Seri Mekanika Teknik

STATIKA

Bagian 2

Drs. Ambiyar. M.Pd.

INSTITUT KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN PADANG
FAKULTAS PENDIDIKAN TEKNOLOGI DAN KEJURUAN

KATA PENGANTAR

Berkat rahmat Tuhan Yang Maha Esa dapatlah diselesaikan buku mekanika teknik seri statika sesuai dengan rencana. Buku ini disusun untuk memenuhi kebutuhan bahan bacaan tentang mekanika teknik yang dirasa masih kurang dalam bahasa Indonesia. Materi yang disajikan di usahakan memakai bahasa yang sederhana serta menghindarkan pemakaian matematik yang komplek dan sulit.

Di dalam buku ini dibahas mengenai titik berat dan momen inersia. Baik titik berat maupun momen inersia merupakan konsep dasar untuk menentukan kekuatan bahan. Agar lebih mudah memahami dan mengetahui pemakaian rumus yang ada, maka dilengkapi dengan contoh-contoh soal dan penyelesaiannya,ditambah dengan soal-soal latihan beserta kunci jawabannya.

Pada kesempatan yang baik ini, penulis ingin menyampaikan rasa terima kasih kepada semua pihak yang turut membantu dalam penyelesaian buku ini.

Terakhir sekali, bagaimanapun juga buku ini jauh dari sempurna dan segala kritik membangun serta koreksi dari teman sejawat, para ahli, dan para pembaca sangat ditunggu dengan segala senang hati dan hormat, guna untuk perbaikan buku ini di masa yang akan datang ini.

Penulis.

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

BAB I

TITIK BERAT

A. PENGERTIAN TITIK BERAT DAN CENTROID

Sebuah benda dapat dianggap sebagai kumpulan dari bidang, garis, dan titik materi. Pada titik materi bekerja gaya berat yang arahnya vertikal kebawah. Kalau dimensi garis, bidang, benda tidak terlalu besar, maka gaya-gaya berat tersebut dapat dianggap sejajar. Resultante susunan gaya-gaya sejajar ini adalah berat benda itu. Sedangkan titik tangkap resultante dari gaya susunan tersebut disebut titik berat, secara singkat ditulis c.g. Dapat dicatat bahwa tiap-tiap benda mempunyai satu, dan hanya satu titik berat.

Selanjutnya gambar bidang geometris seperti segi tiga, bujur sangkar, lingkaran, dan sebagainya, mempunyai hanya luas, tetapi tidak massa. Pusat dari luas gambar, dinamakan centroid dari benda. Metoda untuk menentukan centroid dari sebuah gambar adalah sama seperti menentukan titik berat dari sebuah benda. Dalam banyak buku, pengarang juga menulis c.g untuk centroid.

B. METODA UNTUK MENENTUKAN TITIK BERAT

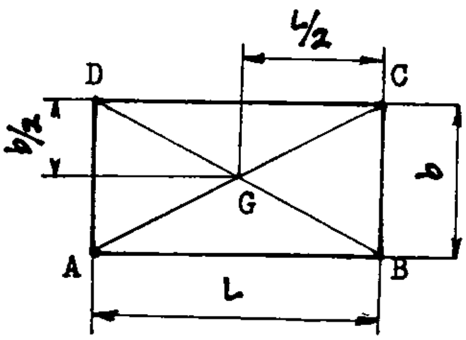
Untuk menentukan titik berat dari gambar sederhana dapat digunakan 4 (empat) macam metoda, yakni metoda geometris (by geometrical consideration), metoda momen (by the method moment), metoda integrasi (by integration), metoda grafis (using the graphical method) (S.N. Saluya, 1976 : 88).

Di bawah ini hanya akan diuraikan tiga macam metoda, yakni metoda geometris, grafis, dan metoda momen.

1. Metoda Geometris

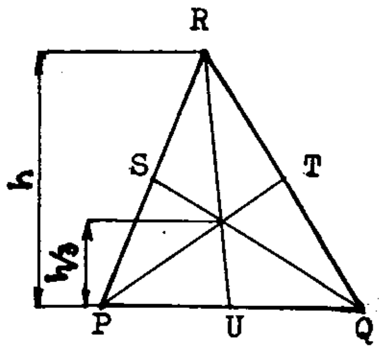
Titik berat (c.g) dari gambar sederhana boleh di tentukan dari geometris gambar, yakni :

1. Titik berat dari sebuah batang yang sejenis (uniform) terletak pada titik tengahnya.
2. Titik berat (c.g) dari sebuah segi empat atau sebuah jajaran genjang adalah titik dimana - terjadi pertemuan diagonalnya satu sama lain. Titik berat adalah juga sebuah titik tengah dari panjang dan lebar dari segi empat seperti ditunjukkan dalam gambar 1.
3. Titik berat dari sebuah segi tiga adalah pada titik dimana 3 (tiga) median (median adalah - sebuah garis yang menghubungkan ujung sudut - (vertex) dan titik tengah dari sisi yang berlawanan) dari segi tiga bertemu seperti di - tunjukkan pada gambar 2.



Gambar 1

Segi Empat ABCD

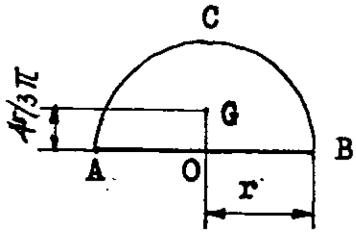


Gambar 2

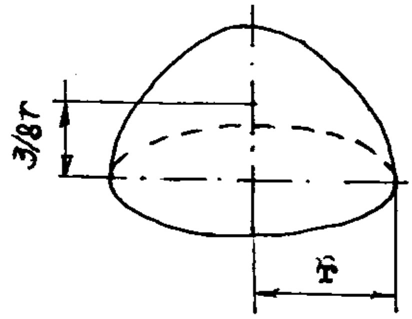
Segi Tiga PQR

4. Titik berat dari sebuah benda setengah ling - karan adalah sejauh $4r/3\pi$ dari dasar, yang diukur sepanjang radius vertikal, seperti ditunjukkan dalam gambar 3.
5. Titik berat dari sebuah benda setengah dunia (hemisphere) adalah pada jarak $3r/8$ dari da - sar, yang diukur sepanjang radius vertikal - seperti ditunjukkan pada gambar 4.
6. Titik berat dari sebuah trapesium dengan sisi paralel a dan b adalah sejauh $h/3 \times \left(\frac{b + 2a}{b + a} \right)$

diukur dari sisi b, seperti ditunjukkan pada gambar 5.

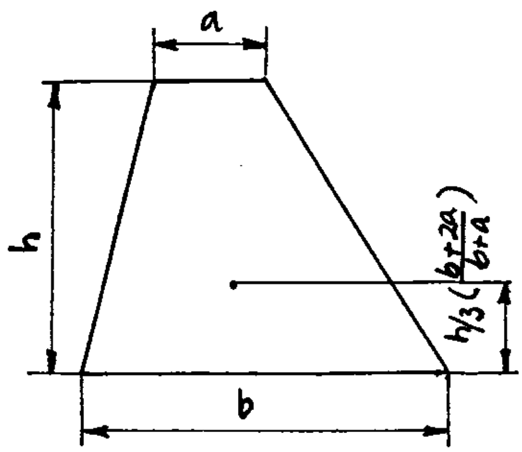


Gambar 3
Setengah Lingkaran

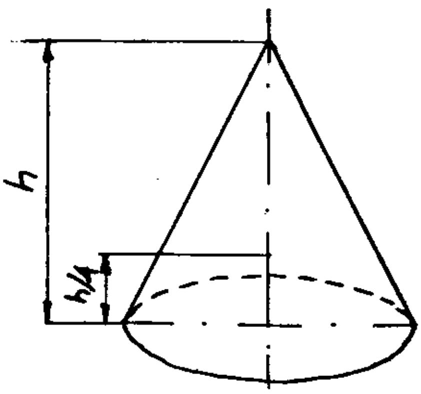


Gambar 4
Hemisphere

7. Titik berat dari sebuah kerucut adalah sejauh h/4 dari dasarnya, yang diukur sepanjang sumbu vertikal, seperti ditunjukkan pada gambar 6.
8. Titik berat dari sebuah bidang parabola adalah sejauh 3h/5 dari dasarnya, yang diukur sepanjang sumbu vertikal, seperti ditunjukkan pada gambar 7.

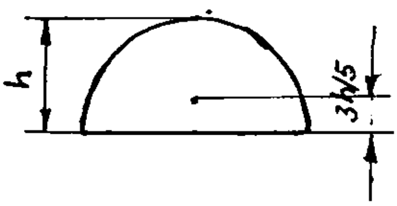


Gambar 5
Trapesium

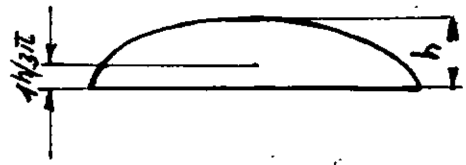


Gambar 6
Kerucut

9. Titik berat dari sebuah lingkaran terletak di tengahnya.
10. Titik berat dari sebuah bidang setengah elip adalah sejauh $4\ h/3\pi$ dari dasarnya, yang diukur sepanjang sumbu vertikal, seperti ditunjukkan pada gambar 8.
11. Dan lain-lain.



Gambar 7
Parabola



Gambar 8
Setengah Ellips

2. Metoda Grafis

Titik berat dari sebuah benda dapat ditentukan dengan metoda atau secara grafis, seperti diuraikan dibawah ini :

Perhatikan sebuah sudut yang tidak sama ABCDEFH, seperti ditunjukkan pada gambar 9. Dibagi sudut menjadi 2 (dua) buah segi empat, yakni ABCH dan DEFH seperti di tunjukkan pada gambar 9.a.

Bila A_1 = luas segi empat DEFH, dan
A_2 = luas segi empat ABCH

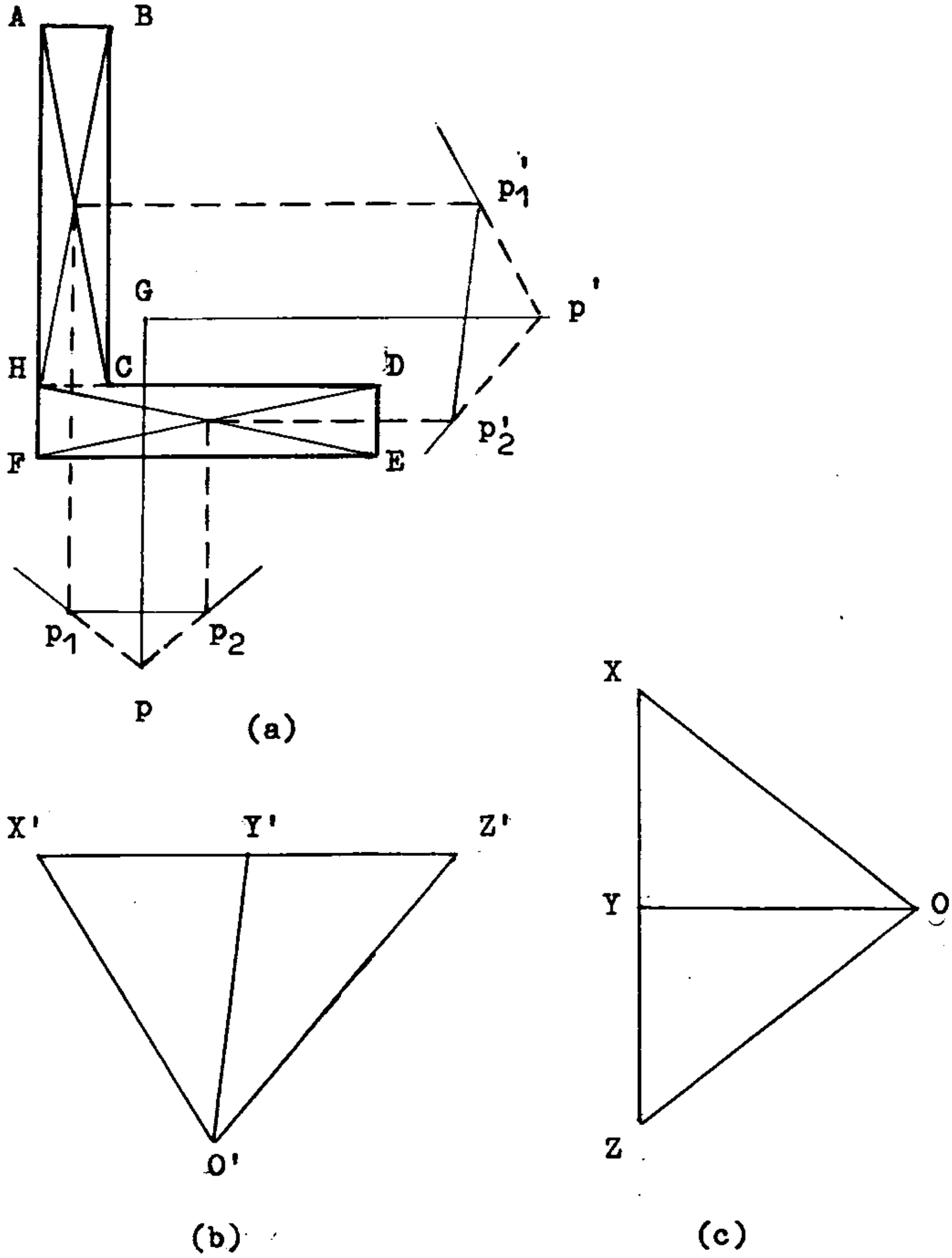
Sekarang lakukan secara grafis A_1 dan A_2 sebagai 2 (dua) gaya vertikal sejajar yang bekerja melalui pusat dari - masing-masing segi empat. Atur vektor xy untuk mewakili A_1 dengan suatu skala yang ditetapkan dan yz untuk menyatakan A_2 dengan skala yang sama. Pilihlah titik 0 , dan hubungkan OX, OY dan OZ seperti ditunjukkan pada - gambar 9.c.

Tarik garis vertikal melalui titik berat dari 2 (dua) buah segi empat seperti ditunjukkan pada gambar 9 a. Pilihlah sebuah titik yang cocok p_1 pada garis vertikal melalui titik berat dari segi empat ABCH (dinamakan garis kerja dari A_1). Melalui p_1 tarik garis seja - jar OX dan garis sejajar OY, bertemu garis kerja A_2 pada titik p_2. Melalui p_2 tarik garis sejajar OZ. Bila garis pertama dan terakhir akan dihasilkan pertemuan pa da titik p seperti ditunjukkan pada gambar 9.a. Titik - berat (c.g) dari penampang harus terletak pada sebuah garis vertikal melalui p. Tarik sebuah garis vertikal - melalui p seperti ditunjukkan pada gambar 9.a.

Dengan cara yang sama lakukan secara grafis A_1 dan A_2 sebagai mana 2 (dua) buah gaya horizontal yang - sejajar bekerja melalui pusat dari masing-masing segi empat. Atur vektor X'Y' untuk menyatakan A_1 dengan suatu skala dan Y8Z' untuk menyatakan A_2 dengan skala itu. Pilihlah titik O' dan hubungkan O'X', O'Y' dan O'Z' seperti ditunjukkan dalam gambar 9.b.

Tarik garis horizontal dari kerja A_1 dan A_2 me - lalui titik berat 2 (dua) buah segi empat seperti di - tunjukkan pada gambar 9.a. Sekarang pilih titik p_1' pada garis kerja A_1. Melalui p_1' tarik sebuah garis sejajar - O'X' dan sebuah garis sejajar O'Y' ; pertemuan garis - kerja A_2 pada titik p_2. Melalui p_2 tarik sebuah garis - sejajar O'Z'. Ambil garis pertama dan terakhir, kemudian dihasilkan pertemuan pada titik p' seperti ditunjukkan pada gambar 9.a. Sekarang tarik sebuah garis hori - zontal melalui p' bertemu dengan garis vertikal melalui p pada titik G.

Sekarang G adalah titik berat yang dibutuhkan dari penampang. Pada cara ini dapat ditentukan titik berat dari beberapa penampang.



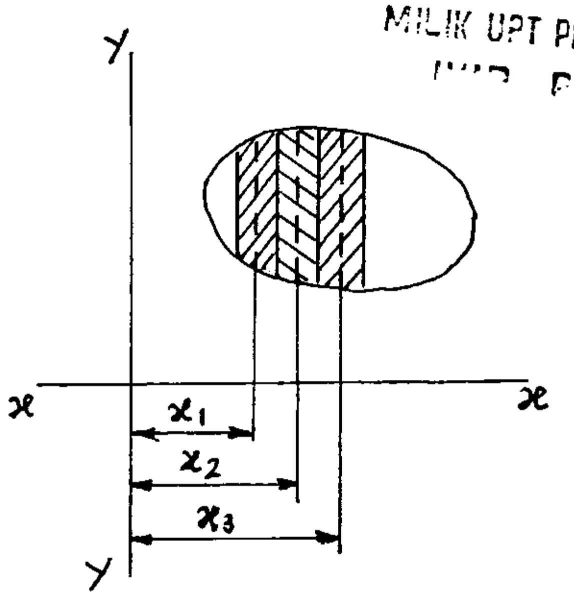
Gambar 9

Menentukan Titik Berat Secara Grafis

3. Metoda Momen

Titik berat dari sebuah benda dapat juga diten - tukan dengan metoda momen, seperti diuraikan dibawah - ini.

Perhatikanlah sebuah benda dengan massa M yang mana titik beratnya akan ditentukan. Benda dibagi menjadi bagian massa yang kecil, dimana titik beratnya diketahui, seperti ditunjukkan dalam gambar 10. Bila m_1, m_2, m_3, ... dan seterusnya adalah massa dari partikel-partikel dan (X_1, Y_1), (X_2, Y_2), (X_3, Y_3) adalah koordinat dari titik berat pada titik O, seperti di tunjukkan dalam gambar 10.



Gambar 10
Sebuah Benda Dengan Massa M

Bila $\bar{X}$ dan $\bar{Y}$ adalah koordinat dari titik berat - benda. Dari prinsip momen diperoleh :

$$M\bar{X} = m_1 X_1 + m_2 X_2 + m_3 X_3 + ...$$

$$\bar{X} = \frac{\sum mX}{M} \quad \text{(S.N. Saluya, 1976 : 89)}$$

Dengan cara yang sama diperoleh :

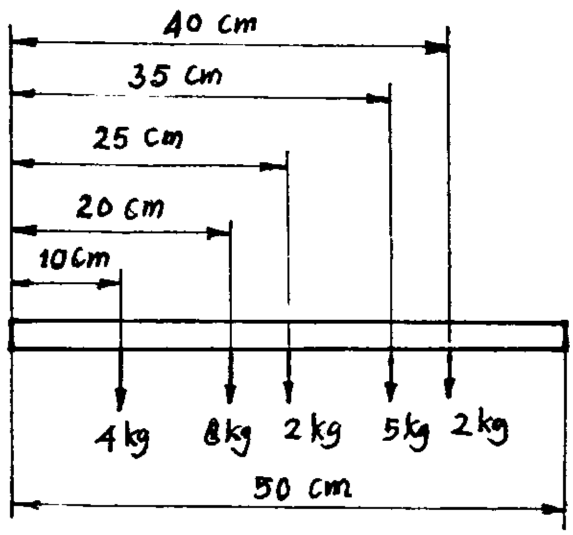
$$\bar{Y} = \frac{\Sigma mY}{M} \quad \text{(S.N. Saluya, 1976 : 89)}$$

dimana, $M = m_1 + m_2 + m_3$

Contoh 1.1.

Sebuah batang yang sejenis (uniform) mempunyai panjang 50 cm dan massa 4 kg, 8 kg, 2 kg, 5 kg, dan 2 kg yang ditempatkan pada jarak 10 cm, 20 cm, 25 cm, 35 cm, dan 40 cm dari ujung kiri. Tentukanlah letak titik beratnya.

