GEOMETRI ANALITIK BIDANG

PERPUSTAKAAN IKIP PADANG
KOLEKSI BIDANG ILMU
TIDAK DIPINJAMKAN
KHUSUS DIPAKAI DALAM PERPUSTAKAAN

UPT PERPUSTAKAAN
PADANG

Oleh:
DRS. EDWIN MUSDI, MPd
DOSEN FPMIPA IKIP PADANG

FAKULTAS PENDIDIKAN MATEMATIKA DAN
ILMU PENGETAHUAN ALAM
IKIP PADANG
1989

KATA PENGANTAR

Geometri Analitik Bidang adalah salah satu cabang dari matematika dan merupakan alat penyederhanaan setiap masalah dalam geometri yang akhirnya diselesaikan dengan bantuan aljabar.

Karena jarangnya buku-buku berbahasa Indonesia yang mengupas tentang geometri analitik bidang maka penulis telah mencoba menyusun beberapa topik dari hal yang dipelajari dalam geometri analitik bidang. Uraian penulis dalam buku ini meliputi:

1. Garis lurus dan permasalahannya.
2. Lingkaran
3. Parabola

Harapan penulis semoga buku ini dapat memenuhi kebutuhan terutama bagi mahasiswa jurusan matematika.

Dalam kesempatan ini penulis mengharapkan kritik-kritik yang membangun, saran-saran dan petunjuk-petunjuk yang pada gilirannya nanti dapat merubah isi buku ini mencapai kesempurnaan. Untuk itu penulis ucapkan terima kasih

Padang, April 1989

Penulis

Oleh. Dg
Hadiah
KT
516.3 Mus

[illegible]

[illegible]

DAFTAR ISI

BAB I

GARIS LURUS

1.1 Garis Bilangan

Jika pada suatu garis a diambil sebuah titik yang tertentu O, maka letak tiap titik P pada garis itu dapat diketahui dengan jalan menentukan jarak OP. Akan tetapi cara diatas menghasilkan dua buah titik, yaitu satu sebelah kanan O, dan yang lain disebelah kirinya. Untuk itu perlu di beri tanda-tanda kedua pihak tersebut.

Sebelah kiri dari O diberi tanda negatif, dan sebelah kanannya diberi tanda positif.

Contoh:

Titik P (+3) berarti: P terletak pada suatu garis g, 3 satuan (umpamanya cm) sebelah kanan O.

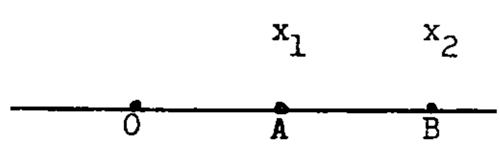
Titik Q (-2) berarti: Q terletak pada g, 2 cm dikiri O

Jadi jika pada suatu garis g terdapat titik tetap O, lengkap dengan tanda-tanda serta satuannya, maka tiap titik lain pada garis itu ditentukan oleh sebuah bilangan saja. Sebaliknya tiap bilangan merupakan sebuah titik yang tertentu pada garis itu. Garis ini disebut sumbu atau garis bilangan.

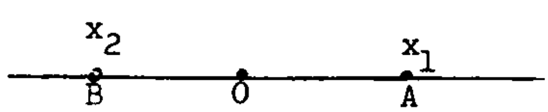
Titik O disebut titik nol atau titik pangkal, sedangkan bilangan bersama tandanya disebut absis. Titik O sendiri berabsis nol.

Lihat gambar:

Kalau $A(x_1)$ dan $B(x_2)$, maka jarak $AB = x_2 - x_1$, karena $x_2 > x_1$



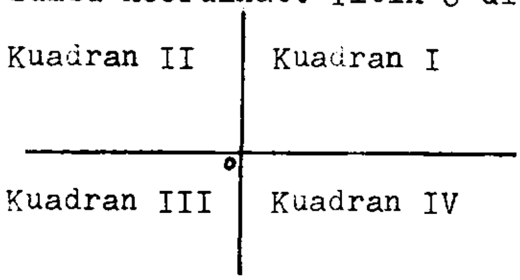
Disini jarak $AB = x_1 - x_2$ karena $x_2 < 0$ dan $x_1 > 0$. Untuk mudahnya diambil $|x_1 - x_2|$



Jadi jarak antara dua titik pada suatu garis sama dengan harga mutlaknya selisihkedua absis tersebut.

1.2 Koordinat Cartesius

Dalam sistem koordinat Cartesius, bidang dibagi dalam empat kuadran oleh dua garis tegak lurus dan berpotongan di titik O. Garis horizontal X'OX disebut sumbu-X, garis vertikal Y'OY disebut sumbu Y, dan kedua-dua sumbu tersebut dinamakan sumbu koordinat. Titik O disebut pangkal.



Gambar 1.2

Jarak terhadap sumbu Y disebut absis dari suatu titik. Sedangkan jarak terhadap sumbu X disebut ordinat dari titik tersebut. Dua jarak tersebut bersama-sama disebut ko - ordinat titik dan disajikandengan simbol (x,y). Absis adalah positif jika pengukuran di kanan sumbu Y, dan negatif jika dikiri sumbu Y. Ordinat dikatakan positif jika pengukuran diatas sumbu X, dan negatif jika dibawah sumbu X.

Titik-titik pada sumbu X mempunyai ordinat yang sama dengan nol, tetapi absisnya sembarang, sedangkan titik pada sumbu Y mempunyai absis sama dengan nol untuk sembarang ordinat.

Mengenai tanda absis dan ordinat suatu titik pada kuadran adalah sebagai berikut:

Kuadran	absis	Ordinat
I	+	+
II	-	+
III	-	-
IV	+	-

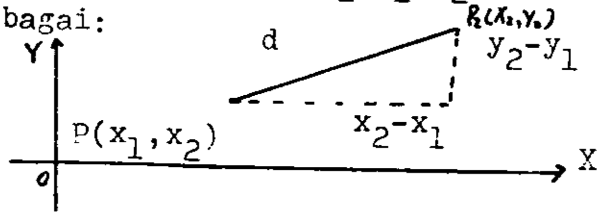
Jadi tiap titik pada bidang dapat ditentukan oleh sepasang bilangan, yang pertama menunjukkan absis dan yang kedua ordinat. Sebaliknya tiap pasang bilangan menentukan sebuah titik pada bidang.

Latihan 1

1. Berilah penjelasan dengan seksama istilah berikut:
   a. garis bilangan
   b. absis
   c. ordinat
   d. koordinat suatu titik
2. Tentukan lokasi dari titik (-1,3), (4,0), (2,6), (4,-3) (-2,0), (0,-5), (-4,-6), (5,-3).
3. Suatu segitiga sama sisi dua titik sudutnya adalah: (0,0) dan (a,0). Dimanakah letak titik sudut yang ketiga ? Ada berapa penyelesaiannya ?
4. Berupa apakah tempat kedudukan titik-titik yang absis - nya selalu 6 ? Gambarkanlah.
5. Katakanlah tempat kedudukan titik yang ordinatnya:
   a. selalu -3
   b. selalu 4
   c. selalu konstan
6. Berupa apakah tempat kedudukan titik yang absis dan ordinatnya sama.
7. Berupa apakah tempat kedudukan titik-titik yang absis - nya selalu sama dengan negatif ordinatnya ? Gambarkan !
8. Dua titik puncak suatu bujursangkar adalah (0,0) dan (a,0). Carilah dua titik puncak lainnya.
9. Sebuah jajaran genjang dengan titik puncaknya (0,0) (a,0) dan (b,c). Carilah titik puncak keempat. Jelaskan semua kemungkinan penyelesaiannya.
10 Sebuah bujursangkar dengan pusatnya di titik pangkal dan puncak-puncaknya terletak pada sumbu-sumbu koordi - nat. Jika panjang sisinya a satuan, carilah koordinat titik puncaknya.
11 Berupa apakah tempat kedudukan titik-titik yang jarak - nya terhadap titik pangkal tetap tetap sebesar bilangan tertentu.
12 Berupa apakah tempat kedudukan titik-titik yang ordinat nya selalu dua kalin absisnya.

1.3 Jarak Antara Dua Titik

Jarak d antara dua titik $P_1(x_1,x_2)$ dan $P_2(x_1,y_2)$ dengan mudah dapat dicari sebagai:



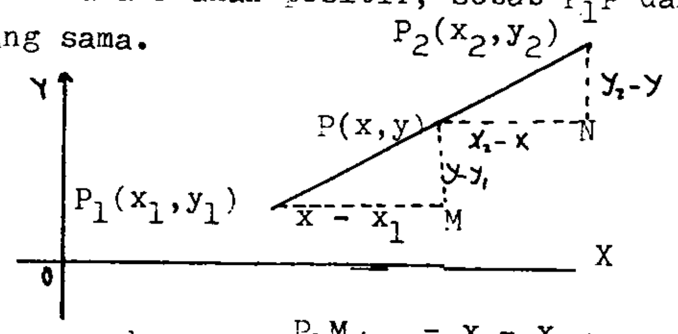
$$d = \sqrt{(x\ - x\ )^2 + (y\ - y\ )^2}$$

Jadi jarak antara dua titik (4,-1) dan (7,3) adalah:

$$d = \sqrt{(7-4)^2 + (3+1)^2}$$
$$= 5 \text{ unit}$$

1.4 Titik Pembagian

Titik Pembagian adalah titik yang membagi suatu garis dalam perbandingan yang diketahui. Misalkan $P_1(x_1,y_1)$ dan $P_2(x_2,y_2)$ adalah dua titik pada suatu garis dan misalkan pula $P(x,y)$ adalah titik ketiga yang membagi garis P_1P_2 sehingga memenuhi $P_1P/PP_2 = r$. Jika titik P tersebut berada perpanjangan kedua titik tersebut, maka r akan berharga negatif, karena P_1P dan P_2P memiliki arah yang berlawanan. Sebaliknya jika titik P tersebut berada diantara kedua titik tersebut maka r akan positif, sebab P_1P dan PP_2 memiliki arah yang sama.



Dengan segitiga yang sebangun , $P_1M/PN = x - x_1/x_2 - x$

$$= P_1P/PP_2 = r$$

Dari persamaan diatas diperoleh:

$$x = \frac{x_1+rx_2}{1+r}$$ dengan cara yang sama diperoleh

$$y = \frac{y_1+ry_2}{1+r}$$

a. (-8,-4), (5,9) c. (-11,4), (-11,10)
b .(10,-3), (14,-7) d. (8,6), (14,6)

Jawab:

$$m = tg\ \theta = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

a. $m=\frac{9+4}{5+8}= 1$ $\theta = tg^{-1}\ 1 = 45^o$

b. $m = \frac{-7+3}{14-10} = -1$ $\theta = tg^{-1}\ -1 = 135^o$

c. $m = \frac{10-4}{-11+11} =$ $\theta = tg^{-1} = 90^o$

d. $m = \frac{6-6}{14-8} = 0$ $\theta = tg^{-1}\ 0 = 0^o$

Contoh:
Tunjukkan bahwa tiga titik A(-3,4), B(3,2) dan C(6,-1)berada pada garis lurus yang sama.

Jawab
Slope AB $= \frac{2-4}{3+3} = -\frac{1}{3}$ Slope AC $= \frac{1-4}{6+3} = -\frac{1}{3}$

karena slope AB sama dengan slope AC maka ketiga garis tersebut berada pada satu garis.

1.8 Sudut Antara dua Garis Berpotongan

Sudut θ yang diukur dalam arah positif (berlawanan dengan arah jarum jam) dari garis L_1 dengan slope m_1 sampai ke garis L_2 dengan slope m_2 adalah :

$$tg\ \theta = \frac{m_2-m_1}{1+m_2m_1}$$

Bukti: $\theta_2=\theta + \theta_1$ atau $\theta = \theta_2-\theta_1$

$$tg\ \theta = tg\ (\theta_2 - \theta_1)$$
$$= \frac{tg\ \theta_2 - tg\ \theta_1}{1 + tg\ \theta_2\ tg\ \theta_1} = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1m_2}$$

Contoh :
Carilah sudut dalam segitiga yang titik sudutnya A(-3,-2) B(2,5), C(4,2)

Jawab: $m_{AB}= \frac{5+2}{2+3} = \frac{7}{5}$ $m_{BC}= \frac{2-5}{4-2} = \frac{4}{7}$

$m_{CA} = \frac{2+2}{4+3} = \frac{4}{7}$

$$\text{tg } A = \frac{m_{AB} - m_{CA}}{1+m_{AB}m_{CA}} = \frac{\frac{7}{5} - \frac{4}{7}}{1 + \frac{7}{5}\frac{4}{7}} = \frac{29}{63}, \quad A = 24^o 43,1'$$

$$\text{tg } B = \frac{m_{BC} - m_{AB}}{1+m_{BC}m_{AB}} = \frac{-\frac{3}{2} - \frac{7}{5}}{1-(-3/2)(7/5)} = 29/19, \quad B = 69^o 13,6'$$

$$\frac{m_{CA} - m_{BC}}{1+m_{CA}m_{BC}} = \frac{(4/7)-(-2/3)}{1+(4/7)(-2/3)} = 29/2, \quad C = 86^o\ 3,3'$$

Periksa $A+B+C = 180^o$

1.9 Garis Sejajar dan Tegak Lurus

Jika dua garis lurus sejajar, maka slopenya sama besar. Hal ini dapat dengan jelas dilihat dari rumus:

$$\text{tg } \theta = \frac{m_2 - m_1}{1+m_2m_1}, \quad \text{bila} \quad \theta = 0^o \quad \text{maka } m_1 = m_2$$

Jika dua garis tegak lurus , maka slope garis yang pertama negatif dari kebalikan slope garis yang kedua. Atau dengan kata lain hasil kali kedua slope tersebut -1. Kalau kita turunkan dari rumus diatas, dalam hal ini $\theta = 90^o$, maka tg $90^o = \infty$. Jadi,

$$\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1m_2} = \infty \quad \text{atau } 1 + m_1m_2 = 0$$

$$\text{atau} \quad m_1m_2 = -1$$

Contoh:

Dengan menggunakan slope tunjukkan bahwa titik A(8,6), B(4,8) dan C(2,4) adalah titik-titik segitiga siku-siku !

Jawab:

$$m_{AB} = \frac{8-6}{4-8} = -\frac{1}{2} \qquad m_{BC} = \frac{4-8}{2-4} = 2$$

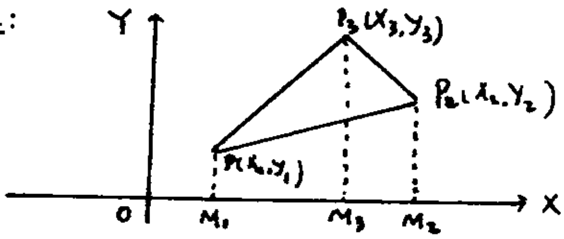
karena hasil kali kedua slope ini sama dengan -1 maka dua sisi segitiga ini tegak lurus.

1.10 Luas Segibanyak

Jika $P_1(x\ ,y\ )$, $P_2(x\ ,y\ )$, $P_3(x\ ,y\ )$ adalah titik dari suatu segitiga. Luas segitiga $P_1P_2P_3$ dalam suku-suku koordinat adalah:

$$A = \tfrac{1}{2}(x_1y_2+x_2y_3+x_3y_1-x_3y_2-x_2y_1-x_1y_3)$$

Bukti:



Luas segitiga = luas trapesium $M_1P_1P_3M_3$+ luas trapesium $M_3P_3P_2M_2$+ luas trapesium $M_1P_1P_2M_2$. Maka

$$A = \tfrac{1}{2}(y_1+y_3)(x_3-x_1)+\tfrac{1}{2}(y_3+y_2)(x_2-x_3)-\tfrac{1}{2}(y_1+y_2)(x_2-x_1)$$
$$= \tfrac{1}{2}(x_1y_2+x_2y_3+x_3y_1-x_1y_3-x_2y_1-x_3y_2$$

Ini dapat dinyatakan dalam bentuk determinan:

$$A = \tfrac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

Bentuk lain yang lebih mudah untuk luas suatu segitiga adalah sebagai berikut:

$$A = \tfrac{1}{2}\left|\begin{array}{cc} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{array}\right| \begin{array}{c} - \\ - \\ - \\ + \\ + \\ + \end{array}$$

Contoh:

Carilah luas pentagon yang titik sudutnya A(-5,2),B(-2,5) C(2,7),C(5,1),D(2,-4)

Jawab:

$$A = \tfrac{1}{2}\begin{vmatrix} -5 & -2 \\ -2 & 5 \\ 2 & 7 \\ 5 & 1 \\ 2 & -4 \\ -5 & -2 \end{vmatrix}$$

$= \tfrac{1}{2}$ (-5.5 + -2.7 +2.1 +5.-4 + 2.-2 - -5.-4 - 2.-1
-5.7 - 2.5 - -2.-2

$= \tfrac{1}{2}$ (-132) = -66. Jadi Luasnya adalah 66 satuan.

1.11 Persamaan Garis Lurus

Suatu garis lurus ditentukan oleh:

1. Sebuah titik dan koefesien arahnya(m).

   Misalkan garis itu mempunyai persamaan $y = mx + b$

   Titik (x_1, y_1) terletak pada garis itu, maka $y_1 = mx_1 + b$ $-$

   $$y - y_1 = m(x - x_1)$$

   Jadi garis yang diminta itu diketahui satu titik dan satu gradiennya, maka digunakan rumus:

   $$y - y_1 = m(x - x_1)$$

2. Dua buah titik yang berbeda (x_1, y_1) dan (x_2, y_2)

   Misalkan garis itu mempunyai persamaan $y = mx + b$ ... (1)

   (x_1, y_1) pada garis itu, berarti $y_1 = mx_1 + b$...(2)

   (x_2, y_2) pada garis itu, berarti $y_2 = mx_2 + b$ ...(3)

   (1)-(2) meghasilkan $y - y_1 = m(x - x_1)$ ....(4)

   (3)-(2) menghasilkan $y_2 - y_1 = m(x_2 - x_1)$ ....(5)

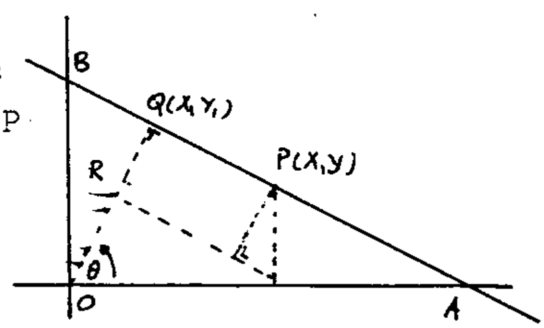
   (4):(5) menghasilkan Rumus .

   $$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

Bentuk lain dari persamaan suatu garis dikenal dengan nama persamaan normal Hesse.

