LAPORAN PENELITIAN

KRITERIA FUNGSI DISTRIBUSI YANG TERMUAT DALAM DAERAH ATRAKSI DARI FUNGSI DISTRIBUSI NORMAL

Oleh

Dra. Helma, M.Si
(Ketua Tim Peneliti)

Penelitian ini dibiayai oleh :
Dana Rutin Universitas Negeri Padang
Tahun Anggaran 1999/2000
Surat perjanjian kerja Nomor : 2751/K12/KU/Rutin/1999
Tanggal 9 Agustus 1999

UNIVERSITAS NEGERI PADANG
2000

KRITERIA FUNGSI DISTRIBUSI YANG TERMUAT DALAM DAERAH ATRAKSI DARI FUNGSI DISTRIBUSI NORMAL

H e l m a, Dewi Murni, I r w a n

Abstrak

Penelitian ini bertujuan untuk mencari kriteria yang harus dipenuhi oleh suatu fungsi distribusi agar termuat ke dalam daerah atraksi dari fungsi distribusi normal. Sehingga jika kita mempunyai suatu fungsi distribusi yang dimodelkan, maka kita akan dapat menentukan apakah dia termuat ke dalam daerah atraksi dari fungsi distribusi normal. Dengan mengkaji terhadap teori-teori yang ada, menganalisis teori-teori tersebut dan kemudian dilakukan pilihan terhadap salah satu teori-teori tersebut, maka didapatkan hasil yang dapat dijadikan suatu teorema, yaitu

Fungsi distribusi F(x) termuat ke dalam domain atraksi dari fungsi distribusi normal jika dan hanya jika $\lim_{X \to \infty} \dfrac{X^2 \int_{|x| \geq X} dF(x)}{\int_{|x| < X} x^2 \, dF(x)} = 0$.

PENGANTAR

Kegiatan penelitian merupakan bagian dari darma perguruan tinggi, di samping pendidikan dan pengabdian kepada masyarakat. Kegiatan penelitian ini harus dilaksanakan oleh Universitas Negeri Padang yang dikerjakan oleh staf akademikanya ataupun tenaga fungsional lainnya dalam rangka meningkatkan mutu pendidikan, melalui peningkatan mutu staf akademik, baik sebagai dosen maupun peneliti.

Kegiatan penelitian mendukung pengembangan ilmu serta terapannya. Dalam hal ini, Lembaga Penelitian Universitas Negeri Padang berusaha mendorong dosen untuk melakukan penelitian sebagai bagian yang tidak terpisahkan dari kegiatan mengajarnya, baik yang secara langsung dibiayai oleh dana Universitas Negeri Padang maupun dana dari sumber lain yang relevan atau bekerja sama dengan instansi terkait. Oleh karena itu, peningkatan mutu tenaga akademik peneliti dan hasil penelitiannya dilakukan sesuai dengan tingkatan serta kewenangan akademik peneliti.

Kami menyambut gembira usaha yang dilakukan peneliti untuk menjawab berbagai permasalahan pendidikan, baik yang bersifat interaksi berbagai faktor yang mempengaruhi praktek kependidikan, penguasaan materi bidang studi, ataupun proses pengajaran dalam kelas yang salah satunya muncul dalam kajian ini. Hasil penelitian seperti ini jelas menambah wawasan dan pemahaman kita tentang proses pendidikan. Walaupun hasil penelitian ini mungkin masih menunjukkan beberapa kelemahan, namun kami yakin hasilnya dapat dipakai sebagai bagian dari upaya peningkatan mutu pendidikan pada umumnya. Kami mengharapkan di masa yang akan datang semakin banyak penelitian yang hasilnya dapat langsung diterapkan dalam peningkatan dan pengembangan teori dan praktek kependidikan.

Hasil penelitian ini telah ditelaah oleh tim pereviu usul dan laporan penelitian Lembaga Penelitian Universitas Negeri Padang, yang dilakukan secara "blind reviewing'. Kemudian untuk tujuan diseminasi, hasil penelitian ini telah diseminarkan yang melibatkan dosen/tenaga peneliti Universitas Negeri Padang sesuai dengan fakultas peneliti. Mudah-mudahan penelitian ini bermanfaat bagi pengembangan ilmu pada umumnya, dan peningkatan mutu staf akademik Universitas Negeri Padang.

Pada kesempatan ini kami ingin mengucapkan terima kasih kepada berbagai pihak yang membantu terlaksananya penelitian ini, terutama kepada pimpinan lembaga terkait yang menjadi objek penelitian, responden yang menjadi sampel penelitian, tim pereviu Lembaga Penelitian dan dosen senior pada setiap fakultas di lingkungan Universitas Negeri Padang yang menjadi pembahas utama dalam seminar penelitian. Secara khusus kami menyampaikan terima kasih kepada Rektor Universitas Negeri Padang yang telah berkenan memberi bantuan pendanaan begi penelitian ini. Kami yakin tanpa dedikasi dan kerjasama yang terjalin selama ini, penelitian ini tidak akan dapat diselesaikan sebagaimana yang diharapkan dan semoga kerjasama yang baik ini akan menjadi lebih baik lagi di masa yang akan datang.

Terima kasih.

Padang, Maret 2000
Ketua Lembaga Penelitian
Universitas Negeri Padang,

Prof. Drs. Kumaidi, MA., Ph.D.
NIP 130605231

PENGANTAR

Kegiatan penelitian merupakan bagian dari darma perguruan tinggi, di samping pendidikan dan pengabdian kepada masyarakat. Kegiatan penelitian ini harus dilaksanakan oleh Universitas Negeri Padang yang dikerjakan oleh staf akademikanya ataupun tenaga fungsional lainnya dalam rangka meningkatkan mutu pendidikan, melalui peningkatan mutu staf akademik, baik sebagai dosen maupun peneliti.

Kegiatan penelitian mendukung pengembangan ilmu serta terapannya. Dalam hal ini, Lembaga Penelitian Universitas Negeri Padang berusaha mendorong dosen untuk melakukan penelitian sebagai bagian yang tidak terpisahkan dari kegiatan mengajarnya, baik yang secara langsung dibiayai oleh dana Universitas Negeri Padang maupun dana dari sumber lain yang relevan atau bekerja sama dengan instansi terkait. Oleh karena itu, peningkatan mutu tenaga akademik peneliti dan hasil penelitiannya dilakukan sesuai dengan tingkatan serta kewenangan akademik peneliti.

Kami menyambut gembira usaha yang dilakukan peneliti untuk menjawab berbagai permasalahan pendidikan, baik yang bersifat interaksi berbagai faktor yang mempengaruhi praktek kependidikan, penguasaan materi bidang studi, ataupun proses pengajaran dalam kelas yang salah satunya muncul dalam kajian ini. Hasil penelitian seperti ini jelas menambah wawasan dan pemahaman kita tentang proses pendidikan. Walaupun hasil penelitian ini mungkin masih menunjukkan beberapa kelemahan, namun kami yakin hasilnya dapat dipakai sebagai bagian dari upaya peningkatan mutu pendidikan pada umumnya. Kami mengharapkan di masa yang akan datang semakin banyak penelitian yang hasilnya dapat langsung diterapkan dalam peningkatan dan pengembangan teori dan praktek kependidikan.

Hasil penelitian ini telah ditelaah oleh tim pereviu usul dan laporan penelitian Lembaga Penelitian Universitas Negeri Padang, yang dilakukan secara "blind reviewing'. Kemudian untuk tujuan diseminasi, hasil penelitian ini telah diseminarkan yang melibatkan dosen/tenaga peneliti Universitas Negeri Padang sesuai dengan fakultas peneliti. Mudah-mudahan penelitian ini bermanfaat bagi pengembangan ilmu pada umumnya, dan peningkatan mutu staf akademik Universitas Negeri Padang.

Pada kesempatan ini kami ingin mengucapkan terima kasih kepada berbagai pihak yang membantu terlaksananya penelitian ini, terutama kepada pimpinan lembaga terkait yang menjadi objek penelitian, responden yang menjadi sampel penelitian, tim pereviu Lembaga Penelitian dan dosen senior pada setiap fakultas di lingkungan Universitas Negeri Padang yang menjadi pembahas utama dalam seminar penelitian. Secara khusus kami menyampaikan terima kasih kepada Rektor Universitas Negeri Padang yang telah berkenan memberi bantuan pendanaan begi penelitian ini. Kami yakin tanpa dedikasi dan kerjasama yang terjalin selama ini, penelitian ini tidak akan dapat diselesaikan sebagaimana yang diharapkan dan semoga kerjasama yang baik ini akan menjadi lebih baik lagi di masa yang akan datang.

Terima kasih.

