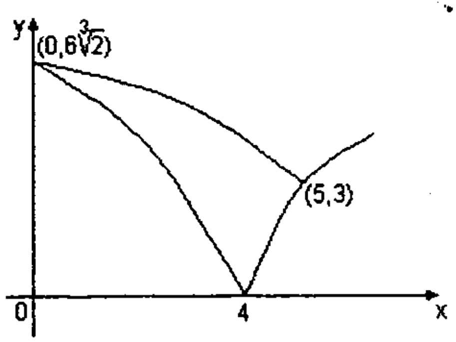
Karena f kontinu pada (0, 5) maka syarat pertama dari TNR dipenuhi:

$$f_+'(4) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(4+h) - f(4)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0^+} \frac{3.h^{3/2} - 3.0}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0^+} \frac{3}{h^{1/3}}$$

Karena $f_+'(4)$ tidak ada berarti f'(4) tidak ada. Jadi syarat kedua tidak dipenuhi , lihat gambar berikut.



$f'(x) = 3(2/3)(x\text{-}4)^{-1/3}$ dan $f'(c) = 2(c\text{-}4)^{-1/3}$

Sementara

$$\frac{f(5)-f(0)}{5-0} = \frac{3-6\sqrt[3]{2}}{5} = -0,96$$

Jadi $2(c\text{-}4)^{-1/3} = -0,96$

atau $(c\text{-}4)^{-1/3} = -0,48$

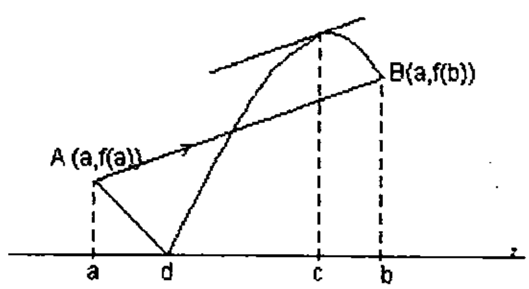
atau $c\text{-}4 = (-0,48)^{-3}$

atau $c = 4 - (-0,48)^{-3} < 0$.

Jadi c diluar interval (0, 5) sehingga tidak ada nilai c di dalam Teorema Nilai Rata-rata.

Catatan.

Jika salah satu dari kedua syarat didalam Teorema Nilai Rata-rata tidak dipenuhi, bisa terjadi didapatkannya c di (a,b) yang tersebut dalam kesimpulan Teorema Nilai Rata-rata. Perhatikan gambar berikut.



Pada gambar terlihat bahwa fungsi ini tidak memenuhi syarat kedua f'(d) tidak ada. Tetapi bisa dilihat dari gambar bahwa ada c di (a,b) sehingga garis singgung di titik (c,f(c)) sejajar dengan tali busur AB. Hal ini berarti bahwa syarat-syarat dalam Teorema Nilai Rata-rata adalah syarat cukup artinya jika syarat ini semuanya dipenuhi pasti dijamin adanya c seperti dalam kesimpulan dalam teorema tersebut. Tetapi syarat itu bukan syarat perlu artinya walaupun syarat dalam teorema tidak dipenuhi dapat terjadi ditemukannya c seperti dalam kesimpulan dalil tersebut.

Teorema Nilai Rata-rata tersebut dapat diperluas kepada dua buah fungsi yang kontinu pada suatu selang tertutup. Teorema seperti ini dikenal juga sebagai <u>Teorema Nilai Rata-rata II</u> atau <u>Teorema Nilai Rata-rata Cauchy</u>. Secara lengkap Teorema Nilai Rata-rata Cuachy ini adalah seperti berikut:

"Jika fungsi-fungsi f dan g kontinu pada suatu interval tertutup [a , b], mempunyai derivatif pada interval buka (a,b), $g(a) \neq g(b)$, $f'(x_0)$ dan $g'(x_0)$ tidak bersama-sama nol, maka ada $c \in (a , b)$ sehingga :

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

Teorema ini dapat diperumum menjadi :

"Jika fungsi-fungsi f dan g kontinu pada suatu interval tertutup dengan titik-titik ujung a dan b, mempunyai deviratif pada interval buka dengan titik-titik ujung a dan b, serta $g(a) \neq g(b)$, $f'(x_0)$ dan $g'(x_0)$ tidak bersama-sama nol, maka ada titik c di antara a dan b sehingga

Kesimpulan Teorema Nilai Rata-rata II, dapat juga dinyatakan bentuk determinan, yaitu :

$$\frac{f'(c)}{g'(c)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} f(a) & g(a) & 1 \\ f(b) & g(b) & 1 \\ f'(c) & g'(c) & 0 \end{vmatrix}=0$$

Dalam penulisan bentuk determinan ini, Teorema Nilai Rata-rata II ini dapat diperluas untuk tiga buah fungsi yaitu :