Jika OQ = jarak dari O ke garis AB, maka untuk sebarang titik P (x,y) pada garis itu berlaku:

$$OQ = OR + RQ$$
$$= x \cos \theta + y \sin \theta$$



Misalkan OQ=n, maka

$$x \cos \theta + y \sin \theta = n$$

Persamaan tersebut merupakan persamaan garis lurus AB yang ditentukan oleh jarak n dan sudut antara jarak itu dengan sumbu x positif. Persamaan tersebut dinamakan Persamaan Normal Hesse.

Seandainya diberikan persamaan dalam Ax+By+C=0 kita dapat merubah persamaan tersebut dalam Normal Hesse, yaitu dengan cara membuat kesamaan: $x=\cos\theta$, $y=\sin\theta$. Kalikan semua suku dari $Ax+By+C=0$ dengan k, menjadi

$kAx+kBy+kC=0$, misalkan $kA=\cos\theta$, $kB=\sin\theta$ dan jaraknya $= -kC$ dengan syarat bahwa $-kC=$ positif.

$$k^2A^2 + k^2B^2 = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1 \text{ atau } k = \pm\frac{1}{\sqrt{(A^2+B^2)}}$$

Jadi bentuk Normal Hesse dari $Ax+By+c=0$ adalah:

$$\frac{A}{\sqrt{(A^2+B^2)}}x + \frac{B}{\sqrt{(A^2+B^2)}}y + \frac{C}{\sqrt{(A^2+B^2)}} = 0$$

atau

$$\frac{Ax+By+C}{\sqrt{(A^2+B^2)}} = 0$$

Tanda k dipilih sedemikian sehingga $-kC$ bernilai positif.

Contoh:

Tentukan jarak O kegaris $7x - 24x - 25 = 0$

Jawab:

$$k = \pm\frac{1}{\sqrt{(A^2+B^2)}} = \pm\frac{1}{\sqrt{(7^2+24^2)}} = \pm\frac{1}{25}$$

$C = -25$ agar $-kC$ bertanda positif pilih tanda positif untuk k, sehingga $-kC=-(1/25)(-25)=1$. Jadi jarak yang diminta $= 1$

1.12 Kedudukan dua Garis Lurus

Diketahui dua persamaan garis lurus:

$A_1x + B_1y + C_1 = 0$

$A_2x + B_2y + C_2 = 0$

Dalam hal ini terdapat dua persamaan dengan dua variabel. Untuk menghitung harga x dan y kalikan persamaan I dengan B_2 dan persamaan yang kedua dengan B_1 Maka diperoleh:

$$(A_1B_2 - A_2B_1)x = B_1C_2 - B_2C_1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

I. Jika $A_1B_2 - A_2B_1 \neq 0$ atau $\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$ tentulah akan

diperoleh nilai x yang tunggal begitu juga nilai y. Jadi persamaan itu mempunyai penyelesaian x dan y yang tunggal, atau persamaan itu mempunyai satu dan hanya satu penyelesaian x,y. Sarat diatas tersebut jika dipenuhi oleh dua persamaan maka persamaan tersebut dinamakan <u>tak bergantungan</u>. Titik (x,y) tersebut dinamakan titik potong kedua garis tersebut.

II. $A_1B_2 - A_2B_1 = 0$ atau $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$

a. $B_1C_2 - B_2C_1 \neq 0$ atau $\frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$

Persamaan (1) menjadi $0.x \neq 0$ yang tak menghasilkan sebuah harga x pun. Oleh karena itu kedua persamaan tak mempunyai penyelesaian. Susunan persamaan tersebut dinamakan berlawanan (bertentangan). Kedua persamaan tersebut tidak mempunyai titik persekutuan atau kedua garis tersebut sejajar.

b. $B_1C_2 - B_2C_1 = 0$ atau $\frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$ persamaan (1) menjadi $0.x = 0$ yang merupakan suatu identitas. Kedua persamaan itu mempunyai banyak penyelesaian, dan dinamakan <u>bergantungan</u>. Grafik kedua persamaan itu mempunyai banyak sekali titik persekutuan atau titik tersebut berimpit atau identik.

1.13 <u>Berkas Garis</u>

Kadang-kadang suatu garis Ax+By+C=0 ditulis dengan simbol $g = 0$ atau $g \equiv Ax+By+C=0$. Persamaan berkas suatu garis g_1 dan g_2 adalah :

$$g_1 + \lambda g_2 = 0,$$ λ harus linier, λ disebut parameter. Titik potong S kedua garis g_1 dan g_2 terletak pada garis g_1 dan g_2. Hal ini berarti koordinat S memenuhi baik g_1 dan g_2 maupun pada $g_1 + \lambda g_2 = 0$ untuk sebarang harga λ. Juga untuk tiap-tiap harga λ bentuk $g_1 + \lambda g_2 = 0$ selalu linier dan menghasilkan sebuah garis lurus yang melalui S. Jadi dapat disimpulkan bahawa:

Semua garis lurus yang didapat dari $g_1 + \lambda g_2 = 0$ selalu melalui titik potong kedua garis g_1 dan g_2

Contoh:

Diketahui dua garis lurus $y = x - 1$ dan $y = -\frac{1}{2}x + 2$
Tentukan persamaan garis lurus yang melalui titik pangkal dan titik potong kedua garis itu.

Jawab:

Berkas garis adalah: $(y-x+1)+\lambda(y+\frac{1}{2}x-2) = 0$ atau

$$(1+\lambda)y-(1-\frac{1}{2}\lambda)x+(1-2\lambda) = 0 \ldots\ldots (*)$$

Agar garis tersebut melalui titik pangkal, konstantanya harus sama dengan 0 atau $1-2\lambda) = 0$ atau $\lambda = \frac{1}{2}$.
Jadi garis yang diminta mempunyai persamaan:

$$(1+\tfrac{1}{2})y - (1-\tfrac{1}{4})x=0 \text{ atau } y = \tfrac{1}{2}x$$

Contoh:

Tentukan persamaan garis lurus yang melalui titik potong kedua garis diatas dan bersudut 60^0 dengan sumbu x positif.

Jawab:

Lihat diatas berkas garisnya. (*) memiliki koefesien arah:

$$\frac{1-\frac{1}{2}\lambda}{1+\lambda} = \text{tg } 60^0 = \sqrt{3} \text{ Jadi } 1-\tfrac{1}{2}\lambda)=(1+\lambda)\sqrt{3}$$

Dengan memasukkan harga λ ini ke (*) itu diperolehlah persamaan yang diminta.

1.14 Persamaan Garis Bagi Sudut

Persamaan garis bagi sudut antara dua garis:

L_1 : $ax + by + c = 0$
L_2 : $px + qy + r = 0$ adalah:

$$\frac{ax + by + c}{\sqrt{(a^2+b^2)}} = \pm \frac{px + qy + r}{\sqrt{(p^2+q^2)}}$$

Contoh:

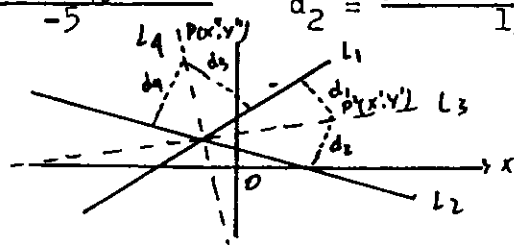
Tentukan persamaan garis bagi sudut antara garis:

L_1 : $3x-4y+8 = 0$
L_2 : $5x+12-15 = 0$

Jawab:

Jika $P'(x',y')$ adalah titik pada garis bagi L_3 (lihat gambar disebelah) maka:

$$d_1 = \frac{3x' - 4y' + 8}{-5} \qquad d_2 = \frac{5x' + 12y' - 15}{13}$$



Untuk setiap titik pada L_3, d_1 dan d_2 sama besarnya.
P' dan O berada pada sisi yang berlawanan dari L_2. Dari sisini d_1 adalah negatif dan d_2 adalah positif dan $d_1 = - d_2$
Jadi tempat kedudukan P' adalah

$$\frac{3x' - 4y' + 8}{-5} = - \frac{5x' + 12y' - 15}{13}$$

Setelah disederhanakan diperoleh

$$14x - 112y + 179 = 0.$$

Dengan cara yang sama persamaan L_4 adalah

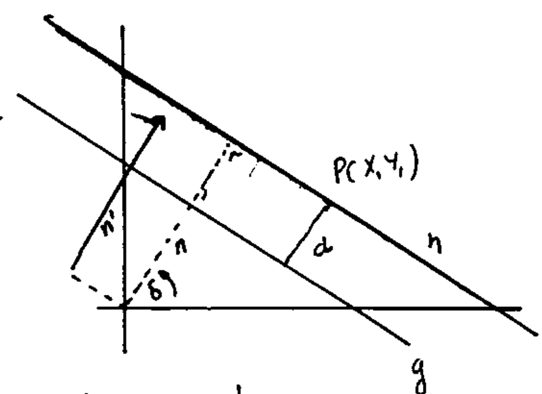
$$64x + 8y + 29 = 0$$

Disini jelas bahwa L_3 dan L_4 saling tegak lurus.

Sebagai diketahui persamaan normal Hesse adalah $x \cos \theta + y \sin \theta = n$ dengan n = jarak dan titik pangkal kegaris dan θ = sudut antara jarak itu dengan sumbu x positif. Misalkan garis itu g. Kalau titik itu bukan titik pangkal, tetapi titik sebarang P(x,y) diluar g. Bagaimanakah mencari jarak itu ?

Lihat gambar.

Misalkan jarak yang diminta = d
$d = n' - n$. Tarik garis h melalui P dan sejajar g.
$h = x \cos \theta + y \sin \theta = n'$.
P terletak pada h, berarti :
$x_1 \cos \theta + y_1 \sin \theta = n'$



Jadi $d = |n' - n| = |x_1 \cos \theta + y_1 \sin \theta - n|$
Ternyata bentuk ruas kanan dari pada $d = x_1 \cos \theta + y \sin \theta - n$. tepat sama persamaan normal garis g, setelah salah satu ruas menjadi nol, dan setelah koordinat-koordinatnya P (yang tidak terletak pada g) diisikan.

Dalil :

Kalau $P(x_1, y_1)$ dan $g = x \cos \theta + y \sin \theta - n = 0$ maka jarak dari P ke garis g adalah $x_1 \cos \theta + y_1 \sin \theta - n$

Jika diketahui dalam bentuk umum $Ax + By + C = 0$, dan $P(x_1, y_1)$, maka jarak dari P ke garis g ialah

$$d = \left| \frac{Ax_1 + By_1 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right|$$

<u>Contoh</u>

Carilah jarak d dari :

a. garis $8x + 15y - 24 = 0$ ke titik $(-2,-3)$

b. garis $6x - 8y + 5 = 0$ ke titik $(-1,7)$

<u>Jawab</u>

a. Bentuk normal dari persamaan garis tersebut adalah

$$\frac{8x + 15y - 24}{\sqrt{(8^2 + 15^2)}} = \frac{8x + 15y - 24}{17} = 0$$

$$d = \left| \frac{8(-2) + 15(-3) - 24}{17} \right| = \left| -\frac{85}{17} \right| = + 5.$$

b. Bentuk normal dari persamaan tersebut adalah

$$\frac{6x - 8y + 5}{-\sqrt{(6^2 + (-8)^2)}} = \frac{6x - 8y + 5}{-10} = 0$$

$$d = \frac{6(-1) - 8(7) + 5}{-10} = \frac{-57}{-10} = 5,7$$

Latihan 2

1. Carilah persamaan dari tiap garis dengan data berikut :
   a. $m = \frac{1}{3}$ dan $p = (2,3)$
   b. $m = -4$ dan titik potong sumbu $y = 2$
   c. $h = -1$ dan $k = 3$
   d. $m = \frac{1}{2}$ dan titik potong sumbu $x = -5$
   e. $h = 7$ dan $k = -3$
   f. $m = \frac{3}{4}$ dan $p = (3,-5)$
   g. $m = \frac{2}{5}$ dan $k = -2$
   h. $s = 0$ dan $k = 5$
   i. titik potong sumbu $x = 5$ dan $s = -2$
   j. $h = -3$ dan $k = -5$
   Note : h dan k adalah perpotongan garis dengan sumbu x dan y.
2. Carilah s jika garisnya melalui titik (3,2) dan dengan sumbu x dan sumbu y membentuk suatu segitiga yang mempunyai luas 16 satuan luas.
3. Perlihatkan bahwa $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ h & 0 & 1 \\ 0 & k & 1 \end{vmatrix} = 0$ adalah persamaan garis dengan titik potong sumbu x adalah h dan titik potong sumbu y adalah k.
4. Tulislah dalam bentuk persamaan garis normal
   a. $3x - 4y + 12 = 0$
   b. $x + 2y + 3 = 0$
   c. $3x - 4y - 12 = 0$
   d. $x - y - 2 = 0$
   e. $5x - 12y - 65 = 0$
   f. $2x - 3y = 0$
   g. $2x - 5 = 0$
   h. $3y + 2 = 0$
   i. $x - 3y = 0$
   j. $2x - 2y - 4 = 0$
5. Tentukan jarak antara A dan B jika A (-5,1) dan B (-2,-3) juga untuk A (-1,5) dan B (4,-7).
6. Tentukan sebuah titik P yang terletak pada AB dengan A (-5,1) dan B (3,-5), sehingga AP : PB = 3 : 5.
7. Diketahui A (-5,1), B (3,-5) dan C (2,2). Hitunglah luas segitiga ABC.
8. Tentukanlah titik berat segitiga ABC dalam soal nomor 7.

516.3
Mus
J,

PERPUSTAKAAN
PADANG

9. Dari suatu jajaran genjang ABCD diketahui titik sudut A, B dan C (lihat soal no. 7). Tentukan titik sudut D dengan jalan memakai sifat :
   a. kedua diagonal berpotongan dititik tengahnya.
   b. dua sisi yang berhadapan sejajar dan sama panjang.
   c. dua pasang sisinya masing-masing sejajar.
10. Dari suatu segitiga ABC sama sisi diketahui, bahwa A (-1,-3) dan B (5,5). Tentukan titik sudut C.
11. Gambar grafiknya $x + y + 1 = 0$ juga $x - 2y - 3 = 0$.
12. Gambar grafiknya $x^2 + y^2 = 1$.
13. Gambar grafiknya $x^2 + 2y^2 = 3$.
14. Gambar grafiknya $y = x^2 - 4$.
15. Gambar grafiknya $x = y^2 - 4$.
16. Gambar grafiknya $x^2 - y^2 = 1$.
17. Tentukan persamaan garis lurus yang melalui (0,0) dan yang bersudut 45^o dengan sumbu x, juga yang bersudut 150^o.
18. Buktikan bahwa persamaan garis lurus yang melalui (a,0) dan (0,b) ialah :

    $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ yang disebut persamaan segmen suatu garis lurus.

19. Tentukan persamaan garis lurus yang melalui (1,0) dan (0,2), juga untuk (-2,0) dan (0,3).
20. Tentukan persamaan garis lurus yang melalui (1,2) dan (-3,4).
21. Juga untuk (2,-2) dan (2,4).
22. Tentukan persamaan garis lurus yang melalui (1,0) dan sejajar garis $y = 2x$.
23. Tentukan persamaan garis lurus yang melalui (0,-1) dan yang tegak lurus garis $y = 2x$.
24. Tentukan persamaan garis lurus yang melalui (2,1) dan y yang sejajar garis $x + 2y + 3 = 0$.
25. Tentukan persamaan garis lurus yang melalui (2,0) dan yang bersudut 45^o dengan garis $y = 2x$.
26. Buktikan bahwa dalam segitiga ABC (lihat soal no. 7) dua sisi tegak lurus sesamanya.

PERPUSTAKAAN IKIP PADANG
KOLEKSI BIDANG ILMU
TIDAK DIPINJAMKAN
KHUSUS DIPAKAI DALAM PERPUSTAKAAN

27. Tentukan persamaan garis tinggi dari C (soal no. 7)
28. Tentukan persamaan garis berat dari A (soal no. 7).
29. Apakah ketiga titik $(1,-3)$, $(4,+3)$ dan $(2,-1)$ terletak pada satu garis ?
30. Apakah suatu garis lurus yang ditentukan oleh $(2,-3)$ dan $(-4,5)$ melalui titik pangkal O ?
31. Apakah artinya $y = ax + 3$ dan $y = 3x + a$, bila a dapat berubah-ubah?
32. Selidiki apakah titik-titik $(2,-3)$ dan $(-3,4)$ terletak pada garis $3x + 2y + 1 = 0$. Dalam hal manakah garis $y = 3x + a$ melalui titik $(2,2)$?
33. Tentukan titik potong garis $x + 2y - 3 = 0$ dengan sumbu x juga dengan sumbu y.
34. Tentukan sebuah titik C pada garis $y = -2x$, sehingga $AC = BC$, jika A $(5,1)$ dan B $(3,7)$.
35. Tentukan persamaan garis lurus yang melalui $(2,2)$ dan yang berpotongan ?, sejajar ?, berimpit ?, tentukan titk potongan garis-garis $x + 2y + 3 = 0$ dan $y = x - 3$.
36. Tentukan persamaan garis lurus yang melalui $(2,2)$ dan yang bersudut 45^0 dengan garis $x - 2y + 3 = 0$
37. Diketahui jajaran genjang ABCD dengan A $(-1,1)$, B $(5,4)$ dan D $(0,6)$. Tentukan titik C dan luas ABCD.
38. Diketahui segitiga ABC dengan A $(-1,-2)$ dan B $(7,2)$. Garis tinggi dari C melalui$(0,1)$, sedang $AC = 5\ \ 2$. Tentukanlah C dan jari-jari lingkarannya.
39. Selidiki, apakah garis-garis $x + 2y + 3 = 0$, $3x + 2y + 1 = 0$ dan $y + 2x = 0$ melalui satu titik. Titik manakah itu.
40. Dalam hal manakah ketiga garis $ax + 2y + 3 = 0$, $y = -2$ dan $x = 1$ tidak melalui satu titik?
41. Tentukan persamaan garis sumbu segmen garis AB, kalau A $(3,1)$ dan B $(1,-3)$.
42. Tentukan persamaan kedua garis lurus yang melalui P $(-2,5)$ sedemikian, sehingga titik-titik A $(3,-7)$ dan B $(-4,1)$ berjarak sama terhadap garis itu.
43. Diketahui trapesium ABCD dengan A $(-1,-1)$, B $(7,5)$ dan C $(2,6)$ sedangkan $AB // DC$ dan $CD = 5$. Tentukan titik sudut D.