Padang, Maret 2000
Ketua Lembaga Penelitian
Universitas Negeri Padang,

Prof. Drs. Kumaidi, MA., Ph.D.
NIP 130605231

DAFTAR ISI

BAB I. PENDAHULUAN

A. Latar Belakang Masalah

Fungsi distribusi mempunyai peranan penting dalam Teori Peluang. Dan tidak dapat pula disangkal banyak penerapannya dalam Statistika Matematika. Salah satu diantaranya adalah fungsi distribusi normal, karena pada pengolahan data ada beberapa statistik yang mensyaratkan bahwa data berasal dari sampel yang berdistribusi normal, seperti uji-t, uji-χ^2, uji-F, dan analisis regresi.

Kita mendefinisikan fungsi distribusi F dikatakan stabil sebagai berikut.

Definisi : (Rohatgi, 1976 : 280)

Variabel acak X dikatakan stabil jika terdapat variabel acak X_1 , X_2 , ... , X_n saling bebas dan berdistribusi identik yang sama dengan fungsi distribusi dari X, $a_n > 0$, $b_n \in R$ sehingga $\frac{1}{a_n}\left(\sum_{k=1}^{n} X_k - b_n\right)$ mempunyai distribusi yang sama dengan X. Dan fungsi distribusi dari variabel acak stabil disebut fungsi distribusi stabil.

Adapun bentuk kanonik fungsi karakteristik dari fungsi distribusi stabil dapat kita lihat pada teorema berikut ini.

Teorema : (Helma, 1995 : 38)

Fungsi distribusi F stabil jika dan hanya jika fungsi karakteristiknya φ dapat dinyatakan sebagai :

$$\ln \varphi(t) = it\alpha - \frac{t^2\sigma^2}{2} + \int_{-\infty}^{-0} \left(e^{izt} - 1 - \frac{izt}{1+z^2} \right) dM(z) +$$

$$\int_{+0}^{\infty} n\left(e^{izt} - 1 - \frac{izt}{1+z^2} \right) dN(z)$$

dengan $\sigma^2 \neq 0$, $M(z) = 0$, $N(z) = 0$, atau

$\sigma^2 = 0$, $M(z) = c_1 \mid z \mid^{-\beta}$ $(z < 0)$, $N(z) = -c_2\, z^{-\beta}$ $(z > 0)$, $0 < \beta < 2$,

c_1 , $c_2 \geq 0$, $c_1 + c_2 > 0$

Dalam hal ini, β disebut eksponen karakteristik atau indeks dari F.

Bukti : lihat lampiran I

Jika kita perhatikan bentuk fungsi karakteristik dari fungsi distribusi normal, maka fungsi distribusi normal termasuk ke dalam fungsi distribusi stabil, yaitu

$$\ln \varphi(t) = it\mu - \frac{t^2\sigma^2}{2}$$

Kita mendefinisikan fungsi distribusi F diatraksi ke fungsi distribusi G sebagai berikut.

Definisi : (Rohatgi, 1976 : 280)

Misalkan $\{ X_n \}$ barisan variabel acak yang saling bebas dan mempunyai distribusi identik dengan fungsi distribusinya F. Misalkan terdapat barisan $\{a_n\}$ dan $\{ b_n \}$ dengan $a_n > 0$, $b_n \in R$ untuk setiap $n \in N$, sehingga barisan $\left\{ \frac{1}{a_n}\left(\sum_{k=1}^{n} X_k - b_n \right) \right\}$ konvergen dalam distribusi ke suatu variabel acak dengan fungsi distribusinya G. Maka F dikatakan diatraksi ke G.

Himpunan semua fungsi distribusi yang diatraksi ke G dinamakan daerah (domain) atraksi dari distribusi G.

Berdasarkan definisi fungsi distribusi stabil dan definisi daerah atraksi, maka fungsi distribusi stabil mempunyai daerah atraksi yang tidak kosong.

Berdasarkan hal diatas, maka fungsi distribusi normal mempunyai daerah atraksi yang tidak kosong, yaitu sekurang-kurangnya fungsi distribusi normal itu sendiri. Kriteria apakah yang harus dipenuhi oleh suatu fungsi distribusi agar termuat ke dalam daerah atraksi dari fungsi distribusi normal tersebut ?

B. Perumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang masalah kita dapat merumuskan masalah sebagai berikut : kriteria apakah yang harus dipenuhi oleh suatu fungsi distribusi agar termuat ke dalam daerah atraksi dari fungsi distribusi normal ?

C. Tujuan Penelitian

Tujuan penelitian ini adalah untuk mencari kriteria yang harus dipenuhi oleh suatu fungsi distribusi agar termuat ke dalam daerah atraksi dari fungsi distribusi normal.

D. Manfaat Penelitian

Manfaat penelitian ini adalah :

1. Untuk menambah wawasan tentang fungsi distribusi normal.
2. Memberi masukan terhadap peneliti-peneliti lain yang dalam mengolah datanya menggunakan statistik yang mensyaratkan sampel berdistribusi normal.

3. Jika dalam penelitian peneliti mempunyai suatu fungsi distribusi yang dimodelkan, maka akan dapat menentukan apakah dia termuat ke dalam daerah atraksi dari fungsi distribusi normal.

BAB II. TEORI PENDUKUNG

Misalkan $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ruang peluang

A. Fungsi Distribusi

Definisi 1 : (Hogg, 1978 : 31)

F disebut fungsi distribusi dari variabel acak X jika untuk setiap $x \in R$,

$F(x) = P\{\omega \in \Omega, X(\omega) \leq x\}$.

Untuk seterusnya, $\{\omega \in \Omega, X(\omega) \leq x\}$ kita tulis dengan $\{X \leq x\}$.

Definisi 2 : (Hogg, 1978 : 31)

Fungsi distribusi dapat dibedakan menjadi dua, yaitu :

(i). Tipe diskrit , $F(x) = \sum_{z \leq x} f(z)$

(ii). Tipe kontinu , $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(z)\, dz$

dengan f(z) merupakan fungsi padat peluang .

Definisi 3 : (Hogg, 1978 : 111)

Variabel acak X dikatakan mempunyai distribusi normal standar jika fungsi padat

peluangnya $f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(z^2/2)}$, $-\infty < z < \infty$

Definisi 4 : (Rohatgi, 1976 : 220)

Variabel acak X dikatakan mempunyai distribusi dengan parameter

μ ($-\infty < \mu < \infty$) dan σ (> 0) jika fungsi padat peluangnya

$$f(z) = \frac{1}{\sigma} f\left(\frac{z-\mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-[(z-\mu)^2/(2\sigma^2)]}$$

$$-\infty < z < \infty \ ; \ \sigma > 0 \ ; \ -\infty < \mu < \infty$$

Jika X merupakan variabel acak berdistribusi normal dengan parameter μ dan σ , kita tulis $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Dengan demikian, variabel acak X pada definisi 3 , $X \sim N(0, 1)$. Dan X dinamakan variabel acak dari distribusi normal standar.

Definisi 5 : (Chow, 1988 : 55)

Variabel acak $X_1, X_2, \ldots, X_n$, dikatakan saling bebas jika

$$P\{X_1 \le x_1, X_2 \le x_2, \ldots, X_n \le x_n\} = \prod_{i=1}^{n} P\{X_i \le x_i\}$$

Definisi 6 : (Rohatgi, 1976 : 123)

Variabel acak X_n , $n \in N$ dikatakan mempunyai distribusi identik jika untuk setiap $n \in N$, X_n mempunyai distribusi yang sama, yaitu

$$P\{X_1 \le x\} = P\{X_2 \le x\} = \ldots = F(x) \ , \ x \in R$$

Teorema 1 : (Rohatgi, 1976 : 222)

Misalkan $X_1, X_2, \ldots, X_n$ variabel acak saling bebas dengan $X_k \sim N(\mu_k, \sigma_k^2)$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Maka $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k \sim N\left(\sum_{k=1}^{n} \mu_k , \sum_{k=1}^{n} \sigma_k^2\right)$

Akibat 1 : (Rohatgi, 1976 : 222)

Jika $X_1, X_2, \dots, X_n$ variabel acak saling bebas dan berdistribusi identik

$N(\mu, \sigma^2)$, maka $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k \sim N(n\mu, n\sigma^2)$, dan $S_n / n \sim N(\mu, \sigma^2 / n)$.

B. Ekspektasi

Definisi 7 : (Breiman, 1993 : 31)

Misalkan X terintegralkan atas Ω terhadap P. Maka $E[X] = \int_\Omega X\,dP$ disebut ekspektasi dari variabel acak X.

Definisi 8 : (Hogg, 1978 : 49)

Jika $E[X^2]$ ada, maka $\sigma^2 = \text{var}(X) = E[(X - \mu)^2]$ disebut variansi dari X. Dan akar kuadrat positif dari var (X) disebut standar deviasi (SD) dari X.

Definisi 9 : (Rohatgi, 1976 : 157)

Misalkan $X_1, X_2, \dots, X_n$ variabel acak bernilai kompleks saling bebas dan $E[X_i]$ ada, untuk setiap $i = 1, 2, \dots, n$, maka $E[X_1 X_2 \dots X_n]$ ada dan

$E[X_1 X_2 \dots X_n] = E[X_1]\,E[X_2] \dots E[X_n]$.

