

STATISTIK KUANTUM GAS IDEAL

MILIK UPT PERPUSTAKAAN
IKIP PADANG



Januari 1992

HD

KKI

OLEH

Dra. Festiyed, M.S^{533.12}

2314 / HD / 92 - S (1) (2)

FES S (1)

JURUSAN PENDIDIKAN FISIKA

FAKULTAS PENDIDIKAN MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
INSTITUT KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN PADANG

1 9 9 1

KATA PENGANTAR

Dengan rasa syukur dan bahagia penulis panjatkan kehadirat Allah SWT, karena dengan rahmat dan karuniaNya jualah penulis dapat menyelesaikan buku yang berjudul *STATISTIK KUANTUM GAS IDEAL*.

Buku ini penulis susun bertujuan untuk memberikan gambaran pada pembaca mengenai statistik dari partikel tingkat atom atau subatom, dengan mengambil model gas ideal. Disamping itu juga menambah literatur yang berbahasa Indonesia, karena penulis menyadari bahwa literatur yang membahas tentang statistik kuantum tingkat atom dan subatom belum begitu banyak atau ekstrimnya masih langka. Buku ini penulis susun berdasarkan studi kepustakaan dan diskusi dengan teman sejawat.

Dalam buku ini penulis membahas tentang statistik kuantum menggunakan penurunan matematika yang agak tinggi, yaitu menggunakan persamaan integral eksponensial, diferensial eksak dan non eksak hubungan rekursi, fungsi gama, rumus strirling, dan fungsi faktorial penjumlahan dan perkalian.

Penulis mengucapkan banyak terima kasih kepada semua pihak yang telah membanttu dalam penyelesaian buku ini. Semoga bantuan yang telah diberikan mendapat pahala dari yang kuasa...amin!.

Akhir kata penulis menyadari bahwa buku ini masih belum sempurna, untuk itu penulis mengharapkan pada pembaca untuk memberikan kritik dan saran demi penyempurnaan selanjutnya dan sebelumnya penulis ucapkan terima kasih.

Padang, 4 Agustus 1991

P E N U L I S

DAFTAR ISI

	<i>Halaman</i>
KATA PENGANTAR	i
DAFTAR ISI	iii
DAFTAR TABEL	iv
DAFTAR GAMBAR	v
BAB I. PENDAHULUAN	1
BAB II. TEORI DASAR STATISTIK MEKANIKA KUANTUM.....	5
BAB III. DISKRIPSI STATISTIK SISTIM PARTIKEL	15
A. Karakteristik Sistim Makroskopik	15
B. Karakteristik Sistim Mikroskopik	17
C. Konsep Kemungkinan	21
D. Diskripsi Statistik Sistem Partikel.....	22
1. Spesifikasi keadaan Sistem	22
2. Ensemble statistik	24
3. Postulat statistik	25
4. Perhitungan kebolehjadian	26
5. Jumlah keadaan yang diperbolehkan.....	27
6. Sistem yang berinteraksi.....	28
E. Kontak termis	29
F. Kontak Difusi	35
BAB IV. HUKUM DISTRIBUSI STATISTIK.....	37
A. Distribusi Maxwell-Boltzmann.....	37
B. Distribusi Bose-Einstein.....	43
C. Distribusi Fermi-Dirac.....	46
D. Membandingkan Distribusi Maxwell-Boltzmann (M-B), Bose-Einstein (B-E) dan Fermi-Dirac (F-D).....	48
BAB V. CONTOH-CONTOH PEMAKAIAN STATISTIK KUANTUM.....	58
BAB VI. PENUTUP	66
DAFTAR PUSTAKA.....	68

DAFTAR TABEL

Halaman

Tabel 4.1. Sifat distribusi untuk M-B, B-E dan F-D Arthur Beiser (1988 halaman 295).....	57
Tabel 5.1. Linus Pauling (1981 halaman 398)	63

DAFTAR GAMBAR

	<i>Halaman</i>
Gambar 2-1 Lintasan menurut gambaran klasik.....	10
Gambar 2-2 Lintasan menurut gambaran kuantum	10
Gambar 3-1 Konfigurasi yang mungkin terjadi untuk dua partikel.....	16
Gambar 3-2 Distribusi untuk 3 kuantum energi	19
Gambar 3-3 Harga rata-rata dari parameter y dalam keadaan mikro tertentu dengan keadaan mikro yang diperbolehkan.....	27
Gambar 3-4 Fungsi $\Omega(E)$ terhadap energi E	31
Gambar 3-5 Fungsi $\Omega'(E')$ terhadap energi E	31
Gambar 3-6 Fungsi $P(E)$ terhadap energi E	31
Gambar 4-1 4 partikel dalam satu sel ada 24 cara menemukannya	39
Gambar 4-2 Deretan $n = 2$ partikel takterbedakan dalam $g = 4$ sel	44
Gambar 4-3 Distribusi Fermi Dirac D.R.M. Mills	49
Gambar 4-4 Distribusi Bose Einstein	49
Gambar 4-5 Distribusi Maxwell Boltzmann	50
Gambar 4-6 Membandingkan ketiga distribusi F-D, B-E dan M-B.....	53
Gambar 4-7 Distribusi Fermi Dirac pada 3 temperatur	55
Gambar 5-1 Lubang pada dindingdari benda berongga...	58
Gambar 5-2 Distribusi radiasi benda hitam menurut Planck.....	61
Gambar 5-3 Kebolehjadian untuk lima sistem osilator harmonik dengan bilangan kuantum $n= 10$ (lingkaran tertutup) dan nilai perhitungan distribusi Boltzmann (lingkaran terbuka)..	64

BAB I PENDAHULUAN

Penelitian fisika pada akhir abad ke 19 mengalami kebuntuan karena gagal menerangkan gejala fisika tingkat atom dan sub atom menggunakan hukum-hukum yang berlaku saat itu (fisika klasik seperti: mekanika Newton, teori listrik magnet Maxwell, termodinamika, dan optika). Fisika klasik ini hanya mempelajari gejala-gejala dari sistem-sistem fisika lingkungan fisik manusia sehari-hari, termasuk langit dan benda-benda langit. Kegagalan ini mendorong para ilmuwan untuk menemukan konsep baru untuk menjelaskan gejala fisika terhadap atom dan sub atom ini, konsep ini dikembangkan pertama kali oleh Max Plank seperti yang dikemukakan oleh P. Hariadi Soepangkat (1988, halaman 11)

"Pada tanggal 14 Desember 1900 dalam suatu pertemuan ilmiah yang diselenggarakan oleh Himpunan Fisika Jerman, Max Plank mengemukakan suatu hipotesa untuk menjelaskan pancaran termal oleh benda sempurna hitam. Hipotesa Max Plank ini berbeda dengan konsep-konsep dasar fisika yang dianggap benar pada saat itu, namun berhasil memberika ramalan yang sesuai dengan pengamatan eksperimen ".

Dengan diawali hipotesa Max Plank yang merupakan tonggak dalam sejarah ilmu fisika merupakan awal usaha untuk menjajaki landasan fisika. Dengan dasar tersebut di atas banyak ditemukan prinsip-prinsip baru yang berlaku umum untuk fisika tingkat atom dan sub atom.