44. Dua sisi suatu jajaran genjang adalah garis-garis $2x - 3y + 6 = 0$ dan $x + 2y = 4$. Salah satu titik puncaknya $(1,-3)$. Carilah persamaan dua sisi yang lainnya.
45. Diketahui trapesium ABCD dengan A $(-2,-2)$, B $(7,1)$ dan D $(1,4)$, sedangkan AB//DC dan BC = 5. Tentukan C dan luas ABCD.
46. Tentukan persamaan garis lurus melalui A $(-5,3)$, yang memotong sumbu-sumbu koordinat di P dan Q, sehingga OP : OQ = 5 : 3.
47. Tentukan persamaan garis lurus melalui A $(-5,3)$, yang memotong sumbu-sumbu koordinat di P dan Q, sehingga AP : AQ = 5 : 3.
48. Tentukan jarak antara $(-3,2)$ dan garis $5x + 12y + 30 = 0$ dengan :
    a. memakai rumus langsung.
    b. menentukan dulu garis tegak lurus, kemudian titik potong kedua garis, akhirnya jarak.
49. Tentukan persamaan garis lurus yang melalui titik potong kedua garis $4x + 16y - 5 = 0$ dan $3x - 4y + 2 = 0$, dan yang tegak lurus salah satu dari kedua garis itu.
50. Buktikan bahwa persamaan garis bagi sudut antara dua garis $ax + by + c = 0$ dan $px + qy + r = 0$ adalah :

$$\frac{ax + by + c}{\sqrt{(a^2 + b^2)}} = \frac{px + qy + r}{\sqrt{(p^2 + q^2)}}$$

51. Buktikan bahwa kedua garis bagi itu tegak lurus sesama nya.
52. Tentukan persamaan garis bagi sudut antara dua garis $x - 2y + 1 = 0$ dan $y = 2x - 1$.
53. Pertanyaan yang serupa dengan memakai rumus untuk sudut.
54. Diketahui garis-garis $x \quad 3 + y = 4$ dan $x + y = 3 \quad 2$. Pada garis bagi sudut antara kedua garis itu terletak titik P, yang berabsisi 2. Tentukan persamaan garis OP.
55. Dari suatu trapesium samakaki ABCD diketahui bahwa A$(-1,-1)$, B $(5,2)$, D $(0,2)$, sedangkan AB sejajar DC.
    Tentukan :
    a. panjang AD, AB dan BC.

b. persamaan garis DC.
c. jarak antara AB dan DC.
d. koordinat titik C.
e. titik potong kedua diagonal.
f. sudut antara kedua diagonal itu.

BAB II

L I N G K A R A N

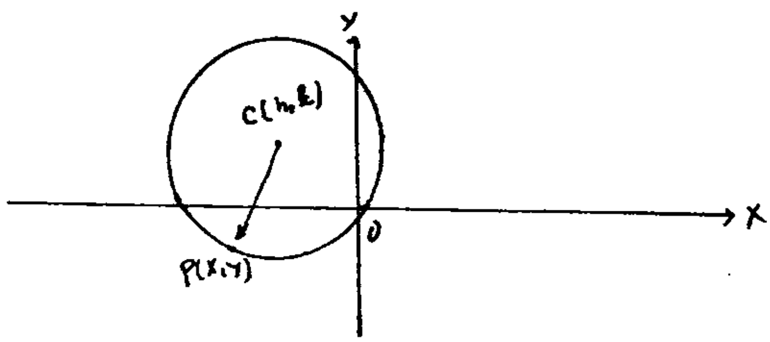
2. 1. Persamaan Standard Dari Lingkaran

Lingkaran adalah tempat kedudukan titik pada bidang datar, sehingga setiap titik pada lingkaran itu berjarak sama terhadap titik tertentu dalam lingkaran. Jarak yang sama atau jarak yang tetap disebut jari-jari (radius), sedangkan titik tertentu disebut pusat (center). Jika, dalam gambar (2-1), h dan k adalah koordinat titik pusat C, dan x dan y koordinat suatu titik P yang berjarak r dari titik tetap, dengan r adalah jari-jari atau CP = r, sehingga kita dapatkan :

$$\sqrt{(x - h)^2 + (y - k)^2} = r$$

atau

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2 \qquad \ldots\ldots\ (2\text{-}1)$$



Sebaliknya jika x_1 dan y_1 adalah pasangan koordinat suatu titik yang memenuhi persamaan (2-1), maka $P_1 = (x_1,y_1)$ adalah suatu titik pada lingkaran. Hal ini dapat dibuktikan sebagai berikut : Karena (x_1,y_1) memenuhi persamaan,
$(x_1 - h)^2 + (y_1 - k)^2 = r^2$
Tetapi besar atau ukuran dari vektor u = CP_1 yang dibentuk dari C = (h,k) ke $P_1 = (x_1,y_1)$ adalah sama dengan r. Jadi kita dapatkan bahwa CP_1 = r dan dalam keadaan yang demikian berarti titik P_1 terletak pada lingkarang dengan titik pusat C dan jari-jari r, yaitu persamaan (2-1). Karenanya persamaan (2-1) disebut persamaan standard dari lingkaran.

Seandainya h = k = 0, pusat lingkaran di titik pangkal koordinat dan persamaannya menjadi :

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2\text{-}2)$$

Kita sebut persamaan (2-2) sebagai persamaan sederhana dari lingkaran (persamaan pusat lingkaran).

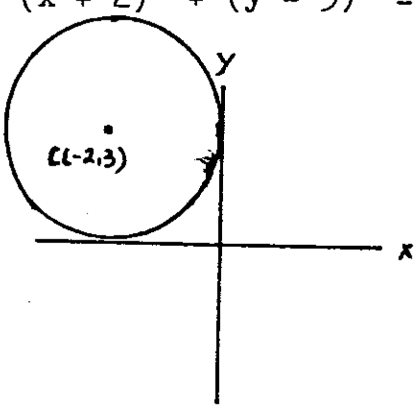
Contoh 2-1.

Carilah persamaan dari suatu lingkaran yang mempunyai pusat di titik (-2,3) dan jari-jari 2.

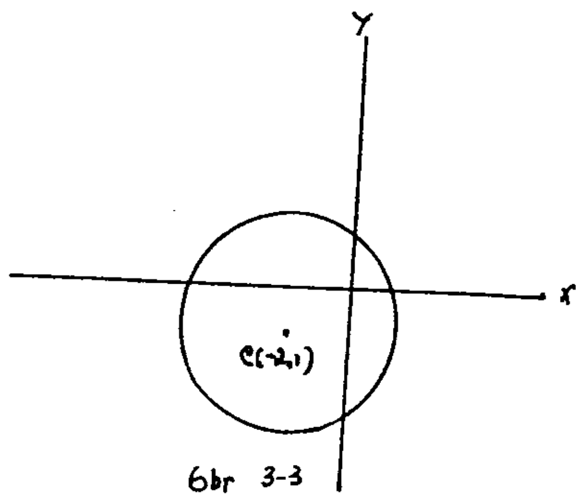
Penyelesaian

Lingkarannya diperlihatkan dalam gambar (2-2). Adapun persamaan standar dari lingkaran, dapat kita tulis :

$$(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 4$$



GBr 3-2



Gbr 3-3

Contoh 2-2

Carilah pusat dan jari-jari lingkaran yang mempunyai persamaan $(x + 2)^2 + (y + 1)^2 = 9$.

Penyelesaian

Karena persamaan standar dari lingkaran adalah $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$, maka h = -2, k = -1, dan r = 3. Jadi gambarnya diperlihatkan dalam gambar (2-3), dengan pusat di titik C = (-2,-1) dan jari-jari 3.

Contoh 2-3

Persamaan lingkaran manakah yang berpusat di titik C (-2,1) dan melalui titik P (1,3) ?

Penyelesaian

Karena CP = (3,2), kita dapatkan : r = CP = 13. Menurut persamaan (3-1), persamaan lingkaran yang dicari adalah : $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 13$

Contoh 2-4

Carilah persamaan lingkaran yang mempunyai titik pusat (2,-1) dan menyinggung terhadap garis $3x - 4y + 5 = 0$.

Penyelesaian

Karena lingkaran menyinggung suatu garis berarti jarak dari titik pusat terhadap garis adalah panjang jari-jari nya, dan

$$r = \left| \frac{3(2) - 4(-1) + 5}{5} \right| = 3$$

Jadi, persamaan lingkaran yang kita cari adalah :

$(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 9$.

L A T I H A N 1

1. Carilah persamaan dan sketsa grafiknya untuk tiap lingkaran berikut :
   a. pusat (2,-1) dan r = 5
   b. pusat (-3,2) dan r = 7
   c. pusat (2,4) dan r = 1
   d. pusat (4,-1) dan r = 1,5
   e. pusat (3,-2) dan r = 6
   f. pusat (-5,-6) dan r = 7
2. Carilah persamaan tiap lingkaran berikut dan gambarlah sketsa grafiknya.
   a. pusat (-1,3) dan melalui (2,-4)
   b. pusat (0,2) dan melalui (-1,-4)
   c. pusat (3,0) dan melalui (7,3)
   d. pusat (3,-3) dan menyinggung sumbu-sumbu koordinat.
3. Carilah persamaan lingkaran yang titik ujung garis tengahnya (diameter), (2,3) dan (-1,5).
4. Carilah persamaan tiap lingkaran berikut dan gambarlah sketsa grafiknya !
   a. jari-jari 6 dan menyinggung sumbu-sumbu koordinat
   b. jari-jari 4 dan menyinggung kedua sumbu koordinat
   c. jari-jari r dan menyinggung kedua sumbu koordinat
5. Carilah persamaan tiap lingkaran berikut, dan gambarlah sketsa grafiknya !

PERPUSTAKAAN PADANG

a. pusat (6,4) dan menyinggung sumbu y
b. pusat (6,4) dan menyinggung sumbu x
c. pusat (-1,3) dan menyinggung garis $3x - 4y + 12 = 0$

6. Carilah pusat jari-jari untuk tiap lingkaran berikut dan gambarlah sketsa grafiknya !
a. $(x-3)^2 + (y-9)^2 = 16$ d. $x^2 + (y+3)^2 = 9$
b. $(x+2)^2 + (y+1)^2 = 25$ e. $(x+4)^2 + y = 25$
c. $(x-1)^2 + (y+6)^2 = 8$ f. $x^2 + y^2 = 7$

7. Carilah persamaan tiap lingkaran berikut, dan gambarlah sketsa grafiknya !
a. Jari-jari 5 dan menyinggung kedua sumbu koordinatnya
b. Pusat (3,-1) dan menyinggung sumbu x.
c. Pusat (-4,-2) dan menyinggung sumbu y
d. Pusat (-1,-4) dan menyinggung garis $4x + 3y - 6 = 0$

8. Carilah persamaan lingkaran dengan segmen garis hubung titik (-3,0) dan (1,-4) sebagai garis tengahnya.

9. Sebuah lingkaran dengan pusat (2,-3) dan menyinggung garis $3x + 4y - 4 = 0$. Bagaimanakah bentuk persamaannya.

10. Carilah persamaan-persamaan lingkaran yang menyinggung sumbu y dan masing-masing melalui titik (1,-2).

2. 2. Persamaan Umum Lingkaran

Bentuk Umum persamaan lingkaran adalah :

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$$

(A, B dan C boleh nol, asal tidak $A = B = C = 0$). Persamaan ini disebut juga persamaan normal dan disingkat simbolis menjadi $L = 0$. Koeffisien - koeffisiennya x^2 dan y^2 satu dan suku dengan xy tidak ada.

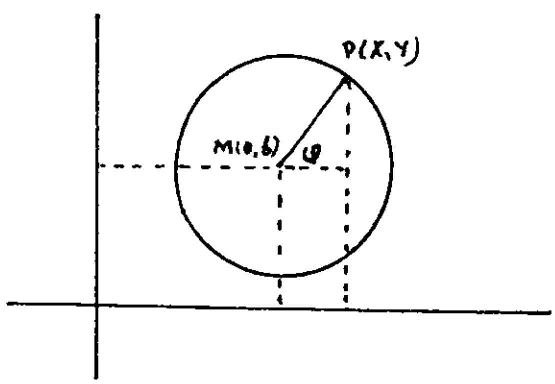
Pusatnya $(-\frac{1}{2}A, -\frac{1}{2}B)$ dan

Jari-jari $= \sqrt{-C + \frac{1}{4}A^2 + \frac{1}{4}B^2}$

Analog dengan persamaan parameter untuk suatu garis lurus, terdapat juga suatu persamaan parameter lingkaran.

Lihat gambar.

Untuk tiap titik $P(x_1, y_1)$ yang terletak pada lingkaran berlaku : $x_1 = a + r \cos\varphi$ dan $y_1 = b + r \sin\varphi$ dihitung dari arah sumbu x positif, mengelilingi M sampai 360^o.



Jika titik P dijalankan , maka :

$$\boxed{\begin{aligned} x &= a + r \cos\varphi \\ y &= b + r \sin\varphi \end{aligned}}$$

merupakan persamaan parameter yang di minta.

Catatan :

Bentuk diatas hampir menyerupai persamaan parameter suatu garis lurus, yakni $x = x_1 + t \cos\alpha$

$$y = y_1 + t \sin\alpha$$

Disini P (x_1,y_1) diketahui, tetap , sedangkan t berubah = parameternya , yaitu jarak dari titik-titik Q ketitik tetap P. Dari persamaan parameter lingkaran yang diketahui ialah M (a,b), r tetap, sedangkan = parameternya, berubah kearah positif dan berputar berlawanan dengan arah jarum jam sampai pada jari-jari MQ.

Contoh

Tentukan sebuah lingkaran yang melalui tiga buah titik (2,2), (2,-4) dan (5,-1).

Cara I Jika yang diminta persamaan pusat, misalkan lingkaran itu mempunyai persamaan $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$

Melalui (2,2) berarti $(2-a)^2 + (2-b)^2 = r^2$......(1)

Melalui (2,-4) berarti $(2-a)^2 + (-4-b)^2 = r^2$....(2)

Melalui (5,-1) berarti $(5-a)^2 + (-1-b)^2 = r^2$....(3)

Tiga persamaan debgab tiga bilangan anu a, b, dan r dapat diselesaikan.

(1) - (2) menghasilkan $(2-b)^2 - (-4-b)^2 = 0$.

atau $(2-b+4+b)(2-b-4-b) = 6(-2-2b) = 0$

$\longrightarrow$ b = - 1 .

Isikan di (3) : $(5-a)^2 + 0 = r^2$ kurangi

Isikan di (1) : $(2-a)^2 + 9 = r^2$

$(25-10a+a^2-4+4a-a^2-9 = 0 \longrightarrow -6a + 12 = 0$

$\longleftarrow$ a = 2. dan r = 3.

Maka lingkaran itu $= (x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 9$.

Pusatnya (2,-1) dan jari-jarinya = 3

Cara II Jika yang diminta persamaan umumnya, misalkan lingkaran itu mempunyai persamaan :

$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$

Koordinat-koordinat ketiga titik itu memenuhi persamaan, karena titik-titik itu terletak pada lingkaran Jadi terdapat juga tiga persamaan dengan tiga bilangan anu A,B dan C, maka soal itu dapat diselesaikan Ternyata A = -4, B = 2 dan C = -4. Jadi persamaan yang diminta ialah : $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 = 0$

Catatan

Cara yang mana yang lebih baik, hal ini tergantung pada sifatnya soal itu sendiri. Kalau pusat dan jari-jarinya diminta juga, hendaknya dipakai cara satu.

L A T I H A N 2

Carilah pusat dan jari-jari dari tiap lingkaran berikut:

1. $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$
2. $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 12 = 0$
3. $2x^2 + 2y^2 - 3x + 4y - 1 = 0$
4. $3x^2 + 3y^2 + 2x - 5y - 4 = 0$
5. $3x^2 + 3y^2 - 10 = 0$
6. $x^2 + y^2 + 4x + 16y + 12 = 0$
7. $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$
8. $4x^2 + 4y^2 - 2x + 3y - 16 = 0$
9. $x^2 + y^2 - 2x + 3y = 0$
10. $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 25 = 0$
11. $x^2 + y^2 -2x + 4y + 5 = 0$
12. $x^2 + y^2 + x - y + 1 = 0$
13. $x^2 + y^2 + 6x -2y + 15 = 0$
14. $2x^2 + 2y^2 + 3x - 5y + 17 = 0$
15. Titik (8,5) adalah tengah-tengah tali busur suatu lingkaran yang mempunyai persamaan $x^2 + y^2 - 4x + 8y - 124 = 0$ Tentukanlah persamaan tali busurnya.
16. Carilah persamaan-persamaan lingkaran yang masing-masing menyinggung sumbu-sumbu koordinat, dan keduanya melalui titik (2,4).
17. Carilah persamaan-persamaan lingkaran yang masing-masing pusatnya terletak pada garis $3x - 5y = 8$ dan menyinggung sumbu-sumbu koordinat.