C. Fungsi Karakteristik

Definisi 10 : (Chow, 1988 : 268)

Fungsi karakteristik φ dari variabel acak X didefinisikan sebagai :

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\,dF_X(x) = E[e^{itX}]$$

Teorema 2 : (Ash, 1972 : 332)

Misalkan X variabel acak dengan fungsi karakteristik φ , maka ada α konstan ,

$0 < \alpha < \infty$, sehingga untuk setiap $u > 0$,

$$P\left\{ |X| \geq \frac{1}{u} \right\} = \frac{\alpha}{u} \int_0^u \left(1 - \mathrm{Re}\{\varphi(t)\} \right) dt$$

Teorema 3 : (Chow, 1988 : 269)

Misalkan X dan Y variabel acak, a, b $\in$ R. Jika $Y = aX + b$ maka fungsi karakteristik dari Y adalah $\varphi_Y(t) = \varphi_X(at)\, e^{ibt}$.

Dan jika $a > 0$, maka $F_Y(x) = F_X\left(\frac{x-b}{a}\right)$

Teorema 4 : (Chow, 1988 : 271)

Misalkan X dan Y variabel acak yang saling bebas. Maka

$\varphi_{X+Y}(t) = \varphi_X(t) \,.\, \varphi_Y(t)$.

Teorema (Teorema Ketunggalan) 5 : (Chow, 1988 : 270)

Fungsi distribusi F_1 dan F_2 identik jika dan hanya jika φ_1 dan φ_2 identik.

D. Beberapa Teorema Kekonvergenan

Definisi 11 : (Laha, 1979 : 131)

Misalkan $\{ F_n \}$ barisan fungsi yang terbatas seragam, tak turun dan kontinu kanan di R. F_n dikatakan konvergen secara lemah ke fungsi F yang terbatas, tak turun dan kontinu kanan di R jika $F_n(x) \to F(x)$ untuk $n \to \infty$ pada setiap x titik kontinu dari F. Notasi : $F_n \xrightarrow{w} F$.

Definisi 12 : (Laha, 1979 : 131)

Misalkan $\{ F_n \}$ seperti definisi 11. F_n dikatakan konvergen secara lengkap ke F jika :

(i). $F_n \xrightarrow{w} F$.

(ii). $F_n(\pm \infty) \to F(\pm \infty)$, untuk $n \to \infty$.

Notasi : $F_n \xrightarrow{c} F$

Definisi 13 : (Laha, 1979 : 132)

Misalkan F_n dan F masing-masing merupakan fungsi distribusi dari variabel acak X_n dan X. X_n dikatakan konvergen dalam distribusi ke X jika $F_n \xrightarrow{c} F$.

Notasi : $X_n \xrightarrow{d} X$

Teorema (Teorema Helly - Bray) 6 : (Laha, 1979 : 135)

Misalkan g fungsi bernilai real dan kontinu pada [a, b] ; $\{ F_n \}$ barisan fungsi terbatas seragam, tidak turun dan kontinu kanan yang konvergen secara lemah ke fungsi F pada [a,b], dengan a, b titik-titik kontinu dari F . Maka

$$\lim_{n \to \infty} \int_a^b g \, dF_n = \int_a^b g \, dF$$

Teorema (Teorema Perluasan Helly - Bray) 7 : (Laha, 1979 : 137)

Misalkan g fungsi bernilai real, terbatas dan kontinu di R ; $\{ F_n \}$ barisan fungsi terbatas seragam, tidak turun dan kontinu kanan yang konvergen secara lengkap ke fungsi F di R . Maka $\lim_{n \to \infty} \int_{-\infty}^{\infty} g \, dF_n = \int_{-\infty}^{\infty} g \, dF$.

E. Beberapa Teorema Lain Yang Penting

Teorema (Teorema Type Konvergensi) 8 : (Ash, 1972 : 342)

a. Misalkan $X_n \xrightarrow{d} X$, $Y_n \xrightarrow{d} Y$, dimana untuk setiap $n \in N$,

$F_{X_n}(x) = F_{\frac{1}{a_n}(Y_n - b_n)}(x)$, $a_n > 0$. Asumsikan X dan Y non degenerate, yaitu

tidak konstan hampir dimana-mana. Maka ada $a, b \in R$, $a > 0$ sehingga $a_n \to a$, $b_n \to b$ dan $F_X(x) = F_{\frac{1}{a}(Y-b)}(x)$.

Teorema (Limit Pusat Lindenberg - Feller) 9 : (Laha, 1979 : 282)

Misalkan $\{ X_n \}$ merupakan barisan variabel acak yang saling bebas dengan

$\text{var}(X_n) = \sigma_n^2 < \infty$, $n = 1, 2, \ldots$, $E[X_n] = \alpha_n$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ dengan

$\text{var}(S_n) = B_n^2$, dan F_n fungsi distribusi dari X_n . Maka

(i). $\lim_{n \to \infty} \max_{1 \le k \le n} \left(\frac{\sigma_k^2}{B_n^2} \right) = 0$

(ii). $\lim_{n \to \infty} P\left\{ \frac{(S_n - E[S_n])}{B_n} \le x \right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2} \, du$, untuk setiap $x \in R$

jika dan hanya jika untuk setiap $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{B_n^2} \sum_{k=1}^{n} \int_{|x-\alpha_k| \geq \varepsilon B_n} (x-\alpha_k)^2 \, dF_k(x)$$

Akibat (Teorema Limit Pusat Levy) 2 : (Laha, 1979 : 287)

Misalkan $\{ X_n \}$ merupakan barisan variabel acak yang saling bebas dan berdistribusi identik dengan $0 < \text{var}(X_n) = \sigma^2 < \infty$, $n = 1, 2, \ldots$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$.

Maka untuk setiap $x \in R$, $\lim_{n\to\infty} P\left\{ \frac{S_n - E[S_n]}{\sigma\sqrt{n}} \leq x \right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2} \, du$.

Ketaksamaan Cauchy 10 : (Ash, 1972 : 82)

Jika f dan $g \in L^2$, maka $fg \in L^1$ dan $\left| \int_\Omega f\bar{g} \, d\mu \right| \leq \left(\int_\Omega |f|^2 \, d\mu \int_\Omega |g|^2 \, d\mu \right)^{1/2}$

dengan $\bar{g}$ merupakan kompleks konyugat dari g.

Teorema (Bernstein & Feller) 11 : (Gnedenko, 1968 : 130)

Misalkan $\{ X_n \}$ merupakan barisan variabel acak saling bebas. Maka terdapat barisan bilangan real $\{ a_n \}$ dan $\{ b_n \}$ dengan $b_n > 0$ untuk setiap $n \in N$ yang mempunyai sifat bahwa barisan $\left\{ \frac{1}{b_n} \sum_{k=1}^{n} X_k - a_n \right\}$ konvergen dalam distribusi ke variabel acak yang berdistribusi normal standar dan $\left\{ \frac{X_k}{b_n} \right\}$, $1 \leq k \leq k_n$ merupakan infinitesimal, jika dan hanya jika terdapat barisan konstanta C_n ($C_n \to \infty$) sehingga untuk $n \to \infty$

$$\sum_{k=1}^{n} \int_{|x|>C_n} d\,F_k(x) \;\to\; 0$$

$$\frac{1}{C_n} \sum_{k=1}^{n} \left\{ \int_{|x|<C_n} x^2 \, d\,F_k(x) - \left(\int_{|x|<C_n} x \, d\,F_k(x) \right)^2 \right\} \;\to\; \infty$$

F. Barisan Infinitesimal

Definisi 14 : (Ash, 1972 : 350)

Barisan variabel acak $X_{11}\ ,\ X_{12}\ ,\ \ldots\ ,\ X_{1k1}\ ,$

$X_{21}\ ,\ X_{22}\ ,\ \ldots\ ,\ X_{2k2}\ ,$

$\ldots$

$X_{n1}\ ,\ X_{n2}\ ,\ \ldots\ ,\ X_{nkn}$

dikatakan barisan infinitesimal jika $\lim\limits_{n\to\infty} \max\limits_{1\le k\le k_n} P\left\{ \left| X_{nk} \right| \ge \varepsilon \right\} = 0$, untuk setiap

$\varepsilon > 0$.

Teorema 12 : (Gnedenko, 1968 : 96)

Kondisi infinitesimal .... ekuivalen dengan

(i). $\lim\limits_{n\to\infty} \max\limits_{1\le k\le k_n} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^2} \, d\,F_{nk}(x) = 0$ atau,

(ii). $\lim\limits_{n\to\infty} \max\limits_{1\le k\le k_n} \left| \varphi_{nk}(t) - 1 \right| = 0$ secara seragam pada interval hingga $|\,t\,| \le T$,

untuk setiap $T > 0$, dimana φ_{nk} fungsi karakteristik dari X_{nk}.