Penyelesaian :



Gambar 11
Sebuah Batang Yang Uniform

$m_1 = 4$ kg , $X_1 = 10$ cm
$m_2 = 8$ kg , $X_2 = 20$ cm
$m_3 = 2$ kg , $X_3 = 25$ cm
$m_4 = 5$ kg , $X_4 = 35$ cm
$m_5 = 2$ kg , $X_5 = 40$ cm

Bila X adalah jarak titik berat dari ujung kiri, sebagai titik acuan, maka akan diperoleh :

$$X = \frac{m_1 X_1 + m_2 X_2 + m_3 X_3 + m_4 X_4 + m_5 X_5}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5}$$

$$= \frac{4 \times 10 + 8 \times 20 + 2 \times 25 + 5 \times 35 + 2 \times 40}{4 + 8 + 2 + 5 + 2}$$

$$= 20{,}45 \text{ cm.}$$

Jadi letak titik beratnya adalah 20,45 cm dari ujung - kiri.

C. TITIK BERAT DARI SUATU BIDANG/PROFIL

Titik berat bidang seperti profil T, I, L, dan sebagainya adalah ditentukan dengan cara yang sama seperti benda padat. Dalam kasus ini, benda dianggap tebalnya merata (tidak mempunyai massa), titik berat dari gambar akan terjadi pada titik yang sama dengan luasnya.

Ambil X dan Y sebagai koordinat dari titik berat maka menurut R.S Khurmi (1980 : 63) akan diperoleh :

$$X = \frac{a_1 X_1 + a_2 X_2 + a_3 X_3 + \ldots\ldots}{a_1 + a_2 + a_3}$$

Dengan cara yang sama

$$Y = \frac{a_1 Y_1 + a_2 Y_2 + a_3 Y_3 + \ldots\ldots}{a_1 + a_2 + a_3}$$

Dimana a_1 , a_2 , a_3 ..... dan sebagainya adalah luas , dari keseluruhan gambar yang dibagi. X_1 , X_2 , X_3, dan sebagainya adalah koordinat dari luas a_1, a_2, a_3 ...... dan seterusnya pada sumbu X - X. Y_1 , Y_2 , Y_3 , ,..... dan seterusnya adalah koordinat dari luas a_1 , a_2 , a_3, ... dan seterusnya pada sumbu Y - Y

Catatan :

Selama menggunakan rumus di atas, X_1 , X_2 , X_3 , ... dan seterusnya atau Y_1 , Y_2 , Y_3 .... dan seterusnya, X dan Y harus diukur dari sumbu yang sama atau titik acuan dan pada sisi yang sama darinya. Jika gambar adalah pada kedua sisinya dari sumbu acuan, maka jarak dalam satu arah diambil positif dan arah yang berlawan - an harus diambil negatif.

D. SUMBU ACUAN DAN SUMBU SIMETRIS

Titik berat dari sebuah benda selalu dihitung dengan acuan untuk beberapa sumbu yang diketahui sebagai - sumbu acuan (kadang-kadang dengan acuan untuk beberapa titik acuan). Sumbu acuan dari gambar bidang/profil, secara umum diambil garis yang paling rendah dari gambar untuk menghitung Y, dan garis kiri dari gambar untuk menghitung X.

Selanjutnya, ada penampang dimana titik berat yang dibutuhkan dapat ditentukan secara simetris terhadap sumbu X - X atau sumbu Y - Y (seperti contoh 1.2 - 1.5). Dalam beberapa kasus, prosedur untuk menghitung titik berat benda adalah sangat sederhana, seperti ha - nya menghitung X dan Y. Ini disebabkan, bahwa titik berat benda terletak pada sumbu simetris. Contoh berikut ini merupakan illustrasi dari sumbu simetris.

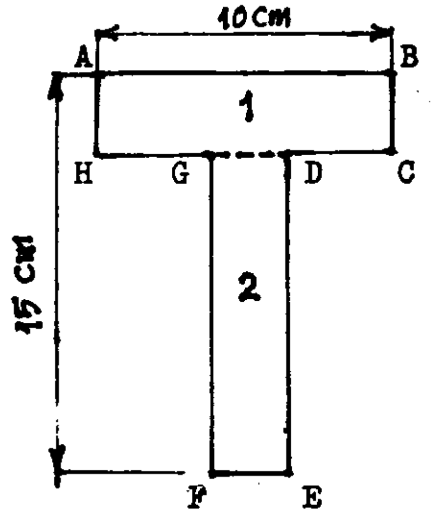
Contoh 1.2

Hitunglah titik berat dari sebuah penampang T , yang berukuran 10 cm x 15 cm.

Penyelesaian :

Penampang adalah simetris terhadap sumbu Y- Y , karenanya titik berat dari penampang akan terletak pada sumbu ini.

Selanjutnya bagilah penampang menjadi 2 (dua) segi empat, yakni segi empat ABCH dan segi empat DEFG , ditunjukkan pada gambar contoh 1.2



Gambar 12

Penampang Berbentuk T

Bila $\bar{Y}$ adalah jarak antara titik berat dan dasar FE sebagai acuan, maka :

1. Luas ABCH

$A_1 = 10 \times 3 = 30 \text{ cm}^2$

$Y_1 = (15 - \frac{3}{2}) = 13{,}5 \text{ cm}^2$

2. Luas DEFG

$A_2 = 12 \times 3 = 36 \text{ cm}^2$

$Y_2 = 12/2 = 6 \text{ cm}$

$$\bar{Y} = \frac{A_1 Y_1 + A_2 Y_2}{A_1 + A_2}$$

$$= \frac{30 \times 13{,}5 + 36 \times 6}{30 + 36}$$

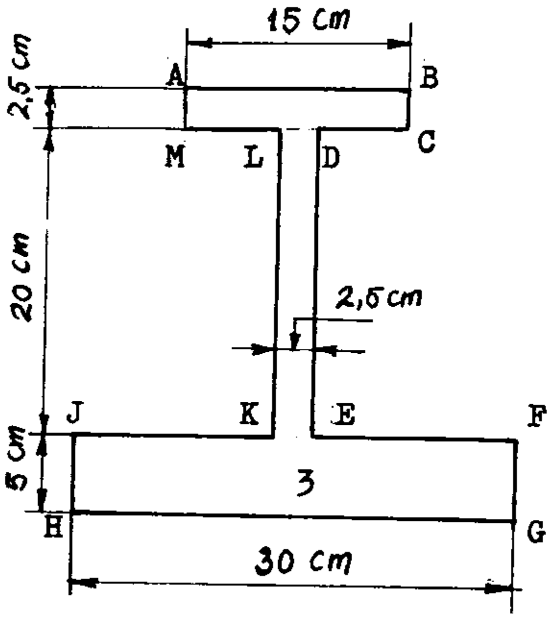
$$= 9{,}4 \text{ cm}$$

Contoh 1.3

Sebuah penampang I dibentuk oleh 3 (tiga) segi empat. 2 (dua) segi empat mempunyai permukaan datar yang panjang dan tipis, dan satu jaringan (web) dihubungkan sesamanya dengan sisi vertikalnya lebih panjang. Penampang sisi puncak mempunyai ukuran 15 cm x 2, 5 cm , dan sisi alas mempunyai ukuran 30 cm x 5 cm. Penampang jaringan mempunyai ukuran 20 cm tinggi dan 2,5 cm lebarnya (broad). Hitunglah letak titik berat dari dasar sisi yang lebih rendah.

Penyelesaian :

Sebagai mana penampang adalah simetris terhadap sumbu Y - Y, karenanya titik berat dari penampang akan terletak pada sumbu ini.



Gambar 13
Penampang Berbentuk I

Bagi seluruh penampang menjadi 3 (tiga) buah segi empat, yakni ABCM, DEKL, dan FGHJ seperti ditunjukkan pada gambar 13.

Ambil $\bar{Y}$ adalah jarak antara titik berat dan dasar sisi yang lebih rendah yakni HG, sebagai - sumbu acuan, maka :

1. Luas ABCM

$$A_1 = 15 \times 2,5$$
$$= 37,5 \text{ cm}^2$$
$$Y_1 = 5 + 20 + 2,5/2$$
$$= 26,25 \text{ cm}$$

2. Luas DEKL

$$A_2 = 20 \times 2,5 = 50 \text{ cm}^2$$
$$Y_2 = 5 + 20/2 = 15 \text{ cm}$$

3. Luas FGHJ

$$A_3 = 30 \times 5 = 150 \text{ cm}^2$$
$$Y_3 = 5/2 = 2,5 \text{ cm}$$

Gunakan rumus, maka akan diperoleh :

$$\bar{Y} = \frac{A_1\,Y_1 + A_2\,Y_2 + A_3\,Y_3}{A_1 + A_2 + A_3}$$

$$= \frac{37,5 \times 26,5 + 50 \times 15 + 150 \times 2,5}{37,5 + 50 + 150}$$

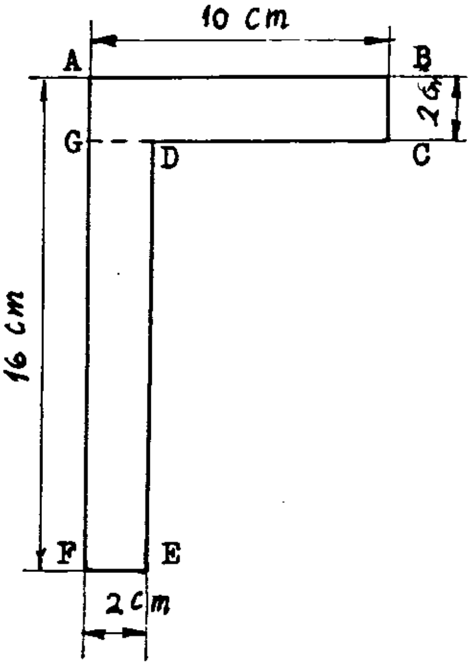
$$= 8,88 \text{ cm}$$

Jadi jarak titik berat dari dasar sisi yang lebih rendah adalah sama dengan 8,88 cm.

Contoh 1.4

Tentukanlah posisi titik berat dari sebuah pe - nampang/profil L seperti ditunjukkan pada gambar 14.

Penyelesaian :



Gambar 14

Penampang Berbentuk L terbalik

Bagilah seluruh penampang menjadi 2 (dua) buah segi empat, yakni ABCG dan DE-FG, seperti ditunjukkan pada gambar 14.

Ambil $\overline{Y}$ adalah jarak ant tara titik berat dan AB , sebagai sumbu acuan, maka akan didapat :

1. Luas ABCG

   $A_1 = 10 \times 2 = 20 \text{ cm}^2$

   $Y_1 = 12/2 = 5$ cm

2. Luas DEFG

   $A_2 = (16 - 2) \times 2$
   $= 28 \text{ cm}^2$

   $Y_2 = 2 + 14/2 = 9$ cm

Gunakan persamaan (rumus), maka diperoleh :

$$\overline{Y} = \frac{A_1 Y_1 + A_2 Y_2}{A_1 + A_2}$$

$$= \frac{20 \times 5 + 28 \times 9}{20 + 28}$$

$$= 5{,}67 \text{ cm}$$

Dengan cara yang sama, ambil X adalah jarak antara ti - tik berat dan AF, sebagai sumbu acuan.

1. Luas ABCG

$$A_1 = 10 \times 2 = 20 \text{ cm}^2$$

$$X = 10/2 = 5 \text{ cm}$$

2. Luas DEFG

$$A_2 = (16 - 2) \times 2 = 28 \text{ cm}^2$$

$$X_2 = 2/2 = 1 \text{ cm}$$

Gunakan rumus sehingga didapat :

$$\bar{X} = \frac{A_1 X_1 + A_2 X_2}{A_1 + A_2}$$

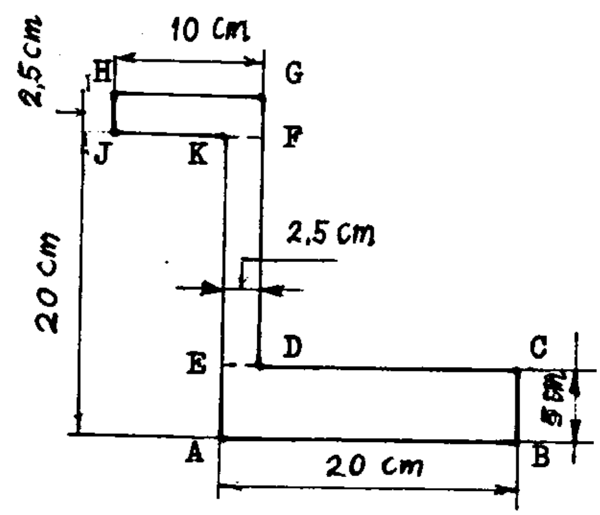
$$= \frac{20 \times 5 + 28 \times 1}{20 + 28} = 2,67 \text{ cm}$$

Jadi letak titik berat penampang L adalah sejarak 5,67 cm dari AB dan 2,67 cm dari AF.

Contoh 1.5

Tentukanlah letak titik berat dari profil Z, seperti ditunjukkan dalam gambar 15.

Penyelesaian :



Gambar 15

Penampang Berbentuk Z

Bagilah seluruh penampang menjadi tiga buah segi empat, yakni segi empat ABCE, EDFK dan FGHJ seperti ditunjuk - kan pada gambar 15.

Ambil $\bar{X}$ adalah jarak antara titik berat dan HJ sebagai sumbu acuan, maka akan diperoleh :

1. Luas FGHJ

$$A_1 = 10 \times 2,5 = 25 \text{ cm}^2$$

$$X_1 = 10/2 = 5 \text{ cm}$$

2. Luas EDFK

$$A_2 = 15 \times 2,5 = 37,5 \text{ cm}$$

$$X_2 = 10 - 2,5/2 = 8,75 \text{ cm}$$

3. Luas ABCE

$$A_3 = 20 \times 5 = 100 \text{ cm}^2$$

$$X_3 = 7,5 + 20/2 = 17,5 \text{ cm.}$$

Gunakan rumus,sehingga didapat :

$$\bar{X} = \frac{A_1 X_1 + A_2 X_2 + A_3 X_3}{A_1 + A_2 + A_3}$$

$$= \frac{25 \times 5 + 37,5 \times 8,75 + 100 \times 17,5}{25 + 37,5 + 100}$$

$$= 13,56 \text{ Cm.}$$

Dengan cara yang sama, ambil $\bar{Y}$ adalah jarak antara ti - tik berat dan AB sebagai sumbu acuan.

1. Luas FGHJ

$$A_1 = 10 \times 2,5 = 25 \text{ cm}^2$$

$$Y_1 = 20 + 2,5/2 = 21,25 \text{ cm}$$

2. Luas EDFK

$$A_2 = 15 \times 2,5 = 37,5 \text{ cm}^2$$

$$Y_2 = 5 + 15/2 = 12,5 \text{ cm}$$

3. Luas ABCE

$$A_3 = 20 \times 5 = 100 \text{ cm}^2$$

$$Y_3 = 5/2 = 2{,}5 \text{ cm}$$

Gunakan rumus, sehingga didapat :

$$\bar{Y} = \frac{A_1\,Y_1 + A_2\,Y_2 + A_3\,Y_3}{A_1 + A_2 + A_3}$$

$$= \frac{25 \times 21{,}25 + 37{,}5 \times 12{,}5 + 100 \times 2{,}5}{25 + 37{,}5 + 100}$$

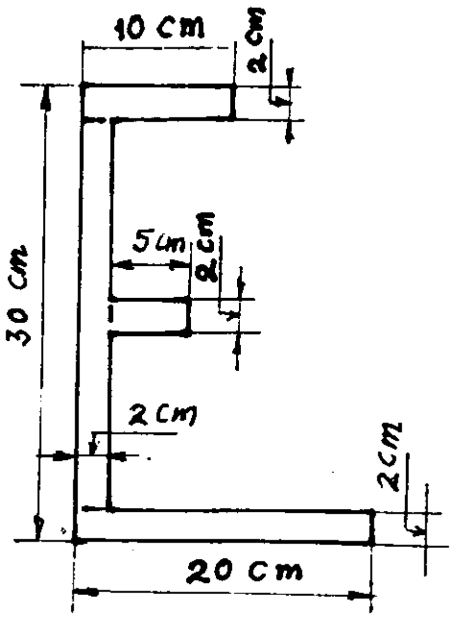
$$= 7{,}07 \text{ cm}$$

Jadi letak titik berat adalah sejauh 13,56 cm dari HJ dan 7,07 cm dari AB.

Contoh 1.6

Tentukanlah letak titik berat dari penampang berbentuk U, seperti ditunjukkan pada gambar 16.

Penyelesaian :



Gambar 16
Penampang Gabungan dari 4 buah segi empat

Bagilah seluruh penampang menjadi 4 (empat) buah segi empat, yakni segi empat ABWT, segi empat CDEF, segi empat EHTS, dan segi empat KPNR, seperti ditunjukkan dalam gambar 16.

Ambil $\bar{X}$ adalah jarak antara titik berat dan AC sebagai sumbu acuan

1. Luas segi empat ABWT

$$A_1 = 20 \times 2 = 40 \text{ cm}^2$$

$$X_1 = 20/2 = 10 \text{ cm}$$

2. Luas segi empat CDEF

$A_2 = 10 \times 2 = 20 \text{ cm}^2$
$X_2 = 10/2 = 5 \text{ cm}$

3. Luas segi empat EHTS
$A_3 = (30 - 2 - 2) \times 2 = 52 \text{ cm}^2$
$X_3 = 2/2 = 1 \text{ cm}$

4. Luas segi empat KPNR
$A_4 = 5 \times 2 = 10 \text{ cm}^2$
$X_4 = 2 + 5/2 = 4{,}5 \text{ cm}$

Gunakan rumus, sehingga didapat :

$$\overline{X} = \frac{A_1 X_1 + A_2 X_2 + A_3 X_3 + A_4 X_4}{A_1 + A_2 + A_3 + A_4}$$

$$= \frac{40 \times 10 + 20 \times 5 + 52 \times 1 + 10 \times 4{,}5}{40 + 20 + 52 + 10}$$

$$= 4{,}893 \text{ cm}$$

Dengan cara yang sama, ambil $\overline{Y}$ adalah jarak antara ti - tik berat dan AB sebagai sumbu acuan.

1. Luas segi empat ABWT
$A_1 = 20 \times 2 = 40 \text{ cm}^2$
$Y_1 = 2/2 = 1 \text{ cm}$

2. Luas segi empat CDEF
$A_2 = 10 \times 2 = 20 \text{ cm}^2$
$Y_2 = 30 - 2/2 = 29 \text{ cm}$

3. Luas segi empat EHTS
$A_3 = (30 - 2 - 2) \times 2 = 52 \text{ cm}^2$
$Y_3 = 2 + 26/2 = 15 \text{ cm}$

4. Luas segi empat KPNR
$A_4 = 5 \times 2 = 10 \text{ cm}^2$
$Y_4 = 2 + 12 + 2/2 = 15 \text{ cm}$

Gunakan rumus, sehingga didapat :

$$\overline{Y} = \frac{A_1\ Y_1 + A_2\ Y_2 + A_3\ Y_3 + A_4\ Y_4}{A_1 + A_2 + A_3 + A_4}$$

$$= \frac{40 \times 1 + 20 \times 29 + 52 \times 15 + 10 \times 15}{40 + 20 + 52 + 10}$$

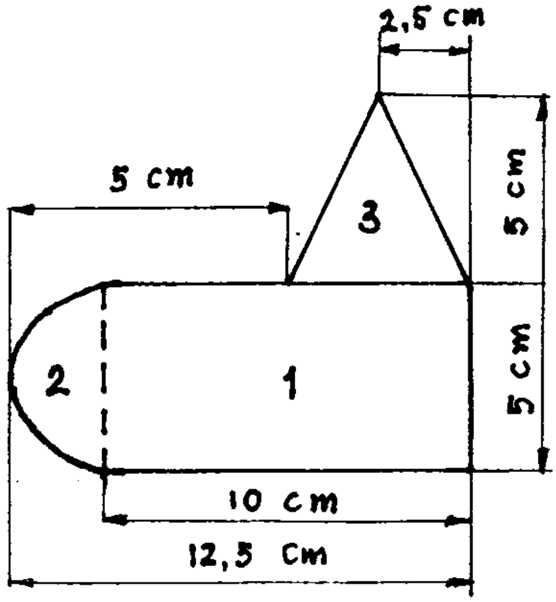
$$= 12{,}71 \text{ cm.}$$

Jadi letak titik berat adalah sejauh 4,893 cm dari AC dan 12,71 cm dari AB.