Sebagai contoh perumusan yang sangat mendasar adalah kuantisasi cahaya, dualisme gelombang partikel, prinsip ketidakpastian Heinsenberg, teori relativitas. Dari perumusan dasar itu muncul mekanika baru, yang mengaitkan antara ruang dengan waktu dan masa dengan energi. Sedang prinsip dualitas, kuantitas cahaya yang diterapkan oleh Neils Bohr untuk model atom merupakan dasar dari titik pangkal perkembangan untuk gejala atom dan sum atom yang dikembangkan oleh Erwin Schoodinger, Werner Heinsnberg dan lain-lain, dengan nama mekanika kuantum. Penerapan mekanika kuantum yang menyangkut atom dan sub atom ini yang akan dibahas dalam tulisan ini adalah statistik kuantum untuk gas ideal yang dapat menghasilkan ramalan dengan ketelitian yang cukup tinggi.

Pada statistik kuantum ini ditunjukkan bagaimana sifat makroskopik sistem banyak partikel berhubungan dengan sifat mikroskopik itu sendiri. Karena banyak gejala-gejala yang kita temukan dalam dunia fisika melibatkan sistim dalam banyak partikel.

Kalau sistim banyak partikel ini kita amati dan ukur gelalanya dengan merata-ratakan disebut dengan metoda statistik. Sebenarnya metode seperti ini tidak asing bagi kita karena teori gas kinetik juga menggunakan cara yang sama untuk menentukan tekanan gas; sebagaimana kita ketahui tekanan gas pada dinding bejana disebabkan tubrukan molekul-melekul gas pada dinding tersebut Untuk

suatu gas dalam keadaan tertentu ,tekanan nya konstan pada suatu nilai tertentu baik menurut eksperimen maupun teori gas .

Akan tetapi jika tekanan diamati pada permukaan yang sangat kecil maka terlihat harga tekanan berfluktuasi disekitar nilai yang diharapkan .Ini disebabkan gerak melekul-melekul dalam gas yang rambang atau random.Fluktuasi seperti ini nampak dalam percobaan gerak Brown. Dalam percobaan Brown, partikel-partikel halus berupa suspensi di dalam cairan jika diamati melalui mikroskop akan kelihatan melompat-lompat, disebabkan jumlah tubrukan yang diterima pada dua sisi yang berlawanan tidak tepat sama pada setiap saat. Akan tetapi pada benda yang kelihatan dengan mata saja, fluktuasi seperti itu tidak teramati dan inilah sebabnya pada sistem makroskopik fluktuasinya diabaikan.

Dengan dasar penjelasan diatas terlihat bahwa sifat-sifat molekul yang merupakan hasil rata-rata dari sifat-sifat mikroskopik menunjukkan sifat makroskopiknya. Dalam buku ini akan dijelaskan bagaimana karakteristik sistem makroskopik dan karakteristik sistem mikroskopik tersebut.

Pendekatan dengan metoda statistik jelas meratakan banyak partikel, jadi kita tidak dapat menentukan gejalanya secara pasti tapi hanya menentukan kemungkinannya untuk kejadian masing-masing partikel. Pada

penjelasan berikutnya dibahas konsep kemungkinan, dilanjutkan dengan diskripsi statistik sistem partikel seperti spesifikasi keadaan, esembel statistik, postulat statistik, perhitungan keboleh jadiannya. Dan bagaimana pula kontak termis serta kontak difusi yang berlaku pada sistem partikel tersebut.

Statistik yang berlaku untuk partikel identik yang dapat dibedakan dengan cara tertentu disebut statistik Maxwell-Boltzman. Distribusi Maxwell-Boltzman ini merupakan pendekatan yang bagus untuk distribusi sebenarnya. Sedang untuk partikel identik yang tidak dapat dibedakan walau partikel itu dapat dicacah adalah statistik Bose-Einstein. Dan untuk partikel tak terbedakan yang diatur oleh prinsip eksklusi ditentukan dengan distribusi Fermi-Dirac. Kalau semua distribusi itu kita bandingkan tentu kita dapatkan informasi yang banyak, penyelesaiannya dapat dilihat pada uraian berikutnya. Pembahasan pada bab terakhir adalah aplikasi dari statistik kuantum tentang radiasi benda hitam dan osilator harmonik.

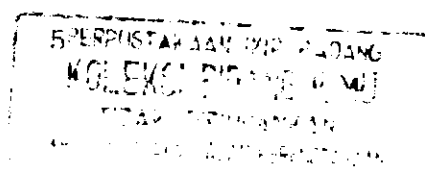
BAB II. TEORI DASAR STATISTIK MEKANIKA KWANTUM

Kegagalan para ilmuwan menerangkan gejala fisika tingkat atom dan subatom dengan menggunakan hukum-hukum fisika yang telah dikenal saat itu (dikenal dengan fisika klasik) untuk menjelaskan gejala-gejala sebagai berikut:

- a. Efekfotolistrik , yaitu pemancaran elektron dari permukaan logam oleh penyinaran cahaya yang panjang gelombangnya berada dibawah suatu harga tertentu; bilamana panjang gelombang cahaya lebih besar dari harga tertentu tersebut , efek itu tidak terjadi walaupun intensitas cahaya dibuat lebih besar. Pengamatan efek ini dilaporkan oleh Hallwacs di tahun 1888.
- b. Spektrum garis dari cahaya yang dipancarkan suatu gas; antara lain spektrum hidrogen yang telah diukur secara sangat teliti oleh Balmer (tahun 1855).
- c. Bentuk spektrum kontinu dari pancaran termal oleh benda sempurna hitam.

menimbulkan teka teki yang harus dicari pemecahannya.

Karena menghadapi kebuntuan, para ilmuwan tersebut mengambil kesimpulan bahwa hukum-hukum fisika klasik tidak memadai untuk menjelaskan gejala-gejala fisika tingkat atom dan sub atom, diusahakan untuk menemukan hukum-hukum baru untuk menerangkan gejala-gejala tersebut. Hukum-hukum baru ini dikembangkan oleh N. Bohr, A. Einsten, M. Plank, E. Schhodinger, M. Born, E. Fermi, W.Heisenber, P. Dirac,



W.Pauli, A.Sommerfeld, L. de Broglie, P.Ehrenfest, R.Feynman dan lain-lain dengan nama Mekanika Kuantum. Sebagaimana dikemukakan oleh L.V Tarason (1980, hal. 7) berikut ini :

"Research in physics, conducted at the end of the 19th century and in the first half of the 20th century, revealed exceptionally peculiar nature of the laws, electrons, and so on. On the basis of this research a new physical theory called quantum mechanics was founded."

Perkembangan mekanika kuantum ini memang rumit, namun pemakaiannya lebih memungkinkan untuk memudahkan data - data yang sulit disamping itu juga menghasilkan ramalan dengan ketelitian tinggi.

Dibandingkan dengan mekanika klasik, mekanika kuantum dikaitkan dengan corak sistimnya. Sistim yang kita tinjau pada mekanika kuantum ini ukurannya dalam orde atomik atau dalam orde sub-atomik yang kecepatannya kecil dari kecepatan cahaya, kalau ordenya lebih besar dari orde atomik atau orde sub-atomik kecepatannya yang mendekati kecepatan cahaya.

Ini berarti juga bahwa hukum-hukum yang berlaku pada mekanika klasik tidak dapat langsung berlaku pada tingkat atom dan sub atom. Secara kualitatif perbedaan mekanika kuantum dan mekanika klasik dijelaskan sesuai dengan yang dikemukakan oleh Murjono (1989, halaman 22) :

"Untuk sistim makroskopik pada kecepatan rendah ($v \ll c$) dinamakan mekanika klasik dan pada kecepatan tinggi ($v < c$) dinamakan mekanika relativistik, sebaliknya sistim mikroskopik pada kecepatan rendah ($v \ll c$) dinamakan mekanika kuantum non relativistik dan pada kecepatan tinggi ($v < c$) dinamakan mekanika kuantum relativistik".