Teorema 13 : (Laha, 1979 : 295)

Misalkan $X_1, X_2, \ldots, X_n$ variabel acak saling bebas dan berdistribusi identik. Jika

$$\sum_{k=1}^{n} X_k \xrightarrow{d} X \text{ maka } X_n \xrightarrow{d} 0 .$$

Untuk γ yang tetap tetapi sebarang, $0 < \gamma < \infty$, definisikan :

$$\alpha_{nk} = \alpha_{nk}(\gamma) = \int_{|x|<\gamma} x \, d F_{nk}(x)$$

$$\tilde{X}_{nk} = X_{nk} - \alpha_{nk}$$

$$\tilde{F}_{nk} = F_{nk}(x + \alpha_{nk})$$

$$\tilde{\varphi}_{nk}(t) = e^{-it\alpha_{nk}} \varphi_{nk}(t)$$

Teorema 14 : (Laha, 1979 : 297)

Misalkan m_{nk} median dari X_{nk} . Anggaplah variabel acak pada barisan $\{ X_{nk} \}$ infinitesimal. Maka

(i). $\lim\limits_{n\to\infty} \max\limits_{1\le k\le k_n} | m_{nk} | = 0$

(ii). $\lim\limits_{n\to\infty} \max\limits_{1\le k\le k_n} | \alpha_{nk} | = 0$

Karena $\lim\limits_{n\to\infty} \max\limits_{1\le k\le k_n} | \alpha_{nk} | = 0$, maka $\{ \tilde{X}_{nk} \}$ merupakan barisan infinitesimal apabila $\{ X_{nk} \}$ infinitesimal. Akibatnya, melalui teorema 4.1.2

$$\lim_{n\to\infty} \max_{1\le k\le k_n} | \tilde{\varphi}_{nk}(t) - 1 | = 0$$

secara seragam pada interval hingga $| t | \le T$, untuk setiap $T > 0$.

Teorema 15 : (Laha, 1979 : 298)

Misalkan X , Y variabel acak saling bebas dan berdistribusi identik, $X^s = X - Y$ merupakan simetrisasi dari X. Definisikan g pada R dengan :

$$g(x) = \begin{cases} x^2 & , \ |x| \le 1 \\ 1 & , \ |x| > 1 \end{cases}$$

maka untuk sebarang median m dari X : $E[\, g(X - Y)\,] \ge (1/2)\, E[\, g(X - m)\,]$.

Teorema 16 : (Laha, 1979 : 298)

Misalkan $\{ X_{nk} \}$ merupakan barisan variabel acak yang infinitesimal. Anggaplah $\prod_{k=1}^{kn} |\varphi_{nk}| \to |\varphi|$ untuk $n \to \infty$, dimana φ kontinu pada R. Maka ada konstanta $C = C(\gamma) > 0$ tidak bergantung pada n sehingga,

$$\sup \sum_{k=1}^{kn} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^2}\, d\widetilde{F}_{nk}(x) < C.$$

Bukti : lihat lampiran II.

BAB III. METODOLOGI PENELITIAN

A. METODE PENELITIAN

Penelitian ini merupakan penelitian teoritik atau "library research" . Dalam penelitian ini, peneliti mencoba memodifikasi suatu teorema dan membuktikannya berdasarkan teori-teori yang ada.

B. TEKNIK PENGUMPULAN DATA

Pada penelitian ini, data-data dikumpulkan dari buku-buku yang menunjang sehingga didapatkan suatu konsep yang dapat dibuktikan secara matematis. Adapun proses kerjanya adalah sebagai berikut :

1. Meninjau permasalahan yang dihadapi.
2. Mencari teori-teori apa saja yang dapat dijadikan sebagai penunjang untuk menjawab permasalahan tersebut.
3. Memodifikasi teori-teori tersebut sehingga teori-teori tersebut mengarah kepada jawaban permasalahan.
4. Mencoba membentuk suatu teorema dari teori-teori yang ada yang diduga merupakan jawaban dari permasalahan.
5. Membuktikan teorema tersebut.

BAB IV. PEMBAHASAN

Sebelum kita membahas tentang kriteria fungsi distribusi yang termuat ke dalam daerah atraksi dari fungsi distribusi normal, maka ada baiknya kita tinjau kembali apa yang dimaksud dengan daerah atraksi tersebut.

Definisi 14 : (Rohatgi, 1976 : 280)

Misalkan $\{ X_n \}$ barisan variabel acak yang saling bebas dan mempunyai distribusi identik dengan fungsi distribusinya F. Misalkan terdapat barisan $\{a_n\}$ dan $\{ b_n \}$ dengan $a_n > 0$, $b_n \in R$ untuk setiap $n \in N$, sehingga barisan $\left\{ \frac{1}{a_n}\left(\sum_{k=1}^{n} X_k - b_n \right) \right\}$ konvergen dalam distribusi ke suatu variabel acak dengan fungsi distribusinya G. Maka F dikatakan diatraksi ke G.

Himpunan semua fungsi distribusi yang diatraksi ke G dinamakan daerah (domain) atraksi dari distribusi G.

Definisi diatas dapat pula kita nyatakan dalam bentuk pernyataan lain sebagai berikut :

Definisi 14* :

Misalkan variabel acak X_1 , X_2 , ... , X_n , ... saling bebas dan mempunyai fungsi distribusi sama, yaitu F(x). Jika untuk konstanta A_n dan B_n , fungsi distribusi dari variabel acak $X_n = \frac{1}{B_n} \sum_{k=1}^{n} X_k - A_n$ konvergen untuk $n \to \infty$ ke fungsi ditribusi

V(x), maka kita katakan bahwa F(x) diatraksi ke V(x). Seluruh fungsi distribusi yang diatraksi ke V(x) disebut daerah atraksi dari fungsi distribusi V(x).

Misalkan kita mempunyai fungsi distribusi F(x) yang termuat ke dalam daerah atraksi dari fungsi distribusi normal. Maka menurut Laha (1979 : 336) ".... if and only if $\int_{|x|\geq z} dF(x) = o\left(z^{-2}\int_{|x|<z} x^2 dF(x)\right)$ as $z \to \infty$. " Dan menurut Gnedenko (1968 : 172) " .... if and only if as $X \to \infty$ $\dfrac{X^2 \int_{|x|\geq X} dF(x)}{\int_{|x|<X} x^2\, dF(x)} \to 0$. ".

Menurut peneliti, kedua pendapat ini sama artinya kalau kita tinjau dari makna masing-masingnya, yaitu :

$\int_{|x|\geq z} dF(x) = o\left(z^{-2}\int_{|x|<z} x^2 dF(x)\right)$ untuk $z \to \infty$ artinya

$$\lim_{X\to\infty} \frac{X^2 \int_{|x|\geq X} dF(x)}{\int_{|x|<X} x^2\, dF(x)} = 0$$

Untuk $X \to \infty$ $\dfrac{X^2 \int_{|x|\geq X} dF(x)}{\int_{|x|<X} x^2\, dF(x)} \to 0$ artinya $\lim\limits_{X\to\infty} \dfrac{X^2 \int_{|x|\geq X} dF(x)}{\int_{|x|<X} x^2\, dF(x)} = 0$.

Dan kalau kita tinjau pula menurut Breiman (1993 : 215), yaitu " There exist A_n , B_n such that $S_n / A_n - B_n \xrightarrow{D} N(0, 1)$ if and only if

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2 \int_{|y|>x} F(dy)}{\int_{|y|\leq x} y^2\, F(dy)} = 0" .$$

Dengan demikian, berdasarkan ketiga pendapat diatas kita dapat membuat suatu teorema lain sebagai berikut:

Teorema 16 :

Fungsi distribusi F(x) termuat ke dalam domain atraksi dari fungsi distribusi normal

jika dan hanya jika $\lim_{X \to \infty} \dfrac{X^2 \int_{|x| \geq X} dF(x)}{\int_{|x|<X} x^2 \, dF(x)} = 0$.

Bukti :

a. Variansi dari F(x) hingga

Perhatikanlah jika $|x| \geq X$ maka $x^2 \geq X^2$. Sehingga

$$\int_{|x| \geq X} x^2 \, dF(x) \geq \int_{|x| \geq X} X^2 \, dF(x) = X^2 \int_{|x| \geq X} dF(x).$$

Karena variansi dari F(x) hingga, maka $E[X^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \, dF(x) < \infty$.

Dengan demikian, untuk $X \to \infty$, $\int_{|x| \geq X} x^2 \, dF(x) \to 0$.