"Jika fungsi-fungsi f,g dan h kontinu pada interval tertutup [a, b] dan diferensiabel pada selang terbuka (a, b), maka ada c $\in$ (a , b) sehingga

$$\begin{vmatrix} f(a) & g(a) & h(a) \\ f(b) & g(b) & h(b) \\ f^1(c) & g^1(c) & h^1(c) \end{vmatrix}=0$$

3. <u>Aplikasi Teorema Nilai Rata-rata</u>.

   a) <u>Aturan L'Hospital's : untuk Bentuk</u> $\frac{0}{0}$

   "Jika fungsi-fungsi f dan g memenuhi ketentuan pada Teorema Nilai Rata-rata II dan $\lim\limits_{x \to a} f(x)=\lim\limits_{x \to a} g(x)=0$,

   maka :

   $$\lim_{x \to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x \to a}\frac{f'(x)}{g^1(x)}$$

   jika nilai limit ruas kanan ada.

Bukti :

Menurut Teorema Nilai Rata-rata II

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

ganti b = x, sehingga diperoleh :

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}, \text{ dengan } a < c < x$$

Ambil f(a) = g(b) = 0, sehingga

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \lim_{c \to a} \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)-0}{g(x)-0} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

atau,

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \text{ ...... (terbukti)}$$

b) Aturan L'Hospital untuk Bentuk $\frac{\infty}{\infty}$

"Jika fungsi-fungsi f dan g memenuhi ketentuan pada Teorema Nilai Rata-rata II dan $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = \infty$, maka

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

jika nilai limit ruas kanan ada.

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

Bukti :

Digunakan Teorema Rolle dengan mengambil :

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\left(g(x)-g(a)\right)$$

jelas bahwa :

(1) F kontinu pada selang tutup [a, b]

(2) F mempunyai deviratif pada selang buka (a, b), dengan

$$F'(x) = f'(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g'(x)$$

(3) $F(a) = f(a) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\left(g(a)-g(a)\right) = 0$, dan

$$F(b) = f(b) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\left(g(b)-g(a)\right) = 0$$

Jadi fungsi F memenuhi ketentuan Teorema Rolle, berarti : ada $c \in (a\ ,\ b)$ sehingga F' (c) = 0.

Karena $F'(x) = f'(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g'(x)$, maka

$$F'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g'(c)$$

$$0 = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g'(c)$$

atau

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(c)} \text{ .... terbukti}$$

c) <u>Uji Turunan Pertama Untuk Kemonotonan</u>

Melalui Teorema Nilai Rata-rata, dapat dikaitkan dengan ko[illegible] kemonotonan suatu fungsi dengan tanda turunan pertamanya pada suatu selang. Masalah ini dikemukakan dalam bentuk teorema berikut:

<u>Teorema</u> :

Misalkan fungsi f kontinu pada selang tertutup [a, b] dan terdiferensialkan pada selang terbuka (a, b).

1). Jika $f'(x) > 0$ pada selang terbuka (a, b), maka fungsi f monoton naik pada selang tertutup [a, b].

2). Jika $f'(x) < 0$ pada selang terbuka (a, b), maka fungsi f monoton turun pada selang tertutup [a, b].

<u>Catatan</u> : Perlu di ingat bahwa kebalikan teorema ini tidak benar lagi, misalnya ambillah fungsi

$$f(x) = x^3, x \in R$$

Yang monoton naik pada R, tetapi $f'(0) = 0$

<u>Bukti</u> :

Untuk membuktikan fungsi f monoton naik pada selang tertutup [a, b], misalkan s dan sebarang titik pada selang tertutup [a, b] dan tunjukkan bahwa :

$$s < t \Rightarrow f(s) < f(t), \forall s, t \in [a, b]$$

Untuk menunjukkan ini, bentuklah selang $[s, t] \subseteq [a, b]$. Karena fungsi f kontinu pada selang tertutup [a, b] dan terdiferensialkan pada selang terbuka (a, b), maka fungsi f kontinu pada se[illegible]

tertutup [s, t] dan terdiferensialkan pada selang terbuka (s[illegible]

Dengan menggunakan Teorema Nilai Rata - rata pada $[s, t] \subseteq [a, b]$ diperoleh

$$\exists c \in (s, t) \text{ sehingga } f^{1}(c) = \frac{f(t) - f(s)}{t - s},$$

dengan $f'(c) > 0$ dan $t - s > 0$. Akibatnya $f(t) - f(s) > 0$ atau $f(s) < f(t)$, sehingga terbukti teorema yang pertama. Pembuktian teorema yang kedua, dapat dilakukan secara sama (untuk pembaca !).