Contoh 1.7.

Gunakan metoda analitis untuk menentukan titik berat dari bidang seperti ditunjukkan pada gambar 17.

Penyelesaian :



Gambar 17
Sebuah Penampang Gabungan

Ambil $\overline{Y}$ jarak antara titik berat dan AB sebagai sumbu acuan

1. Daerah segi empat ABCD

A_1 = 10 x 5 = 50 cm^2

Y_1 = 5/2 = 2,5 cm

2. Daerah setengah lingkaran AC

$A_2 = \pi/2 \times r^2 = \pi/2 \times 2{,}5^2 = 9{,}82\ cm^2$

$Y_2 = 5/2 = 2{,}5\ cm$

3. Daerah segi tiga DEF

$A_3 = 5 \times 5/2 = 12{,}5\ cm^2$

$Y_3 = 5 + 5/3 = 6{,}67\ cm$

Gunakan rumus, sehingga didapat :

$$\bar{Y} = \frac{A_1 Y_1 + A_2 Y_2 + A_3 Y_3}{A_1 + A_2 + A_3}$$

$$= \frac{50 \times 2{,}5 + 9{,}82 \times 2{,}5 + 12{,}5 \times 6{,}67}{50 + 9{,}82 + 12{,}5}$$

$$= 3{,}22\ cm$$

Dengan cara yang sama, ambil $\overline{X}$ adalah jarak antara titik berat dan ujung kiri lingkaran AC sebagai sumbu acuan.

1. Daerah segi empat ABCD

$A_1 = 10 \times 5 = 50\ cm$

$X_1 = 2{,}5 + 10/2 = 7{,}5\ cm$

2. Daerah setangah lingkaran AC

$A_2 = \pi/2 \times r^2 = \pi/2 \times 2{,}5^2 = 9{,}82\ cm^2$

$X_2 = 2{,}5 - 4r/3\pi = 2{,}5 - 4 \times 2{,}5/\ 3\pi = 1{,}44\ cm$

3. Daerah segi tiga DEF

$A_3 = 5 \times 5/2 = 12{,}5\ cm^2$

$X_3 = 2{,}5 + 5 + 2{,}5 = 10\ cm$

Selanjutnya gunakan rumus, sehingga didapat :

$$\overline{X} = \frac{A_1 X_1 + A_2 X_2 + A_3 X_3}{A_1 + A_2 + A_3}$$

$$= \frac{50 \times 7{,}5 + 9{,}82 \times 1{,}44 + 12{,}5 \times 10}{50 + 9{,}82 + 12{,}5}$$

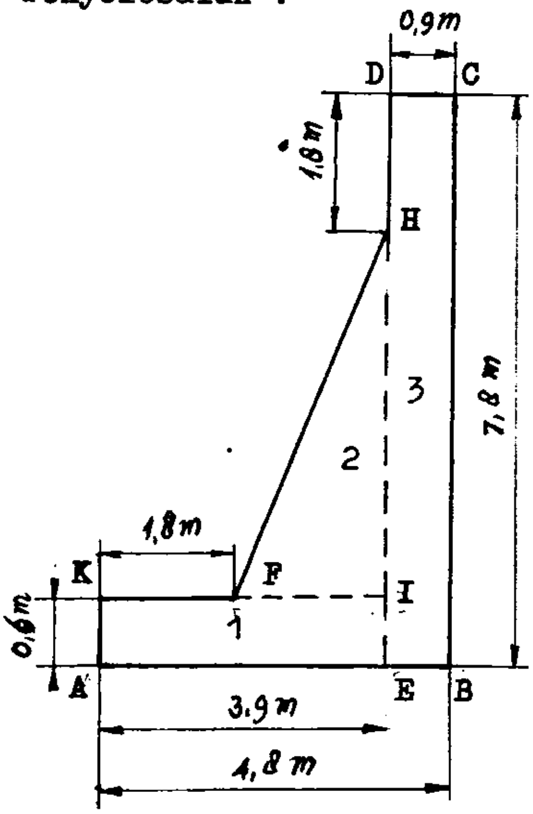
$$= 7{,}11\ cm$$

Jadi letak titik berat adalah sejarak 3,22 cm dari dasar AB dan 7,11 cm dari ujung kiri lingkaran.

Contoh 1.8

Gambar 18 menunjukkan suatu penampang dari se - buah dinding pekerjaan membuat tembok (masonary wall). Tentukanlah posisi titik berat dari penampang.

Penyelesaian :



Gambar 18
Sebuah Massonary Wall

Bagilah penampang menjadi 3 bagian, yakni segi empat AEIK, segi tiga FHI, dan segi empat BCDE seperti ditunjukkan pada gambar 18.

Untuk menentukan posisi titik berat dari penam - pang dibuthkan koordinat $\overline{X}$ dan $\overline{Y}$.

Karena penampang sumbu - nya tidak simetris, maka untuk menghitung $\overline{Y}$ diambil AB sebagai garis acu an.

1. Daerah segi empat AEIK

A_1 = AE x AK
= (4,8-0,9) x 0,6
= 2,34 m^2

Y_1 = 0,6/2 = 0,3 m.

2. Daerah segi tiga FHI

A_2 = FI x IH/2
= (4,8 - 1,8 - 0,9) x (7,8 - 1,8 - 0,6)/2
= 5,67 m^2

Y_2 = 5,4/3 + 0,6 = 2,4 m.

3. Daerah segi empat BCDE

$$A_3 = 7,8 \times 0,9 = 7,02 \text{ m}^2$$

$$Y_3 = 7,8/2 = 3,9 \text{ m.}$$

Selanjutnya gunakan rumus, sehingga didapat

$$\overline{Y} = \frac{A_1 Y_1 + A_2 Y_2 + A_3 Y_3}{A_1 + A_2 + A_3}$$

$$= \frac{2,34 \times 0,3 + 5,67 \times 2,4 + 7,02 \times 3,9}{2,34 + 5,67 + 7,02}$$

$$= 2,77 \text{ meter}$$

Untuk menghitung $\overline{X}$ diambil AK sebagai garis acuan.

1. Daerah segi empat AEIK

$$A_1 = 3,9 \times 0,6 = 2,34 \text{ m}$$

$$X_1 = 3,9/2 = 1,85 \text{ m}$$

2. Daerah segi tiga FHI

$$A_2 = 2,1 \times 5,4/2 = 5,67 \text{ m}^2$$

$$X_2 = 1,8 + 2,1/2 = 2,85 \text{ m}$$

3. Daerah segi empat BCDE

$$A_3 = 7,8 \times 0,9 = 7,02 \text{ m}$$

$$X_3 = 1,8 + 2,1 + 0,9/2 = 4,35 \text{ m}$$

Selanjutnya gunakan rumus, sehingga didapat

$$\overline{X} = \frac{A_1 X_1 + A_2 X_2 + A_3 X_3}{A_1 + A_2 + A_3}$$

$$= \frac{2,34 \times 1,85 + 5,67 \times 2,85 + 7,02 \times 4,35}{2,34 + 5,67 + 7,02}$$

$$= 3,4 \text{ m}$$

Jadi letak titik berat adalah sejauh 2,77 meter dari AB dan 3,4 m dari AK.

E. TITIK BERAT DARI BENDA TEGAR (SOLID)

Titik berat dari benda tegar (solid bodies) seperti setengah lingkaran, silinder, kerucut, dan sebagainya, adalah ditentukan dengan cara yang sama seperti gambar bidang. Perbedaan antara gambar bidang dan benda tegar hanya dalam kasus menghitung volumenya. Untuk benda tegar dihitung volumenya, sedangkan untuk gambar bidang tidak sampai menghitung volumenya. Volume dari beberapa benda tegar, antara lain :

Volume silinder = $\pi/4\ d^2 \times h = \pi r^2 \times h$

Volume setengah lingkaran = $2/3\ \pi r^3$

Volume kerucut = $1/3\ \pi r^2 \times h$

dimana r = jari-jari benda dan h = tinggi benda.

Catatan :

Kadang-kadang massa jenis dari dua benda padat adalah berbeda. Dalam suatu kasus demikian, dihitung berat benda dari volume, dan titik berat dari benda dihitung seperti biasa.

Contoh 1.9

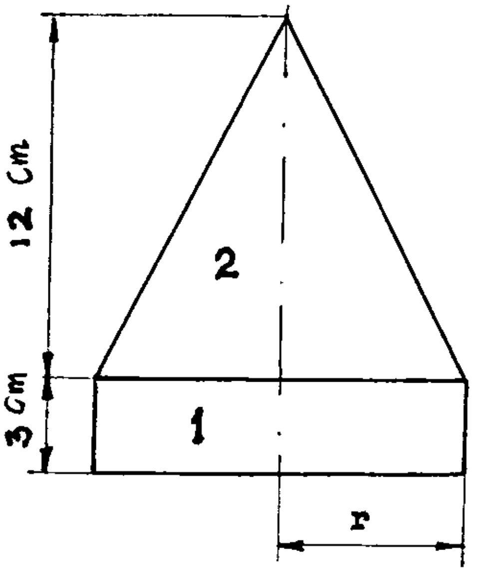
Sebuah benda tegar dibuat dari gabungan sebuah kerucut setinggi H yang mempunyai alas yang sama dengan sebuah silinder setinggi h. Hitunglah jarak pusat massa dari benda tegar, bila H = 12 cm, dan h = 3 cm.

Penyelesaian :

Karena benda adalah simetris terhadap sumbu vertikal, maka titik berat akan terletak pada sumbu ini. Ambil jari-jari (r) cm dari dasar silinder. Selanjutnya ambil $\bar{Y}$ adalah jarak antara titik berat dari penampang dan bidang (yakni dasar dari silinder).

1. Untuk silinder

   Volume $(V_1) = \pi r^2 \times h = 3\ \pi r^2\ \text{cm}^3$



Gambar 19
Kerucut dan Silinder

$Y_1 = 3/2 = 1,5$ cm

2. Untuk Kerucut

$V_2 = 1/3\,\pi\,r^2 \times h$

$= 1/3\,\pi\,r^2 \times 12$

$= 4\,\pi\,r^2\ cm^3$

Gunakan persamaan atau rumus, sehingga didapat :

$$\bar{Y} = \frac{V_1\,Y_1 + V_2\,Y_2}{V_1 + V_2}$$

$$= \frac{3\pi r^2 \times 1,5 + 4\pi r^2 \times 6}{3\pi r^2 + 4\pi r^2}$$

$= 4,07$ cm.

Jadi letak titik berat adalah sejauh 4,07 cm dari alas AB.

Contoh 1.10

Sebuah benda terdiri dari sebuah kerucut dengan tingginya 12 cm dan jari-jari 10 cm, ditempatkan diatas sebuah benda setengah lingkaran dengan jari-jari juga 10 cm. Bahannya sama. Hitunglah posisi titik berat dari benda.

Penyelesaian :

Karena benda simetris terhadap sumbu Y - Y, maka titik berat akan terletak pada sumbu ini. Ambil $\bar{Y}$ jarak titik berat dan D sebagai titik acuan.

1. Untuk kerucut

$V_1 = 1/3\,\pi\,r^2\,h$

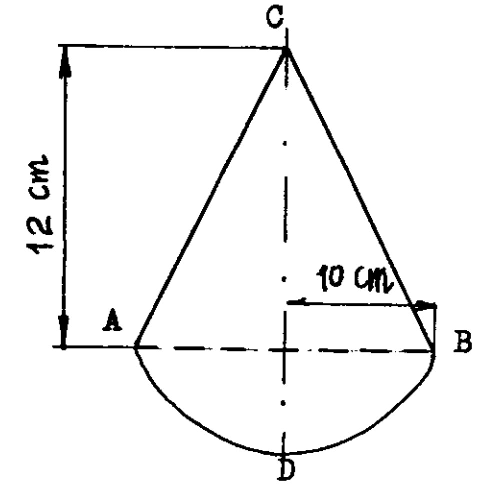
$= 1/3\,\pi\,(10)^2 \times 12 = 400\,\pi\ cm^3$

$Y_1 = 10 + 12/4 = 13$ cm.

2. Untuk Bidang Setengah Lingkaran

$V_2 = 2/3\pi\, r^3 = 2/3\pi\,(10)^3 = 2000/3\,\pi\ cm^3$

$Y_2 = 10 - 3/8 \times r = 10 - 3/8 \times 10 = 50/8$ cm.



Gambar 20

Kerucut dan ½ Lingkaran

Selanjutnya gunakan rumus sehingga didapat :

$$\dot{Y} = \frac{V_1\ Y_1 + V_2\ Y_2}{V_1 + V_2}$$

$$= \frac{400 \times 13 + 2000 \times \frac{50}{8}}{400 + \frac{2000}{3}}$$

$= 8{,}78$ cm

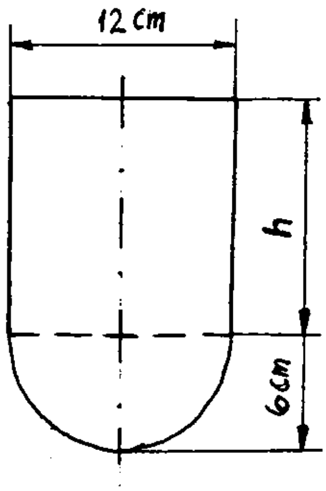
Jadi letak titik berat adalah sejauh 8,78 cm dari titik D.

Contoh 1.11

Sebuah silinder diameternya 12 cm, digabungkan dengan sebuah benda yang berbentuk setengah lingkaran, yang mempunyai diameter sama. Hitunglah tinggi maksimum dari silinder, sehingga titik berat dari penampang gabungan bertemu dengan bidang dari gabungan 2 (dua) penampang. Massa jenis dari bahan setengah lingkaran adalah 2 (dua) kali bahan silinder.

Penyelesaian :

Karena benda simetris terhadap sumbu vertikal, maka titik berat dari penampang akan terletak pada sumbu ini. Selanjutnya ambil sumbu vertikal memotong bidang gabungan dua penampang pada titik O, seperti ditunjukkan pada gambar 21. Dengan demikian titik berat dari penampang adalah sejauh 6 cm dari titik P, yakni dasar dari bahan setengah lingkaran.



Gambar 21
Silinder dan ½ Lingkaran

Ambil h sama dengan tinggi silinder.

1. Silinder

   Berat (W) $= \rho \times \pi/4\ d^2h$

   $W_1 = \rho \times \pi/4\ (12)^2\ h$

   $= 36\pi\rho\ h$ gram

   $Y_1 = 6 + h/2$

2. Setengah Lingkaran

   $W_2 = \rho \times 2/3\ \pi r^3$

   $= 2\rho \times 2/3\ \pi (6)^3$

   $= 288\ \pi\rho$ gram

   $Y_2 = 6 - 3/8\ r$

   $= 6 - 3/8 \times 6 = \frac{15}{4}$ cm

Selanjutnya gunakan rumus , sehingga didapat

$$\overline{Y} = \frac{W_1\ Y_1 + W_2\ Y_2}{W_1 + W_2}$$

$$6 = \frac{36\pi\rho h\ (6 + \frac{h}{2}) + 288\pi\rho \times \frac{15}{4}}{36\pi\rho\ h + 288\pi\rho}$$

$$6 = \frac{216\ h + 18\ h^2 + 1080}{36\ h + 288}$$

$$216 + 1728 = 216\ h + 18\ h^2 + 1080$$

$$18\ h^2 = 1728 - 1080$$

$$18\ h^2 = 648$$

$$h = \sqrt{\frac{648}{18}}$$

$$h = 6\ \text{cm}$$

Jadi tinggi maksimum dari silinder adalah sama dengan 6 cm.

F. TITIK BERAT SUATU PENAMPANG DENGAN LOBANG TERPOTONG

Titik berat dari suatu penampang dengan lobang yang terpotong dapat ditentukan dengan memandang penampang terbesar (the main section), pertama anggap sebagai suatu bagian yang lengkap, dan kemudian kurangi dengan lobang yang terpotong, dengan mengambil luas dari lobang yang terpotong sebagai negatif.

Selanjutnya subsitusikan A_2 (luas dari bagian yang terpotong) ke dalam persamaan atau rumus titik berat sehingga diperoleh :

$$X = \frac{A_1 X_1 - A_2 X_2}{A_1 - A_2} \quad \text{(R.S.Khurmi,1980 : 73)}$$

Begitu pula untuk koordinat atau sumbu Y

$$Y = \frac{A_1 Y_1 - A_2 Y_2}{A_1 - A_2} \quad \text{(R.S. Khurmi,1980: 73)}$$

Catatan :

Dalam kasus lingkaran, penampang akan simetris sepanjang garis pertemuan sumbu utama (terbesar) dan akan memotong lingkaran.

Contoh 1.12

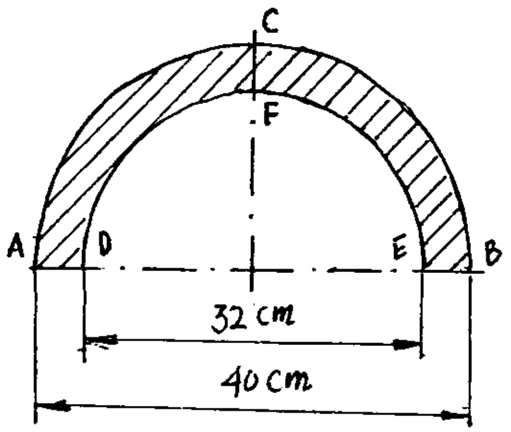
Hitunglah titik berat dari sebuah benda setengah lingkaran dengan jari-jari luar 20 cm dan jari-jari dalam 16 cm.

Penyelesaian

Karena penampang adalah simetris sepanjang sumbu Y - Y, maka titik berat akan terletak pada sumbu ini. Ambil $\overline{Y}$ adalah jarak antara titik berat dari penampang, dan AB sebagai sumbu acuan.

1. Setengah lingkaran luar

$$A_1 = \pi/2 \times r^2 = \pi/2 \times (20)^2 = 200\,\pi \text{ cm}^2$$



Gambar 22
Setengah Lingkaran yang Berrongga

$$Y_1 = \frac{4r}{3\pi} = \frac{4 \times 20}{3\pi}$$

$$= \frac{80}{\pi} \text{ cm}$$

2. Setengah lingkaran dalam

$$A_2 = \pi/2 \times r^2$$

$$= \pi/2 \times (16)^2$$

$$= 128\,\pi \text{ cm}^2$$

$$Y_2 = \frac{4r}{3\pi} = \frac{4 \times 16}{3\pi}$$

$$= \frac{64}{\pi} \text{ cm}$$

Selanjutnya gunakan rumus, sehingga didapat

$$Y = \frac{A_1\,Y_1 - A_2\,Y_2}{A_1 - A_2}$$

$$= \frac{(200\pi \times 80/3\pi) - (128\pi \times 64/3\pi)}{200\pi - 128\pi}$$

$$= 11{,}2 \text{ cm}$$

Contoh 1.13

Hitunglah posisi titik berat dari gambar bidang, seperti ditunjukkan pada gambar 23.

Penyelesaian :

Karena gambar adalah simetris terhadap sumbu Y - Y, maka titik berat akan terletak pada sumbu ini. Ambil Y adalah jarak antara titik berat dan AB sebagai sumbu acuan.