Akibatnya, kita peroleh $X^2 \int_{|x| \geq X} dF(x) \to 0$, untuk $X \to \infty$ ....(1)

Di lain pihak kita juga mendapatkan bahwa :

$0 < \int_{|x|<X} x^2 \, dF(x) \to \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \, dF(x) < \infty$, untuk $X \to \infty$ .... (2)

Dari (1) dan (2), kita mendapatkan

$$\lim_{X \to \infty} \frac{X^2 \int_{|x| \geq X} dF(x)}{\int_{|x|<X} x^2 \, dF(x)} = 0$$

Selanjutnya, fungsi distribusi F(x) termuat ke dalam domain atraksi dari fungsi distribusi normal karena akibat dari teorema limit pusat Lindenberg - Feller dengan mengambil $B_n = \sqrt{n\sigma^2}$.

Misalkan $a = \int x \, dF(x)$, $\sigma^2 = \int (x-a)^2 \, dF(x)$, $B_n^2 = n\sigma^2$.

Maka untuk setiap $\tau > 0$, $n \to \infty$,

$$\frac{n}{B_n^{\,2}} \int_{|x|>\tau B_n} (x-a)^2\, dF(x) \;=\; \frac{n}{\sigma^2} \int_{|x|>\tau\sigma\sqrt{n}} (x-a)^2\, dF(x) \;\to\; 0$$

Berdasarkan teorema 9 dan akibat 2 maka F(x) termuat ke dalam domain atraksi dari distribusi normal.

b. Variansi dari F(x) tak hingga.

Jika variansi dari F(x) tak hingga, maka $\int_{-\infty}^{\infty} x^2\, dF(x) \to \infty$.

Sehingga untuk $X \to \infty$, $\int_{|x|<X} x^2\, dF(x) \to \infty$.

Akan ditunjukkan jika $\int_{|x|<X} x^2\, dF(x) \to \infty$ maka

$$\left(\int_{|x|<X} x\, dF(x) \right)^2 = o\left(\int_{|x|<X} x^2\, dF(x) \right)$$

Misalkan $t(x) > 0$, t tak terbatas (untuk $x \to \pm\infty$) sehingga

$$c = \int_{-\infty}^{\infty} t^2(x)\, dF(x) < \infty .$$

Maka $\left(\int_{|x|<X} x\, dF(x) \right)^2 = \left(\int_{|x|<X} t(x) \frac{x}{t(x)}\, dF(x) \right)^2$.

Dan dari ketidaksamaan Cauchy ,

$$\left(\int_{|x|<X} x\, dF(x) \right)^2 \le \left(\int_{|x|<X} t^2(x)\, dF(x) \right)\left(\int_{|x|<X} \frac{x^2}{t^2(x)}\, dF(x) \right)^2$$

$$\le c \left(\int_{|x|<X} \frac{x^2}{t^2(x)}\, dF(x) \right)^2$$

Karena $t^{-2}(x) \to 0$ untuk $x \to \pm\infty$, maka terdapat X_0 sehingga untuk setiap $X > X_0$ berlaku

$$\left(\int_{|x|<X} x \, dF(x) \right)^2 \leq c \left(\int_{|x|<X_0} \frac{x^2}{t^2(x)} \, dF(x) \right)^2 + c\,\varepsilon \left(\int_{X_0<|x|<X} x^2(x) \, dF(x) \right)$$

Jadi, $\left(\int_{|x|<X} x \, dF(x) \right)^2 = o\left(\int_{|x|<X} x^2 \, dF(x) \right)$

Menurut teorema Bernstein & Feller, fungsi distribusi F(x) termuat ke dalam daerah atraksi dari distribusi normal jika dan hanya jika terdapat barisan konstanta $\{ C_n \}$, dengan $C_n \to \infty$ untuk $n \to \infty$ sehingga kondisi berikut memenuhi :

(i). $n \int_{|x|\geq C_n} dF(x) \to 0$

(ii). $\frac{n}{C_n^{\,2}} \left\{ \int_{|x|<C_n} x^2 \, dF(x) - \left(\int_{|x|<C_n} x \, dF(x) \right)^2 \right\} \to \infty$, untuk $n \to \infty$.

Karena variansi tak hingga, maka (ii) dapat dijadikan :

$$\frac{n}{C_n^{\,2}} \int_{|x|<C_n} x^2 \, dF(x) \to \infty \quad \text{untuk } n \to \infty \quad \text{...(3)}$$

Akan ditunjukkan : jika (i) dan (3) maka $\lim_{X\to\infty} \frac{X^2 \int_{|x|\geq X} dF(x)}{\int_{|x|<X} x^2 \, dF(x)} = 0$

Dalam hal ini, karena $C_n \to \infty$ untuk $n \to \infty$, untuk setiap X yang cukup besar kita dapat menemukan sebuah n sehingga $C_n \leq X \leq C_{n+1}$.

Misalkan $q(X) = \int_{|x|\geq X} dF(x)$ dan $H(X) = \frac{1}{X^2} \int_{|x|<X} x^2 \, dF(x)$.

Maka untuk X dan n yang cukup besar $q(C_n) \geq q(X) \geq q(C_{n+1})$, dan

$$H(X) = \frac{1}{X^2}\int_{|x|<X} x^2\, dF(x)$$

$$\leq \frac{1}{X^2}\int_{|x|<X} X^2\, dF(x)$$

$$= \int_{|x|<X} dF(x)$$

$$= \int_{|x|<C_n} dF(x) + \int_{C_n\leq|x|<X} dF(x)$$

$$\leq \frac{1}{C_n{}^2}\int_{|x|<C_n} x^2\, dF(x) + q(C_n)$$

$$= H(C_n) + q(C_n)$$

Dengan cara yang sama, kita dapatkan $H(X) \geq H(C_{n+1}) - q(C_n)$. Dan kita

mempunyai $\dfrac{q(C_n)}{H(C_{n+1})-q(C_n)} \geq \dfrac{q(X)}{H(X)} \geq \dfrac{q(C_{n+1})}{H(C_n)+q(C_n)}$

atau, $$\frac{n\int_{|x|\geq C_n} dF(x)}{\frac{n}{n+1}\cdot\frac{n+1}{C_n{}^2}\int_{|x|<C_{n+1}} x^2\, dF(x) - n\int_{|x|\geq C_n} dF(x)} \geq \frac{\int_{|x|\geq X} dF(x)}{\frac{1}{X^2}\int_{|x|<X} x^2\, dF(x)}$$

$$\geq \frac{(n+1)\int_{|x|\geq C_{n+1}} dF(x)}{\frac{n+1}{n}\cdot\frac{n}{C_n{}^2}\int_{|x|<C_n} x^2\, dF(x) + (n+1)\int_{|x|\geq C_n} dF(x)}$$

Dari (i) dan (3), ruas kiri dan ruas kanan pada ketidaksamaan menuju ke 0 untuk

$n \to \infty$. Sehingga terbukti bahwa $\lim\limits_{X\to\infty} \dfrac{X^2\int_{|x|\geq X} dF(x)}{\int_{|x|<X} x^2\, dF(x)} = 0$.

Untuk membuktikan (1) kita hanya membutuhkan barisan konstanta $\{ C_n \}$ dengan

$C_n \to \infty$ untuk $n \to \infty$, sehingga kondisi (i) dan (ii) memenuhi.

Misalkan $\delta > 0$ dan definisikan $C_n(\delta)$:

$$C_n(\delta) = \inf_{X} \left\{ X : n \int_{|x| \geq X} dF(x) \leq \delta \right\}$$

Karena $\int_{-\infty}^{\infty} x^2\, dF(x) = \infty$, maka $C_n(\delta) \to \infty$ untuk $n \to \infty$.

Maka dari (1) bahwa terdapat X_o sehingga $q(X) \leq \varepsilon\, H(X)$, untuk setiap $X \geq X_o$.

Jadi, $q(1/2\, C_n(\delta)) \leq \varepsilon\, H(1/2\, C_n(\delta))$.

Untuk n yang cukup besar, dan karena $nq(1/2\, C_n(\delta)) > \delta$, maka kita mempunyai

$\delta < nq(1/2\, C_n(\delta)) \leq n\, \varepsilon\, H(1/2\, C_n(\delta))$,

atau, $n\, H(1/2\, C_n(\delta)) > \delta / \varepsilon$, untuk n yang cukup besar.

Sekarang, $H(1/2\, C_n(\delta)) = \dfrac{4}{C_n^{\,2}(\delta)} \displaystyle\int_{|x| < \frac{C_n(\delta)}{2}} x^2\, dF(x)$

$$\leq \frac{4}{C_n^{\,2}(\delta)} \int_{|x| < C_n(\delta)} x^2\, dF(x) = 4\, H(C_n(\delta))$$

Untuk n yang cukup besar, $n\, H(C_n(\delta)) > \delta /(4\varepsilon)$.

Jadi, untuk setiap $\delta > 0$, $n \to \infty$ maka $n\, H(C_n(\delta)) \to \infty$.

Dan hal ini diikuti bahwa terdapat $\delta_n \to 0$ sehingga $n\, H(C_n(\delta)) \to \infty$ untuk $n \to \infty$. Tetapi, $nq(C_n(\delta)) \leq \delta_n \to 0$ untuk $n \to \infty$ oleh pendefinisian $C_n(\delta)$.