Dari pernyataan diatas , secara umum dapat disimpulkan bahwa mekanika klasik sudah baik sekali untuk sistim yang sehari-hari kita hadapi ; bukan berarti sifat-sifat kuantumnya tidak teramati, sehubungan dengan keteletian pengukuran yang kita punyai.

Jadi baik sekali bila dipertanyakan secara klasifikasi kuantitatif , apakah suatu sistim adalah sistim kuantum atau bukan. Prinsip ketidakpastian W.Heisenberg sangat tepat untuk membantu dalam menjawabnya. Prinsip ketidakpastian ini dinyatakan oleh W. Heisenberg dalam tahun 1927 yang dikutip oleh Arthur Beiser (1986, halaman 93) :

"... perkalian ketidakpastian kedudukan beda Δx pada suatu saat dan ketidakpastian kedudukan benda Δx pada arah x yaitu Δp pada saat yang sama lebih besar atau sama dengan $h/4\pi$. Kita tak mungkin menentukan secara serentak kedudukan dan momentum suatu benda".

Ketidakpastian ini bukan ditimbulkan oleh alat yang kurang teliti, tetapi ditimbulkan oleh sifat ketidakpastian alamiah dari kuantitas yang diukur.

Dengan demikian keadaan sistim yang diukur atau diamati tidak selalu identik dan tidak pasti meskipun berkaitan. Tepatnya keadaan suatu sistim kuantum dinyatakan oleh suatu fungsi kebolehjadian (probabilitas) atau dikenal dengan fungsi gelombang yang lambangnya adalah ψ , sedangkan operasi suatu pengukuran dinyatakan dengan operator matematis ϕ yang terpisah dari keadaan sistim.

Fungsi gelombang ψ sendiri tidak mempunyai tafsiran fisis, tapi kalau kuadrat harga mutlak dari fungsi gelombang ψ ($|\psi|^2$) atau $\psi\psi^*$ jika ψ kompleks, merupakan peluang untuk mendapatkan partikel. Misalnya partikel yang dicari saat tertentu pada suatu tempat tertentu pula. Dengan kata lain peluang untuk mendapatkan partikel itu berbanding lurus dengan $|\psi|^2$, maka integral $|\psi|^2$ ke seluruh ruang harus satu, karena tidak bisa negatif atau kompleks. Sehingga,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi|^2 dV = 1 \quad (2.1)$$

persamaan 2.1 merupakan pernyataan matematis bahwa partikel ada disuatu tempat untuk setiap saat; jumlah peluang yang mungkin harus tertentu. Persamaan tersebut dikatakan ternormalisasi, disamping bisa dinormalisasi ψ harus berharga tunggal dan kontinu (malar).

Sedang operator menurut Stephen Gasiorowicz (1974, halaman 114) sebagai berikut :

In vector spaces, be they finite dimensional or more general, an operator is defined to be something that transforms a vector into another vector, or in this case, a square integrable function into another square integrable function.

Sebagai contoh persamaan Schrödinger satu dimensi untuk satu partikel sebagai berikut:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V(x) \right] \psi(x) = E\psi(x) \quad (2.2)$$

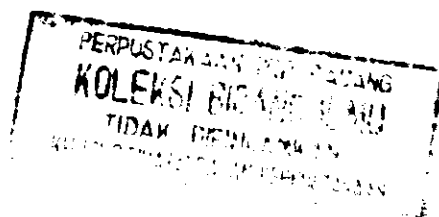


suku dalam kurung disebut operator Hamilton, yang bila diterapkan pada fungsi gelombang $\psi(x)$, menghasilkan $E\psi(x)$ dengan E adalah energi. Operator lainnya seperti:

$$\text{operator momentum} \quad p = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x}$$

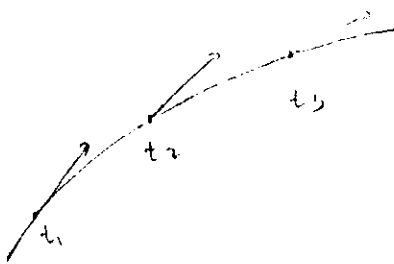
$$\text{operator kedudukan} \quad x = i\hbar \frac{\partial}{\partial p}$$

Besaran sebagai hasil pengukuran pada sistim tertentu tergantung pada hasil operasi ψ dan operator. Dalam perumusan kuantum, pengukuran yang dinyatakan oleh operasi tersebut tidak selalu menghasilkan besaran-besaran hasil pengukuran yang pasti dan tepat, sekalipun dengan cara dan peralatan yang sempurna. Pada umumnya, operasi pengukuran pada suatu sistim akan menimbulkan perubahan keadaan yang tidak dapat diramalkan dengan tepat atau bersifat probabilitas sehingga hasil pengukuran lebih bersifat sebagai suatu hasil rata-rata. Sebagai akibatnya, spesifikasi keadaan suatu sistim berdasarkan besaran-besaran hasil pengukuran yang tepat dan pasti tidak dapat dilakukan sepenuhnya seperti dalam perumusan klasik. Gagasan ketidak pastian ini merupakan suatu ciri fleksibilitas yang memungkinkan jangkauan lebih jauh dari perumusan kuantum. Ini memungkinkan pula pengembangan pengertian-pengertian baru yang fundamental sifatnya, juga memerlukan perumusan yang cermat dan lengkap tentang sifat

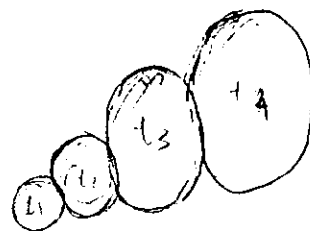


sifat keadaan operator dan kaitannya dengan hasil pengamatan.

Untuk jelasnya kita ambil contoh sederhana yaitu lintasan partikel; secara klasik, setiap saat dalam waktu t yang berurutan partikel itu mempunyai kedudukan tertentu, begitu pula momentumnya ataupun kecepatannya. Jika titik-titik kedudukan itu kita sambungkan, disebut lintasan partikel. Kalau secara kuantum ketidakpastian dan pengukuran, misalnya ketidakpastian kedudukan menyebabkan pada suatu saat tidak dapat digambarkan sebagai suatu titik, tapi lebih tepat sebagai suatu daerah dimana partikel itu mungkin sedang berada. Jadi daerah inilah yang bergerak dengan perubahan waktu. Dalam perpindahannya daerah ini mengalami reformasi (perubahan besar). Secara skema dapat digambarkan sebagai berikut :



Gambar (2-1)
Lintasan menurut
gambaran klasik.



Gambar (2-2)
Lintasan menurut
gambaran kuantum

Dari contoh sederhana diatas, dalam pandangan kuantum

pengertian tentang lintasan sebagai suatu lengkungan yang terdefiniskan seperti ciri serba pasti atau deterministik dari mekanika klasik secara tajam sudah tidak ada lagi, sehingga daya ramal dalam mekanika kuantum bersifat statistik.