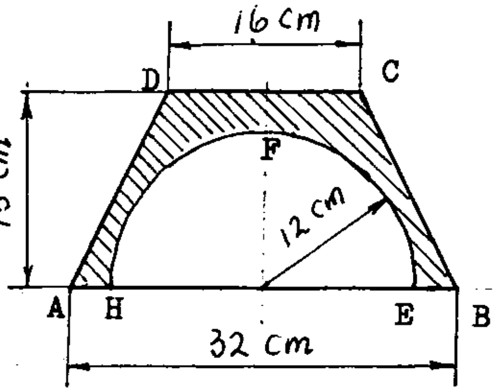
1. Trapesium ABCD

$$A_1 = 15 \times (\frac{16 + 32}{2})$$

$$A_1 = 360 \text{ cm}^2$$

$$Y_1 = 15/3\ \left(\frac{32 + 2 \times 16}{32 + 16}\right)$$

$$= 6{,}67 \text{ cm}$$



Gambar 23
Trapesium dan Setengah Lingkaran

2. Setengah lingkaran EFH

$$A_2 = \pi/2 \times (r)^2$$

$$= \pi/2 \times (12)^2$$

$$= 72\ \pi \text{ cm}^2$$

$$Y_2 = 4r/3\pi = \frac{4 \times 12}{3\pi}$$

$$= 16/\pi \text{ cm}$$

Selanjutnya gunakan rumus titik berat, sehingga didapat :

$$Y = \frac{A_1\ Y_1 - A_2\ Y_2}{A_1 - A_2}$$

$$= \frac{(360 \times 6{,}67) - (72\ \pi \cdot 16/\pi)}{360 - 72\pi}$$

$$= 9{,}32 \text{ cm.}$$

Contoh 1.14

Sebuah frustum dari sebuah kerucut mempunyai diameter lobang aksial 50 cm, seperti terlihat pada gambar 24 dibawah ini.

Penyelesaian :

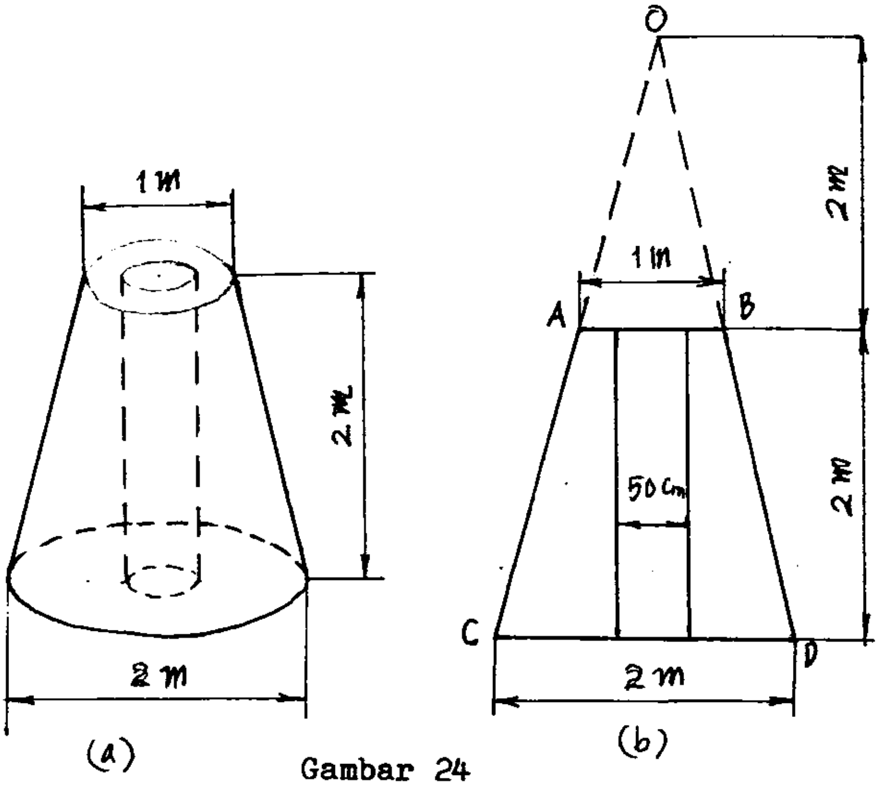
Karena benda simetris terhadap sumbu Y - Y, maka titik berat akan terletak pada sumbu ini.

1. Bidang kerucut OCD

$$V_1 = 1/3\ \pi\ r^2\ h = 1/3 \times (1)^2 \times 4$$

$$V_1 = 4/3 \quad m^2$$

$$Y_1 = 4/4 = 1 \text{ m}$$



Gambar 24

Sebuah frustum

2. Bidang kerucut OAB

$$V_2 = 1/3 \pi r^2 h = 1/3 \pi (0,5)^2 \times 2 = \pi/6 \ m^3$$

$$Y_2 = 2 + 2/4 = 5/2 \ m$$

3. Lobang silinder

$$V_3 = \pi/4 \times r^2 h = \pi/4 \times (0,5)^2 \times 2 = \pi/8 \ m^3$$

$$Y_3 = 2/2 = 1 \ m$$

Selanjutnya gunakan rumus, sehingga didapat :

$$Y = \frac{V_1 Y_1 - V_2 Y_2 - V_3 Y_3}{V_1 - V_2 - V_3}$$

$$= \frac{(4/3\pi \times 1) - (\pi/6 \times 5/2) - (\pi/8 \times 1)}{4/3\pi - \pi/6 - \pi/8}$$

$$= 0,76 \text{ meter}$$

G. SOAL-SOAL LATIHAN

1. Sebuah batang AB panjangnya 5 meter dibebani dengan massa 2 kg, 3,5 kg, 4 kg, dan 5,25 kg pada setiap 1 meter dari A ke B. Hitunglah titik berat dari sistim.

   (Kunci : 2,85 m dari A)

2. Hitunglah letak titik berat dari sebuah penampang T dengan ukuran sisi (flange) 15 x 1 cm dan jaringan (web) 15 x 1 cm.

   (Kunci : 4,5 cm dari sisi puncak)

3. Tentukanlah letak titik berat dari sebuah penampang T dengan ukuran sisi (flange) 15 x 2,5 cm dan jaringan (web) 20 x 15 cm dari sisi puncak.

   (Kunci : 7,6 cm)

4. Hitunglah posisi titik berat dari sebuah penampang I dengan ukuran sisi puncak (top flange) 15 x 2,5 cm, jaringan 20 x 1,25 cm, dan sisi dasar (bottom flange) 25 x 2 cm.

   (Kunci : 10,86 dari dasar)

5. Tentukanlah letak titik berat dari penampang U (channel section) yang berukuran 12 cm x 30 cm x 2 cm.

   (Kunci : 3,4 cm)

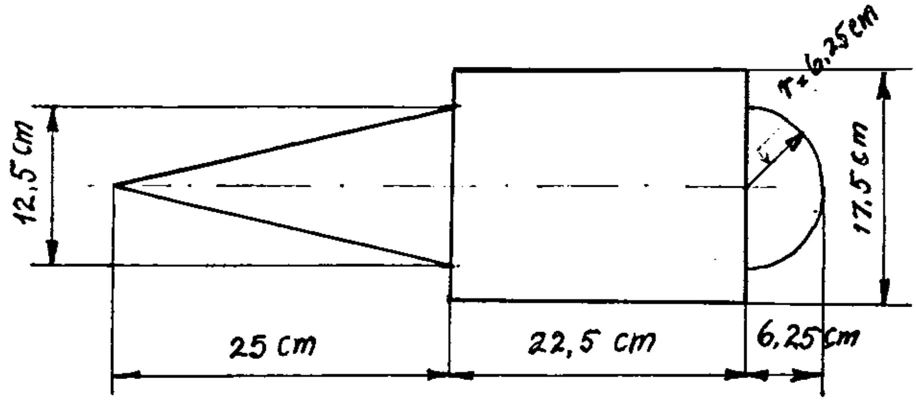
6. Hitunglah letak titik berat dari sebuah penampang yang terdiri dari bujur sangkar dan segi tiga sama sisi (equilateral triangle). Ambil sisi bujur sangkar sama dengan 10 cm.

   (Kunci : 7,38 cm dari dasar)

7. Sebuah gambar terdiri dari segi empat yang mempunyai satu sisi adalah dua kali sisi yang lainnya, dan digabungkan dengan sebuah segi tiga sama sisi pada sisi terbesar. Tunjukkan bahwa titik berat dari sistem terletak pada garis hubungan segi empat dan segitiga.

8. Hitunglah letak titik berat dari penampang seperti ditunjukkan dalam gambar 25.25

(Kunci : 35 cm dari puncak kerucut)



Gambar 25
Segi Tiga, Segi Empat dan
Setengah Lingkaran

9. Sebuah bujur sangkar mempunyai sisi 16 cm. Titik tengah salah satu sisinya merupakan pusat dari se - buah benda yang berbentuk setengah lingkaran, deng- an diammeter 8 cm. Hitunglah letak titik berat dari penampang.

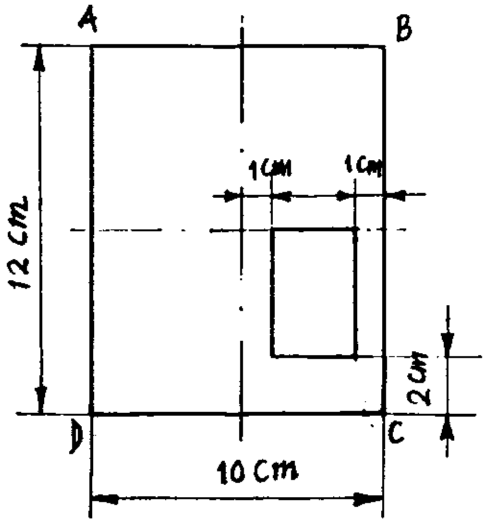
(Kunci : 7,314 cm dari dasar).

10. Sebuah segi empat ABCD dengan ukuran 10 x 12 cm. Di dalamnya ditempatkan sebuah segi empat dengan ukuran 3 x 4 cm, seperti ditunjukkan pada gambar 26. Hitunglah letak titik berat dari AD dan DC

(Kunci : X = 4,72 cm, Y = 6,22 cm)

11. Sebuah lingkaran dengan jari-jari = 5 cm. Di dalam- nya ditempatkan sebuah cakram (disc) yang mempunyai diameter 5 cm, seperti ditunjukkan pada gambar 27. Hitunglah letak titik berat, secara analitis dan se- cara grafis.

(Kunci : 0,833 cm)



Gambar 26
Segi Empat ABCD dan Segi Empat EFGH didalamnya

Gambar 27
Sebuah Lingkaran dan Sebuah Cakram didalamnya

BAB II

MOMEN INERSIA

A. PENGERTIAN MOMEN INERSIA

Sebagaimana telah diuraikan, bahwa momen sebuah gaya (F) terhadap sebuah titik adalah hasil kali gaya dengan jarak tegak lurus antara titik dan garis kerja gaya (X) = F.X. Momen ini dinamakan momen pertama dari gaya. Jika momen ini dikali dengan gaya tegak lurus antara titik dan garis kerja (X), yakni (F.X) . X sama dengan $F.X^2$. Selanjutnya harga ini dinamakan momen dari momen sebuah gaya atau momen kedua dari gaya atau momen inersia.

Jika gaya, luas atau massa dari sebuah gambar atau benda dibagi menjadi beberapa bagian, maka momen kedua dinamakan sebagai momen kedua dari luas atau momen kedua dari massa. Tetapi seluruh momen kedua diartikan sebagai momen inersia.

B. MOMEN INERSIA SEBUAH LUAS BIDANG

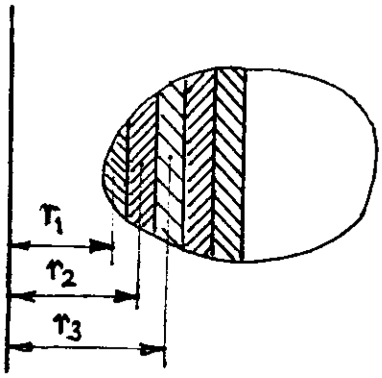
Perhatikanlah sebuah bidang yang disusun (ter - diri dari) luas yang kecil-kecil, yakni A_1 , A_2 , A_3 , dan seterusnya, pada jarak r_1 , r_2 , r_3 ..... dan seterusnya dari garis acuan, seperti ditunjukkan pada gambar 28. Selanjutnya momen inersia :

$$I = A_1 r_1^2 + A_2 r_2^2 + A_3 r_3^2 + \dots\dots A_n r_n^2$$

$$= \sum A r^2 \quad \text{(S.N. Saluya, 1976 : 116)}$$

Satuan dari momen inersia (I) bergantung pada sataun massa atau luas dan panjang, seperti diuraikan dibawah ini :

1. Jika massa dalam kg dan jarak dalam meter , maka I (momen inersia) dinyatakan dalam kgm^2.
2. Jika luas dalam meter bujur sangkar (m^2) dan



Gambar 28
Sebuah gambar Bidang

jarak dalam meter, maka momen inersia dinyatakan dalam m^4.

3. Jika luas dalam centi - meter kuadrat (cm^2) dan jarak dalam cm, maka momen inersia dinyatakan dalam cm^4.

C. RADIUS GYRASI

Jika luas (A) dari suatu penampang dianggap konsentris terhadap sebuah titik tertentu, pada jarak k dari sumbu, maka :

$$A\,k^2 = A_1\,r_1{}^2 + A_2\,r_2{}^2 + A_3\,r_3{}^2 + \ldots\ldots A_n\,r_n{}^2$$

$$\Sigma = A\,r^2$$

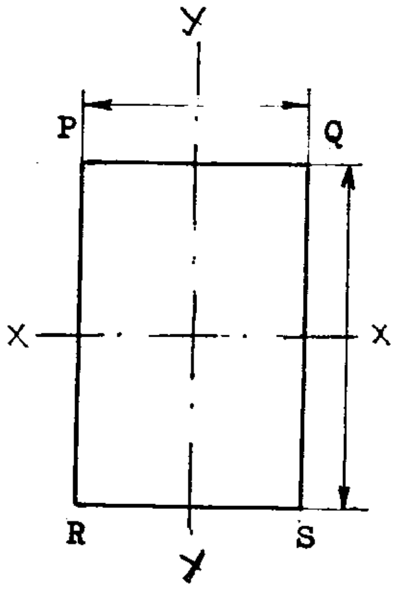
$$k = \sqrt{\frac{A\,r^2}{A}} = \sqrt{\frac{I}{A}} \quad \text{(Walker, 1978 : 156)}$$

Jarak k ini dinamakan jari-jari gyrasi. Dengan demikian jari-jari gyrasi dapat didefinisikan sebagai jarak dari sumbu acuan, dimana keseluruhan massa atau luas dari sebuah benda dianggap konsentris.

Akhiran seperti X - X atau Y - Y biasanya di - belakang k, yang mana menunjukkan sumbu dari jari-jari gyrasi yang dihitung. Dengan demikian k_{x-x} akan menunjukkan jari-jari gyrasi terhadap sumbu X - X dan k_{y-y} akan menunjukkan jari-jari gyrasi terhadap sumbu Y -Y.

D. MODULUS PENAMPANG

Modulus penampang dari sebuah gambar adalah jumlah yang diperoleh dibagi dengan momen inersia dari gambar terhadap titik berat dengan jarak terjauh dari



Gambar 29
Segi Empat PQRS

sumbu titik beratnya. Secara umum ditulis dengan Z dan akhiran (xx dan yy) menunjukkan sumbu terha - dap mana jarak diukur. Perhatikanlah sebuah penampang segi empat seperti ditunjukkan pada gambar 29. Bila I_{xx} adalah momen inersia terhadap - sumbu x - x.

Modulus penampang terhadap sumbu x - x = Z_{xx}.

$$Z_{xx} = \frac{I_{xx}}{\frac{d}{2}}$$

dimana $\frac{d}{2}$ adalah jarak terjauh dari AE atau CD dari sumbu X - X. Begitu pula Z_{yy} ,

$$Z_{yy} = \frac{I_{yy}}{\frac{b}{2}}$$ (S.N. Saluya, 1976 : 118)

E. METODA MENGHITUNG MOMEN INERSIA

Momen inersia sebuah benda atau suatu luas dapat dihitung dengan dua metoda, yakni (1) dengan mengguna - kan hukum Routh's, dan (2) dengan menggunakan metoda integrasi (R.S.Khurmi, 1980 : 80).

1. Momen Inersia Dengan Hukum Routh's

Jika sebuah benda adalah simetris terhadap ke - tiga sumbu yang saling tegak lurus, maka momen inersia menurut hukum Routh's dari sebuah benda terhadap sebuah sumbu melalui titik beratnya (R.S.Khurmi, 1980 : 80) :

$$I = \frac{A \text{ atau } M \times S}{3}$$ (untuk bujur sangkar atau segi empat).

$$I = \frac{A \text{ atau } M \times S}{4}$$ (untuk lingkaran atau ellip)

$$I = \frac{A \text{ atau } M \times S}{5}$$ (untuk benda berbentuk bola/spherical)

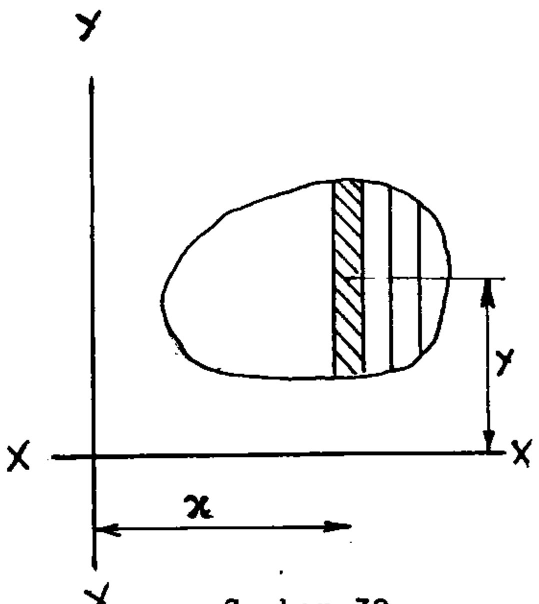
dimana : A = luas dari benda

M = massa benda, dan

S = jumlah kuadrat dari sumbu-sumbunya, yang lain dari sumbu terhadap mana momen inersia yang dibutuhkan untuk dihitung.

2. Momen Inersia Dengan Metoda Integrasi

Momen inersia dari suatu luas atau massa dapat juga dihitung dengan metoda integrasi seperti diuraikan dibawah ini.



Gambar 30

Sebuah Bidang Ditinjau Terhadap Sumbu X-X dan Sumbu Y-Y

Perhatikanlah sebuah gambar bidang, dimana momen inersia yang dibutuhkan untuk dihitung terhadap sumbu X - X dan sumbu Y-Y, seperti ditunjukkan pada gambar 30.

Bagilah keseluruhan luas menjadi beberapa lapisan (strips).

Perhatikan satu strip , ambil :

dA = luas strip

X = jarak titik berat dari strip pada sumbu X - X

Y = jarak titik berat dari strip pada sumbu Y - Y

Momen inersia dari strip terhadap sumbu Y - Y = d A. X^2
Momen inersia keseluruhan luas dapat dihitung dengan persamaan integral di atas (R.S. Khurmi, 1980 : 81)

$$I_{YY} = \sum dA.\ X^2$$
$$I_{XX} = \sum dA.\ Y^2$$
$$I_{ZZ} = \sum dA.\ Z^2$$

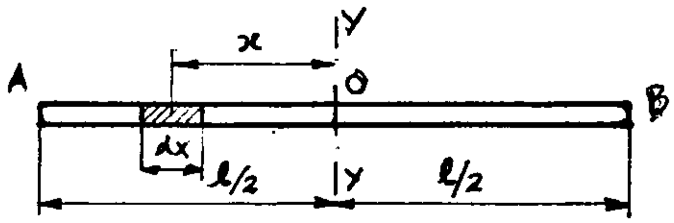
F. MOMEN INERSIA DARI SEBUAH BATANG TIPIS

Untuk momen inersia dari sebuah batang tipis,ada dua kasus sebagai berikut :

1. Momen inersia terhadap sumbu tengah (middle axis), dan tegak lurus terhadap panjang.
2. Momen inersia terhadap ujung, dan tegak lurus terhadap panjang.