Dengan kata lain, untuk $n \to \infty$

(i). $n \int_{|x| \geq C_n} dF(x) \to 0$

(ii). $\dfrac{n}{C_n^{\,2}} \left\{ \displaystyle\int_{|x| < C_n} x^2\, dF(x) \right\} \to \infty$

BAB V. KESIMPULAN

Berdasarkan pembahasan diatas, maka kita mendapatkan suatu kesimpulan yaitu :

Fungsi distribusi F(x) termuat ke dalam domain atraksi dari fungsi distribusi normal jika dan hanya jika $\lim\limits_{X\to\infty} \dfrac{X^2 \int_{|x|\geq X} dF(x)}{\int_{|x|<X} x^2\, dF(x)} = 0$.

DAFTAR PUSTAKA

Ash, Robert B. (1972) . *Real Analysis and Probability*. New York: Academic Press, Inc.

Breiman, Leo. (1993) . *Classics in Applied Mathematics*. Philadelphia: Addison-Wesley Publishing Company, Inc.

Chow, Yuan Shih & Teicher, Henry. (1988). *Probability Theory*. New York: Springer-Verlag.

Gnedenko, B. V. & Kolmogorov, A. N. (1968). *Limit Distributions for Sums of Independent Random Variables*. USA: Addison-Wesley Publishing Company.

Helma. (1995). *Domain Atraksi dari Fungsi Distribusi Stabil.* Bandung (Tesis).

Hogg, Robert V. & Craig, Allen T. (1978). *Introduction to Mathematical Statistics*. Fourth Edition. New York: Macmillan Publishing Co., Inc.

Laha, R. G. & Rohatgi, V. K. (1979). *Probability Theory*. New York: John Wiley Sons.

Rohatgi, V. K. (1976). *An Introduction to Probability Theory and Mathematical Statistics*. New York: John Wiley & Sons

LAMPIRAN I

Untuk membuktikan teorema tersebut, kita memerlukan definisi dan teorema berikut ini.

Definisi : (Gnedenko, 1968 : 71)

Variabel acak X disebut terbagi tak hingga jika terdapat variabel acak X_1 , X_2 , ... , X_n saling bebas dan berdistribusi identik sehingga $\sum_{k=1}^{n} X_k$ mempunyai distribusi yang sama dengan X. Dan fungsi distribusi dari variabel acak terbagi tak hingga disebut fungsi distribusi terbagi tak hingga.

Teorema (Representasi Levy-Khintchine) : (Gnedenko, 1968 : 76)

Fungsi karakteristik φ terbagi tak hingga jika dan hanya jika ln $\varphi(t)$ dapat dinyatakan sebagai :

$$\ln \varphi(t) = i\alpha t + \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{itx} - 1 - \frac{itx}{1+x^2} \right) \frac{1+x^2}{x^2} \, dG(x)$$

$\alpha \in R$, G terbatas, tak turun, kontinu kanan pada R, sehingga $G(-\infty) = 0$ dan $G(+\infty) < \infty$.

Nilai integran di x = 0 didefinisikan dengan kekontinuan sebagai :

$$\left(e^{itx} - 1 - \frac{itx}{1+x^2} \right) \frac{1+x^2}{x^2} \Bigg]_{x=0} = -\frac{t^2}{2} .$$

Selanjutnya, α dan G ditentukan secara tunggal oleh φ .

Berikut ini, marilah kita lihat bukti dari teorema tentang fungsi karakteristik stabil.

Misalkan $\varphi(t)$ fungsi karakteristik dari variabel acak stabil. Maka $\varphi(t)$ merupakan fungsi karakteristik terbagi tak hingga. Dan

$$[\varphi(t)]^n = e^{itb_n}\varphi(a_n t)$$

$$n \ln \varphi(t) = itb_n + \ln \varphi(a_n t)$$

$$n\,\psi(t) = itb_n + \psi(a_n t) \quad \text{...(1)}$$

Berdasarkan definisi variabel acak terbagi tak hingga dan variabel acak stabil, maka kita mendapatkan suatu hubungan, yaitu setiap variabel acak stabil merupakan variabel acak terbagi tak hingga.

Maka dari teorema diatas didapatkan :

$$\psi(t) = \ln \varphi(t) = i\alpha t + \int_{-\infty}^{\infty}\left(e^{itx} - 1 - \frac{itx}{1+x^2}\right)\frac{1+x^2}{x^2}\,dG(x).$$

Hal ini berarti,

$$\psi(a_n t) = \ln \varphi(a_n t) = i\alpha a_n t + \int_{-\infty}^{\infty}\left(e^{ia_n tx} - 1 - \frac{ia_n tx}{1+x^2}\right)\frac{1+x^2}{x^2}\,dG(x)$$

$$= i\alpha a_n t + \int_{-\infty}^{\infty}\left(e^{iyt} - 1 - \frac{iyt}{1+a_n^{-2}y^2}\right)\frac{1+a_n^{-2}y^2}{a_n^{-2}y^2}\,dG(y/a_n).$$

Karena $\dfrac{w}{1+a_n^2 w^2}$ terbatas maka integral berikut ada.

$$a_n\int_{-\infty}^{\infty}\frac{w}{1+a_n^2w^2}\,dG(w) = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{y}{1+y^2}\,dG(y/a_n)$$

Karena itu, didapatkan :

$$\psi(a_n t) = i\alpha a_n t - \int_{-\infty}^{\infty}\frac{iyt}{a_n^{-2}y^2}\,dG(y/a_n) + \int_{-\infty}^{\infty}\left(e^{iyt} - 1\right)\frac{1+a_n^{-2}y^2}{a_n^{-2}y^2}\,dG(y/a_n)$$

$$= i\alpha a_n t - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{iyt}{a_n^{-2}y^2} \frac{1+y^2}{1+y^2} dG(y/a_n) + \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{iyt}-1\right) \frac{1+a_n^{-2}y^2}{a_n^{-2}y^2} dG(y/a_n)$$

$$= i\alpha a_n t + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{iyt}{1+y^2} \frac{a_n^{-2}y^2 - 1 - y^2 - a_n^{-2}y^2}{a_n^{-2}y^2} dG(y/a_n) +$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{iyt}-1\right) \frac{1+a_n^{-2}y^2}{a_n^{-2}y^2} dG(y/a_n)$$

$$= i\alpha a_n t + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{iyt}{1+y^2} \left(1 - a_n^{2} - \frac{1+a_n^{-2}y^2}{a_n^{-2}y^2}\right) dG(y/a_n) +$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{iyt}-1\right) \frac{1+a_n^{-2}y^2}{a_n^{-2}y^2} dG(y/a_n)$$

$$= i\alpha a_n t + (1 - a_n^2)\int_{-\infty}^{\infty} \frac{iyt}{1+y^2} dG(y/a_n) +$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{iyt} - 1 - \frac{iyt}{1+y^2}\right) \frac{1+a_n^{-2}y^2}{a_n^{-2}y^2} dG(y/a_n)$$

Jadi,

$$\psi(a_n t) = it\alpha_{a_n} + \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{iyt} - 1 - \frac{iyt}{1+y^2}\right) \frac{1+a_n^{-2}y^2}{a_n^{-2}y^2} dG(y/a_n) \quad \text{.....................(2)}$$

dengan $\alpha_{a_n} = \alpha a_n + (1 - a_n^2)\int_{-\infty}^{\infty} \frac{y}{1+y^2} dG(y/a_n)$.

Definisikan : $M(z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1+y^2}{y^2} dG(y)$, untuk $z < 0$

$N(z) = -\int_{z}^{\infty} \frac{1+y^2}{y^2} dG(y)$, untuk $z > 0$

$\sigma^2 = G(+0) - G(-0)$.

Maka M(z) dan N(z) masing-masing tidak turun pada interval $(-\infty,0)$ dan $(0,\infty)$ dan $M(-\infty) = N(\infty) = 0$.