2.3. Mencari Persamaan Lingkaran Yang memenuhi Syarat-syarat Tertentu

Sekarang kita tinjau kembali persamaan lingkaran dalam bentuk standar, yaitu :

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r$$

Dalam bentuk ini terkandung tiga konstanta bebas h, k dan r. Demikian pula dalam bentuk umumnya, yaitu :

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

terdapat tiga konstanta bebas D, E, dan F.

Seandainya dari syarat-syarat yang diketahui kita dapat menurunkan tiga persamaan bebas dalam tiga konstanta D, E dan F atau h, k dan r, maka secara aljabar tiga konstanta bebas tersebut dapat dicari. Proses pencariannya sejalan dengan tujuan kita untuk mencari persamaan lingkaran sebagai tafsiran geometrisnya. Untuk mendapatkan gambaran yang lebih jelas, kita perhatikan langkah-langkah dalam contoh berikut :

Contoh

Carilah persamaan lingkaran yang melalui titik (-1,1), (2,3) dan (1,-2).

Penyelesaian

Bentuk Umum Persamaan Lingkaran :

$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$, dan titik yang diketahui (-1,1), (2,3) dan (1,-2) terletak pada lingkaran itu, maka kita dapatkan tiga buah persamaan simultan dalam D, E dan F, yaitu

(1) $1 + 1 - D + E + F = 0$

(2) $4 + 9 + 2D + 3E + F = 0$

(3) $1 + 4 + D - 2E + F = 0$

Secara determinan, kita cari D, E dan F seperti berikut :

$$D = \frac{\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -13 & 3 & 1 \\ -5 & -2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}} \quad \frac{\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -11 & 2 & 0 \\ -3 & -3 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{39}{-13} = -3$$

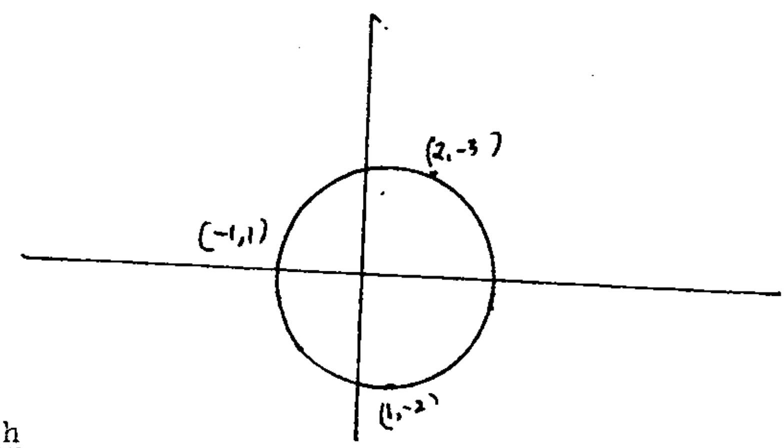
$$E = \frac{\begin{vmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 2 & -13 & 1 \\ 1 & -5 & 1 \end{vmatrix}}{-13} = \frac{\begin{vmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 3 & -11 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \end{vmatrix}}{-13} = \frac{-9+22}{-13} = -1$$

$$F = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & -13 \\ 1 & -2 & -5 \end{vmatrix}}{-13} = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & -17 \\ 1 & -1 & -7 \end{vmatrix}}{-13} = \frac{-(-15-17)}{-13}$$

$$= -4$$

Jadi persamaan yang kita cari adalah $x^2 + y^2 - 3x - y - 4 = 0$
Lingkarannya diperlihatkan dalam gambar

Anda dapat memeriksanya bahwa koordinat ketiga titik yang diketahui terletak pada persamaan lingkaran.



Contoh

Carilah persamaan lingkaran yang memuat titik-titik $P_1(-1,2)$ dan $P_2(3,0)$ dan mempunyai titik pusat yang terletak pada garis $x + 3y - 6 = 0$

Penyelesaian

Menurut persamaan standar dari lingkaran $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$ kita dapatkan :

(1) $(-1-h)^2 + (2-k)^2 = r^2$

(2) $(3-h)^2 + (0-k)^2 = r^2$

(3) $h + 3k - 6 = r^2$

Dari persamaan (1) dan (2), kita tulis :

(1') $1 + 2h + h^2 + 4 - 4k + k^2 = r^2$

(2') $9 - 6h + h^2 + k^2 = r^2$

Kurangkanlah persamaan (2') terhadap persamaan (1'). kita dapatkan :

$$-8 + 8h + 4 - 4k = 0$$

atau

(4) $\qquad 2h - k = 1$

Selesaikan persamaan (3) dan (4) secara simultan, kita cari :

$$h = \frac{\begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{9}{7} \qquad \text{dan} \qquad k = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{11}{7}$$

Berarti koordinat titik pusat lingkaran adalah :

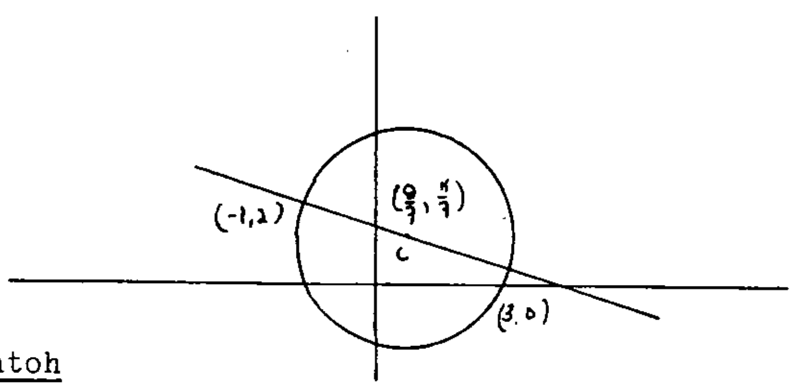
$$C = \left(\frac{9}{7} , \frac{11}{7} \right)$$

Untuk mencari r, kita substitusikan $h = \frac{9}{7}$ dan $k = \frac{11}{7}$ dalam persamaan (2) dan didapat :

$r^2 = \left(3 - \frac{9}{7} \right)^2 + \left(0 - \frac{11}{7} \right)^2$, atau $r = \frac{265}{7}$. Jadi persamaan standar lingkaran adalah :

$$\left(x - \frac{9}{7} \right)^2 + \left(y - \frac{11}{7} \right)^2 = \frac{265}{49}$$

Lingkarannya diperlihatkan dalam gambar



Contoh

Tulislah dalam bentuk determinan untuk persamaan lingkaran yang melalui tiga titik yang tidak segaris (x_1,y_1), (x_2,y_2) dan (x_3,y_3).

Penyelesaian

Secara determinan persamaan lingkaran yang dicari dapat dinotasikan dalam bentuk determinan 4 baris dan 4 kolom yang sama dengan nol, seperti berikut ini:

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2+y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Untuk mendapatkan persamaan determinan diatas, prosesnya dipersilahkan pada anda untuk mencobanya.

L A T I H A N 2

1. Carilah persamaan lingkaran yang melalui tiap himpunan tiga titik berikut :
   a. (2,0), (1,-3) dan (3,1)
   b. (1,-1), (2,1) dan (-3,2)
   c. (3,2), (-1,1) dan (1,-1)
   d. (3,4), (2,-1) dan (1,2)
   e. (0,0), (2,0) dan (0,4)
   f. (1,6), (2,5) dan (-6,4)
   g. (3,2), (2,-3) dan (-2,4)
   h. (1,-1), (-1,1) dan (0,5)
2. Carilah persamaan lingkaran yang membatasi segitiga dengan titik puncak $P_1(0,0)$, $P_2(-1,4)$, dan $P_3(2,6)$.
3. Carilah persamaan lingkaran yang membatasi segitiga dengan sisi garis $y = 0$, $x - y = 0$ dan $x + 4y - 5 = 0$
4. Dalam tiap masalah berikut, carilah persamaan tiap lingkaran dengan data yang diketahui seperti berikut :
   a. Pusat pada sumbu y dan lingkaran melalui titik-titik (1,2) dan (-3,1).
   b. Pusat pada garis $x + 2y - 6 = 0$ dan melalui titik (5,4) dan (1,-2).
   c. Pusat pada garis $x - y + 4 = 0$ menyinggung kedua sumbu koordinat.

d. Menyinggung kedua sumbu koordinat dan melalui titik $(2,1)$.

e. Menyinggung garis $3x - 4y - 31 = 0$ di titik $(1,-7)$ dan mempunyai jari-jari 5.

f. Melalui titik $(1,-1)$ dan pusat terletak pada garis-garis $x + 2y - 4 = 0$ dan $2x - 4y + 13 = 0$.

g. Menyinggung garis $x + 4y - 7 = 0$ di titik $(3,1)$ dan memuat titik $(6,-2)$.

5. Suatu lingkaran menyinggung garis $2x + y - 7 = 0$ di titik $(4,-1)$ dan memuat titik $(7,2)$. Carilah persamaannya.
6. Carilah persamaan lingkaran yang menyinggung garis $x + y = 6$ di titik $(2,4)$ dan mempunyai jari-jari 2.
7. Lingkaran yang menyinggung garis $x + 4y - 5 = 0$ di titik $(1,1)$ dan memuat titik $(4,-4)$. Carilah persamaannya.
8. Carilah persamaan lingkaran yang menyinggung garis $x - 3y + 5 = 0$ di titik $(-2,1)$ dan mempunyai jari-jari $3\sqrt{10}$.
9. Carilah persamaan lingkaran yang mempunyai pusat dalam kuadran pertama, memuattitik $(0,9)$ dan $(3,10)$ dan menyinggung sumbu x.
10. Dua buah lingkaran melalui titik pangkal, serta menyinggung garis $x + y = 8$ dan kedua pusatnya terletak pada garis $x = 2$. Carilah kedua persamaan lingkaran tersebut.
11. Carilah persamaan lingkaran yang menyinggung garis $2x + 3y = 12$ dan melalui titik-titik $(-7,0)$ dan $(5,-8)$.
12. Carilah persamaan-persamaan lingkaran yang menyinggung garis $2x - y + 6 = 0$ di titik $(-1,4)$ dan masing-masing mempunyai jari-jari $3\sqrt{5}$.
13. Sebuah lingkaran yang dilingkungi oleh segitiga yang dibentuk oleh sumbu- sumbu koordinat dan garis $3x-4y+12=0$. Carilah persamaannya.
14. Buktikanlah bahwa himpunan semua titik tengah dari tali-busur-talibusur yang sejajar pada lingkaran adalah garis tengah dari lingkaran tersebut.
15. Bicarakanlah himpunan titik-titik untuk $x^2 + y^2 = 25$ dan

$x + y$ 7. Apakah dua titik (3,4) dan (4,3) anggota dari himpunan tersebut.

2.4 Garis dan Lingkaran

Untuk menyelidiki apakah suatu garis memotong suatu lingkaran, dimisalkan (x',y') merupakan titik potongnya.
Dan misalkan $g \equiv y = ax + b$ dan $L \equiv x^2 + y^2 = r^2$.
(x',y') pada g, berarti : $y' = ax' + b$ ....(1)
(x',y') pada L, berarti : $x'^2 + y'^2 = r^2$.
Dua persamaan dengan dua bilangan anu x' dan y'; dapat diselesaikan : $x'^2 + (ax' + b)^2 = r^2$
atau : $(1 + a^2)\, x'^2 + 2abx' + b^2 - r^2 = 0$.

Suatu persamaan kuadrat dalam x'.

1. Jika $D < 0$, maka g tidak memotong L
2. Jika $D > 0$, maka terdapat dua harga x' yang berlainan, yang merupakan absisinya kedua titik potong garis g dengan L. Ordinat-ordinatnya dapat dicari dari (1).
3. Jika $D = 0$ atau $4\, a^2b^2 - 4(1 + a^2)\, (b^2 - r^2) = 0$
   atau $b^2 = (1 + a^2)\, r^2$ ______ $b = \pm\, r\sqrt{1 + a^2}$.

Diperoleh dua harga x' yang sama. Kedua titik potong - nya berimpit.
Hal ini berarti bahwa : $y = ax \pm r\sqrt{1 + a^2}$ merupakan persamaan garis singgung yang berarah a, pada suatu lingkaran, yang berpusat di O dan berjari-jari r.

Catatan

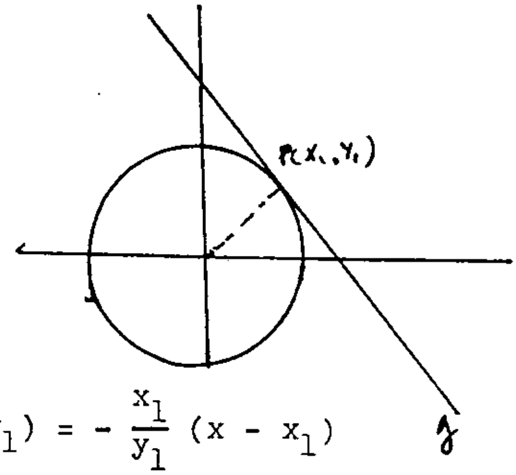
Tulis g dalam bentuk normal $\dfrac{ax - y + b}{\pm\sqrt{(a^2 + 1)}} = 0$

Jarak dari O kegaris itu = $r = b/(\pm\sqrt{a^2 + 1})$,
sesuai dengan hasil diatas sub 3.
selalu berlaku : Jari-jari = jarak dari pusat ke garis singgung.

2.5 Garis Singgung Disuatu Titik Pada Lingkaran

Diketahui lingkaran $x^2 + y^2 = r^2$ dan titik (x_1,y_1) pada lingkaran itu. Tentukan persamaan garis singgung yang

melalui titik(x_1,y_1) pada lingkaran.
Lihat gambar :



Garis OP $\equiv (y - 0) = \frac{y_1}{x_1}(x - 0)$.

Koeffisien arahnya garis singgung yang tegak lurus OP adalah $-\frac{x_1}{y_1}$.

Jadi garis singgung g $\equiv (y - y_1) = -\frac{x_1}{y_1}(x - x_1)$

$g \equiv y_1 y - y_1^2 = -x_1 x + x_1^2$

$g \equiv x_1 x + y_1 y = x_1^2 + y_1^2 = r^2$, karena (x_1,y_1) terletak pada lingkaran.

Rumus :

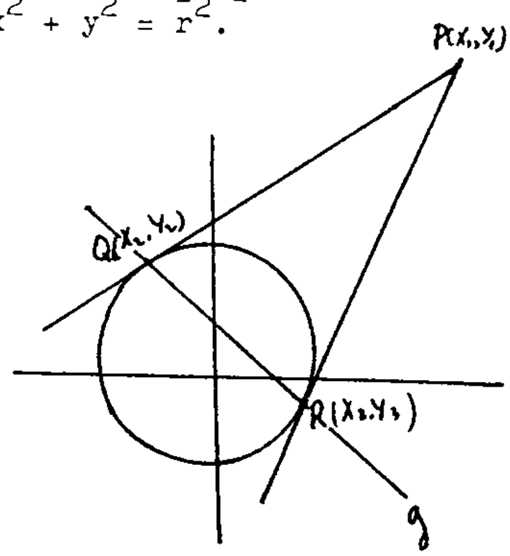
$\boxed{x_1 x + y_1 y = r^2}$ merupakan persamaan garis singgung titik (x_1,y_1) pada lingkaran $x^2 + y^2 = r^2$.

Dari suatu titik diluar lingkaran dapat ditarik dua buah garis singgung pada lingkaran. Garis hubung dua dua titik singgungnya disebut garis kutub atau garis polar. Bagaimanakah persamaannya, kalau titik $P(x_1,y_1)$ dan lingkaran $x^2 + y^2 = r^2$?

Rumus :

$\boxed{x_1 x + y_1 y = r^2}$ merupakan persamaan garis polar.

Titik P (x_1,y_1) yang tidak terletak pada lingkaran $x^2 + y^2 = r^2$.



Lihat gambar.

Menurut rumus diatas maka :

$PQ \equiv x_2 x + y_2 y = r^2$ dan

$PR \equiv x_3 x + y_3 y = r^2$

P terletak pada PQ, berarti

$x_2 x_1 + y_3 y_1 = r^2$ ....(1)

P terletak pada PR, berarti

$x_3 x_1 + y_3 y_1 = r^2$ ....(2)

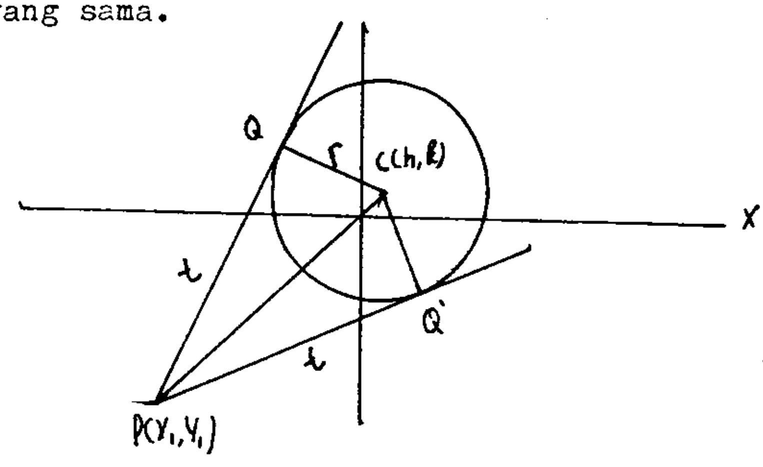
Pandanglah kini garis g, yang mempunyai persamaan

$xx_1 + yy_1 = r^2$ ....(3)

Karena koordinat-koordinatnya Q memenuhi persamaan garis g(bandingkan (1) dengan (3)), tentulah Q terletak pada g. Karena koordinatnya R memenuhi persamaan garis g tentulah terletak pada g juga. Jadi R dan Q terletak pada g atau g melalui Q, atau g = RQ = garis kutubnya P terhadap lingkaran (ingat : P tidak pada lingkaran).