1. Momen Inersia terhadap Sumbu Tengah dan Tegak Lurus Panjang

Ambil AB adalah batang dengan panjang 1 dan O adalah titik tengahnya, seperti ditunjukkan pada gambar 31.



Gambar 31

Sebuah Batang Tipis AB

Bila M adalah massa total dari batang dan ρ adalah massa per satuan panjang batang. Selanjutnya perhatikanlah sebuah strip dengan panjang dX pada jarak X dari titik O. Momen inersia dari strip terhadap sumbu Y-Y = massa x X^2 = (ρ. dX) X^2 = ρX^2 dX. .... (1)

Momen inersia untuk keseluruhan batang dapat dihitung secara integral. Untuk keseluruhan panjang batang dari - 1 sampai + 1, dari persamaan (1), yakni :

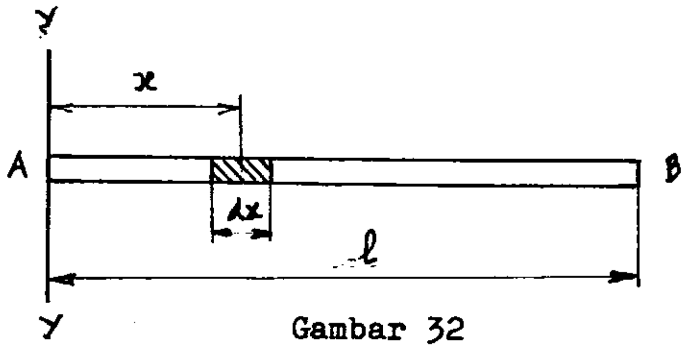
$$I_{YY} = \int_0^{1} \rho X^2 \, dX = \rho \left[\frac{X^2}{3} \right]_0^{1/2} = \rho \frac{1^3}{12}$$

Karena M adalah massa total dari batang, maka subsitusikan M = ρ 1 kedalam persamaan di atas sehingga didapat

$$I_{YY} = \frac{Ml^2}{12} \quad \text{(S.Ramamrutham, 1978 : 551)}$$

2. Momen Inersia terhadap Ujung Batang dan Tegak Lurus Panjang

Ambil batang AB dengan panjang 2 1 dan massa m per satuan panjang, seperti ditunjukkan pada gambar 32.



Gambar 32
Sebuah Batang Tipis AB Ditinjau
Terhadap Sumbu Y-Y

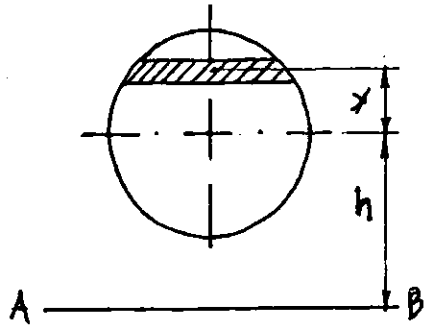
Perhatikanlah sebuah strip dengan panjang dX pada jarak X dari titik A. Momen Inersia dari strip terhadap sumbu Y - Y adalah :

$$= \text{massa} \times X^2 = \rho \, dX \, . \, X^2 = \rho X^2 \, . \, dX \quad ......(1)$$

Momen inersia keseluruhan batang dapat dihitung secara integral. Untuk keseluruhan panjang batang dari 0 sampai 1, yakni :

$$I_{YY} = \int_0^{1} \rho X^2 \, dX = \rho \left[\frac{X^3}{3} \right]_0^{1} = \rho \left(\frac{1^3}{3} \right)$$

$$I_{AB} = \Sigma\, \delta A\, h^2 + \Sigma\, \delta A\,.\, 2\,hy + \Sigma\, \delta A\,.\, y^2$$
$$= Ah^2 + I_G + 0$$



Gambar 34
Sebuah Lingkaran dan
Garis Sejajar AB

$\Sigma\,\delta A\, y$ adalah jumlah aljabar dari momen seluruh luas strip terhadap sumbu melalui titik berat dan sama dengan A y, dimana y adalah jarak antara titik berat dari penampang dan sumbu melalui titik berat adalah nol.

Dengan demikian :

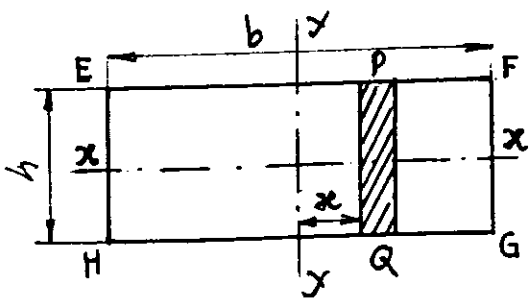
$$I_{AB} = I_G + Ah^2$$

I. MOMEN INERSIA DARI BERBAGAI PENAMPANG

1. Momen Inersia Penampang Segi Empat

Perhatikanlah sebuah segi empat ABCD, dimana AB = b dan BC = d, seperti ditunjukkan pada gambar 35. Ambil O adalah titik berat dari benda dan X - X dan Y - Y adalah sumbu kedua dari acuan melalui O. Ambil PQ adalah sebuah strip dengan tebal dX dan sejajar terhadap sumbu Y - Y pada jarak X dari PQ.

Luas strip = d. dX



Gambar 35
Segi Empat EFGH

Momen Inersia dari strip terhadap sumbu Y - Y ,

$= \text{luas} \times X^2$

$= (d\,.\,dX) \times X^2$

$= d\,.\,X^2\,dX$

Momen Inersia keseluruhan penampang dapat dihitung secara integral.

Untuk keseluruhan pan -

jang benda, yakni dari $-\frac{b}{2}$ sampai $\frac{b}{2}$.

$$I_{YY} = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} h.\ X^2.\ dX = h\left[\frac{X^3}{3}\right]_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} = \frac{hb^3}{12}$$

Dengan cara yang sama didapat pula :

$$I_{XX} = \frac{bh^3}{12}$$

Cara lain :

I_{XX} dan I_{YY} dapat juga diperoleh dengan hukum Routh's seperti diuraikan dibawah ini :

$$I_{YY} = \frac{AS}{3}$$

A = b x h (karena penampangnya segi empat)

S = Jumlah kuadrat dari setengah sumbu X - X dan Z - Z

$= (\frac{b}{2})^2 + 0$

$$I_{YY} = \frac{(b \times h) \times (\frac{b}{2})^2}{3} = \frac{hb^3}{12}$$

Dengan cara yang sama pula didapat :

$$I_{XX} = \frac{bh^3}{12}$$

2. Momen Inersia Penampang Segi Empat Berrongga

Perhatikanlah sebuah segi empat berrongga, yang pemana ABCD adalah penampang utama, dan EFGH adalah penampang terpotong, seperti ditunjukkan pada gambar 36.

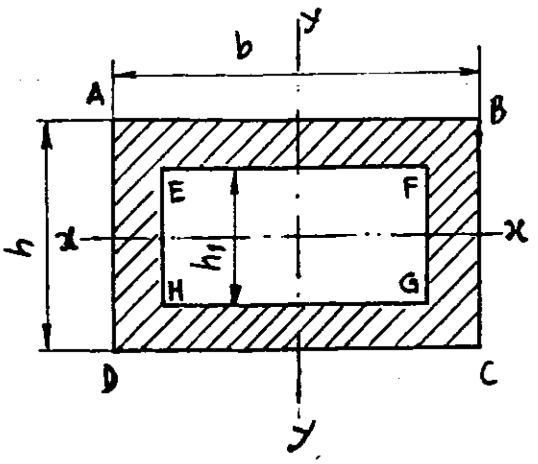
Ambil : b = lebar AB dari segi empat luar

h = tinggi BC dari segi empat luar

b_1 = lebar EF dari segi empat dalam

h_1 = tinggi FG dari segi empat dalam

Momen inersia dari penampang segi empat terhadap sumbu



Gambar 36

Segi Empat Berrongga

X - X adalah :

$$I_{XX} = \frac{bh^3}{12}$$

dan momen inersia dari potongan EFGH terhadap sumbu X - X adalah :

$$I_{XX} = \frac{b_1\ h_1^{\ 3}}{12}$$

Dengan demikian momen inersia dari penampang segi empat berrongga terhadap sumbu X - X adalah :

I_{XX} = Momen inersia segi empat ABCD - Momen inersia segi empat EFGH

$$= \frac{bh^3}{12} - \frac{b_1\ h_1^{\ 3}}{12}$$

Dengan cara yang sama didapat pula I_{YY} , yakni :

$$I_{YY} = \frac{hb^3}{12} - \frac{h_1\ b_1^{\ 3}}{12}$$

Contoh Soal 2.1.

Hitunglah momen inersia dari sebuah segi empat berrongga terhadap titik beratnya, jika ukuran luarnya adalah ; lebar 6 cm dan tinggi 8 cm, dan ukuran dalamnya adalah ; lebar 3 cm dan tinggi 4 cm.

Penyelesaian :

Lebar luar (b) = 6 cm

Tinggi luar (h) = 8 cm

Lebar dalam (b_1) = 3 cm

Tinggi dalam (h_1) = 4 cm

Selanjutnya gunakan rumus, sehingga didapat :

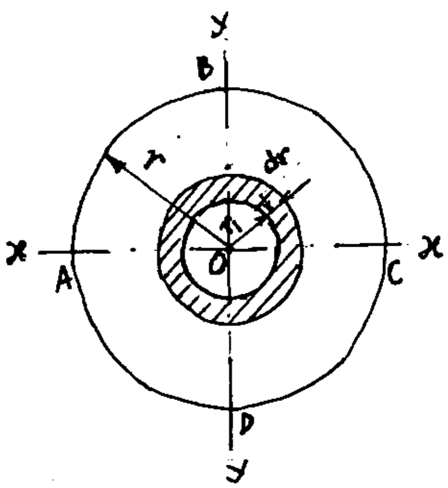
$$I_{XX} = \frac{bh^3}{12} - \frac{b_1\ h_1^{\ 3}}{12}$$

$$= \frac{6 \times 8^3}{12} - \frac{3 \times 4^3}{12}$$

$$= 240\ cm^4$$

3. Momen Inersia Sebuah Penampang Bundar

Perhatikanlah sebuah lingkaran ABCD dengan jari-jari r dan pusat di titik O serta X - X danY -Y sebagai sumbu acuan yang melalui titik pusat ling - karan O, seperti ditunjukkan pada gambar 37.



Gambar 37

Sebuah Penampang Bundar

Selanjutnya perhatikan sebuah elemen ring dengan - jari-jari r_1 dan tebal dr. Ambil δ A adalah luas ring

$$\delta A = 2\pi r_1 \times dr$$

Momen inersia dari ring - terhadap sumbu X - X dan sumbu Y - Y = luas x jarak yang dikuadratkan atau δ A x r_1^2.

Momen inersia dari kese - luruhan penampang terhadap sumbu pusat, dapat dihi - tung dengan mengintegral - kan persamaan di atas un - tuk keseluruhan jari-jari lingkaran, yakni dari 0 sampai r.

$$I_{ZZ} = \int_0^r \delta A \times r_1^{\ 2} = \int_0^r 2\ \pi r_1 \times r_1^{\ 2}\ dr$$

$$I_{ZZ} = 2\pi \int_0^r r_1^3\, dr = 2\pi \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^r$$

$$= \frac{\pi r^4}{2} = \frac{\pi d^4}{32}$$

Dari teori sumbu tegak lurus, bahwa :

$$I_{XX} + I_{YY} = \frac{I_{ZZ}}{2}$$

Dengan demikian akan didapatkan :

$$I_{XX} = I_{YY} = 1/2 \times \frac{\pi d^4}{32}$$

$$I_{XX} = I_{YY} = \frac{\pi d^4}{64}$$

Cara lain :

I_{XX} dan I_{YY} dapat juga diperoleh dengan me - nggunakan hukum Routh's seperti diuraikan di bawah ini.

$$I_{XX} = \frac{AS}{4}$$

$A = \pi/4 \times (d)^2$ .... (untuk lingkaran)

S = jumlah kuadrat dari setengah sumbu X-X dan Z-Z

$= (\frac{d}{2})^2 + 0$

$$I_{XX} = \frac{\pi/4 \times (d)^2 \times (d/2)^2}{4} = \pi/64\ d^4$$

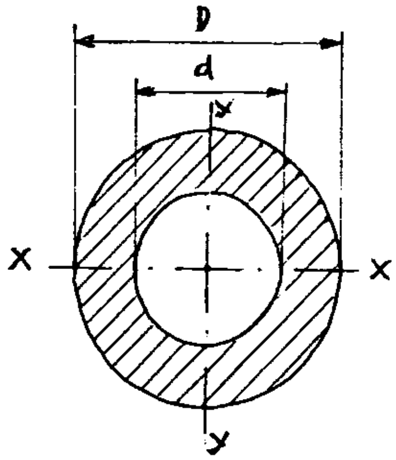
Untuk penampang lingkaran (bundar) $I_{XX} = I_{YY}$

4. Momen Inersia Sebuah Penampang bundar Berrongga

Perhatikanlah sebuah penampang bundar ber - rongga seperti ditunjukkan pada gambar 38, dimana momen inersia yang dibutuhkan dapat ditentukan.

Ambil : D = diameter luar lingkaran

d = diameter dalam lingkaran



Gambar 38

Sebuah Penampang Bundar Berrongga

Momen inersia lingkaran - luar terhadap sumbu X - X $= \pi/64\ D^4$.

Momen inersia lingkaran dalam terhadap sumbu X - X $= \pi/64\ d^4$.

Momen inersia dari penampang bundar berrongga terhadap sumbu X - X adalah :

$$I_{XX} = \pi/64\ D^4 - \pi/64\ d^4$$
$$= \pi/64\ (D^4 - d^4)$$

Dengan cara yang sama didapat :

$$I_{YY} = \pi/64\ (D^4 - d^4)$$

Contoh Soal 2.2.

Sebuah penampang bundar berrongga dengan diameter luar 8 cm dan diameter dalam 6 cm. Hitunglah momen inersia terhadap sumbu horizontal (X - X) melalui pusatnya.

Penyelesaian : Diameter luar (D) = 8 cm
Diameter dalam (d) = 6 cm

Selanjutnya gunakan rumus, sehingga didapat :

$$I_{XX} = \pi/64\ (D^4 - d^4)$$
$$= \pi/64\ (8^4 - 6^4) = 137\ cm^4$$

5. Momen Inersia Segi tiga

Perhatikanlah sebuah segi tiga ABC, seperti ditunjukkan pada gambar 39. dimana momen inersia yang dibutuhkan dapat ditentukan.

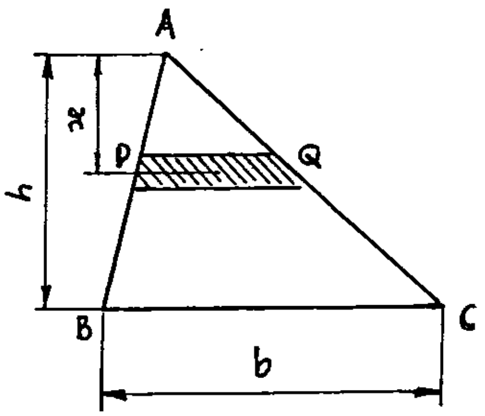
Ambil : b = alas segi tiga
h = tinggi segi tiga

Selanjutnya perhatikan sebuah strip kecil PQ dengan tebal dX pada jarak X dari A. Dari dua segi tiga yang sama APQ dan ABC, maka :

$$\frac{PQ}{BC} = \frac{X}{h}$$

$$\frac{PQ}{b} = \frac{X}{h}$$

$$PQ = \frac{bX}{h}$$



Gambar 39
Segi Tiga ABC

Selanjutnya luas strip PQ

$$= \frac{bX}{h} \cdot dX$$

Dan momen inersia strip terhadap alas BC

$$= \text{luas x (jarak)}^2$$

$$= \frac{bX}{h} \; (h - X)^2 \; dX$$

Momen inersia keseluruhan penampang segi tiga dapat dihitung dengan mengintegralkan keseluruhan tinggi dari segi tiga, yakni h.

$$
\begin{aligned}
I_{BC} &= \int_0^r \frac{bX}{h} (h - X)^2 \, dX \\
&= b/h \int_0^h X \, (h^2 + X^2 - 2\,hX) \, dX \\
&= b/h \int_0^h (Xh^2 + X^3 - 2\,hX^2) \, dX \\
&= b/h \left[\frac{X^2h^2}{2} + \frac{X^4}{4} - \frac{2\,h\,X^3}{3} \right]_0^h \\
&= \frac{bh^3}{12}
\end{aligned}
$$

Jarak antara titik berat segi tiga dan alas AB ada - lah :

$$d = \frac{h}{3}$$

Momen inersia dari penampang melalui titik beratnya dan sejajar sumbu X - X adalah :

$$I_{XX} = I_G + Ah^2$$

$$I_G = I_{XX} - Ah^2 \qquad (I_{XX} = I_{BC})$$

$$= \frac{bh^3}{12} - \left(\frac{bh}{2}\right)\left(\frac{h}{3}\right)^2$$

$$= \frac{bh^3}{36}$$

Jarak antara titik berat segi tiga dan puncaknya adalah = 2/3 h.

Momen inersia dari penampang melalui puncaknya dan sejajar sumbu X - X adalah :

$$I_A = I_G + Ah^2$$

$$= \frac{bh^3}{36} + \left(\frac{bh}{2}\right)\left(\frac{2h}{3}\right)^2$$

$$= \frac{bh^3}{4}$$

Contoh Soal 2.3.

Hitunglah momen inersia dari sebuah segi tiga ABC dengan alas 8 cm dan tinggi 6 cm terhadap sumbu X - X melalui titik berat penampang dan alas AB.

Penyelesaian :

Alas (b) = 8 cm dan tinggi (h) = 6 cm

Momen inersia segi tiga terhadap titik berat adalah :

$$I_{XX} = \frac{bh^3}{36}$$

$$= \frac{8 \times 6^3}{36} = 48 \text{ cm}^4$$

Momen inersia segi tiga terhadap alas AB adalah :

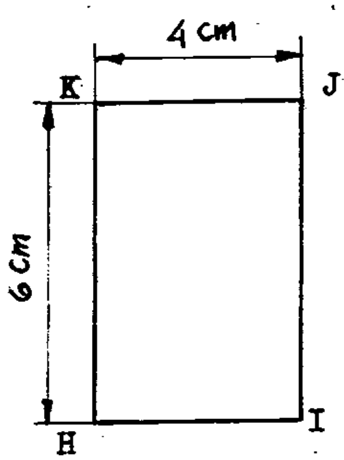
$$I_{AB} = \frac{bh^3}{12}$$

$$= \frac{8 \times 6^3}{12} = 144 \text{ cm}^4$$

Contoh Soal 2.4

Hitunglah momen inersia dari penampang segi empat seperti ditunjukkan pada gambar 40 terhadap HI dan HK.