Dari (2) didapatkan :

$$\psi(a_n t) = it\alpha_{a_n} + \int_{-\infty}^{-0} \left(e^{iyt} - 1 - \frac{iyt}{1+y^2} \right) \frac{1 + a_n^{-2} y^2}{a_n^{-2} y^2} \, dG(y/a_n) +$$

$$\int_{-0}^{+0} \left(e^{iyt} - 1 - \frac{iyt}{1+y^2} \right) \frac{1 + a_n^{-2} y^2}{a_n^{-2} y^2} \, dG(y/a_n) +$$

$$\int_{+0}^{\infty} \left(e^{iyt} - 1 - \frac{iyt}{1+y^2} \right) \frac{1 + a_n^{-2} y^2}{a_n^{-2} y^2} \, dG(y/a_n)$$

$$= it\alpha_{a_n} - \frac{a_n^2 t^2 \sigma^2}{2} + \int_{-\infty}^{-0} \left(e^{iyt} - 1 - \frac{iyt}{1+y^2} \right) dM(y/a_n) +$$

$$\int_{+0}^{\infty} \left(e^{iyt} - 1 - \frac{iyt}{1+y^2} \right) dN(y/a_n) .$$

Dari (1) diperoleh :

$$nit\alpha - \frac{nt^2\sigma^2}{2} + \int_{-\infty}^{-0} n\left(e^{iyt} - 1 - \frac{iyt}{1+y^2} \right) dM(y) + \int_{+0}^{\infty} n\left(e^{iyt} - 1 - \frac{iyt}{1+y^2} \right) dN(y)$$

$$= itb_n + it\alpha_{a_n} - \frac{a_n^2 t^2 \sigma^2}{2} + \int_{-\infty}^{-0} \left(e^{iyt} - 1 - \frac{iyt}{1+y^2} \right) dM(y/a_n) +$$

$$\int_{+0}^{\infty} \left(e^{iyt} - 1 - \frac{iyt}{1+y^2} \right) dN(y/a_n) .$$

Dari ketunggalan penyajian pada teorema diatas, maka :

$\sigma^2 (a_n^2 - n) = 0$ ....(3)

$M(y/a_n) = n\, M(y)$, $y < 0$ ....(4)

$$N(y/a_n) = n\,N(y) \quad , \quad y > 0 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

Akan ditentukan fungsi $M(z)$ dengan $z < 0$.

Dari (4), kita peroleh : $1/n\, M(y) = M[\, a(n)y\,]$ dengan mengambil $a(1/n) = 1/a_n$.

Maka untuk sebarang $r = m/n \in Q^+$, didapatkan :

$r\,M(y) = m/n\, M(y) = m\, M[\, a(n)y\,] = M[\, a(n)a(1/m)\, y\,] = M[\, a(n)/a(m)\, y\,]$

$= M(y/a_r)$ dengan $a_r = a(m)/a(n) \in R^+$.

Akan ditunjukkan a_r tidak turun untuk setiap $r \in Q^+$.

Misalkan r_1 , $r_2 \in Q^+$ dengan $r_1 < r_2$.

Karena $M(z) \geq 0$ maka $r_1\, M(z) \leq r_2\, M(z)$.

Dengan demikian, $M(z/a_{r_1}) \leq M(z/a_{r_2})$.

Karena $M(z)$ tidak turun dan $z < 0$ maka $a_{r_1} \leq a_{r_2}$.

Bilamana $M(z) > 0$ atau $M(z) \neq 0$ maka $a_{r_1} < a_{r_2}$.

Pandang : $M(z) \neq 0$.

Definisikan : untuk setiap $r \in R^+$,

$$B(x) = 1/b_x = \begin{cases} \sup\limits_{r>x} a_r & , \text{ jika} x \notin Q \\ a_x & , \text{ jika} x \in Q \end{cases}$$

Maka $B(x)$ naik .

Misalkan $x \in R^+$ sebarang. Maka terdapat (r_v) dan (r_v') dengan

$$r_v \uparrow x \text{ dan } r_v' \downarrow x\,, \quad r_v\,, r_v' \in Q^+ \,.$$

Karena $r_v < x < r_v'$ maka $B(r_v) < B(x) < B(r_v')$. Jadi, untuk sebarang $y < 0$ didapatkan : $y\,B(r_v) > y\,B(x) > y\,B(r_v')$.

Karena M(z) tidak turun, maka :

$$M[\, y\, B(r_v)\,] \geq M[\, y\, B(x)\,] \geq M[\, y\, B(r_v')\,]$$

$$r_v\, M(y) \;\geq\; M(y/b_x) \;\geq\; r_v'\, M(y)$$

Jika $v \to \infty$ maka r_v , $r_v' \to x$. Oleh karena itu, untuk setiap $x \in R^+$ terdapat

$B(x) \in R^+$ sehingga $x\, M(y) = M[\, y\, B(x)\,]$, untuk $y < 0$ .... (6)

Jika (6) didifferensialkan didapatkan :

$$x\, \frac{dM(y)}{dy} = B(x)\, \frac{dM[yB(x)]}{d[yB(x)]}$$

$$\frac{M[yB(x)]}{M(y)}\, M'(y) = B(x)\, \frac{dM[yB(x)]}{d[yB(x)]}$$

$$\frac{M'(y)}{M(y)} = \frac{B(x)}{d[yB(x)]}\, \frac{dM[yB(x)]}{M[yB(x)]}$$

Bila diambil $y = -1$ dan misalkan $\dfrac{M'(-1)}{M(-1)} = \beta$ maka

$$\beta = \frac{B(x)}{d[-B(x)]}\, \frac{dM[-B(x)]}{M[-B(x)]}$$

$$-\beta\, \frac{d[-B(x)]}{-B(x)} = \frac{dM[-B(x)]}{M[-B(x)]}$$

$$-\beta \ln|-B(x)| = \ln M[-B(x)] + c$$

$$c_1\, |-B(x)|^{-\beta} = M[-B(x)]$$

Misalkan $z = -B(x) < 0$ dan $M(z) \geq 0$. Maka $c_1 |z|^{-\beta} = M(z)$; $c_1 \geq 0$.

Karena $M(-\infty) = 0$ maka $\beta \in R^+$.

Karena $\infty > \int_{-1}^{0} z^2\, dM(z) = -c_1\, \beta \int_{-1}^{0} (-z)^{1-\beta} d(-z)$, maka $\beta < 2$.

Jadi, telah kita dapatkan :

$M(z) = c_1 \mid z \mid^{-\beta}$ ($c_1 \geq 0$, $z < 0$, $0 < \beta < 2$) ....(7)

Dengan menggunakan $\dfrac{dM(y)}{My} = \dfrac{dN(-y)}{N(-y)}$, $\forall\, y < 0$ maka untuk menentukan

fungsi N(z) analog dengan cara menentukan fungsi M(z).

Akhirnya, didapatkan sebagai berikut :

$N(z) = -c_2\, z^{-\beta}$ ($c_2 \geq 0$, $0 < \beta < 2$, $z > 0$) ....(8)

Jika (7) dan (8) masing-masing disubstitusikan ke (4) dan (5) maka didapatkan :

$c_1 (a_n^{\beta} - n) = 0$ ....(9)

$c_2 (a_n^{\beta} - n) = 0$ ....(10)

Akan ditunjukkan bila $\sigma^2 \neq 0$ maka $c_1 = c_2 = 0$.

Misalkan $\sigma^2 \neq 0$. Maka dari (3) didapatkan $a_n^2 - n = 0$. Karena $0 < \beta < 2$ maka $a_n^{\beta} - n \neq 0$. Dari (9) dan (10) diperoleh $c_1 = c_2 = 0$. Oleh karena itu, $M(z) = 0$, ($z < 0$) dan $N(z) = 0$, ($z > 0$).

Selanjutnya, jika $M(z) \neq 0$ (atau $N(z) \neq 0$) maka $c_1 > 0$ (atau $c_2 > 0$).

Bila diambil $n = 2$ maka dari (9) (atau (10)) : $a_n^{\beta} = 2$.

Oleh karena itu, $a_n^2 \neq 2$ dan dari (3) disimpulkan bahwa $\sigma^2 = 0$.

Bukti sebaliknyanya , untuk menunjukkan sebarang fungsi karakteristik dengan bentuk kanonik stabil, yakni misalkan diberikan $n \in N$ maka didapatkan $a_n > 0$ dan $b_n \in R$ sehingga berlaku (1).

LAMPIRAN II

Misalkan G_{nk} fungsi distribusi dari variabel acak Y_{nk} yang merupakan simetrisasi dari X_{nk}, dan misalkan θ_{nk} fungsi karakteristik dari Y_{nk}. Maka

$$0 < \theta_{nk}(t) = |\varphi_{nk}(t)|^2 \le 1$$

Sehingga kita dapatkan : $\prod_{k=1}^{kn} \theta_{nk}(t) \to |\varphi(t)|^2$ untuk $n \to \infty$.

Tulis : $\theta_{nk}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \cos tx \, d\,G_{nk}(x)$. Tetapkan $T > 0$, maka

$$\begin{aligned}
0 < \int_0^T (1-\theta_{nk}(t))\,dt &= \int_0^T \int_{-\infty}^{\infty} (1-\cos tx)\, dG_{nk}(x)\,dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^T (1-\cos tx)\,dt\, dG_{nk}(x) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left(T - \frac{\sin Tx}{x}\right) dG_{nk}(x) \\
&= T\int_{-\infty}^{\infty} \left(1 - \frac{\sin Tx}{Tx}\right) dG_{nk}(x)
\end{aligned}$$

Karena ada $C(T) > 0$ sehingga $\left(1-\frac{\sin Tx}{Tx}\right)\frac{1+x^2}{x^2} \ge C(T) > 0$, untuk setiap $x \in R$ kita peroleh :

$$\begin{aligned}
\int_0^T (1-\theta_{nk}(t))\,dt &= T\int_{-\infty}^{\infty} \left(1-\frac{\sin Tx}{Tx}\right)\frac{1+x^2}{x^2}\,\frac{x^2}{1+x^2}\, dG_{nk}(x) \\
&\ge T\,C(T)\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^2}\, dG_{nk}(x)\text{ , sehingga}
\end{aligned}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^2}\, dG_{nk}(x) \leq \frac{1}{T\,C(T)} \int_0^T \left(1-\theta_{nk}(t)\right) dt \;.$$

Di lain pihak, pandang $\lim\limits_{n\to\infty} \max\limits_{1\le k\le kn} |\varphi_{nk}(t)-1| = 0$.