Kalau perumusan suatu sistim dimulai dengan suatu kondisi awal yang bersifat statistik maka kondisi akhirnya pun hanya bertaraf statistik pula. Seperti yang dikemukakan oleh Hariadi P. Soepangkat (1988, halaman 97) :

"Konsep klasik tentang lintasan suatu partikel dalam ruang harus diganti dengan suatu konsep statistik tentang kebolehjadian bahwa suatu partikel itu berada pada suatu kedudukan dan waktu tertentu, apabila kita menelaah sistim tingkat atomik dan sub-atomik. Hal ini disebabkan oleh kenyataan bahwa sistim atomik dan sub-atomik sistim pengamatan dan sistim yang diamati berinteraksi dengan kuat".

Sehingga kita tidak dapat menentukan keadaan awal dan akhir suatu partikel secara tepat, tapi kita bisa menentukan keadaan berpeluang besar; juga bisa menunjukkan bagaimana sifat Makroskopik sistim banyak partikel berhubungan dengan sifat Mikroskopik partikel itu sendiri

Secara statistik dapat pula diinformasikan mengenai peluang partikel itu memiliki sejumlah energi tertentu pada suatu saat. Dan selain itu hal yang penting pada statistik Kuantum ini adalah postulat-postulat yang mendukung bersifat " Apriori ", dalam arti bahwa kemungkinan suatu kejadian dapat dihitung sebelum eksperimen dilakukan.

Sistim partikel dalam mekanika kuantum dibagi dalam dua kategori

- a. Partikel dengan spin 0 atau kelipatan bilangan bulat dari \hbar yang disebut *boson*. Boson tidak memenuhi prinsip eksklusi, dan fungsi gelombang boson tidak terpengaruh oleh pertukaran setiap pasangan partikel. Fungsi gelombang semacam ini disebut *Simetrik*. Setiap jumlah boson bisa terdapat dalam keadaan kuantum yang sama dari sistem ini. Contoh dari boson ini adalah : Foton, π -meson, K-meson, partikel alpha (α), atom H, molekul N_2 dan H_2 , dan lain-lain.
- b. Partikel dengan spin setengah \hbar , dan partikel yang mempunyai spin yang bukan kelipatan bulat dari \hbar disebut *fermion*. Fermion memenuhi prinsip eksklusi, dan fungsi gelombang sistem fermion semacam ini disebut *antisimetrik*. Hanya satu fermion bisa terdapat pada keadaan kuantum tertentu dari sistem itu. Contoh fermion adalah : Elektron, proton, neutron, He^3 , dan lain-lain.

Selanjutnya mari kita tinjau sistem dua partikel, yaitu partikel satu dan partikel dua, misalnya partikel itu berada dalam keadaan a dan yang lainnya dalam keadaan b . Jika partikel satu dan partikel dua itu tak terbedakan, terdapat dua kemungkinan terisinya keadaan yang digambarkan oleh fungsi gelombang berikut ini:

$$\begin{aligned}\psi_I &= \psi_a(1) \psi_b(2) \\ \psi_{II} &= \psi_a(2) \psi_b(1)\end{aligned}\quad (2.3)$$

Jika partikelnya tidak terbedakan, kita tidak dapat menjelaskan partikel mana berada pada keadaan tertentu, dan fungsi gelombangnya harus merupakan kombinasi dari ψ_I dan ψ_{II} untuk mencerminkan peluang yang sama. Untuk partikel boson seperti berikut:

$$\psi_B = 1/\sqrt{2} \left[\psi_a(1) \psi_b(2) + \psi_a(2) \psi_b(1) \right] \quad (2.4)$$

dan jika partikelnya fermion seperti berikut:

$$\psi_F = 1/\sqrt{2} \left[\psi_a(1) \psi_b(2) - \psi_a(2) \psi_b(1) \right] \quad (2.5)$$

Faktor $1/\sqrt{2}$ diperlukan untuk menormalisasi fungsi gelombang itu.

Kemungkinan masing-masing kasus untuk mendapatkan kedua partikel dalam keadaan yang sama, katakan a . Untuk partikel yang terbedakan, keduanya ψ_I dan ψ_{II} menjadi :

$$\psi_m = \psi_a(1) \psi_a(2)$$

sehingga menghasilkan kerapatan peluang :

$$\psi_m^* \psi_m = \psi_a^*(1) \psi_a^*(2) \psi_a(1) \psi_a(2) \quad (2.6)$$

untuk boson fungsi gelombangnya menjadi :

$$\begin{aligned}\psi_B &= 1/\sqrt{2} \left[\psi_a(1) \psi_a(2) + \psi_a(1) \psi_a(2) \right] = 2/\sqrt{2} (1) \psi_b(2) \\ &= \sqrt{2} \psi_a(1) \psi_a(2)\end{aligned}\quad (2.7)$$

sehingga menghasilkan kerapatan peluang :

$$\psi_B^* \psi_B = 2 \psi_a^*(1) \psi_a^*(2) \psi_a(1) \psi_a(2) = 2 \psi_m^* \psi_m$$

Jadi peluang untuk mendapatkan kedua boson dalam keadaan yang sama adalah dua kali untuk partikel yang terbedakan.

Untuk fungsi gelombangnya menjadi :

$$\psi_F = 1/\sqrt{2} [\psi_a(1)\psi_b(2) - \psi_b(1)\psi_a(2)] = 0$$

Peluang untuk mendapatkan kedua partikel dalam keadaan yang sama menjadi nol; ini merupakan pernyataan prinsip eksklusif.

Hasil ini dapat dirampatkan pemakaiannya untuk sistem banyak partikel. Dalam sistem boson, kehadiran partikel dalam suatu kuantum tertentu menambah peluang partikel lain untuk didapatkan dalam keadaan itu; dalam sistem fermion, kehadiran partikel dalam keadaan kuantum tertentu mencegah partikel lain untuk berada dalam keadaan itu. Keterangan selanjutnya dapat dilihat pada bab IV.

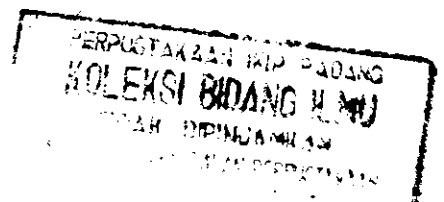
BAB III. DISKRIPSI STATISTIK SISTIM PARTIKEL

A. Karakteristik Sistim Makroskopik

Sistim mikroskopik ini terdiri dari banyak partikel (jumlahnya dalam orde 10^{25}), sehingga pemecahan persoalan menggunakan persamaan dasar seperti hukum Newton atau persamaan Schrödinger tidaklah efektif, karena persamaan dasar tersebut hanya berlaku untuk satu atau beberapa partikel saja. Sistim mikroskopik sering diselidiki dengan metoda termodinamika (seperti: suhu, tekanan, komposisi dan pertukaran kalor serta kerja), karena semua itu merupakan pernyataan perilaku sejumlah partikel.

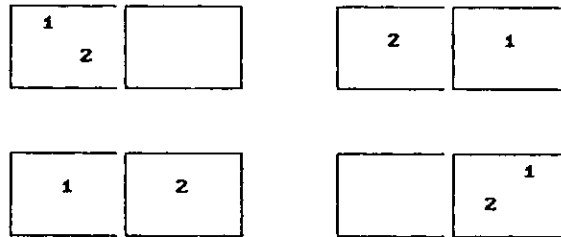
Hubungan-hubungan antara berbagai pengukuran yang diturunkan dalam termodinamika ini tidaklah didasarkan pada teori struktur zat atau mekanisme terjadi perubahannya, sehingga untuk pemecahan banyak partikel sangat cocok kalau menggunakan konsep statistik.