2. 6 <u>Panjang Garis Singgung</u>

Andaikan P adalah suatu titik di luar lingkaran yang tertentu, lihat gambar . Selanjutnya dari titik P ditarik dua buah garis yang menyinggung lingkaran dititik yang berlainan. Sedangkan yang menjadi masalah adalah mencari panjang atau jarak dari titik P terhadap salah satu titik singgung, sebab kedua garis singgung mempunyai pan - jang yang sama.



Perhatikan, t = QP , dengan Q salah satu titik singgung dari garis singgung yang melalui P terhadap lingkaran. Selanjutnya dari segitiga CQP , kita dapatkan

$QP^2 = CP^2 - CQ^2$

$t^2 = (x_1 - h)^2 + (y_1 - k)^2 - r^2$

Apabila kita perhatikan, jika koordinat titik P disubsti - tusikan pada ruas kiri persamaan standar lingkaran yang ruas kanannya telah dijadikan nol, maka kita dapatkan jarak kuadrat dari titik P terhadap titik singgung Q pada lingkaran. Karenanya seandainya persamaan standar dijadi - kan persamaan umum, maka dapat kita tulis

$t^2 = x_1{}^2 + y_1{}^2 + Dx_1 + Ey_1 + F$

Jadi untuk mencari panjang kuadrat suatu garis singgung dari suatu titik terhadap lingkaran, kita substitusikan koordinat-koordinat x dan y nya dalam ruas kiri persamaan standar atau persamaan umum lingkaran. Jika hasil - nya positif, titik terletak diluar lingkaran, jika negatif titik terletak di dalam lingkaran dan garis-garis singgung nya tidak ada, dan jika sama dengan nol, maka titik terletak pada lingkaran.

Contoh

Carilah panjang garis singgung dari titik (-4,2) terhadap lingkaran $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 25$.

Penyelesaian

Keadaan gambarnya diperlihatkan dalam gambar . Kita dapatkan :

$t^2 = (-4 - 3)^2 + (2 + 2)^2 - 25$

atau

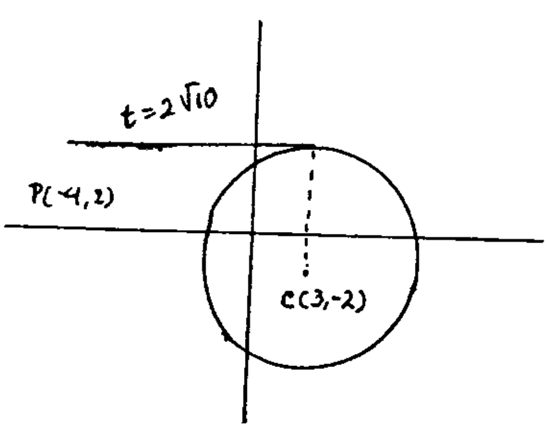
$t^2 = 49 + 16 - 25 = 40$

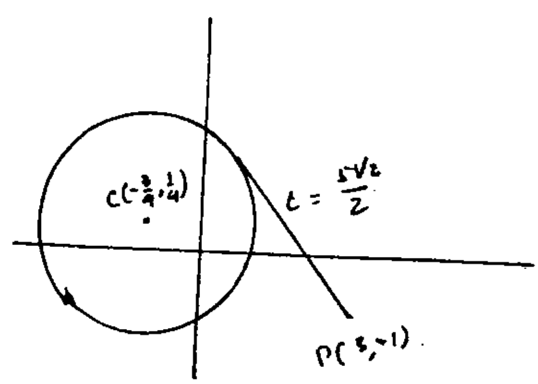
Berarti :

t = 2' 10. lihat gambar

Contoh

Carilah panjang garis singgung dari titik (3,-1) terhadap lingkaran $2x^2 + 2y^2 + 3x - y - 5 = 0$





Penyelesaian

Pertama-tama setiap suku dari persamaan lingkaran kita bagi dengan 2, sehingga persamaannya dapat ditulis dalam bentuk umum, seperti berikut :

$x^2 + y^2 + 3\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y - 2\frac{1}{2} = 0$

Salah satu garis singgungnya diperlihatkan dalam gambar

Selanjutnya kita dapatkan :

$t^2 = 9 + 1 + \frac{9}{2} + \frac{1}{2} - \frac{5}{2}$

atau

$t^2 = \frac{25}{2}$

Jadi panjang garis s·nggung adalah $t = \frac{5}{2} = \frac{5\ 2}{2}$ satuan panjang.

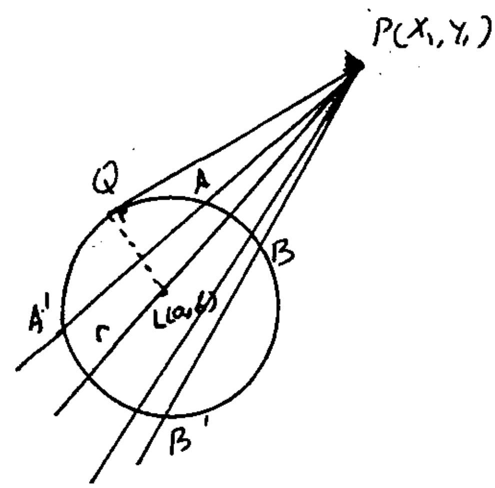
L A T I H A N 2

Dalam tiap soal berikut, periksalah apakah titik tersebut terletak pada lingkaran, di dalam lingkaran, atau di luar lingkaran dari masing-masing titik dan lingkaran yang bersesuaian. Selanjutnya jika titik tersebut terletak di luar lingkaran, carilah panjang garis singgung terhadap masing-masing lingkarannya.

1. (5,2) dan $x^2 + y^2 = 16$.
2. (-1,3) dan $x^2 + y^2 - x + y - 1 = 0$.
3. (3,-2) dan $2x^2 + 2y - 3x + y - 5 = 0$.
4. (1,-5) dan $(x - 3)^2 + y^2 = 16$.
5. (0,0) dan $(x - y)^2 + (y + 1)^2 = 4$
6. (3,1) dan $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 17$.

2. 7 Garis Kuasa

Dari suatu titik P dapat ditarik banyak sekali garis garis, yang memotong lingkaran menurut titik-titik A dan A', B dan B' dan seterusnya, dan menyinggung lingkaran di-titik-titik Q dan R. Secara planimetris dapat dibuktikan $PA.PA' = PB.PB' = PQ^2 = PR^2 = PL^2 - r^2$.
Hasil kali yang tetap ini disebut kuasanya P terhadap lingkaran. Kalau P terletak diluar lingkaran, maka kuasanya positif. Kalau P pada lingkaran, maka kuasanya nol. Kalau P didalam lingkaran, maka kuasanya negatif.
Lihat gambar.



Misalkan L(a,b) dan $P(x_1,y_1)$;
menurut rumus jarak
$PL^2 = (x_1 - a)^2 + (y_1 - b)^2$.
Tetapi $PL^2 - r^2 = PQ^2$.
Jadi :
$(x_1-a)^2 + (y_1 - b)^2 - r^2 = PQ^2$
= kuasa P terhadap lingkaran
= PA.PA' = PB.PB'.
Perhatikan lingkaran $L \equiv (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$
Panjangnya garis singgung dari $P(x_1,y_1)$ pada lingkaran L dikwadratkan ternyata sama dengan persamaan lingkaran, setelah r^2 dipinfahkan keruas kiri dan untuk x dan y diisikan koordinat-koordinatnya P = kuasa P terhadap lingkaran. Koeffisien-koeffisiennya x^2 dan y^2 harus 1.

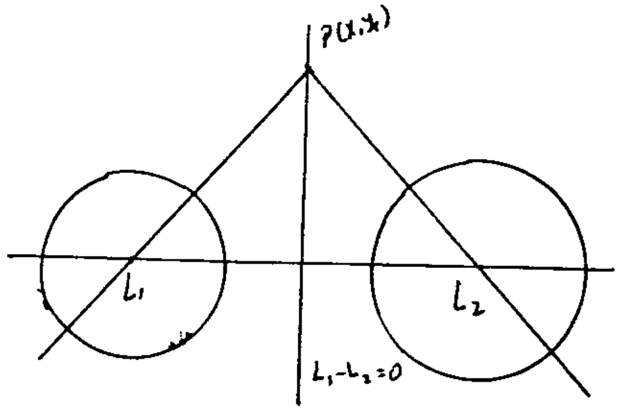
Dalil

> Kalau $P(x_1,y_1)$ dan $L \equiv (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$, maka kuasnya P terhadap lingkaran ialah $(x_1 - a)^2 + (y_1 - b)^2 - r^2$.

Diatas telah dihitung bahwa $PL^2 = (x_1 - a)^2 + (y_1 - b)^2$ sedangkan kuasanya P adalah $(x_1 - a)^2 + (y_1 - b)^2 - r^2 = \pm k^2$
Jadi $PL^2 = \pm k^2 + r^2$ atau :

Kesimpulan : Tempat kedudukan titik-titik P yang mempunyai kuasa yang sama (= $\pm$ k^2) terhadap suatu lingkaran merupakan lingkaran konsentris yang berjari-jari $r^2 \pm k^2$.

Bagaimanakah halnya dengan dua buah lingkaran L_1 dan L_2 ? Garis hubung L_1 dengan L_2 disebut sentral.
Lihat gambar.
Misalkan $P(x_1,y_1)$ mempunyai kuasa yang sama terhadap L_1 dan L_2 , berturut-mempunyai persamaan :



$x^2 + y^2 + 2ax + 2by + 2c = 0$ —— pusatnya (-a,-b)
$x^2 + y^2 + 2px + 2qy + 2r = 0$ —— pusatnya (-p,-q).
Kuasa P terhadap $L_1 = x_1^2 + y_1^2 + 2ax_1 + 2by_1 + 2c$
Kuasa P terhadap $L_2 = x_1^2 + y_1^2 + 2px_1 + 2qy_1 + 2r$
kedua kuasa itu sama, jadi :

$$x_1^2 + y_1^2 + 2ax_1 + 2by_1 + 2c = x_1^2 + y_1^2 + 2px_1 + 2qy_1 + 2r$$

atau

$$(a - p)x_1 + (b - q)y_1 + (c - r) = 0$$

Jika P dijalankan (dengan menghapus petunjuk koordinatnya), diperolehlah :

R u m u s : $\boxed{(a - p)x + (b - q)y + (c - r) = 0}$

Karena bentuk ini linear, tentu grafiknya merupakan garis lurus, yang disebut garis kuasa dua lingkaran, atau ditulis simbolis :

$$\boxed{L_1 - L_2 = 0}$$

Sifat : Garis kuasa tegak lurus sentral
Bahwa kedua garis lurus itu tegak lurus sesamanya, dapatlah dibuktikan sebagai berikut (lihat diatas)
$L_1(-a,-b)$ dan L_2 $(-p,-q)$, sedangkan gariskuasa $\equiv L_1 - L_2 = 0$
atau $(a-p)x + (b-q)y + (c-r) = 0$.
Koeffisien arahnya = $\frac{p - a}{b - q}$

Garis $L_1L_2 = \frac{x + a}{-p+a} = \frac{y + b}{-q+b}$. Jadi koeffisien arahnya =

$\frac{-q + b}{-p + a}$.

Hasil kali kedua koeffisien arah itu ternyata sama dengan **-1** . Oleh karenanya kedua garis itu tegak lurus sesamanya.

Kesimpulan : Tempat kedudukan titik-titik yang mempunyai kuasa yang sama terhadap dua buah lingkaran merupakan sebuah garis kuasa yang tegak lurus sentral.

Contoh

Carilah persamaan garis kuasa dan titik potong kedua lingkaran dengan persamaan :

(1). $x^2 + y^2 + 8x + 12y - 28 = 0$

(2). $x^2 + y^2 - 4x - 12y + 20 = 0$

Penyelesaian

Kurangkan persamaan (2) dari persamaan (1), kita dapatkan

$12x + 24y - 48 = 0$

atau

(3) $x + 2y - 4 = 0$

Ini adalah persamaan garis kuasa.

Untuk mencari titik potong kedua lingkaran, kita selesaikan persamaan (3) dan (1), dan didapatkan :

$(4 - 2y)^2 + y^2 + 8(4 - 2y) + 12y - 28 = 0$

atau

$16 + 16y + 4y^2 + y^2 + 32 - 16y + 12y - 28 = 0$

Dari bentuk terakhir kita dapatkan :

(4) $5y^2 - 20y + 20 = 0$ atau $y^2 - 4y + 4 = 0$

atau

$(y - 2)^2 = 0$

Jadi dari persamaan (4) didapat $y = 2$

Selanjutnya $y = 2$, disubstitusikan dalam persamaan (3), maka didapat $x = 0$. Karena titik (0,2) terletak pada garis kuasa dari dua lingkaran tersebut, berarti garis kuasa adalah garis singgung terhadap lingkaran. Jadi, garis kuasa berimpit dengan garis singgung dan kedua lingkarannya bersinggung di titik (0,2).

2. 8 Berkas Lingkaran

Analog dengan berkas garis dapatlah juga dibentuk suatu berkas lingkaran.

Kalau kedua lingkaran itu $L_1 = 0$ dan $L_2 = 0$, maka berkas lingkaran itu $L_1 + \lambda L_2 = 0$ ....(1)

L_1 dan L_2 disebut lingkaran dasar, dan dua titik potongnya (nyata atau tidak) disebut titik-titik dasar.
Parameter λ harus linier.

Untuk tiap harga λ terdapat sebuah lingkaran dari berkas itu, dan disebut anggota berkas. Karena banyak sekali harga λ yang dapat dipilih. Tentulah juga berkas itu menghasilkan banyak sekali lingkaran-lingkaran.

Sifat : Semua anggota dari berkas itu senantiasa melalui dua titik dasar berkas.

Bukti :

Misalkan titik dasar itu (x_1,y_1).

(x_1,y_1) pada $L_1 = 0$ berarti : $(L_1) = 0$ untuk $x = x_1$ dan $y = y_1$

(x_1,y_1) pada $L_2 = 0$ berarti : $(L_2) = 0$ untuk $x = x_1$ dan $y = y_1$

Jadi : $(L_1 + \lambda L_2) = 0$ untuk $x = x_1$, $y = y_1$

Hal ini berarti, bahwa $L_1 + \quad L_2 = 0$ untuk setiap harga λ senantiasa melalui titik (x_1,y_1).

Analog untuk titik dasar yang kedua.

Bahwa semua anggota berkas melalui dua titik dasar tadi, dapatlah dijelaskan sebagai berikut:

Suatu lingkaran ditentukan oleh tiga ketentuan atau tiga titik yang tidak segaris letaknya. Untuk menentukan tiap anggota berkas, hanyalah diperlukan sebuah titik lagi.

Jadi rupa-rupanya sudah dipakai dua ketentuan atau dua titik lain, ialah dua titik dasar tadi.

Dengan sendirinya berlaku :

1. Kalau kedua titik dasar itu nyata, maka semua anggota dari berkas berpotongan dititik-titik itu. Anggota berkas yang kecil ialah lingkaran yang bergaris tengah = garis hubung kedua titik dasar itu.

2. Kalau kedua titik dasar itu berimpit, tentulah semua anggota dari berkas juga melalui dua titik yang berimpit dengan perkataan lain : semua anggota dari berkas menyinggung kedua lingkaran dasar titik singgungnya. Dalam berkas hanyalah terdapat sebuah lingkaran yang berjari-nol, atau lingkaran nol.
3. Kalau kedua lingkaran dasar itu tidak berpotongan, jadi kedua titik dasar itu imaginer, tentulah semua anggota dari berkas juga tidak berpotongan. Dalam berkas terdapat dua buah lingkaran nol.

Secara analitis hal yang diatas dapat dijelaskan sebagai berikut :

Ambillah sebuah berkas lingkaran, yang sesederhana-sederhananya:

$$x^2 + y^2 + \lambda x + k = 0.$$

terdiri atas lingkaran $x^2 + y^2 + k = 0$ dan garis $x = 0$ yang akan merupakan garis kuasa berkas(karena bentuk itu selalu menghasilkan lingkaran untuk tiap-tiap harga λ, yang senantiasa melalui titik potong lingkaran dasar dan garis kuasa) Titik-titik dasarnya didapat dari perpotongan $x = 0$ dan $x^2 + y^2 + k = 0$, ialah titik-titik $(0, \pm\sqrt{-k})$.

Tiap anggota berpusat $(-\frac{1}{2}\lambda, 0)$ dan berjari-jari = $\sqrt{\frac{1}{4}\lambda^2 - k}$.

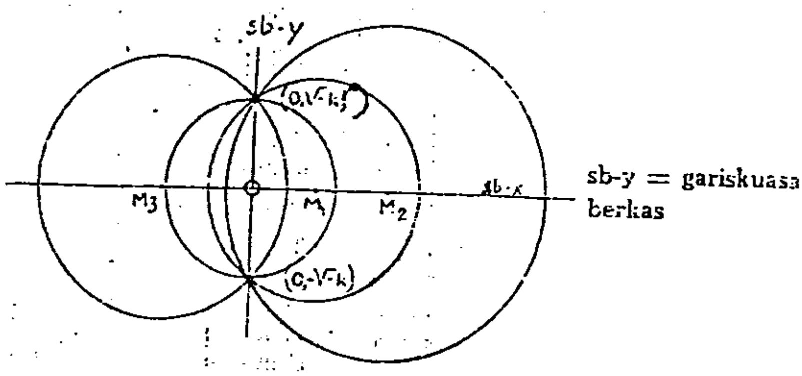
I. Kalau $k < 0$, tentulah titik-titik dasar $(0, \pm\sqrt{-k})$ nyata. Dalam berkas tidak terdapat lingkaran nol, sebab $\sqrt{\frac{1}{4}\lambda^2 - k}$ tidak mungkin nol. Lingkaran yang terkecil ialah lingkaran yang berpusat di 0 dan berjari-jari -k

II. Kalau $k = 0$, tentulah kedua titik dasar itu berimpit. Dalam berkas terdapat sebuah lingkaran nol, yaitu kalau $\lambda = k = 0$.