Penyelesaian :



Gambar 40
Segi Empat HIJK

Lebar (b) = 4 cm, dan tinggi (h) = 6 cm

Momen inersia terhadap HI

Momen inersia penampang terhadap suatu sumbu melalui titik berat dan sejajar sumbu X - X adalah :

$$I_{GX} = \frac{bh^3}{12} = \frac{4 \times 6^3}{12}$$

$$= 72 \text{ cm}^4$$

Momen inersia terhadap alas HI adalah :

$$I_{HI} = I_G + Ah^2$$

$$= 72 + (4 \times 6) \times 3^2$$

$$= 288 \text{ cm}^4$$

Momen inersia terhadap HK

Dengan cara yang sama, momen inersia penampang terhadap suatu sumbu melalui titik berat dan sejajar sumbu Y - Y adalah :

$$I_{GY} = \frac{hb^3}{12} = \frac{6 \times 4^3}{12} = 32 \text{ cm}^4$$

Jarak titik berat dan alas HK adalah = 2 cm.
Momen inersia terhadap HK adalah :

$$I_{HK} = I_G + Ah^2$$
$$= 32 + (4 \times 6) \times 2^2$$
$$= 128 \text{ cm}^4$$

J. SOAL-SOAL LATIHAN

1. Hitunglah momen inersia dari sebuah penampang segi empat dengan lebar 4 cm dan tinggi 12 cm terhadap sumbu X - X melalui titik beratnya.
   (Kunci : 576 cm^4)

2. Hitunglah memen inersia dari sebuah penampang segi empat dengan lebar 10 cm dan tinggi 15 cm terhadap sumbu X - X dan sumbu Y - Y
   (Kunci : I_{XX} = 2812,5 cm^4; I_{YY} = 1250 cm^4)

3. Jika pada soal di atas (nomor 2), dibuat lobang segi empat dengan ukuran 14 x 9 cm. Hitunglah momen inersia dari penampang segi empat berrongga terhadap sumbu X - X dan sumbu Y - Y.
   (Kunci : 754,9 cm^4; 399,5 cm^4)

4. Hitunglah momen inersia dari sebuah penampang bundar berrongga dengan diameter luar 10 cm dan diameter dalam 8 cm terhadap suatu sumbu melalui titik beratnya.
   (Kunci : 289,9 cm^4).

5. Sebuah segi empat mempunyai lebar 12 cm dan tinggi 16 cm. Hitunglah momen inersia terhadap titik berat- dan alasnya.
   (Kunci: I_{XX} = 4096 cm^4 ; I_{YY} = 2034 cm^4;
   I_{alas} = 16384 cm^4).

BAB III

MOMEN INERSIA PENAMPANG GABUNGAN

Momen inersia penampang gabungan dapat dihitung dengan membagi keseluruhan penampang menjadi luas bidang (segi empat, segi tiga, bundar, parabola, dan sebagainya) dan selanjutnya menghitung momen inersia terhadap titik beratnya. Momen inersia juga dapat ditentukan dengan memindahkan sumbu-sumbu yang dibutuhkan dari penampang, dengan teori sumbu sejajar, yakni :

$$I_{AB} = I_G + Ah^2$$

Dalam halaman selanjutnya akan diuraikan momen inersia dari penampang di bawah ini :

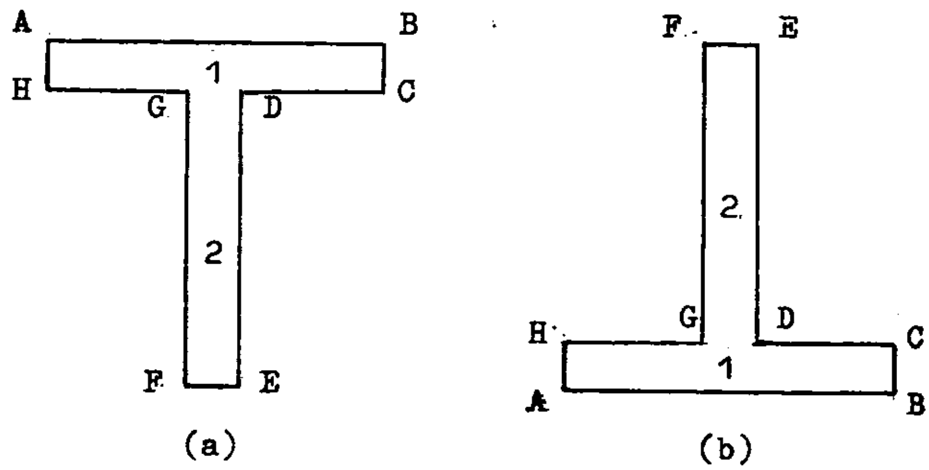
1. Penampang T (T-section)
2. Penampang I (I-section)
3. Penampang L (L-section)
4. Penampang U (Channel section)
5. Beberapa macam penampang (miscellaneous section).

A. Momen Inersia dari Penampang T

Perhatikanlah sebuah penampang T atau sebuah penampang T yang terbalik, dimana momen inersianya dapat ditentukan seperti ditunjukkan pada gambar 41.(a) dan 41.(b). Momen inersia dari sebuah penampang T dapat ditentukan seperti diuraikan dibawah ini :

1. Bagilah profil T atau profil T terbalik menjadi dua buah segi empat ABCH dan DEFG dan hitung jarak antara titik berat dari penampang, dari alas AB.
2. Hitung momen inersia segi empat ABCH terhadap sebuah sumbu melalui titik beratnya dan sejajar sumbu X - X

3. Pindahkan (transfer) momen inersia ini terha - dap titik berat dari penampang.
4. Dengan cara yang sama, hitung momen inersia segi empat DEFG terhadap sebuah sumbu, melalui titik beratnya dan sejajar sumbu X - X
5. Dengan cara yang sama, pindahkan momen inersia ini terhadap titik berat dari penampang.
6. Momen inersia dari penampang terhadap sumbu X-X (I_{XX}) adalah jumlah momen inersia yang diperoleh dari paras 3 dan 5 di atas.



Gambar 41
Penampang T dalam Dua Posisi

Momen inersia penampang terhadap sumbu Y-Y (I_{YY}) dapat ditentukan dengan menghitung momen inersia segi empat ABCH dan DEFG terhadap sebuah sumbu melalui titik beratnya dan sejajar sumbu Y-Y dan kemudian jumlahkan momen inersianya.

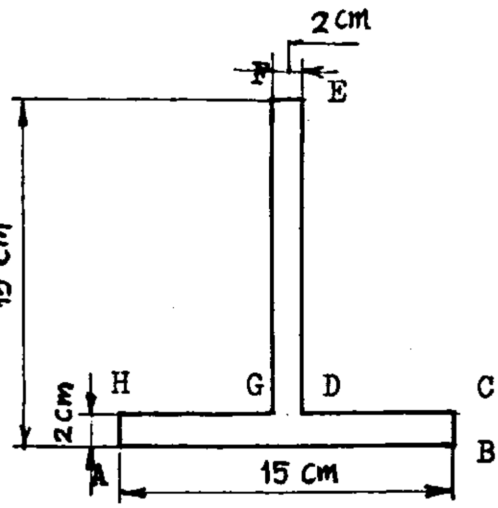
Contoh Soal 3.1

Sebuah penampang T dengan ukuran 15 x 15 x 2 cm seperti ditunjukkan pada gambar 42. Hitunglah momen inersia dari penampang terhadap sumbu X-X sejajar alas T melalui titik beratnya.

Penyelesaian :

Pertama, tentukan titik berat seluruh penampang. Karena penampang simetris terhadap sumbu Y-Y, maka titik berat penampang akan terletak pada sumbu ini.

Ambil $\bar{Y}$ adalah jarak antara titik berat dan alas AB. Bagilah penampang menjadi segi empat ABCH dan DEFG seperti ditunjukkan pada gambar 42.



Gambar 42
Penampang T Terbalik

1. Daerah ABCH

   $A_1 = 15 \times 2 = 30 \text{ cm}^2$

   $Y_1 = 2/2 = 1 \text{ cm}$

2. Daerah DEFG

   $A_2 = (15 - 2) \times 2 = 26 \text{ cm}^2$

   $Y_2 = 2 + 13/2 = 8{,}5 \text{ cm}$

Selanjutnya gunakan rumus, sehingga didapat :

$$Y = \frac{A_1 Y_1 + A_2 Y_2}{A_1 + A_2}$$

$$= \frac{30 \times 1 + 26 \times 8{,}5}{30 + 26}$$

$$= 4{,}48 \text{ cm}$$

Momen inersia segi empat ABCH melalui titik beratnya dan sejajar sumbu X - X adalah :

$$IG_1 = \frac{15\ (2)^2}{12} = 10 \text{ cm}^4$$

Jarak titik berat dari segi empat ABCH ke sumbu X - X ,

$$h_1 = 4,48 - 1 = 3,48 \text{ cm}$$

Momen inersia segi empat ABCH terhadap sumbu X - X adalah :

$$= IG_1 + Ah^2 = 10 + 30\ (3,48)^2 = 373,3 \text{ cm}^4$$

Dengan cara yang sama, Momen inersia segi empat DEFG melalui titik beratnya dan sejajar sumbu X - X adalah :

$$IG_2 = \frac{2 \times (13)^2}{12} = 366,\ 17 \text{ cm}^4$$

Jarak titik berat dari segi empat DEFG ke sumbu X - X adalah :

$$h_2 = 8,5 - 4,48 = 4,02 \text{ cm}$$

Momen inersia segi empat DEFG terhadap sumbu X - X adalah :

$$= IG_2 + Ah^2$$

$$= 366,17 + 26\ (4,02)^2 = 786,33 \text{ cm}^4$$

Momen inersia keseluruhan penampang terhadap sumbu X-X adalah :

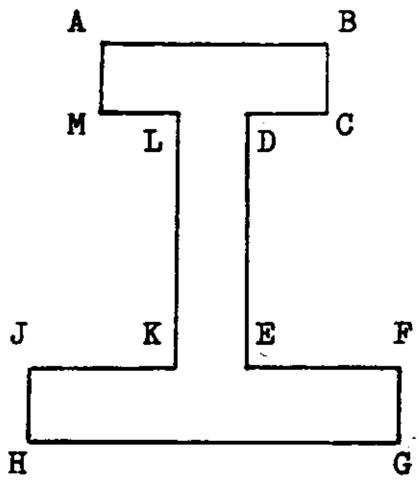
$$I_{XX} = 373,3 + 786,33$$

$$= 1159,63 \text{ cm}^4$$

B. MOMEN INERSIA DARI PENAMPANG I

Perhatikanlah sebuah penampang (profil) I, seperti ditunjukkan pada gambar 43. Momen inersia dari sebuah penampang I dapat ditentukan dengan cara sebagai berikut :

1. Bagilah keseluruhan penampang I menjadi tiga buah segi empat, yakni segi empat ABCM, segi empat DEKL dan segi empat FGHJ, dan tentukanlah titik beratnya.
2. Hitunglah momen inersia segi empat ABCM ter -



Gambar 43
Sebuah Penampang I

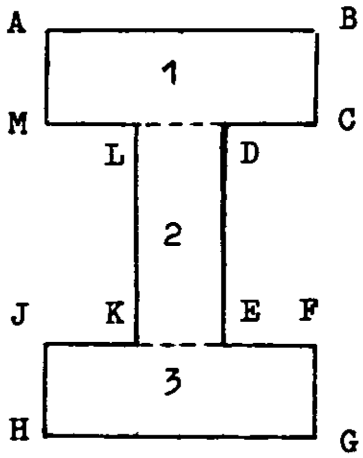
hadap sebuah sumbu melalui titik beratnya dan sejajar dengan sumbu X-X. Selanjutnya pindahkan momen inersia ini terhadap titik beratnya.

3. Begitu pula, hitung momen inersia segi empat DEKL terhadap sebuah sumbu melalui titik beratnya dan sejajar dengan sumbu X-X. Selanjutnya pindahkan momen inersia ini terhadap titik beratnya.
4. Begitu pula, hitung momen inersia segi empat FGHJ terhadap sebuah sumbu melalui titik beratnya dan sejajar sumbu X - X. Selanjutnya pindahkan momen inersia ini terhadap titik beratnya.
5. Momen inersia dari penampang terhadap sumbu X - X (I_{XX}) adalah jumlah momen inersia yang diperoleh pada paras 2, 3, dan 4.

Momen inersia penampang terhadap sumbu Y-Y (I_{YY}) dapat ditentukan dengan menghitung momen inersia segi empat ABCM, DEKL dan FGHJ terhadap sebuah sumbu melalui titik berat dan sejajar sumbu Y - Y, dan selanjutnya dengan menambahkan masing-masing momen inersia ini.

Contoh 3.2

Hitunglah momen inersia dari sebuah penampang I seperti ditunjukkan pada gambar 44 terhadap sumbu X - X.
Penyelesaian :



Gambar 44
Penampang I dengan Dua
Sumbu Simetris

Karena penampang simet - ris terhadap sumbu X - X dan sumbu Y - Y, maka titik berat dari penampang akan terletak pada titik berat jaringan (web) yakni segi empat DEKL.
Bagi keseluruhan penam - pang menjadi tiga buah segi empat seperti ditunjukkan pada gambar 44.
Momen inersia segi empat ABCM melalui titik beratnya dan sejajar sumbu X-X adalah :

$$IG_1 = \frac{12 \times 4^3}{12} = 64 \text{ cm}^4$$

Jarak titik berat dari segi empat ABCM ke sumbu X - X adalah :

$$h_1 = 6 + \frac{4}{2} = 8 \text{ cm}$$

Momen inersia segi empat ABCM terhadap sumbu X - X adalah :

$$IX_1 = IG_1 + Ah^2$$
$$= 64 + (12 \times 4) \times 8^2 = 3136 \text{ cm}^4$$

Momen inersia segi empat DEKL terhadap sumbu X - X adalah :

$$IG_2 = \frac{4 \times 12^3}{12} = 576 \text{ cm}^4$$

Momen inersia segi empat FGHJ terhadap suatu sumbu me - lalui titik beratnya dan sejajar dengan sumbu X - X adalah :

$$IG_3 = \frac{12 \times 4^3}{12} = 64 \text{ cm}^4$$

Jarak titik berat segi empat FGHJ terhadap sumbu X - X adalah :

$$h_3 = 6 + \frac{4}{2} = 8 \text{ cm}$$

Momen inersia segi empat FGHJ terhadap sumbu X - X

$$IX_3 = IG_3 + Ah^2$$
$$= 64 + (12 \times 4) \times 8^2$$
$$= 3136 \text{ cm}^4$$

Momen inersia keseluruhan penampang terhadap sumbu X-X

$$I_{XX} = IX_1 + IG_2 + IX_3$$
$$= 3136 + 576 + 3136$$
$$= 6848 \text{ cm}^4$$

Cara II (Metoda lain)

Perhatikanlah sebuah penampang yang dibangun dari segi empat 20 cm x 12 cm, yang mana sebuah segi empat 12 cm x 8 cm adalah terpotong (kosong). Dengan demikian gunakan rumus momen inersia untuk penampang segi empat yang berrongga, yakni :

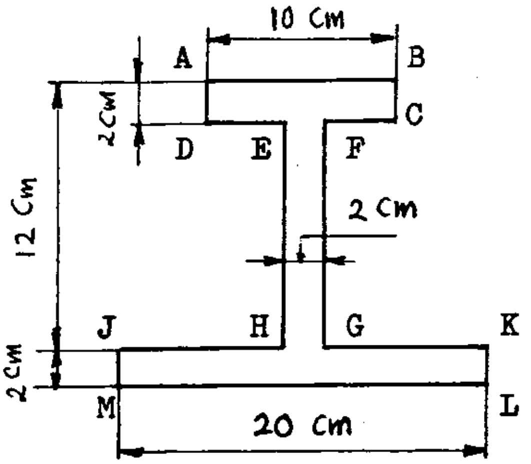
$$I_{XX} = \frac{bh^3}{12} - \frac{b_1\ h_1^3}{12}$$
$$= \frac{12 \times 20^3}{12} - \frac{8 \times 12^3}{12}$$
$$= 6848 \text{ cm}^4$$

Contoh 3.3

Hitunglah momen inersia dari penampang yang ditunjukkan pada gambar 45.terhadap sumbu X - X.

Penyelesaian :

Pertama, hitunglah titik berat dari penampang. Karena penampang simetris terhadap sumbu Y - Y, maka titik berat akan terletak pada sumbu ini.



Gambar 45
Penampang I dengan Satu Sumbu Simetris

Ambil Y jarak antara titik berat penampang dan alas dasar HG. Bagilan - keseluruhan penampang - menjadi tiga buah segi empat, yakni segi empat ABCD, segi empat EFGH , dan segi empat JKLM, seperti ditunjukkan pada gambar 45.

1. Daerah ABCD

$$A_1 = 10 \times 2 = 20 \text{ cm}^2$$

$$Y_1 = 2 + 10 + \frac{2}{2}$$

$$= 13 \text{ cm}$$

2. Daerah EFGH

$$A_2 = 10 \times 2 = 20 \text{ cm}^2$$

$$Y_2 = 2 + \frac{10}{2} = 7 \text{ cm}$$

3. Daerah JKLM

$$A_3 = 20 \times 2 = 40 \text{ cm}^2$$

$$Y_3 = \frac{2}{2} = 1 \text{ cm}$$

Selanjutnya gunakan rumus titik berat, sehingga didapat:

$$Y = \frac{A_1 Y_1 + A_2 Y_2 + A_3 Y_3}{A_1 + A_2 + A_3}$$

$$= \frac{20 \times 13 + 20 \times 7 + 40 \times 1}{20 + 20 + 40}$$

$$= 5{,}5 \text{ cm}$$

Momen inersia segi empat ABCD terhadap sebuah sumbu melalui titik beratnya dan sejajar dengan sumbu X - X adalah :

$$IG_1 = \frac{10 \times 2^3}{12} = 6{,}67 \text{ cm}^4$$

Jarak antara titik berat segi empat ABCD ke sumbu X-X adalah :

$$h_1 = 13 - 5,5 = 6,5 \text{ cm}$$

Momen inersia segi empat ABCD terhadap sumbu X - X adalah :

$$IX_1 = IG_1 + Ah^2$$
$$= 6,67 + 20 \times 6,5^2$$
$$= 851,67 \text{ cm}^4$$

Begitu pula momen inersia segi empat EFGH terhadap sebuah sumbu melalui titik beratnya dan sejajar dengan sumbu X - X,

$$IG_2 = \frac{2 \times 10^3}{12} = 166,67 \text{ cm}^4$$

Jarak antara titik berat segi empat EFGH ke sumbu X - X adalah :

$$h_2 = 7 - 5,5 = 1,5 \text{ cm}$$

Momen inersia segi empat EFGH terhadap sumbu X - X adalah :

$$IX_2 = IG_2 + Ah^2$$
$$= 166,67 + 20 \times 1,5^2$$
$$= 211,67 \text{ cm}^4$$

Momen inersia segi empat JKLM terhadap sebuah sumbu melalui titik beratnya dan sejajar dengan sumbu X-X adalah :

$$IG_3 = \frac{20 \times 2^3}{12} = 13,33 \text{ cm}^4$$

Jarak antara titik berat segi empat JKLM ke sumbu X - X adalah :

$$h_3 = 5,5 - 1,0 = 4,5 \text{ cm}^4$$

Momen ienrsia segi empat JKLM terhadap sumbu X - X adalah :

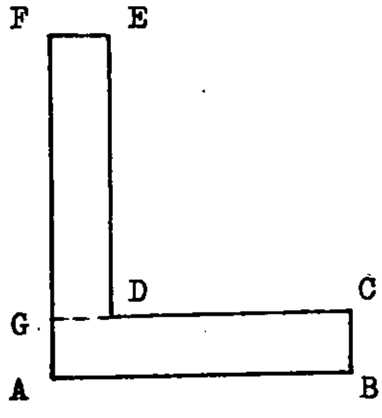
$$IX_3 = IG_3 + Ah^2$$
$$= 13{,}33 + 40 \times 4{,}5^2$$
$$= 823{,}33 \text{ cm}^4$$

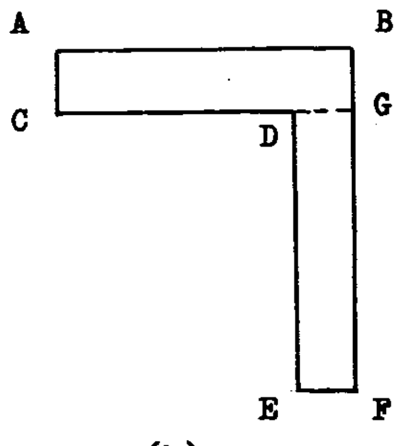
Momen inersia keseluruhan segi empat (penampang) terhadap sumbu X - X adalah :

$$I_{XX} = IX_1 + IX_2 + IX_3$$
$$= 851{,}67 + 211{,}67 + 823{,}33$$
$$= 1886{,}67 \text{ cm}^4$$

C. MOMEN INERSIA PENAMPANG L

Perhatikanlah sebuah penampang (profil) L atau sebuah profil L terbalik, seperti ditunjukkan pada gambar 46 a. dan 46 b. dibawah ini.