Sebagai contoh, N partikel gas ditempatkan dalam suatu kotak yang terisolasi, kemudian kotak tersebut dibagi dua bahagian dengan volume sama, tetapi molekul gas di dalam kotak bebas bergerak dari bahagian kotak pertama kebahagian kotak kedua atau sebaliknya. Dari pengalaman kita dapat menerka bahwa jumlah partikel dalam kotak pertama n_1 hampir sama dengan jumlah partikel dalam kotak kedua n_2 ($n_1 \approx n_2$), tetapi $\Delta n =$



$n_1 - n_2$ pada umumnya tidak nol, ini berarti juga jumlah partikel dalam kotak pertama berfluktuasi.

Untuk dua partikel, maka konfigurasi yang mungkin terjadi dapat digambarkan sebagai berikut,



Gambar 3-1

Konfigurasi yang mungkin terjadi untuk dua partikel

jadi terlihat pada gambar 3-1 jumlah konfigurasi yang mungkin terjadi $4 = 2^2$, dan tiap konfigurasi mempunyai kemungkinan terjadi $1/4$.

Tinjauan di atas dapat diperluas untuk N partikel. Banyak konfigurasinya menjadi 2^N , dan kemungkinan terjadinya atau frekuensi relatif untuk mendapatkan semua partikel pada kotak pertama ialah:

$$P_n = \frac{1}{2^N} \quad (3-1)$$

Untuk 0 molekul pada kotak pertama adalah $P_0 = \frac{1}{2}$, dan untuk n molekul pada kotak pertama dapat ditentukan dengan rumusan berikut:

$$P_n = \frac{C_{(n)}}{2^N} \quad (3-2)$$

dimana

$$C_{(n)} = C_n^N = \frac{N!}{n!(N-n)!} \quad (3-3)$$

n adalah jumlah molekul pada kotak pertama dan

N adalah jumlah partikel seluruhnya.

Kemungkinan maksimum terjadi pada $n = 1/2 N$, dalam keadaan ini kotak pertama akan setimbang berfluktuasi dengan $n = 1/2 N$.

Karakteristik lain dari sistim makroskopik adalah pendekatan menuju keadaan setimbang, pada umumnya melalui proses takreversibel (tak dapat diubah). Dimana permulaan semua molekul berada dalam kotak pertama, begitu dinding pemisah dibuka molekul mulai memasuki kotak kedua hingga pada akhirnya jumlah molekul pada kotak pertama hampir sama dengan pada kotak kedua.

B. Karakteristik Sistim Mikroskopik

Dari sudut pandang mikroskopik yang diwakili oleh penerapan mekanika klasik dalam teori kinetika dan oleh mekanika kuantum, perilaku partikel satu persatu digambarkan dalam strukturnya dan dalam mekanisme

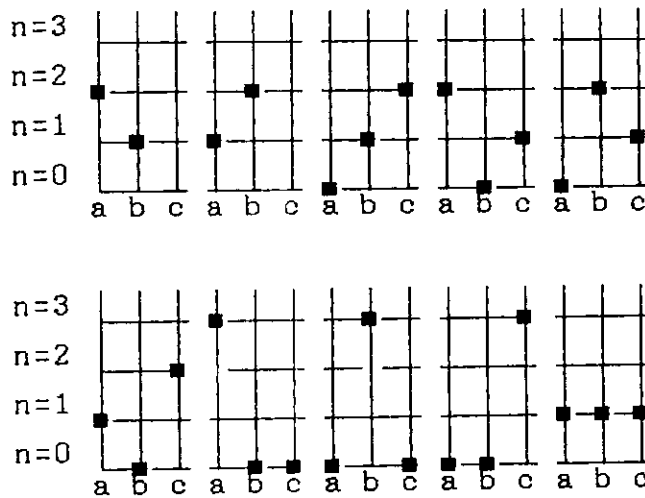
dengan partikel lainnya. Secara idealnya dapat diramalkan perilaku termodinamika bahan-bahan berdasarkan pengetahuan mengenai partikel yang diperoleh dari pengukuran spektroskopi dan dari perhitungan fungsi-fungsi gelombang secara teoritik.

Keadaan mikro suatu sistim adalah suatu konfigurasi ruang yang lekas dan distribusi energi diantara partikel-partikel yang digambarkan secara terperinci. Bagi suatu keadaan termodinamika tertentu (misalnya sejumlah partikel pada suhu, tekanan dan volume tertentu) terdapat beberapa keadaan mikro yang mungkin dan cenderung berubah keadaannya ke arah kesetimbangan karena kesetimbangan merupakan keadaan termodinamika yang mempunyai keadaan mikro terbanyak.

Sebagai contoh adalah distribusi energi diantara atom-atom suatu kristal, dapat dihitung keadaan mikro yang mungkin dan dapat pula dilihat asal usul distribusi Boltzmann. Atom-atom kristal itu dianggap sebagai osilator harmonik berdimensi satu yang sempurna, hingga suatu atom mempunyai energi ϵ_n yang diberikan oleh $n h \nu$, dengan n bilangan kuantum fibrasi, h tetapan Plank, ν frekuensi fibrasi. Berarti kita mengambil energi titik nol sebagai frekuensi dan mengukur besarnya energi terhadap tingkat titik nol tersebut.

Untuk 3 atom dalam kristal ditribusi yang mungkin

adalah 10 kemungkinan seperti gambar berikut:



Gambar 3.2

Distribusi untuk 3 kuantum energi dari atom a, b, c memberikan 10 kemungkinan
 Alberty Daniels (1988 halaman 81)

Seperti gambar di atas menunjukkan cara yang berbeda dalam membagi tiga kuantum energi di antara tiga atom dalam kristal. Atom-atom dapat dibedakan karena masing-masing mempunyai letak yang berbeda, dan ditandai a, b , dan c . Tiap bagan kecil menggambarkan suatu keadaan mikro dari sistem. Jadi kristal ini dapat berada pada salah satu dari 10 macam keadaan mikro yang berbeda-beda, yang masing-masing mempunyai energi yang tepat sama besarnya, yaitu tiga kuantum dengan frekuensi tertentu. Di sini tidak ada alasan apapun untuk memilih satu atau lebih keadaan dibandingkan dengan keadaan yang lain, karena dianggap kesepuluh keadaan mempunyai kebolehjadian yang sama. Jadi setiap

saat kristal-kristal berkemungkinan untuk berada pada suatu keadaan yang sama. Dianggap bahwa dalam hal itu terdapat suatu mekanisme bagi kuantum untuk berpindah dari satu atom ke atom lainnya, dan dengan demikian dapat diharapkan dalam selang waktu yang panjang, kristal mengalami ke sepuluh keadaan mikro yang sesuai dengan energi total $3h\nu$ untuk kristal tiga atom a, b, dan c tersebut.

Untuk tiga atom dalam kristal ini keadaan-keadaan mikronya mempunyai kelompok yang berbeda, yaitu kelompok I, II dan III. Masing-masing kelompok terbagi dalam tiga distribusi yang berbeda. Pada distribusi yang pertama, satu memiliki dua kuantum, satu memiliki satu kuantum, dan satunya lagi pada keadaan dasar punya enam keadaan mikro. Pada distribusi yang kedua, sebuah atom memiliki tiga kuantum dan dua lainnya ada pada keadaan dasar dengan tiga keadaan mikro. Pada distribusi yang ketiga, setiap atom memiliki satu kuantum energi dengan keadaan mikro.