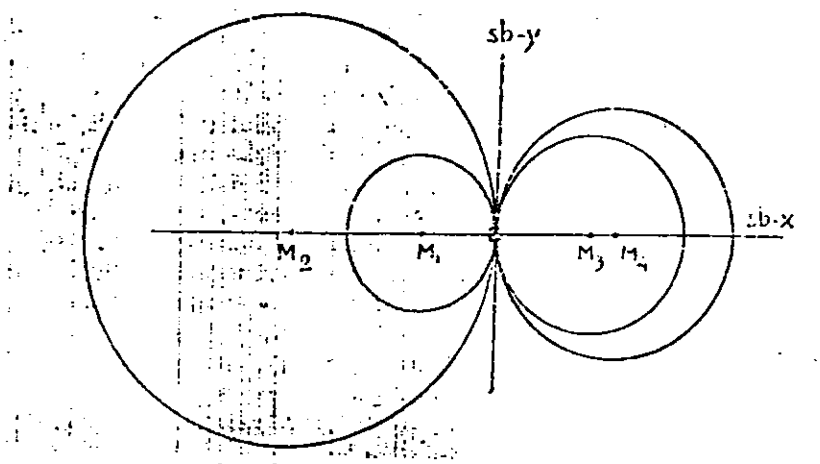
Oleh karenanya maka tiap lingkaran yang menyinggung garis g dititik P (a,b) merupakan anggota berkas $(x - a)^2 + (y - b)^2 + \lambda g = 0$. Lingkaran dasar yang satu ialah lingkaran nol = titik P dan g = garis kuasa berkas.

III Kalau $k > 0$, tentulah kedua titik dasar $(0, \pm\sqrt{-k})$ imaginer. Dalam berkas terdapat dua buah lingkaran nol, ialah apabila $\frac{1}{4}$ ^{2} - k = 0, atau = $\pm$ 2 k. Kedua lingkaran nol ini disebut titik hilang atau titik Poncelet (P_1 dan P_2).

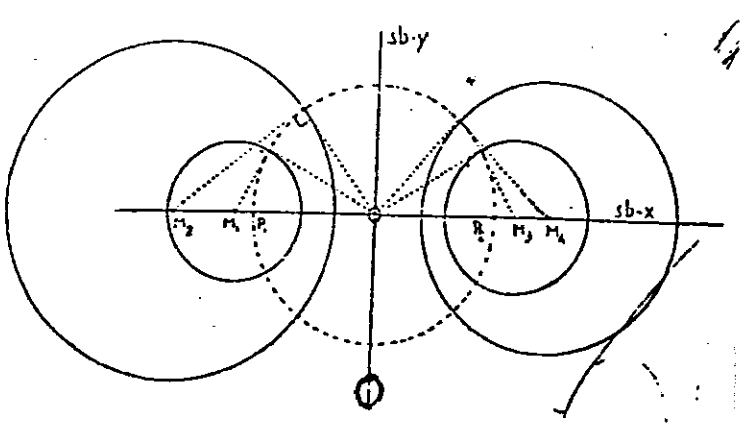
Contoh untuk berkas I.



Contoh untuk berkas II.

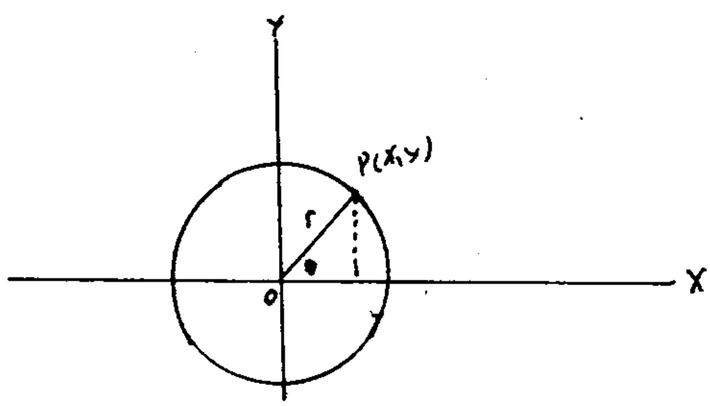


Contoh untuk berkas III.



2. 9 Persamaan Parameter Lingkaran

Perhatikan sebuah lingkaran dengan pusat (0,0) dan jari-jari r seperti diperlihatkan dalam gambar.
Jika P = (x,y) adalah sebuah titik yang terletak pada lingkaran, dan jika θ adalah sudut diantara sumbu x dan vektor u = OP, maka kita dapatkan :
$u = \overrightarrow{OP} = (r \cos \theta , r \sin \theta)$
Karena
$u = (x,y) = (r \cos \theta , r \sin \theta)$, berarti :
$x = r \cos \theta$ dan $y = r \sin \theta$ ....(1)
Persamaan (1) disebut persamaan parameter sebuah lingkaran Parameter adalah sudut θ. Kedua persamaan parameter ditulis dengan menggunakan koma diantara keduanya berarti :
$x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$.



Jika kuadrat dari persamaan (1) dijumlahkan, kita dapatkan :

$$x^2 + y^2 = r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta = r^2$$

Persamaan diatas adalah persamaan sederhana dari lingkaran .

Jika pusatnya adalah C = (h,k) tidak berimpit dengan titik O (0,0) dan θ adalah sudut diantara CP dengan garis yang melalui C dan sejajar dengan sumbu x positif, kita dapatkan (Misal titik C di kuadran I).
$u = CP = (x - h , y - k) = (r \cos \theta , r \sin \theta)$

$x - h = r \cos \theta$

$y - k = r \sin \theta$

Kedua persamaan diatas dikuadratkan, kemudian dijumlahkan kita dapatkan :

$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$

Bentuk ini adalah persamaan standar dari lingkaran.

Bentuk lain dari pasangan persamaan parameter untuk lingkaran yang berpusat di titik pangkal O (0,0), dibicarakan dalam kalkulus, namun dapat dicari seperti berikut :

Perhatikan persamaan lingkaran $x^2 + y^2 = r^2$.

Kombinasi dengan persamaan $x = ty$ dan dilanjutkan dengan eliminasi x, kita peroleh :

$t^2y^2 + y^2 = r^2$

atau

$$y = \frac{r}{\pm\sqrt{1 + t^2}}$$

Substitusikan nilai y dalam $x = ty$, kita peroleh :

$$x = \frac{tr}{\pm\sqrt{1 + t^2}}$$

Jika kita pilih nilai yang positif, kita dapatkan pasangan persamaan parameter untuk setengah lingkaran bagian atas, yaitu :

$$x = \frac{tr}{\sqrt{1 + t^2}}$$

$$y = \frac{r}{\sqrt{1 + t^2}}$$

dengan parameter t adalah koeffisien arah dari garis dengan persamaan $x = ty$.

Jika dipilih nilai yang negatif, didapat pasangan persamaan parameter untuk setengah lingkaran bagian bawah

L A T I H A N 3

1. Carilah persamaan tiap lingkaran yang memenuhi syarat-syarat berikut :
   a. Pusat $(-1,2)$ dan jari-jari 5
   b. Titik-titik ujung diameter $(-1,4)$ dan $(3,2)$.
   c. Pusat dikuadran III, menyinggung kedua sumbu dan jari-jari 3.
   d. Pusat $(3,5)$ yang menyinggung garis $y = 2x + 1$.
   e. Pusat terletak pada sumbu y dan melalui titik $(4,2)$ dan $(-6,2)$.
   f. Melalui titik $(1,-1)$ dan $(5,3)$ dan pusat terletak pada garis $x + y + 7 = 0$.
   g. Titik potong sumbu x adalah -1 dan 5, dan jari-jari 5.
   h. Melalui titik $(2,1)$, menyinggung garis $3x + 4y + 6 = 0$ dan jari-jari 4.
   i. Melalui titik-titik $(1,1)$, $(1,-1)$ dan $(3,0)$.
   j. Melalui titik-titik $(2,8)$, $(5,5)$ dan $(-3,3)$.
   k. Melalui titik-titik $(9,4)$ dan $(5,-6)$ dan pusat terletak pada garis $9x + 11y - 8 = 0$.
2. Carilah persamaan lingkaran yang dilingkungi oleh tiap segitiga berikut :
   a. $P_1\ (-1,3)$, $P_2\ (7,-1)$ dan $P_3\ (2,9)$
   b. $P_1\ (0,-1)$, $P_2\ (-7,0)$ dan $P_3\ (-1,6)$
3. Carilah persamaan garis kuasa dari lingkaran-lingkaran $2x^2 + 2y^2 - 3x + y - 4 = 0$ dan $x^2 + y^2 + 2x - 3y - 5 = 0$
4. Carilah suatu titik yang membentuk garis singgung yang sama panjangnya yang dapat digambar terhadap lingkaran lingkaran $x^2 + y^2 = 4$, $x^2 + y^2 + 6y - 2 = 0$ dan $x^2 + y^2 - 4x + 1 = 0$; dan carilah pula panjang garis garis singgung tersebut.
5. a. Carilah pusat dan jari-jari dari lingkaran-lingkaran dengan persamaan $3x^2 + 3y^2 - 2x - 4 = 0$.
   b. Carilah panjang garis singgung yang ditarik dari titik $(-3,2)$ terhadap lingkaran pada bagian (a).

6. Tinjau persamaan dengan ketentuan $t^2 = x_1{}^2 + y_1{}^2 + D_1x_1 + E_1y_1 + F_1$, dan terangkanlah arti geometri
   (a). $t^2 \quad 0$
   (b). $t^2 \quad 0$
   (c). $t^2 = 0$
7. (a). Tentukanlah persamaan anggota berkas lingkaran yang didefenisikan oleh $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 8 = 0$ dan $x^2 + y^2 - 3x - 2 = 0$, yang mempunyai pusat terletak pada sumbu y.
8. Buktikanlah bahwa garis kuasa adalah tegak lurus terhadap garis hubung pusat-pusat lingkaran dari berkas yang didefenisikan oleh lingkaran.
   $x^2 + y^2 + D_1x + E_1y + F_1 = 0$ dan $x^2 + y^2 + D_2x + E_2y + F_2 = 0$.
9. Tulislah persamaan garis singgung dan normal dari tiap titik dan lingkaran berikut :
   a. $x^2 + y^2 = 5$ dan $(-1,2)$
   b. $(x + 5)^2 + (y - 1)^2 = 25$ dan $(-2,5)$
   c. $2x^2 + 2y^2 - x + 5y - 8 = 0$ dan titik-titik berabsis 1.
10. Buktikanlah bahwa sudut yang dilingkungi oleh setengah lingkaran adalah sudut lurus.
11. Carilah koordinat-koordinat titik potong diantara garis $2x + 3y - 5 = 0$ dan lingkaran $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 4 = 0$
12. a. Carilah titik potong diantara lingkaran-lingkaran $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 8 = 0$ dan $x^2 + y^2 - 3x - 3y - 2 = 0$.
    b. Tentukanlah panjang tali busur persekutuannya
13. Diketahui berkas lingkaran yang didefenisikan oleh lingkaran-lingkaran $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 6 = 0$ dan $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 = 0$. Carilah persamaan tiap anggota berikut
    a. Melalui titik $(-4,6)$
    b. Melalui titik $(5,1)$
    c. Pusat terletak pada sumbu x
    d. Pusat terletak pada sumbu y

14. Carilah persamaan lingkaran yang menyinggung terhadap lingkaran $x^2 + y^2 = 16$, dan mempunyai pusat dititik $(-7,0)$.
15. Jika $u = OP = (x,y)$ dan $v = OC = (h,k)$, buktikanlah bahwa lingkaran yang berpusat di $C = (h,k)$, jari-jari r, dan melalui titik $P = (x,y)$ dapat ditulis dalam salah satu cara berikut :
    a. $(u - v).(u - v) = r^2$
    b. $(u.u) - 2(u . v) + (v.v) - r^2 = 0$
16. Carilah persamaan parameter dari lingkaran-lingkaran dalam suku-suku parameter :
    a. $x^2 + y^2 = 16$
    b. $x^2 + y^2 = 25$
    c. $x^2 + y^2 - 49 = 0$
    d. $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 11 = 0.$
    e. $x^2 + y^2 + 6x - 4y + 9 = 0$
17. Carilah persamaan parameter lingkaran dalam latihan 16, jika parameternya adalah t dengan t koeffisien arah garis dengan persamaan $x = ty$
18. Carilah tempat kedudukan sebuah titik yang memiliki panjang garis singgung dari titik tersenut pada lingkaran $x^2 + y^2 + 4x + 6y = 27$ adalah 9 satuan panjang.
19. Bicarakanlah himpunan titik-titik yang memiliki panjang garis singgung dari tiap titik terhadap lingkaran $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$ adalah 6 satuan panjang.
20. Carilah persamaan-persamaan garis singgung dari titik dan lingkaran berikut
    a, $x^2 + y^2 - 6x - 36 = 0$ dan $(6,9)$
    b. $x^2 + y^2 + 8y - 42 = 0$ dan $(-4,6)$
    c. $x^2 + y^2 + 10x - 4y = 87$ dan $(9,-4)$
21. Buktikanlah bahwa persamaan parameter dari lingkaran $(x - h)^2 + (y - k)^2$ adalah
    $x = h + r \cos \theta$
    $y = k + r \sin \theta$
    dengan θ sebagai parameter. Buat sketsa grafiknya.

22. Tentukan persamaan lingkaran yang melalui O dan titik potong kedua lingkaran $x^2 + y^2 - 6x - 8y - 11 = 0$ dan $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 22 = 0$.
23. Tentukan persamaan lingkaran yang melalui titik potong kedua lingkaran $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 12 = 0$ dan
$$x^2 + y^2 - 10x - 16y + 40 = 0.$$
dan yang berpusat pada garis $8x - 3y - 2 = 0$. Titik pada sumbu x yang manakah mempunyai kuasa yang sama terhadap kedua lingkaran itu?
24. Buktikan bahwa kedua lingkaran $x^2 + y^2 - 10x + 2y + 17 = 0$ dan $x^2 + y^2 + 8x - 22y - 7 = 0$ saling bersinggungan. Tentukan pula titik singgungnya.
25. Lingkaran yang manakah menyinggung kedua lingkaran dalam nomor 24 di titik singgungnya dan pula menyinggung sumbu y ?
26. Carilah persamaan-persamaan lingkaran yang memotong sumbu x menurut sebuah tali busur sepanjang 20, dan memotong sumbu y sepanjang 36 dan yang berjari-jari 5 13.
27. Tentukan :
    a. Persamaan lingkaran yang melalui titik-titik (8,-7) (1,-6) dan (5,2).
    b. Persamaan lingkaran yang berpusat dititik pangkal dan berjari-jari 4.
    c. Persamaan-persamaan lingkaran yang melalui titik-titik potong kedua lingkaran tadi dan yang menyinggung sumbu y.

    Perbatasan : Sudut antara dua garis lengkung yang berpotongan adalah sudut antara dua garis singgung di titik potong pada kedua garis lengkung itu.
28. Lingkaran yang manakah berjari-jari 4, berpusat pada sumbu y dan memotong lingkaran $x^2 + y^2 = 9$ tegak lurus
29. Tentukan persamaan lingkaran yang memotong lingkaran $x^2 + y^2 - 2x + 5y - 5 = 0$ tegak lurus, melalui titik (6,1), dan yang pusatnya terletak pada garis $9x + 4y = 47$

30. Buktikan bahwa lingkaran-lingkaran $x^2 + y^2 - 49 = 0$ dan $x^2 + y^2 - 6x - 8y + 21 = 0$ bersinggungan. Tentukan kemudian persamaan lingkaran, yang melalui titik pangkal dan yang menyinggung kedua lingkaran tadi dititik-titik singgungnya.

    Perbatasan : Sebuah lingkaran membagi dua sama sebuah lingkaran lain, jika lingkaran yang pertama melalui kedua ujung sebarang garis-tengah lingkaran yang kedua.

    Tentukan persamaan lingkaran yang membagi dua sama lingkaran $x^2 + y^2 - 2x + 2y - 2 = 0$, berpusat pada garis $3x + 2y + 3 = 0$ dan yang garis kuasa lingkaran yang diketahui dan lingkaran yang diminta, melalui titik $(-1,3)$.

31. Tentukan persamaan garis singgung persekutuan pada kedua lingkaran $(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 25$ dan $4x^2 + 4y^2 + 28x + 20y + 65 = 0$.

32. Lingkaran yang manakah melalui titik-titik potong kedua lingkaran $x^2 + y^2 + 2x + 4y - 17 = 0$ dan $x^2 + y^2 - 6x - 10y - 15 = 0$ dan berpusat pada garis $5x - 3y + 1 = 0$.

33. Buktikan bahwa persamaan garis singgung yang berkoefisien arah a, pada lingkaran yang berpusat (a,) dan berjari-jari r adalah : $y - \quad = a(x - a) \pm r \quad 1 + a^2$.

B A B III

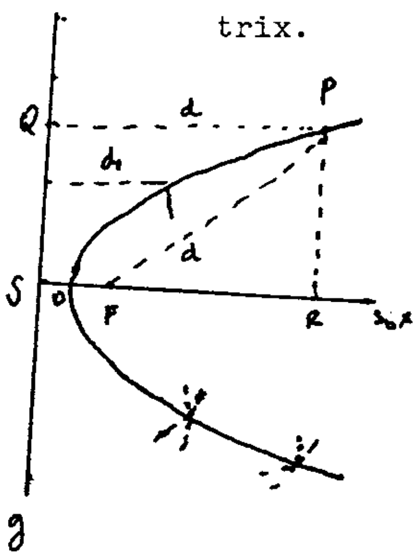
P A R A B O L A

3. 1 Persamaan Parabola

Defenisi

Parabola adalah tempat kedudukan titik-titik yang berjarak sama terhadap sebuah titik dan sebuah garis yang tertentu .