Gambar 46
Penampang L dalam Dua Posisi

Momen inersia dari penampang L dapat dihitung dengan cara sebagai berikut :

1. Bagilah profil L atau profil L terbalik menjadi dua buah segi empat, yakni segi empat ABCG dan segi empat

CDEF dan hitunglah jarak antara titik berat penam - pang dari AB dan BD.

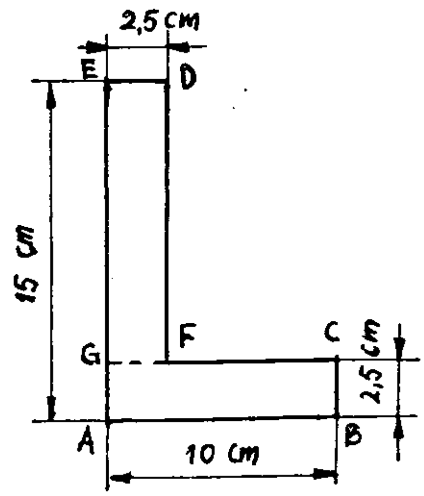
2. Hitunglah momen inersia segi empat ABCG terhadap sebuah sumbu melalui titik beratnya dan sejajar sumbu X - X. Selanjutnya pindahkan momen inersia ini ter - hadap titik berat penampang.
3. Dengan cara yang sama, hitunglah momen inersia segiempat CDEF terhadap sebuah sumbu melalui titik beratnya dan sejajar sumbu X - X. Selanjutnya pindahkan momen inersia ini terhadap titik berat penampang.
4. Selanjutnya, momen inersia dari penampang terhadap sumbu X - X (yakni I_{XX}) adalah jumlah momen inersia yang diperoleh pada paras 2 dan 3.

Momen inersia penampang terhadap sumbu Y-Y (yakni I_{YY}) dapat juga ditentukan dengan cara yang sama seperti momen inersia terhadap I_{XX} di atas.

Contoh 3.4

Hitunglah momen inersia dari sebuah penampang di bawah ini terhadap sumbu X - X dan sumbu Y - Y.

Penyelesaian :



Gambar 47
Sebuah Penampang L

Bagilah penampang menjadi segi empat ABCG dan segi empat DEFG, seperti di - tunjukkan pada gambar 47. Ambil Y adalah jarak antara titik berat penam - pang dan alas AB.

1. Daerah ABCG

$A_1 = 10 \times 2,5 = 25 \text{ cm}^2$

$Y_1 = \frac{2,5}{2} = 1,25$ cm.

2. Daerah CDEF

$$A_2 = 12{,}5 \times 2{,}5 = 31{,}25 \text{ cm}^2$$

$$Y_2 = 2{,}5 + \frac{12{,}5}{2} = 8{,}75 \text{ cm}$$

Selanjutnya gunakan rumus, sehingga di dapat :

$$Y = \frac{A_1 Y_1 + A_2 Y_2}{A_1 + A_2}$$

$$= \frac{25 \times 1{,}25 + 31{,}25 \times 8{,}75}{25 + 31{,}25}$$

$$= 5{,}42 \text{ cm}$$

Momen inersia segi empat ABCG terhadap sebuah sumbu melalui titik beratnya dan sejajar sumbu X-X adalah :

$$IG_1 = \frac{10 \times (2{,}5)^3}{12} = 13{,}02 \text{ cm}^4$$

Jarak antara titik berat segi empat ABCG ke sumbu X - X adalah :

$$h_1 = 5{,}42 - 1{,}25 = 4{,}17 \text{ cm}$$

Momen inersia segi empat ABCG terhadap sumbu X - X adalah :

$$IX_1 = IG_1 + Ah^2$$

$$= 13{,}02 + (10 \times 2{,}5) \times (4{,}17)^2$$

$$= 449{,}52 \text{ cm}^4$$

Momen inersia segi empat DEFG terhadap sebuah sumbu melalui titik beratnya dan sejajar sumbu X-X adalah :

$$IG_2 = \frac{2{,}5 \times (12{,}5)^3}{12} = 406{,}9 \text{ cm}^4$$

Jarak titik berat segi empat DEFG ke sumbu X-X adalah :

$$h_2 = 8{,}75 - 5{,}42 = 3{,}33 \text{ cm}$$

Momen inersia segi empat DEFG terhadap sumbu X-X adalah:

$$IX_2 = IG_2 + Ah^2 = 406{,}9 + 31{,}25 \times 3{,}33^2 = 850{,}6 \text{cm}^4$$

Momen inersia keseluruhan segi empat (penampang) terhadap sumbu X-X adalah :

$$I_{XX} = IX_1 + IX_2$$
$$= 449,52 + 850,6$$
$$= 1300,12\ cm^4$$

Untuk menghitung momen inersia penampang terhadap sumbu Y-Y, maka terlebih dahulu X. Untuk menghitung X diambil AF sebagai garis acuan.

1. Daerah ABCG

$$A_1 = 10 \times 2,5 = 25\ cm^2$$
$$X_1 = \frac{10}{2} = 5\ cm$$

2. Daerah DEFG

$$A_2 = 12,5 \times 2,5 = 31,25\ cm^2$$
$$X_2 = \frac{2,5}{2} = 1,25\ cm$$

Selanjutnya gunakan rumus titik berat, sehingga didapat

$$X = \frac{A_1\ X_1 + A_2\ X_2}{A_1 + A_2}$$
$$= \frac{25 \times 5 + 31,25 \times 1,25}{25 + 31,25}$$
$$= 2,92\ cm$$

Momen inersia segi empat ABCG terhadap sebuah sumbu melalui titik beratnya dan sejajar sumbu Y-Y adalah :

$$IG_3 = \frac{2,5 \times 10^3}{12} = 208,33\ cm^4$$

Jarak antara titik berat segi empat ABCG ke sumbu Y - Y adalah :

$$h_3 = 5 - 2,92 = 2,08\ cm$$

Momen inersia segi empat ABCG terhadap sumbu Y-Y adalah:

$$IY_1 = IG_3 + Ah^2$$
$$= 208{,}33 + 25 \times (2{,}08)^2$$
$$= 316{,}49 \text{ cm}^4$$

Momen inersia segi empat DEFG terhadap sebuah sumbu melalui titik beratnya dan sejajar sumbu Y-Y adalah :

$$IG_4 = \frac{12{,}5 \times 2{,}5^3}{12} = 16{,}276 \text{ cm}^4$$

Jarak antara titik berat segi empat DEFG ke sumbu Y - Y adalah :

$$h_4 = 2{,}92 - 1{,}25 = 1{,}67 \text{ cm}$$

Momen inersia segi empat DEFG terhadap sumbu Y-Y adalah:

$$IY_2 = IG_4 + Ah^2$$
$$= 16{,}276 + 31{,}25 \times (1{,}67)^2$$
$$= 103{,}43 \text{ cm}^4$$

Momen inersia keseluruhan segi empat (penampang) terhadap sumbu Y-Y adalah :

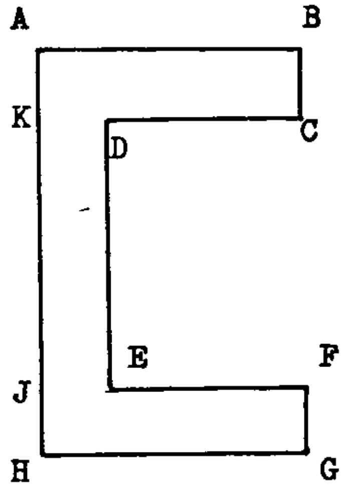
$$I_{YY} = IY_1 + IY_2$$
$$= 316{,}49 + 103{,}43$$
$$= 419{,}92 \text{ cm}^4$$

D. MOMEN INERSIA DARI PENAMPANG U

Perhatikanlah sebuah penampang U, seperti ditunjukkan pada gambar 48. Momen inersia dari penampang U , dapat dihitung dengan cara sebagai berikut :

1. Bagilah penampang U menjadi 3 (tiga) buah segi empat yakni segi empat ABCK, DEJK dan FGHJ dan hitunglah jarak titik berat dari alas AH.
2. Hitunglah momen inersia keseluruhan penampang terhadap sumbu X - X seperti biasa, yakni pertama perha -

tikanlah segi empat ABGH secara utuh dan kemudian kurangi dengan momen inersia segi empat DCFE.



Gambar 48
Penampang Berbentuk U

Momen inersia dari penampang terhadap sumbu Y - Y (yakni I_{YY}) dapat dihitung dengan cara sebagai berikut :

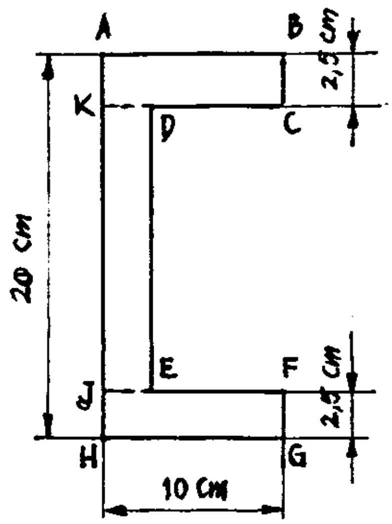
1. Hitunglah momen inersia segi empat ABCK terhadap sebuah sumbu melalui titik beratnya dan sejajar sumbu Y-Y. Selanjutnya pindahkan momen inersia ini terhadap titik berat penampang. Juga diperoleh momen inersia untuk segi empat FGHJ, sebab simetris.
2. Dengan cara yang sama, hitung momen inersia segi empat DEJK terhadap sebuah sumbu melalui titik beratnya dan sejajar sumbu Y-Y. Selanjutnya pindahkan momen inersia ini terhadap titik berat penampang.
3. Momen inersia keseluruhan penampang di atas terhadap sumbu Y - Y (yakni I_{YY}) adalah jumlah momen inersia yang diperoleh pada paras 1 dan 2.

Momen inersia dari penampang terhadap sumbu X - X dapat juga dihitung dengan cara yang sama, seperti cara momen inersia terhadap sumbu Y-Y di atas.

Contoh 3.5

Hitunglah momen inersia dari sebuah penampang yang ditunjukkan pada gambar 4 terhadap sumbu X-X dan sumbu Y-Y.

Penyelesaian :



Gambar 49
Penampang U dengan Satu Sumbu Simetris

Pertama, hitunglah titik berat penampang. Karena simetris terhadap sumbu X - X, maka titik berat akan terletak pada sumbu ini.

Ambil X adalah jarak antara titik berat penampang dan AH sebagai garis acuan.

Bagilah keseluruhan penampang menjadi 3 (tiga) buah segi empat, yakni segi empat ABCK, DEJK, dan FGHJ seperti ditunjukkan pada gambar 49.

1. Daerah ABCK

$$A_1 = 10 \times 2,5 = 25 \text{ cm}^2$$

$$X_1 = \frac{10}{2} = 5 \text{ cm}$$

2. Daerah DEJK

$$A_2 = (20 - 5) \times 2,5 = 37,5 \text{ cm}^2$$

$$X_2 = \frac{2,5}{2} = 1,25 \text{ cm}$$

3. Daerah FGHJ

$$A_3 = 10 \times 2,5 = 25 \text{ cm}^2$$

$$X_3 = \frac{10}{2} = 5 \text{ cm}$$

Selanjutnya gunakan rumus titik berat, sehingga didapat

$$X = \frac{A_1 X_1 + A_2 X_2 + A_3 X_3}{A_1 + A_2 + A_3}$$

$$= \frac{25 \times 5 + 37,5 \times 1,25 + 25 \times 5}{25 + 37,5 + 25} = 3,39 \text{ cm}$$

Momen inersia terhadap sumbu Y - Y

Momen inersia segi empat ABCK melalui titik be - ratnya dan sejajar sumbu Y - Y,

$$IG_1 = \frac{2,5 \times (10)^3}{12} = 208,33 \text{ cm}^4$$

Jarak antara titik berat segi empat ABCK ke sumbu Y - Y adalah :

$$h_1 = 5 - 3,39 = 1,61 \text{ cm}$$

Momen inersia segi empat ABCK terhadap sumbu Y - Y adalah :

$$IY_1 = IG_1 + Ah^2$$
$$= 208,33 + (10 \times 2,5) \times (1,61)^2$$
$$= 272,13 \text{ cm}^4$$

Karena penampang simetris terhadap sumbu Y - Y, maka momen inersia segi empat FGHJ akan sama dengan momen inersia segi empat ABCK, yakni 272,13 cm^4.
Momen inersia segi empat DEJK melalui titik beratnya dan sejajar dengan sumbu Y - Y,

$$IG_2 = \frac{15 \times (2,5)^3}{12} = 19,53 \text{ cm}^4$$

Jarak antara titik berat segi empat DEJK ke sumbu Y - Y, adalah :

$$h_2 = 3,39 - \frac{2,5}{2} = 2,265 \text{ cm}$$

Momen inersia segi empat DEJK terhadap sumbu Y - Y adalah :

$$IY_2 = IG_2 + Ah^2$$
$$= 19,53 + 37,5 \times (2,265)^2$$
$$= 192,37 \text{ cm}^4$$

Momen inersia keseluruhan penampang terhadap sumbu Y-Y adalah :

$$I_{YY} = IY_1 + IY_2 + IY_3$$
$$= 272,13 + 192,37 + 272,13$$
$$= 736,63 \text{ cm}^4$$

Momen inersia terhadap sumbu X - X

Untuk menghitung momen inersia terhadap sumbu X - X dapat digunakan rumus momen inersia untuk penampang segi empat berrongga. Sebelumnya perhatikanlah gambar, dimana :

b = AB = 10 cm $\qquad$ b_1 = DC = 7,5 cm

h = AH = 20 cm $\qquad$ h_1 = DE = 15 cm

Selanjutnya gunakan rumus momen inersia penampang segi empat berrongga, sehingga didapat :

$$I_{XX} = \frac{bh^3}{12} - \frac{b_1\, h_1^{\,3}}{12}$$
$$= \frac{10 \times 20^3}{12} - \frac{7,5 \times 15^3}{12}$$
$$= 4557,3 \text{ cm}^4$$

Catatan :

Momen inersia terhadap sumbu X - X dapat juga dihitung dengan menggunakan cara menghitung momen inersia terhadap sumbu Y - Y.

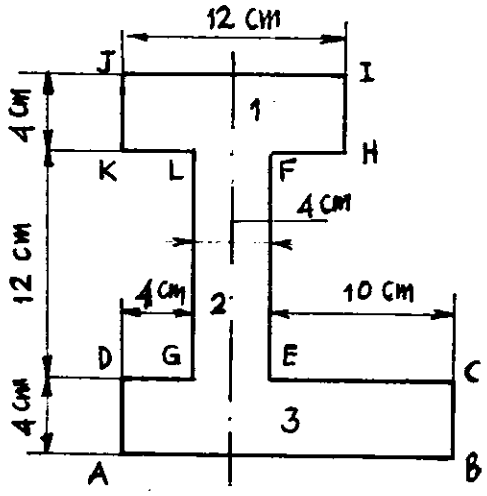
E. MOMEN INERSIA DARI BERMACAM-MACAM PENAMPANG

Momen inersia dari bermacam-macam penampang dapat dihitung dengan membagi penampang menjadi segitiga-segitiga atau segi empat-segi empat dan selanjutnya hitunglah momen inersia terhadap titik beratnya masing - masing. Momen inersia juga diperoleh dengan memindahkan ke sumbu yang dibutuhkan (sumbu X - X atau sumbu Y - Y) dengan menggunakan teori sumbu sejajar.

Contoh 3.6

Hitunglah momen inersia penampang pada gambar 50 terhadap sumbu X - X dan sumbu Y - Y.

Penyelesaian :



Gambar 50
Penampang I dengan Sumbu Tidak Simetris

Ambil X adalah jarak antara titik berat penampang dan sisi AD.

1. Segi empat HIJK

$A_1 = 12 \times 4 = 48 \text{ cm}^2$

$X_1 = \frac{12}{2} = 6 \text{ cm}$

2. Segi empat EFGL

$A_2 = 12 \times 4 = 48 \text{ cm}^2$

$X_2 = 4 + \frac{4}{2} = 6 \text{ cm}$

3. Segi empat ABCD

$A_3 = 18 \times 4 = 72 \text{ cm}^2$

$X_3 = \frac{18}{2} = 9 \text{ cm}$

Selanjutnya gunakan rumus titik berat, sehingga didapat

$$X = \frac{A_1 X_1 + A_2 X_2 + A_3 X_3}{A_1 + A_2 + A_3}$$

$$= \frac{48 \times 6 + 48 \times 6 + 72 \times 9}{48 + 48 + 72}$$

$$= 7{,}286 \text{ cm}$$

Momen inersia segi empat HIJK terhadap sebuah sumbu melalui titik beratnya dan sejajar sumbu Y - Y adalah :

$$IG_1 = \frac{4 \times 12^3}{12} = 576 \text{ cm}^4$$

Jarak antara titik berat segi empat HIJK ke sumbu Y - Y adalah :

$$h_1 = 7{,}286 - 6 = 1{,}286 \text{ cm}$$

Momen inersia segi empat HIJK terhadap sumbu Y-Y adalah:

$$IY_1 = IG_1 + Ah^2$$
$$= 576 + 48 \times (1,286)^2$$
$$= 655,38 \quad cm^4$$

Momen inersia segi empat EFGL terhadap sebuah sumbu melalui titik beratnya dan sejajar sumbu Y - Y adalah :

$$IG_2 = \frac{12 \times (4)^3}{12} = 64 \text{ cm}^4$$

Jarak antara titik berat segi empat EFGL ke sumbu Y - Y adalah :

$$h_2 = 7,286 - 6 = 1,286 \text{ cm}$$

Momen inersia segi empat EFGL terhadap sumbu Y-Y adalah:

$$IY_2 = IG_2 + Ah^2$$
$$= 64 + 48 \times (1,286)^2$$
$$= 143,38 \quad cm^4$$

Momen inersia segi empat ABCD terhadap sebuah sumbu melalui titik beratnya dan sejajar sumbu Y - Y adalah :

$$IG_3 = \frac{4 \times (18)^3}{12} = 1944 \quad cm^4$$

Jarak antara titik berat segi empat ABCD ke sumbu Y - Y adalah :

$$h_3 = 9 - 7,286 = 1,714 \text{ cm}$$

Momen inersia segi empat ABCD terhadap sumbu Y-Y adalah:

$$IY_3 = IG_3 + Ah^2$$
$$= 1944 + 72 \times (1,714)^2$$
$$= 2155,52 \quad cm^4$$

Momen inersia keseluruhan penampang terhadap sumbu Y-Y adalah :

$$I_{YY} = IY_1 + IY_2 + IY_3$$
$$= 655,38 + 143,38 + 2155,52 = 2954,28 \text{ cm}^4.$$

Untuk menghitung momen inersia penampang terhadap sumbu X-X, maka terlebih dahulu dihitung X. Untuk menghitung-X diambil AB sebagai garis acuan.