Keadaan mikro pada suatu distribusi dapat dihitung jumlahnya dengan hubungan sebagai berikut:

$$W = \frac{N!}{N_1! N_2! \dots N_n!} \quad (3.4)$$

dengan W = jumlah keadaan mikro yang mungkin

N = jumlah total partikel

N_n = jumlah atom pada keadaan mikro ke-n
 (N_1 jumlah partikel dalam keadaan satu, N_2
 jumlah partikel dalam keadaan dua dan
 seterusnya)

persamaan (3.4) ini sangat cocok untuk jumlah N yang
 besar.

C. Konsep Kemungkinan

Dalam statistik kuantum kita bayangkan bahwa yang
 kita hadapi bukanlah satu sistem
 saja tetapi N sistem yang serupa atau $n \rightarrow \sim$. sitem
 yang serupa itu mempunyai parameter makroskopik yang
 sama, seperti persamaan (3.1), suatu kejadian kita
 tandai dengan r , persamaannya menjadi:

$$P_r = \frac{N_r}{N} \quad (3-5)$$

dimana N_r = banyaknya sistem yang menunjukkan
 kejadian r

P_r = adalah kemungkinan untuk kejadian r

N = adalah jumlah sistem yang serupa

Jika sistem dapat menghasilkan dua kejadian yang
 berbeda seperti $r = 1, 2, 3, \dots, \alpha$ dan $s = 1, 2, 3, \dots, \beta$
 kemungkinan kejadiannya,

$$P_{rs} = \frac{N_{rs}}{N} \quad (3-6)$$

dimana

P_{rs} = kemungkinan terjadinya r dan s bersama

Untuk r dan s tak bergantung secara statistik

$$N_{rs} = N_r N_s \quad \text{dan}$$

$$P_{rs} = P_r P_s$$

D. Diskripsi Statistik Sistem Partikel

1. Spesifikasi keadaan sistem

Salah satu unsur penting dalam perumusan statistik kuantum adalah bagaimana cara menentukan spesifikasi keadaan sistem yang dibahas. Sebagai contoh sebuah partikel spin $-\frac{1}{2}$ dalam medan magnet hanya mempunyai dua keadaan yang dapat terjadi:

- a. Spin ke atas, dimana arah momentum sudut spin searah dengan medan magnet \vec{B} . Keadaan ini diberi spesifikasi dengan bilangan kuantum $\sigma = +1$.
- b. Spin ke bawah, dimana arah momentum sudut spin berlawanan dengan momen magnet \vec{B} . Keadaan ini diberi spesifikasi dengan bilangan kuantum $\sigma = -1$

Jika μ_0 adalah momen magnet partikel maka keadaan energi pertamanya adalah $\vec{E}_+ = \mu_0 \vec{B}$ dan energi keduanya adalah $\vec{E}_- = -\mu_0 \vec{B}$.

Contoh-contoh spesifikasi keadaan yang lainnya sebuah partikel dalam kotak satu dimensi, sebuah partikel dalam kotak tiga dimensi, dan N partikel dalam kotak.

Untuk sebuah partikel dalam kotak satu dimensi, kita misalkan partikel itu bermassa m bergerak dalam kotak yang panjangnya L . Menurut mekanika kuantum fungsi keadaan partikelnya adalah:

$$\psi(x) = A \sin Kx$$

dengan syarat batas $\psi(0) = 0$, $\psi(L) = 0$, maka K harus memenuhi : $KL = \pi n$ dengan $n = 1, 2, 3, \dots$

Energi partikel :

$$E = 1/2 m V^2 = P^2/2 m$$

$$E = \frac{\hbar^2 K^2}{2 m}$$

$$E_n = \pi^2 \hbar^2 / 2m n^2 / L^2 \quad (3.7)$$

Kalau sebuah partikel dalam kotak 3 dimensi :

$$\psi = A(\sin K_x x)(\sin k_y y)(\sin k_z z)$$

dengan $K_x = \pi/L_x n_x$

$$K_y = \pi/L_y n_y$$

$$K_z = \pi/L_z n_z$$

Energi sistem ialah :

$$E_{n_x n_y n_z} = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2 m} \left[\frac{n_x^2}{L_x^2} + \frac{n_y^2}{L_y^2} + \frac{n_z^2}{L_z^2} \right] \quad (3.8)$$

N partikel dalam kotak massanya m (yang berinteraksi lemah) atau gas ideal yang terdiri dari N partikel,

mempunyai energi $E = \epsilon_1 + \epsilon_2 + \dots + \epsilon_n$

kalau untuk energi partikel ke i ,

$$\epsilon_i = \epsilon_{n_{ix} n_{iy} n_{iz}}$$

dimana n_{ix} , n_{iy} , dan n_{iz} merupakan bilangan kuantum partikel tersebut. Jadi keadaan sistim dapat dinyatakan oleh 3 N bilangan kuantum :

$$\left\{ n_{ix}, n_{iy}, n_{iz}, \dots, n_{Nx}, n_{Ny}, n_{Nz} \right\}$$

Dari contoh di atas secara ringkas dapat kita katakan bahwa keadaan makroskopik dari sistem dapat dinyatakan dengan spesifikasi keadaan kuantum dari sistem tersebut. Jadi interaksi antara partikel merupakan penyebab transisi dari suatu keadaan yang diperbolehkan ke keadaan yang diperbolehkan lainnya.

2. Ensembel statistik

Ensembel merupakan suatu kumpulan sistem-sistem kecil yang jumlahnya sangat banyak. Sistem-sistem kecil tersebut berupa partikel yang serupa dan mempunyai parameter makroskopik yang sama serta punya spesifikasi sebagai berikut:

- a. Informasi parameter extern, dimana sistem diletakkan dalam medan magnet extern \vec{B} atau medan listrik extern \vec{E} . Informasi lain yang diperlukan ialah ukuran (misalnya ukuran dari kotak L_x , L_y dan L_z). Parameter ini jelas mempengaruhi energi dari partikel.
- b. Informasi penyiapan sistem, dimana cara penyiapan sistem yang akan diamati akan menentukan keadaan

mikro yang diperbolehkan. Cara penyiapan ini dapat membatasi energi total sistem: misalnya sistem selalu berada dalam daerah energi E dan $E+\delta E$ dan jumlah sistem berada diantara N dan $N+\delta N$.

Ensembel ini bisa berupa:

- ensembel mikro kanonik yang mempunyai N , V , E yang sama.
- ensembel kanonik mempunyai N , V tetap.
- ensembel kanonik besar mempunyai V , T , dan μ yang sama.

3. Postulat statistik

Postulat statistik ini berpegang pada postulat yang "a priori" dalam arti bahwa kemungkinan suatu kejadian dapat dihitung sebelum eksperimen dilakukan.

Untuk sistem partikel yang terisolasi, kita mendapatkan keadaan yang diperbolehkan (keadaan tercapai) dengan kemungkinan yang sama, maka sistem tersebut berada dalam keadaan setimbang. Sebaliknya harus berlaku pula, Jika sistem yang terisolasi dalam keadaan setimbang, maka kita mendapatkan keadaan yang diperbolehkan (keadaan tercapai) dengan kemungkinan yang sama.

Jadi kesimpulannya sistem yang terisolasi dalam keadaan diperbolehkan tidak pernah didapati dengan

kemungkinan yang sama, sistem tersebut berada dalam keadaan tidak setimbang. Sistem ini akan mengalami proses sehingga dalam keadaan akhir postulat statistik berlaku.