Titik itu disebut fokus dan garis itu direktrix.



Diketahui : garis g dan titik F.

Lukis : Beberapa titik dari parabola dengan F sebagai fokus dan g sebagai direktrix.

Penyelesaian : Tarik sebuah garis FS tegak lurus g. Titik tengah O dari segmen garis FS memenuhi.

Buat lingkaran (F,d), d sebarang. Tarik $g'//g$ pada jarak d, yang memotong lingkaran pada dua titik, yang memenuhi defenisi diatas. Bilamana untuk d diambil banyak macam harga, tentulah terdapat banyak sekali titik pada parabola menurut keperluan. Bagaimanakah bentuk persamaannya ? Untuk ini perhatikanlah gambar diatas. Sudah barang tentu bahwa garis FS akan diambil sebagai sumbu x. Dan logis akan dipilih garis g sebagai sumbu y. Tetapi ternyata bahwa persamaannya akan tidak semudah sebagaimana yang berikut.

Ambillah garis sumbu dari segmen garis FS = p sebagai sumbu y. Jadi $F = (\frac{1}{2}p,0)$. Misalkan P (x,y) - pada hakekatnya sudah diambil koordinat berjalan, karena sudah tidak memakai petunjuk -, maka dalam PFR siku-siku berlaku hubungan :

$PF^2 = PR^2 + FR^2$

$(x + \frac{1}{2}p)^2 = y^2 + (x - \frac{1}{2}p)^2$

$x^2 + px + \frac{1}{4}p^2 = y^2 + x^2 - px + \frac{1}{4}p^2$

atau :

$y^2 = 2px$; p disebut parameter parabola

Jelaslah dari lukisan diatas, bahwa sumbu x merupakan sumbu simetris parabola itu. - Pertanyaan : mengapapa ?

- Titik potong sumbu simetri dengan parabola ialah O disebut titik puncak.

Jadi $y^2 = 2px$ adalah persamaan parabola yang

1. Berpuncak di O (0,0)
2. Mempunyai sumbu x sebagai sumbu simetri
3. Berfokus F $(\frac{1}{2}p,0)$ dan
4. Berdirektrix $g \equiv x = -\frac{1}{2}p$.

Kalau puncak parabola adalah (a,b) dan sumbu simetri nya tetap sejajar dengan sumbu x, maka dengan mudah dapat dibuktikan, bahwa persamaannya adalah $(y - b)^2 = 2p(x - a)$.

Persamaan direktrix menjadi $x = a - \frac{1}{2}p$, sedangkan fokusnya F berkoordinat $(a + \frac{1}{2}p , b)$.

Persamaan parameter suatu parabola ialah :

$x = 2pt^2$

$y = 2pt$

(t = parameter)

Bilamana t di-eliminir, terdapatlah kembali $y^2 = 2px$

L A T I H A N 1

1. Carilah persamaan parabola yang mempunyai fokus dititik (-a,0) dan garis $x - a = 0$ sebagai direktrixnya.
2. Carilah persamaan parabola yang mempunyai fokus dititik (0,a) dan garis $y + a = 0$ sebagai direktrixnya.
3. Carilah persamaan parabola yang mempunyai titik puncak (0,0) dan titik (0,-a) sebagai titik fokus.

4. Carilah persamaan parabola yang mempunyai titik puncak (0,0) dengan titik-titik fokus :

   a. (2,0) d. (-4,0)
   b. (0,-3) e. (0,5)
   c. (0,3) f. (6,0)

5. Carilah persamaan parabola yang mempunyai puncak dititik pusat (titik pangkal) dan persamaan direktriknya.

   a. $x + 2 = 0$ c. $y - 4 = 0$
   b. $x - 3 = 0$ d. $y + 5 = 0$

6. Carilah persamaan sederhana parabola yang koordinat fokus dan persamaan direktrixnya seperti berikut :

   a. Fokus (1,0) dan direktrixnya $x = -1$
   b. Fokus (-3,0) dan direktriknya $x - 3 = 0$
   c. Fokus (0,5) dan direktrixnya $y + 5 = 0$
   d. Fokus (0,-4) dan direktriknya $y - 4 = 0$

7. Carilah persamaan sederhana parabola

   a. Fokus terletak pada sumbu y dan kurvanya melalui (8,-3)
   b. Fokus terletak pada sumbu x dan kurvanya melalui (-1,5).

8, Carilah persamaan sederhana parabola yang memenuhi syarat syarat sebagai berikut :

   a. titik (2,-3) terletak pada parabola
   b. titik (-4,-1) terletak pada parabola

9. B uktikan bahwa $x^2 = 4ay$ adalah persamaan parabola yang membuka keatas .

10. Buktikan bahwa $y^2 = -4ax$ adalah persamaan parabola yang membuka ke kiri.

11. Buktikan bahwa $x^2 = -4ay$ adalah persamaan parabola yang membuka ke bawah.

3. 2 <u>Garis Singgung</u>

Sekarang akan diselidiki kedudukan suatu garislurus terhadap sebuah parabola.

Misalkan garis itu g $\equiv$ $y = ax + b$ ....(1)

dan parabola itu $y^2 = 2px$ ....(2)

Perpotongan antara (1) dan (2), atau harga (1) dimasukkan ke (2) menghasilkan :

$a^2 x^2 + 2\ abx + b^2 = 2\ px$

atau

$a^2x^2 + 2(ab - p)x + b^2 = 0$

dengan : $\frac{1}{4}D = p^2 - 2pab$.

Jika $D < 0$, garis tidak memotong parabola .

Jika $D > 0$, garis g memotong parabola pada dua titik .

Jika $D = 0$, yang berarti $p^2 - 2pab = 0$

atau : $p - 2ab = 0$ ....(3)

maka g menyinggung parabola.

Kalau dari garis g diketahui koeffisien arahnya a, maka dari (3) terdapat :

$b = p/2a$. Jadi :

R u m u s : $$y = ax + \frac{p}{2a}$$

merupakan persamaan garis singgung, yang berkoeffisien arah a pada parabola $y^2 = 2px$.

R u m u s : $$yy_1 = p\ (\ x + x_1\ )$$

merupakan persamaan garis singgung dititik $P\ (\ x_1\ ,\ y_1\ )$, pada parabola $y^2 = 2px$.

Bukti : Sebarang garis g yang melalui P mempunyai persamaan $y - y_1 = a(x - x_1)$ atau $y = y_1 + ax - ax_1$.

Perpotongan dengan parabola menghasilkan :

$(y_1 + ax - ax_1)^2 = 2px$ atau

PERPUSTAKAAN IKIP PADANG
KOLEKSI BIDANG ILMU
TIDAK DIPINJAMKAN
KHUSUS DIPAKAI DALAM PERPUSTAKAAN

$a^2x^2 - 2(a^2x_1 - ay_1 + p)x + y_1^2 + a^2x_1^2 - 2ax_1y_1$
$= 0$ ....(4).

Bilamana garis itu harus merupakan sebuah garis singgung, maka titikpotong yang kedua harus berimpit dengan P. Jadi jumlah kedua akar dari (4) harus $2x_1$ atau :

$$\frac{2(a^2x_1 - ay_1 + p)}{a^2} = 2x_1$$

$$a^2x_1 - ay_1 + p = a^2x_1 \quad \text{———} \quad a = p/y_1$$

Setelah harga a ini diisikan dipersamaan pertama, terdapatlah :

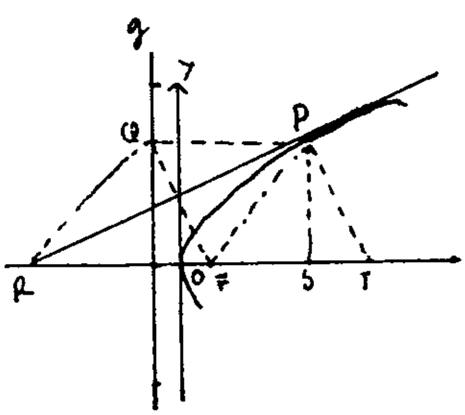
$yy_1 - y_1^2 = px - px_1$

(x_1,y_1) pada parabola berarti : $y_1^2 = 2px_1$.

Jadi : $yy_1 - 2px_1 = px - px_1$

atau : $yy_1 = p(x + x_1)$, q.e.d.

Dalil : Garis singgung di P membagi sudut antara PF dan garis yang melalui P dan sejajar sumbu simetri atas dua bagian yang sama.



Lihat gambar.

Kalau P (a,b) , maka PQ = a + ½p = PF (menurut perbatasan parabola). Titik potong garis singgung di P dengan sumbu x adalah R (-a,0) — isikanlah saja y = 0 kedalam by = p(x + a) - .

Jadi RF = a + ½p juga. Karena RF + PQ = PF , maka PFRQ merupakan sebuah belah ketupat dengan garis singgung PR sebagai diagonal. Jadi sudut QPR = sudut FPR.

Perbatasan : 1. Kalau PR = garis singgung di P, maka garis yang melalui P dan tegak lurus pada PR disebut normal.

PERPUST...
KOL...

2. Segmen garis RS disebut subtangens.
3. Segmen garis ST disebut subnormal.
(PT = normal !)

Catatan : 1. Karena RO =OS, tentulah sumbu y melalui titik potong kedua diagonal belah ketupat itu.
2. Sifat diatas dipergunakan untuk melaksanakan reflektor lampu senter yang berbentuk parabolis, yang menghasilkan sinar sejajar, bila per lampu di F .

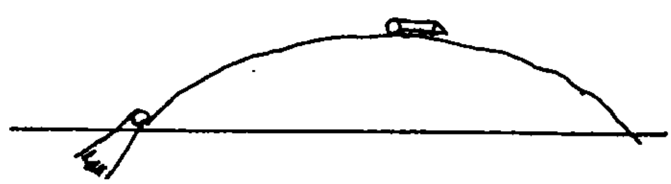
L A T I H A N 2

1. Bagaimanakah bentuk persamaan garis singgung di titik (x_1, y_1) pada parabola $(y - b)^2 = 2p(x - a)$?
2. Dalam hal manakah garis $y = ax - 3$.
   a. Memotong pada dua titik
   b. Menyinggung
   c. Tidak memotong, parabola $y^2 = 4x$?
3. Parameter suatu parabola adalah 2. Kalau titik P terletak pada parabola dan berordinat -2 , tentukanlah absisinya P. Kemudian tentukan persamaan garis singgung di titik P itu.
4. Tentukan persamaan normal di titik $(1, -2)$ pada parabola $y^2 = 4x$. Berapakah sub normalnya ?
5. Tentukan persamaan garis singgung yang berkoeffisien arah 2 pada parabola $y^2 = 8x$. Tentukan pula titik singgungnya dan persamaan normal di titik itu.
6. Tentukan persamaan parabola yang berpuncak di titik pangkal O, melalui $(6,-6)$ dan menyinggung sumbu y. Idem,idem dan menyinggung sumbu x.
7. Carilah persamaan parabola yang berpuncak di O, menyinggung sumbu y dan menyinggung pola garis $x - y + 1 = 0$. Manakah titik singgungnya ?
8. Tentukan persamaan-persamaan yang melalui $(-2,-3)$ pada parabola $y^2 = 8x$. Pula persamaan garis hubung kedua titik singgungnya. Sesuaikah persamaan ini dengan rumus garis polar suatu titik terhadap parabola ?

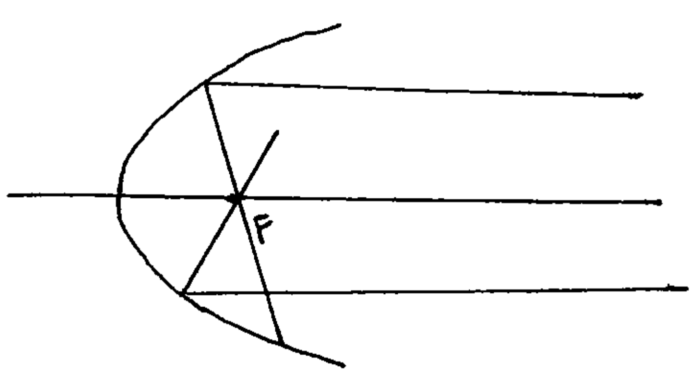
3. 3 Pemakaian Parabola

Kita dapat melihat beberapa penerapan dari pemakaian parabola, diantaranya :

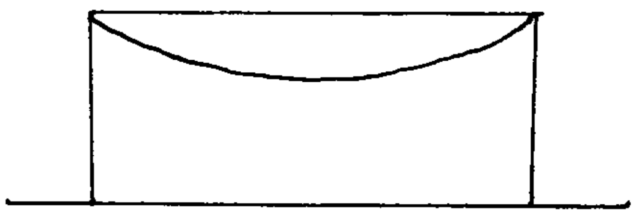
1. Jalannya lintasan peluru yang keluar dari senapan atau meriam atau alat penembak lainnya, bila hanya dipengaruhi oleh gaya berat adalah berupa parabola seperti gambar dibawah ini



2. Bila kita ingin menempatkan sumber cahaya dalam benda-benda yang berbentuk parabola maka sumber cahaya itu harus ditempatkan pada koordinat titik-titik fokusnya, sehingga akan paling terang bila dibandingkan dengan disimpan pada tempat-tempat lain. Hal ini disebabkan bila pada titik ditarik cahaya, maka sinar-sinar yang jatuh pada permukaan parabola akan dipantulkan masing-masing sejajar dengan sumbu simetrisnya, lihat gambar dibawah.



3. Bila suatu jembatan atau jalan yang bergantung seperti kabel, maka walaupun merata horizontal, tetapi sebenarnya berbentuk parabola, hal ini disebabkan berat dari pemisalan kabel tersebut, lihat gambar dibawah.



L A T I H A N 3

1. Bicarakanlah dan buat sketsa grafiknya dari persamaan parabola berikut :
   a. $3y^2 + 10x = 0$
   b. $5x^2 - 32y = 0$
   c. $x^2 + 24y = 0$
   d. $2y^2 = 37x$
   e. $3x^2 - 16y = 0$
   f. $y^2 + 32x = 0$
2. Carilah persamaan parabola dengan puncak dan fokus seperti berikut :
   a. Puncak (2,1) dan fokus (4,1)
   b. Puncak (-3,4) dan fokus (-3,-2)
   c. Puncak (-4,7) dan fokus (-4,3)
3. Carilah tiap persamaan parabola dengan data seperti berikut :
   a. Fokus (1,2) dan direktrixnya $y = 0$
   b. Fokus (2,1) dan direktriknya $x = 0$
   c. Fokus (-1,-3) dan direktrixnya $2x + y - 1 = 0$
   d. Fokus (3,-2) dan direktrixnya $x - 2y = 0$
   e. Puncak (1,-2) dan direktriknya $x + 4 = 0$

4. Carilah persamaan sederhana parabola berikut :
   a. Fokus terletak pada sumbu y, dan panjang latus rectumnya 16.
   b. Fokus pada sumbu x dan panjang latus rectumnya 24.
5. Carilah persamaan tiap parabola berikut :
   a. Fokus (0,0) dan direktrixnya $ax + by + c = 0$
   b. Puncak (hmk), sumbunya sejajar dengan sumbu x, dan panjang latus rectumnya 4a.
   c. Puncak (hk), sumbunya sejajar dengan sumbu y dan panjang latus rectumnya 4a.
6. Salah satu koordinat titik ujung tali busur fokus suatu parabola $y^2 = 4ax$ adalah (4a,4a). Carilah koordinat titikujung yang satu lagi.
7. Carilah koordinat titik potong diantara parabola-parabola $y^2 = 4ax$ dan $x^2 = 4ay$.
8. Jika setiap titik yang diketahui merupakan himpunan titik dalam keadaan berjarak tetap dari titik (-3,4) sesar 2 satuan lebih besarnya dari pada berjarak pada garis $x - 3 = 0$. Carilah persamaan himpunan titik tersebut.

3. 4 Titik dan Garis Polar

Perbatasan : Kalau dari sebuah titik P (x_1,y_1) di luar suatu parabola ditarik dua buah garis sing - gung, maka garis hubung p antara kedua titik singgungnya disebut garis polarnya P terhadap parabola, dan P adalah titik polarnya garis p itu.

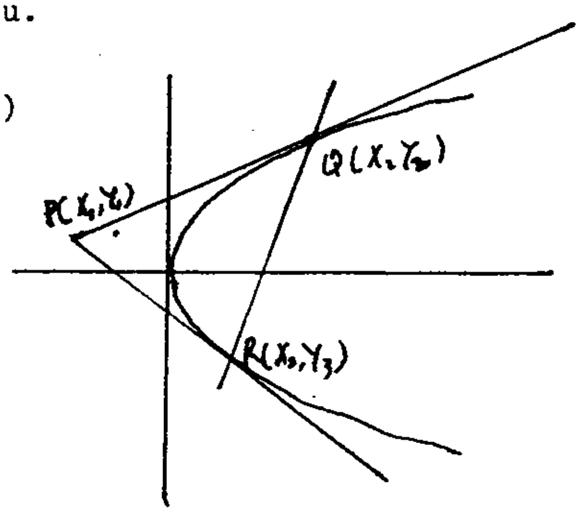
Sebagaimana telah diketahui, persamaan garis singgung di P (x_1 , y_1) pada parabola $y^2 = 2$ px adalah $yy_1 = p(x + x_1)$

Akan dibuktikan bahwa persamaan ini ialah :

R u m u s : $yy_1 = p(x + x_1)$

merupakan persamaan garis polar titik $P(x_1,y_1)$ yang terletak diluar parabola $y^2 = 2$ px terhadap parabola itu.

Bukti : lihat gambar.