d). Dengan Teorema Nilai Rata-rata buktikan bahwa :

i) jika $0 < a < b$, maka $\dfrac{b-a}{b} \langle \ \ln\dfrac{b}{a} \ \langle \ \dfrac{b-a}{a}$.

ii) $\dfrac{1}{3} \ \langle \ \ln 1{,}5 \ \langle \ \dfrac{1}{2}$

Bukti :

i) Pandang f(x) = ln x, dengan $x \in [a,b]$, $a \rangle 0$. $f'(x) = \dfrac{1}{x}$,(ada) dan $f'(c) = \dfrac{1}{c}$ untuk a < c < b. f kontinu pada selang tertutup [a,b] dan mempunyai turunan pada selang terbuka [a,b].

$$\ln\tfrac{b}{a} = \ln b - \ln a$$

$$= f(b) - f(a)$$

Dengan Teorema Nilai Rata-rata, maka ada $c \in (a,b)$, sehinga

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

atau

$$f(b) - f(a) = (b - a)\, f'(c)$$

$$\ln b - \ln a = (b - a).\frac{1}{c} \quad ; a < c < b;$$

$$= \frac{b - a}{c}$$

Karena $a < c < b$, maka jelas bahwa

$$\frac{1}{b} < \frac{1}{c} < \frac{1}{a} \text{ atau } \frac{b-a}{b} < \frac{b-a}{c} < \frac{b-a}{a} \text{ atau } \frac{b-a}{b} < \ln b - \ln a < \frac{b-a}{a}$$

atau $\frac{b-a}{b} < \ln\frac{b}{a} < \frac{b-a}{a}$ ....(*Terbukti*)

ii) Ambil f(x) = ln x, sehingga $f(x) = \frac{1}{x}$ dan $f'(c) = \frac{1}{c}$.

Menurut Teorema Nilai Rata-rata :

$$f(b) - f(a) = (b - a)\, f'(c)$$

$$\ln b - \ln a = (b - a).\frac{1}{c} \quad ; a < c < b;$$

$$\ln\frac{b}{a} = \frac{b-a}{c}$$

Ambil $\frac{a}{b} = \frac{3}{2} = 1{,}5$ atau $b = \frac{3}{2}$ a = 1,5 a.

Jadi $\ln 1{,}5 = \frac{1}{c}(1{,}5a - a)$

Atau $c = \frac{0{,}5a}{\ln 1{,}5}$, dengan a < c < b

Berarti $a < \frac{0,5a}{\ln 1,5} < b = 1,5a$

atau $a < \frac{0,5a}{\ln 1,5} < 1,5a$

atau $1 < \frac{0,5}{\ln 1,5} < 1,5$

atau $1 > \frac{\ln 1,5}{0,5} > \frac{1}{1,5}$

atau $\frac{1}{1,5} < \frac{\ln 1,5}{0,5} < 1$

atau $\frac{0,5}{1,5} < \ln 1,5 < 0,5$

atau $\frac{1}{3} < \ln 1,5 < \frac{1}{2}$ ....(terbukti).

C. Kesimpulan

Kesimpulan yang dapat diambil dari bahasan sebelum ini adalah :

1. Teorema Nilai Rata-rata secara umum dapat dinyatakan sebagai berikut "jika fungsi f kontinu pada interval tertutup dengan titik-titik ujung a dan b dan mempunyai derivatif interval buka dengan titik-titik ujung a dan b tersebut, maka ada c diantara a dan b sehingga :

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{(b - a)}$$

2. Teorema Nilai Rata-rata tersebut tidak memberikan kedudukan yang pasti mengenai satu atau lebih harga rata-rata c dimana letaknya. Teorema ini hanya bisa memberi petunjuk adanya c di antara a dan b.

3. Teorema Nilai Rata-rata ini tidak berlaku apabila ada suatu titik [illegible] antara a dan b dimana f'(c) tidak ada.

4. Teorema Nilai Rata-rata dapat dipakai pada a). aturan L'Hospital untuk bentuk $\frac{0}{0}$ dan $\frac{\infty}{\infty}$; b). uji turunan [illegible]tuk kemonotonan, c). pada bentuk aljabar lainnya.

DAFTAR KEPUSTAKAAN

Besari, Ismail. 1984. *Matematika Universitas, Jilid 1*. Amrico, Bandung.

Purcell, E.J. & Varberg, D. 1984. *Kalkulus dan Geometri Analitis, Jilid 1*. (Terjemahan I. Nyoman Susila, Bana Kartasasmita dan Rawuh), Edisi ke-4. Erlangga, Jakarta.

Salas, S. L. & Hille Einar. 1982. *Calculus one variables with Analytic Geometry*. Fourth Edition. John Willey and Sons, New York.

Taylor, A. E. & Manu, W. R. 1983. *Advanced Calculus*. Thirth. John Willey and Sons, New York.