4. Perhitungan kebolehjadian

Perhitungan kebolehjadian ini dapat ditentukan dengan meninjau ensemble dari N dan postulat statistik. Misalnya kita ingin mengamati parameter y_i dalam keadaan mikro tertentu dari jumlah keadaan mikro yang diperbolehkan. Maka kebolehjadian untuk mengamati parameter y_i tersebut dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$P_i = \frac{\Omega_i}{\Omega} \tag{3-9}$$

dengan

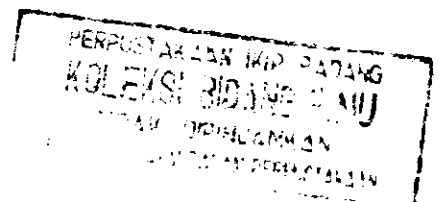
Ω = keadaan mikro yang diperbolehkan

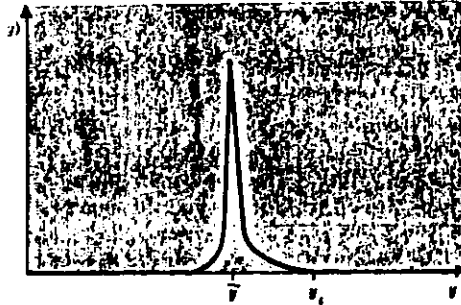
Ω_i = keadaan mikro tertentu untuk mengamati parameter y_i (y_1, y_2, \dots, y_i)

Untuk harga rata-rata parameter y_i (\bar{Y}) adalah,

$$\begin{aligned} \bar{Y} &= \sum_{i=1}^n P_i Y_i \\ &= \frac{1}{\Omega} \sum_{i=1}^n \Omega_i Y_i \end{aligned} \tag{3-10}$$

Harga rata-rata y_i dapat digambar sebagai berikut:





Gambar (3-3)

Harga rata-rata dari parameter y dalam keadaan mikro tertentu dengan keadaan mikro yang diperbolehkan Reif (1988 halaman 90)

5. Jumlah keadaan yang diperbolehkan

Sebagai contoh kita tinjau sistem makroskopik dengan parameter extern tertentu hingga energi sistem berada antara E dan $E + \delta E$. Banyaknya keadaan mikro dengan energi antara E dan $E + \delta E$ adalah $\Omega(E)$, dirumuskan seperti berikut:

$$\Omega(E) = \rho(E) \delta(E) \quad (3-11)$$

dimana $\rho(E)$ adalah kerapatan keadaan atau banyaknya keadaan persatuan energi pada energi E . Kerapatan keadaan ini tak bergantung pada $\delta(E)$.

Untuk energi sistem yang kurang dari E dapat dirumuskan,

$$\begin{aligned} \Omega(E) &= \phi(E + \delta E) - \phi(E) \\ &= -\frac{d\phi}{dE} \delta(E) \end{aligned} \quad (3-12)$$

untuk $\phi(E) =$ banyaknya keadan dengan energi kurang dari E .

6. Sistem yang berinteraksi

Dalam termodinamika interaksi sistem dengan sistem lain dapat mengakibatkan penerimaan kalor dQ , maka sistem dapat melakukan kerja yang memenuhi hukum kekekalan energi

$$dE = dW + dQ \quad (3-13)$$

dipandang dari statistik

$$E = \sum_r P_r E_r \quad (3-14)$$

dimana

P_r = kemungkinan untuk mendapatkan sistem mempunyai energi E_r

Kalau persamaan (3-11) di atas di turunkan diperoleh

$$dE = \sum (P_r dE_r + E_r dP_r) \quad (3-15)$$

terlihat pada persamaan (3-15) suku kedua berhubungan dengan pertukaran energi tanpa mengubah parameter extern (dalam arti E_r tetap) sehingga dapat diinterpretasikan sebagai pertukaran kalor,

$$dQ = \sum_r E_r dP_r \quad (3-16)$$

dan merupakan perubahan energi yang diakibatkan perubahan parameter extern diinterpretasikan sebagai kerja terhadap sistem

$$dW = dE - dQ = \sum_r P_r dE_r \quad (3-17)$$

E. Kontak Termis

Kontak termis adalah sistem yang saling berinteraksi termis misalnya N partikel di tempatkan pada suatu kotak yang terisolasi, kemudian kotak tersebut kita bagi dua bagian yang volumenya sama dengan temperatur berbeda dan dibatasi oleh dinding yang terbuat dari logam (bersifat diatermis). Karena temperatur kotak bagian pertama tidak sama dengan kedua, maka kalor akan mengalir dari kotak yang bertemperatur tinggi ke kotak bertemperatur rendah, kita katakan kedua kotak tersebut berinteraksi termis.

Jadi partikel yang energi kinetik rata-ratanya tinggi akan mengalihkan energinya melalui dinding ke partikel yang energi kinetik rata-ratanya rendah, hingga dalam keadaan akhir energi kinetik rata-ratanya menjadi sama. Ini berarti bahwa tingkat energi sistem tidak berubah, perubahan terjadi pada kemungkinan untuk menempati tingkat energi tersebut.

Selanjutnya kita tinjau dua sistem makroskopik A dan A' . Energi sistem ini ialah E dan E' . Untuk memudahkan perhitungan kita bagi energi tersebut dalam selang δE .

Kita menggunakan notasi $\Omega(E)$ untuk menyatakan keadaan tercapai jika A berenergi antara E dan $E + \delta E$, dan $\Omega'(E')$ menyatakan keadaan tercapai untuk A' dengan energi E' dan $E' + \delta E$.

Sistim A dan A' bebas untuk bertukar energi dengan pembatasan bahwa parameter extern kedua sistim tersebut tidak berubah. Transfer energi berupa kalor. Gabungan kedua sistim tersebut $A^* = AUA'$ terisolasi dengan energi : $E^* = E + E' = \text{konstan}$.

Kemungkinan untuk mendapatkan sistim A berenergi antara E dan $E + \delta E$ ialah :

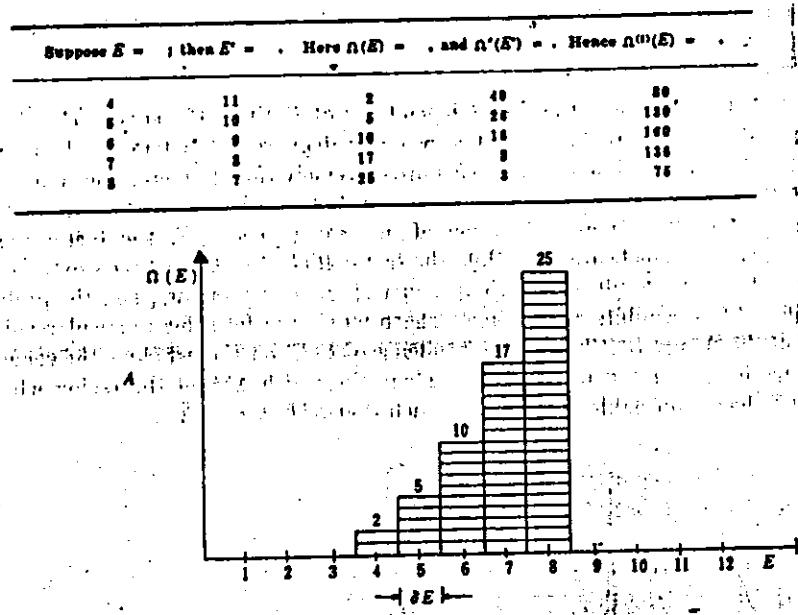
$$P(E) = \frac{\Omega^*(E)}{\Omega^*_{\text{total}}} = C \Omega^*(E) \quad (3-18)$$