Kalau $Q(x_2,y_2)$ dan $R(x_3,y_3)$ adalah titik singgung-titik singgung kedua garis singgung dari $P(x_1,y_1)$, maka garis singgung di Q dan R itu berturut-turut :

$PQ \equiv y_2y = p(x_2 + x)$......(1)

$PR \equiv y_3y = p(x_3 + x)$......(2)

P pada (1) berarti : $y_2y_1 = p(x_2 + x_1)$ ....(3)

P pada (2) berarti : $y_3y_1 = p(x_3 + x_1)$................(4)

Perhatikanlah sekarang suatu garis yang berpersamaan :

$yy_1 = p(x + x_1)$...........(5).

Berhubung dengan (3) tentulah titik Q terletak pada (5)

Berhubung dengan (4) tentulah titik R terletak pada (5)

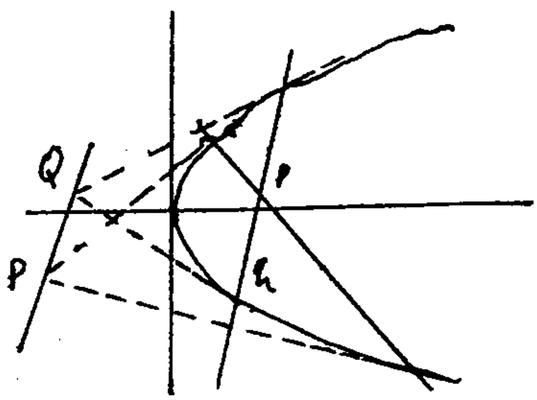
Jadi Q dan R terletak pada (5), yang berarti bahwa (5) ditentukan oleh Q dan R, atau $QR \equiv (5)$ = garis polar titik $P(x_1,y_1)$ terhadap parabola $y^2 = 2px$, menurut perbatasan.

Catatan : Bukti diatas sesuai benar dengan bukti untuk lingkaran dan akan dipakai lagi untuk elips dan hiperbola.

Sebagaimana dulu untuk lingkaran dan sekarang untuk parabola sebuah garis kutub atau garis polar hanyalah dapat dilukis, bilamana titik polarnya terletak diluar lingkaran atau parabola. Bagaimanakah halnya, jika titik polar P itu terletak di dalam parabola ? (teori, lukisan dan - bukti berlaku juga untuk lingkaran).

Lihat gambar

Ambillah dua garis melalui P. Tentukan titik polarnya masing-masing garis. Garis hubung kedua titik polar itu merupakan garis polarnya titik P terhadap parabola.



Bilamana garis q berputar melalui P, tentulah titik polarnya bergerak sepanjang garis hubung tadi, yakni garis polar p dari titik P. Bahwa ini betul-betul benar, dapatlah dibuktikan sebagai berikut.

Misalkan : $Q(x_n,y_n)$. Garis polarnya Q adalah $y_n y = p(x_n + x)$

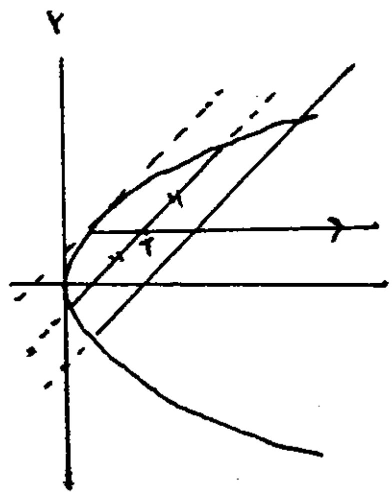
Titik P padanya berarti : $y_n y_1 = p(x_n + x_1)$ ....(6)

Kalau Q bergerak, tentulah n berubah. Jadi tempat kedudukan titik Q adalah (6) dengan membuang petunjuknya n, sesuai dengan rumus diatas. Jadi rumus di atas berlaku untuk titik P di luar, pada, atau di dalam parabola.

3. 5 Tempat Kedudukan

Contoh :

1. Tentukan tempat kedudukan tengah-tengah semua tali busur yang sejajar dari suatu parabola



Penyelesaian : lihat gambar
Parabola $\equiv y^2 = 2px$
Garis-garis yang sejajar dimana talibusur-talibusur itu terletak dapat diumpamakan $y = ax + b$, (a tetap dan b = parameter).
Perpotongan menghasilkan
$y^2 = 2p \cdot \dfrac{y - b}{a}$ atau
ay^2.
$-2py + pb = 0$.........(1)
yang diperlukan disini bukanlah harganya akar masing-masing tetapi hanyalah jumlahnya.

Karena yang diminta adalah titik tengah jumlah akar-akar (1) adalah $y_1 + y_2 = \dfrac{2p}{a}$ atau $\frac{1}{2}(y_1 + y_2) = \dfrac{p}{a} = y_T$
= koordinat y titik tengah T dari kedua titik potongnya. Ternyata disini parameter b sudah tidak terdapat lagi maka tengah-tengah itu selalu berkoordinat $y = \dfrac{p}{a}$ untuk sebarang x, jadi tempat kedudukannya adalah

$y = p / a$ sebuah garis yang sejajar sumbu x

2. Tentukan tempat kedudukan titik-titik dasar semua garis tegak lurus dari fokus suatu parabola kesemua garis singgung parabola itu

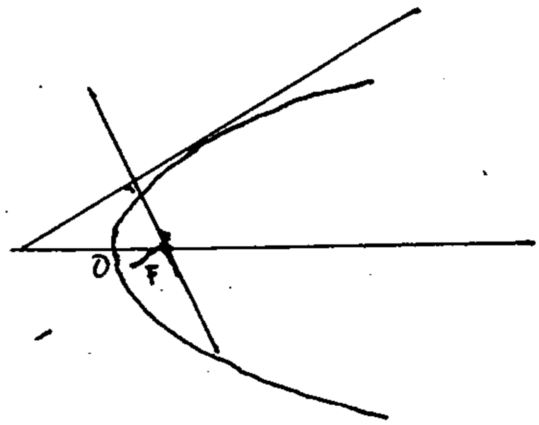
Penyelesaian lihat gambar:

Parabola $\equiv y^2 = 2px$

Misalkan garis singgung itu

$y = ax + \frac{p}{2a}$, a = parameter

karena arahnya berubah-ubah garis yang tegak lurus garis singgung itu dan yang melalui F $(\frac{1}{2}p,0)$ mempunyai persamaan $y = \frac{-1}{a}(x - \frac{1}{2}p)$



Perpotongan kedua garis itu menghasilkan $ax + \frac{p}{2a} = \frac{-x}{a} + \frac{p}{2a}$ atau $(a + \frac{1}{a}) x = 0$

Atau $x = 0$.

Ternyata tempat kedudukannya adalah sebuah garis yang melalui nol dan yang tegak lurus sumbu x, yaitu sumbu y sendiri sesuai dengan catatan 1 garis singgung. Titik dasar itu adalah titik potong kedua diagonal belah ketupat dalam pasal tersebut.

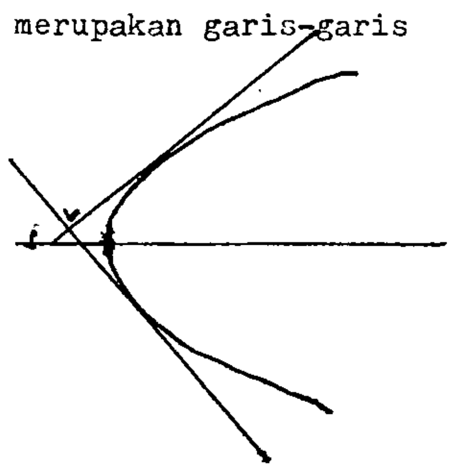
3. Tentukan tempat kedudukan titik sudut semua sudut siku-siku jika kedua kaki sudut itu merupakan garis-garis singgung pada parabola.

   Penyelesaian : lihat gambar

   Parabola $\equiv y^2 = 2px$

   Garis singgung $\equiv y = ax + \frac{p}{2a}$

   a = parameter



   Garis singgung yang tegak lurus padanya berkoeffisien arah $-1/a$ dan mempunyai persamaan $y = - x/a - \frac{1}{2}ap$

   Perpotongan menghasilkan : $ax + p/2a = -x/a - \frac{1}{2}ap$

   atau

   $x(a + 1/a) = - \frac{1}{2}p (a + 1/a)$.

Jadi $x = \frac{-p}{2}$.

Ternyata tempat kedudukan itu ialah direktrix parabola.

Catatan : Baik dalam contoh 2, maupun dalam contoh 3, cara mengeliminr parameternya adalah berlainan dengan apa yang telah diketahui. Mengenai hal ini memang tak ada cara yang tertentu. Cara yang mana yang akan dipakai, tergantung dari bentuk soalnya sendiri.

L A T I H A N 4

1. A, B, C, D adalah titik-titik $(-3,3)$, $(12,6)$, $(-4,-3)$, $(1,-2)$, E membagi dalam segmen AB atas perbandingan 2 : 1
2. A, B adalah titik-titik $(1,-2)$, $(-3,4)$; tentukan titik-titik T pada garis $x - 2y + 4 = 0$, kalau luas segitiga ABT = 13.
3. Garis-garis $ax + hy + g = 0$, $hk + by + f = 0$ dan $gx + fy + c = 0$ adalah konkuren ; buktikan bahwa: $abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2 = 0$
4. Tentukan panjang tali busur yang berimpit dengan sumbu x dari lingkaran yang bergaris tengah AB, kalau $A(0,-1)$ dan $B(2,3)$.
5. A, B, C, adalah titik $(3,5)$, $(-4,-2)$, $(3,-1)$; tentukan titik-titik pada garis $x - 3y + 2 = 0$, yang konsiklis (selingkaran letaknya) dengan A, B dan C.
6. Buktikan bahwa pusat lingkaran-lingkaran $2x^2 + 2y^2 -3x - 4x + 1 = 0$ dan $16x^2 + 16y^2 - 32x - 1 = 0$ yang satu terletak pada yang lain.
7. Tentukan titik potong - titik potong garis singgung di titik $(1,2)$ pada lingkaran $x^2 + y^2 = 5$, dengan $x^2 + y^2 = 10$
8. Tentukan persamaan lingkaran yang melalui titik $(1,0)$ dan yang menyinggung garis $3x + 2y = 4$ dititik $(2,-1)$
9. Tentukan persamaan-persamaan garis singgung yang dapat ditarik dari titik $(-3,-4)$ pada lingkaran $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 5 = 0$.

lo. Buktikan bahwa garis singgung pada lingkaran $x^2 + y^2 - 6x + 2y + 5 = 0$ dititik (1,0) menyinggung lingkaran $5x^2 + 5y^2 = 4$

11. Buktikan bahwa kedua lingkaran $x^2 + y^2 - 6ax + 6ay + 16a^2 = 0$ dan $x^2 + y^2 - 2ax + 6ay + 8a^2 = 0$ berpotongan tegak lurus.

12. Garis singgung dititik (4,3) pada lingkaran $x^2 + y^2 = 25$ memotong lingkaran $x^2 + y^2 = 50$ dititik-titik P dan Q buktikan bahwa garis singgung - garis singgung di P dan Q pada lingkaran yang kedua tegak lurus sesamanya

13. Buktikan kedua garis $3x - y - 25 = 0$ dan $7x - 4y - 25 = 0$ adalah sekawan terhadap lingkaran $x^2 + y^2 = 25$ (titik polar garis yang satu terhadap lingkaran terletak pada garis yang lain).

14. Tentukan persamaan lingkaran yang melalui titik-titik (-4,2) dan (-3,-1) dan yang berpusat pada garis $3x - y = 1$. Tunjukkan bahwa talibusur lingkaran tadi dan lingkaran $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$ merupakan garis tengah lingkaran yang kedua.

15. Tentukan persamaan lingkaran yang melalui (-3,0) dan yang memotong tegak lurus lingkaran-lingkaran $x^2 + y^2 + 3x - 6y + 5 = 0$ dan $x^2 + y^2 - 7x - y = 0$

16. Tentukan titik-titik yang kuasa-kuasanya terhadap lingkaran-lingkaran $x^2 + y^2 = 3$, $x^2 + y^2 - x = 0$ dan $x^2 + y^2 + 3x + 2y - 6 = 0$ berbanding 1 : 2 : 3.

17. Diketahui titik-titik A (2,0) dan B (0,3). Tentukan tempat kedudukan titik C segitiga ABC, jika selalu berlaku : $AC^2 - BC^2 = 1$

18. Tentukan tempat kedudukan titik-titik yang mempunyai sifat bahwa jumlah jarak-jaraknya kedua buah garis yang berpotongan tetap harganya.

19. Diketahui titik A (0,2). Pada sumbu x terletak titik B dan pada AB terletak titik C, sehingga AB.AC = 16. Tentukan tempat kedudukan titik C, kalau B bergerak pada sumbu x

20. Diketahui Segitiga ABC. Pada AC terletak titik P dan

pada BC titik Q sehingga PQ sejajar AB. Tentukan tempat kedudukan titik potong AQ dan BP.

21. Dua buah lingkaran L_1 dan L_2 berjari sama (= a) dan kedua-duanya menyinggung sumbu x dan sumbu y ; L_1 di kuadran I dan L_2 dikuadran II. Dari sebarang titik P pada sumbu x ditentukan garis polarnya terhadap L_1 dan dari garis polar ini ditentukan titik polarnya terhadap L_2. Tentukan tempat kedudukan titik Q, bila P bergerak sepanjang sumbu x.

25. Lingkaran L_1 dengan pusat O dan lingkaran L_2 dengan pusat (3,0) bersinggung dititk P (1,0); P adalah titik sudut tetap suatu sudut siku-siku. Kaki yang satu memotong L_1 dititik-titik P dan Q; kaki yang lain memotong L_2 di P dan R. Tentukan tempat kedudukan tengah-tengah QR. Macam apakah tempat kedudukan ini ?

26. PQ adalah tali busur variabel yang melalui fokus suatu parabola : TP adalah garis singgung di P, dan TQ sejajar sumbu simetri; buktikan bahwa tempat kedudukan tengah-tengah PT adalah direktrix.

27. P dan Q adalah dua buah titik variabel t dan 2t pada parabola $y^2 = 4ax$; tentukan tempat kedudukan titik potong garis singgung-garis singgung di P dan Q pada parabola tersebut.

28. Talibusur PQ suatu parabola $y^2 = 4ax$ melalui titik (b,0) tunjukkan bahwa garis-garis singgung di P dan Q bertemu pada garis $x + b = 0$.

29. PN adalah normal dititik P, yaitu titikvariabel pada parabola $y^2 = 4ax$; garis yang melalui fokus dan sejajar dengan garis singgung di P, memotong PN dititik N; buktikan bahwa tempat kedudukan titik N adalah parabola $y^2 = a(x-a)$.

30. Tunjukkan bahwa dua dari tiga buah normal yang dapat ditarik dari titik (5a,2a) pada parabola $y^2 = 4ax$, berimpit.

31. Tentukan persamaan-persamaan garis singgung yang dapat ditarik dari titik (-3,1) pada parabola $y^2 = x$.

32. Suatu titik terletak sebarang pada garis $2x - 3y + 8 = 0$ Buktikan bahwa garis polar titik itu terhadap parabola $y^2 = 4x$, melalui (4,3).
33. Buktikan bahwa parabola $y^2 = 4ax$ merupakan tempat kedukan pusat lingkaran yang menyinggung sumbu y dan lingkaran $x^2 + y^2 = 2ax$.
34. Lingkaran $x^2 + y^2 + 2ax + 2ay = 0$ memotong parabola $y^2 = ax$ di O dan tiga buah titik, yang berordinat y_1, y_2 dan y_3. B uktikan bahwa y_1, y_2, y_3 sama dengan $-2a^3$.
35. Tentukan persamaan garis singgung persekutuan pada parabola $y^2 = 4ax$ dan lingkaran $2x^2 + 2y^2 = a^2$.
36. Kalau diketahui A(5,2) dan C(3,6), tentukan kedua titik sudut lainnya dari bujur sangkar ABCD. Berapakah luas bujur sangkar itu ?
37. Tentukan persamaan semua lingkaran yang menyinggung lingkaran $x^2 + y^2 - 8x - 7y + 22 = 0$ dititik (2,2). Kemudian tentukanlah pusat dan jari-jari lingkaran dari kumpulan lingkaran diatas tadi yang memotong, tegak lurus lingkaran $x^2 + y^2 - 6x - 4y - 4 = 0$.
   Petunjuk : Sebuah titik (a,b) dapat dianggap sebagai lingkaran yang berjari-jari nol, yaitu $(x - a)^2 + (y - b)^2 = 0$. Susunlah berkas dengan titik itu sebagai lingkaran dasar.
38. Diketahui tiga titik A (-6,-4), B (6,5) dan C (-18,12)
   a. Tentukan perwamaan ketiga segitiga ABC itu.
   b. Tentukan persamaan kedua garis bagi dalam sudut-sudut B dan C.
   Petunjuk : Pakailah titik potongnya dengan sumbu y untuk menyelidiki yang mana garis bagi dalam dan yang mana garis bagi luar
   c. Tentukan persamaan lingkaran dalam dari segitiga ABC itu,
   d. Berapakah luas segitiga ABC ?

MILIK UPT PERPUSTAKAAN
IKIP PADANG

DAFTAR BACAAN

1. Karsa, Geometri Analitik Bidang, Epsilon, Bandung, 1982.
2. Kindlf, Joseph. H, Plane and Solid Analitic Geometry, Schaum's Outline Series in Mathematics, Mc Graw Hill Book Company, New York, 1978.
3. Louis Leethold, The Calculus with Analitic Geometri, Harper International Edition, Harper and Row Publisher, New York , Hagerstone, San Fransisco, London, 1976.
4. R Rawuh, Teng Tek Hoen, M Entoem, dan Goew Key Hong, Ilmu Ukur Analitis, Tarate, Bandung, 1969.
5. Yefimov, N diterjemahkan dari bahasa Rusia oleh O. Soroka A Brief Course in Analytic Geometry, Peace Publisher, Moscow, 1972.