1. Segi empat HIJK

$$A_1 = 12 \times 4 = 48 \text{ cm}^2$$

$$Y_1 = 4 + 12 + \frac{4}{2} = 18 \text{ cm}$$

2. Segi empat EFGL

$$A_2 = 12 \times 4 = 48 \text{ cm}^2$$

$$Y_2 = 4 + \frac{12}{2} = 8 \text{ cm}$$

3. Segi empat ABCD

$$A_3 = 18 \times 4 = 72 \text{ cm}^2$$

$$Y_3 = \frac{4}{2} = 2 \text{ cm}$$

Selanjutnya gunakan rumus titik berat, sehingga didapat:

$$Y = \frac{A_1 Y_1 + A_2 Y_2 + A_3 Y_3}{A_1 + A_2 + A_3}$$

$$= \frac{48 \times 18 + 48 \times 8 + 72 \times 2}{48 + 48 + 72}$$

$$= 8{,}86 \text{ cm}$$

Momen inersia segi empat HIJK terhadap sebuah sumbu melalui titik beratnya dan sejajar sumbu X - X adalah :

$$IG_4 = \frac{12 \times (4)^3}{12} = 64 \text{ cm}^4$$

Jarak antara titik berat segi empat HIJK ke sumbu X - X adalah :

$$h_4 = 18 - 8{,}86 = 9{,}14 \text{ cm}$$

Momen inersia segi empat HIJK terhadap sumbu Y-Y adalah:

$$IX_1 = IG_4 + Ah^2$$

$$= 64 + 48 \times (9{,}14)^2 = 4073{,}9 \text{ cm}^4$$

Dengan cara yang sama, momen inersia segi empat EFGL terhadap sebuah sumbu melalui titik beratnya dan seja - jar sumbu X - X adalah :

$$IG_5 = \frac{4 \times (12)^3}{12} = 576 \text{ cm}^4$$

Jarak antara titik berat segi empat EFGL ke sumbu X - X adalah :

$$h_5 = 10 - 8{,}86 = 1{,}14 \text{ cm}$$

Momen inersia segi empat EFGL terhadap sumbu Y-Y adalah:

$$IX_2 = IG_5 + Ah^2$$
$$= 576 + 48 \times (1{,}14)^2$$
$$= 638{,}4 \text{ cm}^4$$

Dengan cara yang sama pula, momen inersia segi empat - ABCD terhadap sebuah sumbu melalui titik beratnya da se-jajar sumbu X - X adalah :

$$IG_6 = \frac{18 \times 4^3}{12} = 96 \text{ cm}^4$$

Jarak antara titik berat segi empat ABCD ke sumbu X - X adalah :

$$h_6 = 8{,}86 - 2 = 6{,}86 \text{ cm}$$

Momen inersia segi empat ABCD terhadap sumbu X-X adalah:

$$IX_3 = IG_6 + Ah^2$$
$$= 96 + 72 \times (6{,}86)^2$$
$$= 3484{,}3 \text{ cm}^4$$

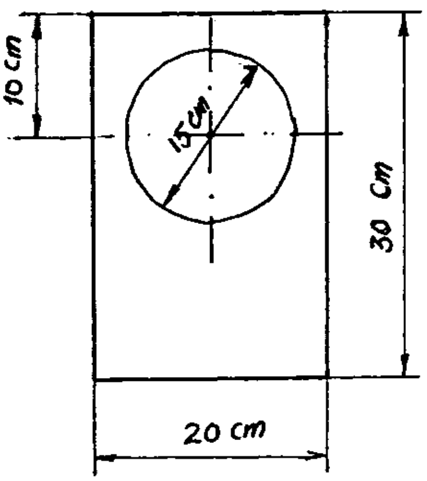
Momen inersia keseluruhan penampang terhadap sumbu X - X adalah :

$$I_{XX} = IX_1 + IX_2 + IX_3$$
$$= 4073{,}9 + 638{,}4 + 3484{,}3$$
$$= 8196{,}6 \text{ cm}^4$$

Contoh 3.7

Hitunglah momen inersia dari sebuah penampang berrongga seperti ditunjukkan pada gambar 51 terhadap sumbu X-X.

Penyelesaian :



Gambar 51
Sebuah Penampang Berrongga

Karena penampang simetris terhadap sumbu Y - Y maka titik beratnya akan terletak pada sumbu ini. Ambil Y adalah jarak antara titik berat penampang dan alas AB

1. Segi empat ABCD

$$A_1 = 30 \times 20 = 600 \text{ cm}^2$$

$$Y_1 = \frac{30}{2} = 15 \text{ cm.}$$

2. Lingkaran

$$A_2 = /4 \times (15)^2$$

$$= 176{,}7 \text{ cm}^2$$

$$Y_2 = 30 - 10 = 20 \text{ cm}$$

Selanjutnya gunakan rumus titik berat, sehingga didapat

$$Y = \frac{A_1\,Y_1 - A_2\,Y_2}{A_1 - A_2}$$

$$= \frac{600 \times 15 - 176{,}7 \times 20}{600 - 176{,}7}$$

$$= 12{,}9 \text{ cm}$$

Momen inersia segi empat ABCD terhadap sebuah sumbu melalui titik beratnya dan sejajar sumbu X - X,

$$IG_1 = \frac{20 \times (30)^3}{12} = 45000 \text{ cm}^4$$

Jarak antara titik berat segi empat ke sumbu X - X adalah :

$$h_1 = 15 - 12,9 = 2,1 \text{ cm}$$

Momen inersia segi empat ABCD terhadap sumbu X - X adalah :

$$IX_1 = IG_1 + Ah^2$$
$$= 45000 + 600 \times 2,1^2$$
$$= 47646 \text{ cm}^4$$

Dengan cara yang sama, momen inersia dari lingkaran terhadap sebuah sumbu melalui titik beratnya dan sejajar dengan sumbu X - X adalah :

$$IG_2 = \frac{\pi}{64} \times (15)^4 = 2485 \text{ cm}^4$$

Jarak antara titik berat dari lingkaran ke sumbu X - X adalah :

$$h_2 = 20 - 12,9 = 7,1 \text{ cm}^4$$

Momen inersia penampamg lingkaran terhadap sumbu X - X adalah :

$$IX_2 = IG_2 + Ah^2$$
$$= 2485 + 176,7 \times (7,1)^2$$
$$= 11392 \text{ cm}^4$$

Jadi momen inersia dari keseluruhan penampang terhadap sumbu X - X adalah :

$$I_{XX} = IX_1 - IX_2$$
$$= 47646 - 11392$$
$$= 36254 \text{ cm}^4$$

Contoh 3.8

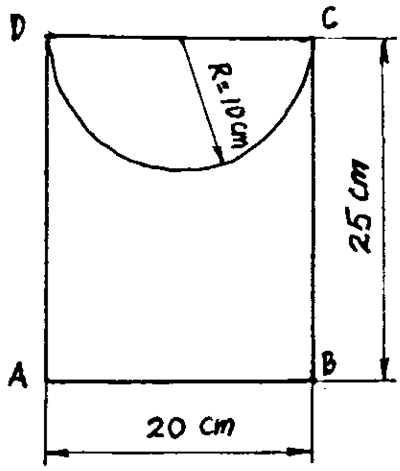
Hitunglah momen inersia dari suatu penampang yang ditunjukkan pada gambar 52 terhadap AB.

Penyelesaian :

Perhatikanlah gambar, momen inersia segi empat ABCD terhadap alas AB adalah :

$$IX_1 = \frac{20 \times (25)^3}{12}$$

$$= 104166,67 \text{ cm}^4$$



Gambar 52
Segi Empat dan Setengah Lingkaran

Luas setengah lingkaran

$$A = /2 \times (r)^2$$

$$= /2 \times (10)^2$$

$$= 157,1 \text{ cm}^2$$

Jarak antara titik berat setengah lingkaran dari alas AB,

$$h = 25 - \frac{4r}{3} = 25 \times \frac{4 \times 10}{3}$$

$$= 25 - 4,24 = 20,76 \text{ cm}$$

Momen inersia dari sebuah penampang setengah lingkaran terhadap titik beratnya :

$$IG = 0,11 \times r^4$$

$$= 0,11 \times (10)^4$$

$$= 1100 \text{ cm}^4$$

Momen inersia dari setengah lingkaran terhadap alas AB :

$$IX_2 = IG + Ah^2$$

$$= 1100 + 157,1 \times (20,76)^2$$

$$= 68840 \text{ cm}^4$$

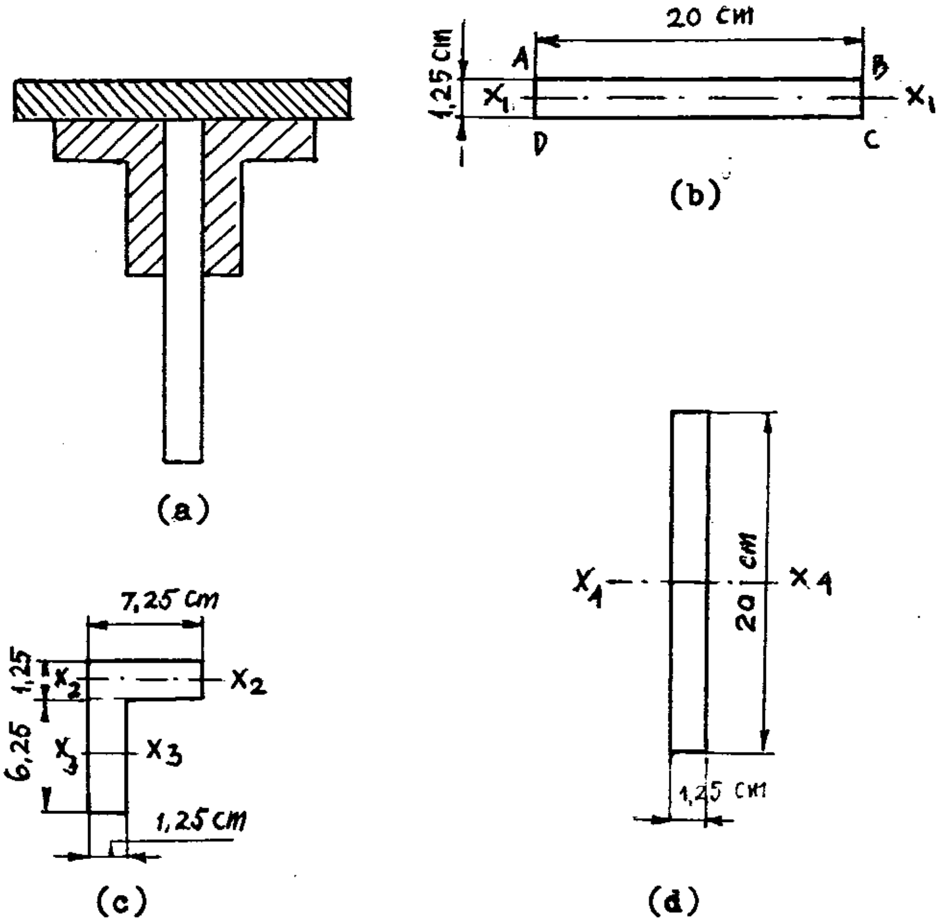
Momen inersia dari keseluruhan penampang terhadap AB adalah :

$$I_{AB} = 104166,67 - 68840 = 35326,67 \text{ cm}^4$$

Contoh 3.9

Sebuah batang T dibuat dari dua plat dan besi si ku seperti ditunjukkan pada gambar 53. Tentukanlah momen inersia dari penampang T terhadap sebuah sumbu melalui titik berat penampang dan sejajar dengan plat dibagian atas (the top plate).

Penyelesaian :



Gambar 53

Sebuah Batang T

Untuk menghitung momen inersia (I_{XX}) setiap batang, maka perhatikanlah batang-batang di bawah ini.

1. Untuk pelat puncak (lihat gambar 53.a)

$$IG_1 = \frac{bh^3}{12} \quad \ldots \text{(terhadap sumbu } X_1\ X_1)$$

$$= \frac{20 \times (1,25)^3}{12}$$

$$= 3,25 \text{ cm}^4$$

2. Untuk setiap besi siku (lihat gambar 53.c)

$$IG_2 = \frac{bh^3}{12} \quad \ldots \quad \text{(untuk daerah EFNH)}$$

$$= \frac{7,5 \times 1,25^{\ 3}}{12}$$

$$= 1,221 \quad \text{cm}^4$$

$$IG_3 = \frac{bh^3}{12} \quad \ldots \quad \text{(untuk daerah KNPM)}$$

$$= \frac{1,25 \times (6,25)^3}{12}$$

$$= 25,431 \text{ cm}^4$$

3. Untuk pelat yang vertikal (lihat gambar 53.d)

$$IG_4 = \frac{bh^3}{12} \quad \ldots \quad \text{(terhadap sumbu } X_4\ X_4)$$

$$= \frac{1,25 \times (20)^3}{12}$$

$$= 833,33 \text{ cm}^4$$

Untuk menghitung momen inersia (I_{XX}) penampang , maka ditentukan terlebih dahulu posisi dari titik berat penampang. Karena penampang simetris terhadap sumbu Y-Y maka titik berat terletak pada sumbu ini dan hanya $\overline{Y}$ yang akan ditentukan.

Ambil AB sebagai sumbu acuan (yakni puncak pelat) dan bagilah keseluruhan penampang menjadi beberapa bagian. Ambil jarak ke arah bawah sebagai positif.

1. Pelat puncak

$$A_1 = 20 \times 1,25 = 25 \text{ cm}^2$$

$$Y_1 = \frac{1,25}{2} = 0,625 \text{ cm}$$

2. Besi siku FEHKN

$$A_2 = 2 \times 7,5 \times 1,25 = 18,75 \text{ cm}^2$$

(sebab ada dua besi siku)

$$Y_2 = 1,25 + \frac{1,25}{2} = 1,875 \text{ cm}$$

3. Besi siku KNPM

$$A_3 = 2 \times 6,25 \times 1,25 = 15,625 \text{ cm}^2$$

$$Y_3 = 1,25 + 1,25 + \frac{6,25}{2} = 5,625 \text{ cm}$$

4. Pelat vertikal

$$A_4 = 20 \times 1,25 = 25 \text{ cm}^2$$

$$Y_4 = 1,25 + \frac{20}{2} = 11,25 \text{ cm}$$

Selanjutnya gunakan rumus titik berat, sehingga didapat:

$$Y = \frac{A_1 Y_1 + A_2 Y_2 + A_3 Y_3 + A_4 Y_4}{A_1 + A_2 + A_3 + A_4}$$

$$= \frac{25 \text{x} 0,625 + 18,75 \text{x} 1,875 + 15,625 \text{x} 5,625 + 25 \text{x} 11,25}{25 + 18,75 + 15,625 + 25}$$

$$= 4,028 \text{ cm}$$

Jadi posisi titik berat adalah sejauh 4,028 cm dari AB. Seterusnya, jarak titik berat pelat segi empat ABCD ke sumbu X - X adalah :

$$h_1 = 4,028 - 0,625 = 3,403 \text{ cm}$$

Dengan cara yang sama, jarak titik berat besi siku FEHN ke sumbu X - X adalah :

$$h_2 = 4,028 - 1,875 = 2,153 \text{ cm}$$

Jarak titik berat besi siku KNPM ke sumbu X - X adalah :

$$h_3 = 5,625 - 4,028 = 1,597 \text{ cm}$$

Jarak titik berat pelat vertikal RQTS ke sumbu X-X adalah :

$$h_4 = 11,25 - 4,028 = 7,222 \text{ cm}$$

Momen inersia pelat puncak ABCD terhadap sumbu X-X adalah :

$$\begin{aligned} IX_1 &= IG_1 + Ah_1^2 \\ &= 3,25 + 25 \times (3,403)^2 \\ &= 3,25 + 289,51 \\ &= 292,76 \text{ cm}^4 \end{aligned}$$

Momen inersia dari besi siku FEHN terhadap sumbu X - X adalah :

$$\begin{aligned} IX_2 &= 2 \left[IG_2 + Ah_2^2\right] \quad \text{... (karena dua buah)} \\ &= 2 \left[1,221 + 18,75/2 \times (2,153)^2\right] \\ &= 2 \left[1,221 + 9,375 \times (4,635)\right] \\ &= 2 \left[1,221 + 43,453\right] \\ &= 89,348 \text{ cm}^4 \end{aligned}$$

Momen inersia dari besi siku KNPM terhadap sumbu X - X adalah :

$$\begin{aligned} IX_3 &= 2 \left[IG_3 + Ah_3^2\right] \quad \text{... (karena dua buah)} \\ &= 2 \left[25,431 + 15,625/2 \times (1,597)^2\right] \\ &= 2 \left[25,431 + 7,812 \times (2,55)\right] \\ &= 2 \left[25,431 + 19,92\right] \\ &= 90,702 \text{ cm}^4 \end{aligned}$$

Momen inersia pelat vertikal RQTS terhadap sumbu X - X adalah :

$$IX_4 = IG_4 + Ah_4^2$$

$$IX_4 = 833,33 + 25 \times (7,222)^2$$
$$= 833,33 + 1303,932$$
$$= 2137,262 \text{ cm}^4$$

Momen inersia untuk keseluruhan penampang terhadap sumbu X - X adalah :

$$I_{XX} = IX_1 + IX_2 + IX_3 + IX_4$$
$$= 292,76 + 89,348 + 90,702 + 2137,262$$
$$= 2610,072 \text{ cm}^4$$

F. SOAL-SOAL LATIHAN

1. Apakah definisi momen inersia ?
2. Bagaimanakah caranya menghitung momen inersia dari sebuah luas bidang ?
3. Jelaskanlah besaran (term) dari momen inersia dan radius girasi.!
4. Apakah definisi dari modulus penampang
5. Apakah hukum dari Routh's untuk menentukan momen inersia dari suatu luas bidang ? Jelaskan dimana digunakan ? , dan mengapa ?
6. Tuliskanlah sebuah persamaan untuk momen inersia terhadap titik beratnya dari penampang berikut ini :
   a. sebuah penampang segi empat
   b. sebuah penampang segi empat berrongga.
   c. sebuah penampang berbentuk lingkaran (bundar)
   d. sebuah penampang lingkaran berrongga.
7. Nyatakanlah dan buktikan teori sumbu tegak lurus yang digunakan untuk momen inersia.
8. Nyatakanlah dan buktikan teori sumbu sejajar untuk momen inersia dari gambar bidang.
9. Tunjukkan bahwa $Io = IG + Ah^2$, dimana IG momen inersia lamina terhadap sumbu melalui titik berat dan

terletak pada bidang, dan h jarak centroid sampai sumbu sejajar dalam bidang yang sama terhadap momen inersia IG, A adalah luas lamina.

10. Buktikanlah momen inersia dari sebuah segi tiga dengan alas b dan tinggi h adalah $1/12 \times bh^3$.
11. Hitunglah momen inersia dari sebuah penampang yang berukuran 15 cm x 7,5 cm x 1 cm terhadap titik beratnya.

    (Kunci : $I_{XX} = 716{,}96$ cm^4 ; $I_{YY} = 121{,}78$ cm^4)

12. Hitunglah momen inersia (I_{XX} dan I_{YY}) dari sebuah penampang yang berbentuk L dengan ukuran 12,5 cm x 9,5 cm x 1 cm terhadap sumbu melalui titik berat penampang.

    (Kunci : $I_{XX} = 330{,}8$ cm^4 ; $I_{YY} = 161{,}3$ cm^4)

13. Hitunglah momen inersia dari sebuah penampang yang berbentuk I dengan ukuran puncak dan alasnya 2 cm x 2 cm dan batang (web) 21 cm x 2 cm terhadap sumbu X - X dan sumbu Y - Y.

    (Kunci : $I_{XX} = 25348$ cm^4; $I_{YY} = 214886{,}6$ cm^4)