Kita mencatat bahwa $\ln \varphi_{nk}(t)$ ada dan hingga untuk n yang cukup besar dan untuk semua $1 \leq k \leq kn$. Akibatnya, untuk n yang cukup besar dan $1 \leq k \leq kn$, $\ln \theta_{nk}(t)$ ada dan hingga. Lebih lanjut lagi, $\theta_{nk}(t) = |\varphi_{nk}(t)|^2$, sehingga kita mempunyai ketidaksamaan $0 \leq 1 - \theta_{nk}(t) \leq -\ln \theta_{nk}(t)$, untuk setiap $t \in R$ dan n yang cukup besar.

Dengan demikian, $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^2}\, dG_{nk}(x) \leq -\frac{1}{T\,C(T)} \int_0^T \ln\theta_{nk}(t)\, dt$.

Sehingga untuk n yang cukup besar,

$$\sum_{k=1}^{kn} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^2}\, dG_{nk}(x) \leq -\frac{1}{T\,C(T)} \sum_{k=1}^{kn} \int_0^T \ln\theta_{nk}(t)\, dt \quad \text{..............................} (1)$$

Pandang hipotesis kita, $\sum\limits_{k=1}^{kn} \ln\theta_{nk}(t) \;\to\; 2\ln|\varphi(t)|$, sehingga

$$-\sum_{k=1}^{kn} \int_0^T \ln\theta_{nk}(t)\, dt \;\to\; -2\int_0^T \ln|\varphi(t)|\, dt < \infty$$

Akibatnya, untuk n yang cukup besar terdapat $C'(t) < \infty$ sehingga

$$0 < -\sum_{k=1}^{kn} \int_0^T \ln\theta_{nk}(t)\, dt < C'(t) \quad \text{..} (2)$$

Jadi, dari (1) dan (2) kita peroleh :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^2}\, dG_{nk}(x) < \frac{C'(t)}{T\,C(T)} = C_1 \;, \quad n \geq 1 \quad \text{.......................................} (3)$$

Misalkan g pada R didefinisikan seperti pada teorema 15 , maka dengan menggunakan ketidaksamaan $\frac{x^2}{1+x^2} \leq g(x) \leq 2\frac{x^2}{1+x^2}$ dan teorema 15 kita dapatkan :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^2}\, dF_{nk}(x+m_{nk}) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-m_{nk})^2}{1+(x-m_{nk})^2}\, dF_{nk}(x)$$

$$\leq \int_{-\infty}^{\infty} g(x-m_{nk})\, dF_{nk}(x)$$

$$\leq 2\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x-z)\, dF_{nk}(x)\, dF_{nk}(z)$$

$$\leq 4\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-z)^2}{1+(x-z)^2}\, dF_{nk}(x)\, dF_{nk}(z)$$

$$= 4\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^2}\, dG_{nk}(x)$$

Sehingga, dari (3) kita peroleh :

$$\sum_{k=1}^{kn}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^2}\, dF_{nk}(x+m_{nk}) \leq 4\sum_{k=1}^{kn}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^2}\, dG_{nk}(x) < 4C_1 = C_2$$, untuk setiap $n \geq 1$.

Pandang pertidaksamaan : $(x-\alpha_{nk})^2 \leq (x-m_{nk})^2 + 2(x-\alpha_{nk})(m_{nk}-\alpha_{nk})$.

Maka, $\int_{|x|<\gamma} (x-\alpha_{nk})^2\, dF_{nk}(x)$

$$\leq \int_{|x|<\gamma} (x-m_{nk})^2\, dF_{nk}(x) + 2(\gamma+|m_{nk}|)\left|\int_{|x|<\gamma} (x-\alpha_{nk})\, dF_{nk}(x)\right|$$

$$= \int_{|x|<\gamma} (x-m_{nk})^2\, dF_{nk}(x) + 2(\gamma+|m_{nk}|)\,\alpha_{nk}\int_{|x|\geq\gamma} dF_{nk}(x)$$

$$\le \int_{|x|<\gamma} (x - m_{nk})^2 \, dF_{nk}(x) + 2\gamma(\gamma + |m_{nk}|) \int_{|x|\ge\gamma} dF_{nk}(x)$$

dan akibatnya,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^2} \, d\tilde{F}_{nk}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-\alpha_{nk})^2}{1+(x-\alpha_{nk})^2} \, dF_{nk}(x)$$

$$= \int_{|x|<\gamma} \frac{(x-\alpha_{nk})^2}{1+(x-\alpha_{nk})^2} \, dF_{nk}(x) + \int_{|x|\ge\gamma} \frac{(x-\alpha_{nk})^2}{1+(x-\alpha_{nk})^2} \, dF_{nk}(x)$$

$$\le \int_{|x|<\gamma} (x-\alpha_{nk})^2 \, dF_{nk}(x) + \int_{|x|\ge\gamma} dF_{nk}(x)$$

$$\le \int_{|x|<\gamma} (x - m_{nk})^2 \, dF_{nk}(x) + \{ 1 + 2\gamma(\gamma + |m_{nk}|) \} \int_{|x|\ge\gamma} dF_{nk}(x)$$

Karena, $\int_{|x|<\gamma} (x - m_{nk})^2 \, dF_{nk}(x)$

$$= \int_{|x|<\gamma} \left\{ 1 + (x-m_{nk})^2 \right\} \frac{(x-m_{nk})^2}{1+(x-m_{nk})^2} \, dF_{nk}(x)$$

$$\le \{ 1 + (\gamma + |m_{nk}|)^2 \} \int_{|x|<\gamma} \frac{(x-m_{nk})^2}{1+(x-m_{nk})^2} \, dF_{nk}(x)$$

$$\le \{ 1 + (\gamma + |m_{nk}|)^2 \} \int_{|x|<\gamma} \frac{(x-m_{nk})^2}{1+(x-m_{nk})^2} \, dF_{nk}(x)$$

$$= \{ 1 + (\gamma + |m_{nk}|)^2 \} \int_{|x-m_{nk}|<\gamma} \frac{x^2}{1+x^2} \, dF_{nk}(x + m_{nk})$$

$$\le \{ 1 + (\gamma + |m_{nk}|)^2 \} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^2} \, dF_{nk}(x + m_{nk})$$

dan, $\int_{|x|\ge\gamma} dF_{nk}(x) = \int_{|x|\ge\gamma} \frac{1+(x-m_{nk})^2}{(x-m_{nk})^2} \cdot \frac{(x-m_{nk})^2}{1+(x-m_{nk})^2} \, dF_{nk}(x)$

$$\leq \frac{\left\{1+\left(\gamma+|m_{nk}|\right)^2\right\}}{\left(\gamma-|m_{nk}|\right)^2} \int_{|x|\geq\gamma} \frac{(x-m_{nk})^2}{1+(x-m_{nk})^2}\, dF_{nk}(x)$$

$$\leq \frac{\left\{1+\left(\gamma+|m_{nk}|\right)^2\right\}}{\left(\gamma-|m_{nk}|\right)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^2}\, dF_{nk}(x+m_{nk})$$

Jadi, $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^2}\, d\widetilde{F}_{nk}(x)$

$$\leq \left[\left\{1+\left(\gamma+|m_{nk}|\right)^2\right\}+\left\{1+2\gamma\left(\gamma+|m_{nk}|\right)\right\}\frac{\left\{1+\left(\gamma+|m_{nk}|\right)^2\right\}}{\left(\gamma-|m_{nk}|\right)^2}\right] \cdot$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^2}\, dF_{nk}(x+m_{nk})$$

$$= \left\{1+\left(\gamma+|m_{nk}|\right)^2\right\}\left[1+\frac{\left\{1+2\gamma\left(\gamma+|m_{nk}|\right)^2\right\}}{\left(\gamma-|m_{nk}|\right)^2}\right] \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^2}\, dF_{nk}(x+m_{nk})$$

$$= d_1 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^2}\, dF_{nk}(x+m_{nk}) .$$

Sehingga, $\sum_{k=1}^{kn} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^2}\, d\widetilde{F}_{nk}(x) \leq \sum_{k=1}^{kn} d_1 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^2}\, dF_{nk}(x+m_{nk})$

$< d_1\, C_2 = C$, untuk setiap $n \geq 1$.