dengan

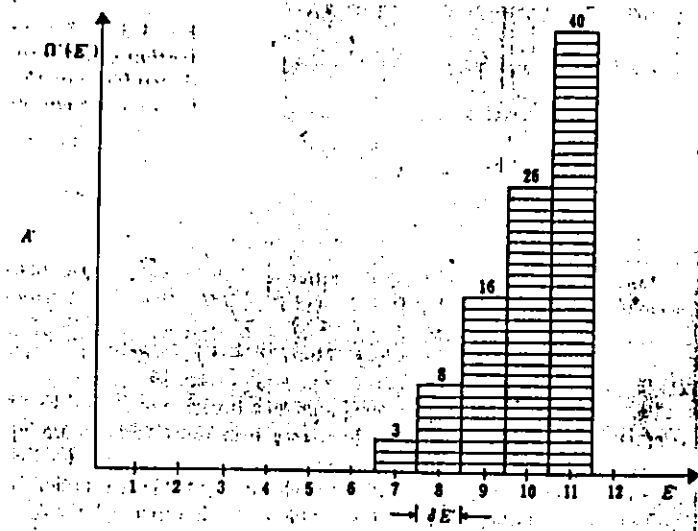
$$C = \frac{1}{\Omega^*} = \text{konstanta yang tidak bergantung E}$$

$\Omega^*(E)$ dapat dinyatakan dengan keadaan tercapai oleh A dan A'. Dari hubungan tersebut didapat :

$$P(E) = C \Omega(E) \Omega'(E^* - E) \quad (3.19)$$



Gambar (3-4)
Fungsi $\Omega(E)$ terhadap energi E
Reif (1988 halaman 97)

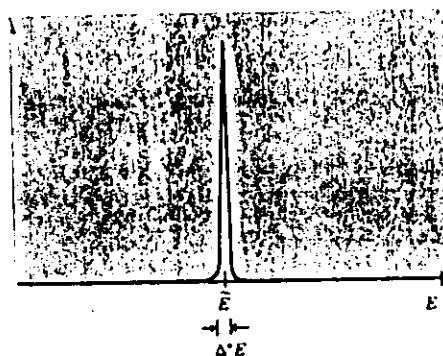


Gambar (3-5)
Fungsi $\Omega'(E')$ terhadap energi E'
Reif (1988 halaman 97)

Dari gambar di atas terlihat bahwa $\Omega(E)$ merupakan fungsi yang naik terhadap energi E , demikian juga $\Omega'(E')$ merupakan fungsi yang naik terhadap E' .

Kita lihat bahwa $P(E)$ merupakan perkalian dari dua fungsi

$\Omega(E)$ yang naik dengan cepat terhadap E dan $\Omega'(E^* - E)$ merupakan fungsi yang turun dengan cepat terhadap E , sehingga $P(E)$ merupakan fungsi yang mempunyai maximum yang sangat tajam, seperti terlihat pada gambar berikut:



Gambar (3-6)
Fungsi kebolehjadian $P(E)$ terhadap energi E
Reif (1988 halaman 98)

Kalau persamaan (3.19) diambil logaritmanya:

$$\ln P(E) = \ln C + \ln \Omega(E) + \ln \Omega'(E')$$

$$\text{dengan } E' = E^* - E.$$

Makimum fungsi di atas tercapai untuk harga $E = E'$ dengan syarat:

$$\frac{\partial(\ln P)}{\partial E} = \frac{1}{P} \frac{\partial P}{\partial E} = 0$$

$$\frac{\partial[\ln \Omega(E)]}{\partial E} + \frac{\partial \ln \Omega'(E')}{\partial E'} (-1) = 0$$

Atau :

$$\beta(E) = \beta'(E')$$

dimana

$$\beta(E) = \frac{\partial \ln \Omega(E)}{\partial E} = \frac{1}{\Omega} \frac{\delta \Omega}{\delta E} \quad (3.20)$$

Jadi $P(E)$ maximum bila $\beta(E) = \beta'(E')$; dan pada saat tersebut $\ln \Omega^* = \ln \Omega + \ln \Omega'$ mencapai maksimum juga. Hal ini mengingatkan pengertian temperatur dan entropi dalam termodinamika. Dua sistim yang berada dalam kontak termis akan mencapai keadaan setimbang pada saat temperaturnya sama dan entropi total maksimum.

$$1/\beta = \tau = k_B T \quad (3.21)$$

τ disebut temperatur dasar. Basaran ini berbanding lurus dengan temperatur mutlak T . k_B disebut konstanta Boltzman.

Dari definisi β :
$$\frac{1}{T} = \frac{k_B \delta \ln \Omega}{\delta E}$$

dengan

$$1/T = \partial S / \partial E$$

$$S = k_B \ln \Omega$$

$$\sigma = k_B^{-1} S = \ln \Omega \quad (3.22)$$

σ disebut entropi dasar.

S adalah entropi dalam termodinamika. Jadi entropi dasar ialah logaritma dari banyaknya keadaan tercapai. Secara singkat dapat kita katakan bahwa dalam keadaan setimbang harga $S^* = S + S'$ maksimum, harga $\sigma^* = \sigma + \sigma'$ maksimum dan $T = T'$ atau $\tau = \tau'$.

Pembahasan untuk bertambahnya entropi, sistem I energinya E_1 , temperaturnya T_1 , dan entropi S_1 , untuk sistem II energinya E_2 , temperatur T_2 dan entropi S_2 .

Jika kedua sistim tersebut berada dalam keadaan kontak termis, dan T_1 lebih tinggi dari T_2 , maka akan ada kalor yang mengalir dari sistim I ke sistim ke II sebesar δE (Positif). Perubahan entropi sistim gabungan (sistim -I) dan (sistim -II) ialah :

$$\delta S = \frac{\partial S_1}{\partial E_1} (-\delta E) + \frac{\partial S_2}{\partial E_2} \delta E$$

$$\delta S = (-1/T_1 + 1/T_2) \delta E \quad (3.23)$$

kalau $T_1 > T_2$ dan δE positif, maka akan δS positif.

Jadi dalam proses pengaliran kalor dari sistim yang bertemperatur tinggi ke sistim yang bertemperatur rendah, perubahan entropi total selalu positif. Hal

ini sesuai dengan Hukum II Thermodinamika.

Selanjutnya untuk bertambahnya energi dengan bertambah tingginya temperatur, dapat diperlihatkan bahwa energi sistem bertambah jika temperaturnya naik. Hal ini sejalan dengan pengertian bahwa S maximum dalam keadaan setimbang.

Tinjau pertukaran energi sebesar $\delta E_1 = -\delta E_2 = -\delta E$ antara dua sistem yang bertemperatur sama yang berada dalam keadaan kontak termis.

$$\begin{aligned}\delta S_1 &= \frac{\partial S_1}{\partial E_1} \delta E_1 + 1/2 \frac{\partial^2 S_1}{\partial E_1^2} (\delta E_1)^2 + \dots \\ \delta S_2 &= \frac{\partial S_2}{\partial E_2} \delta E_2 + 1/2 \frac{\partial^2 S_2}{\partial E_2^2} (\delta E_2)^2 + \dots \quad (3.24)\end{aligned}$$

Perubahan entropi totalnya :

$$\begin{aligned}\delta S &= \delta S_1 + \delta S_2 \\ \delta S &= \left[\frac{\partial S_1}{\partial E_1} \delta E_1 + \frac{\partial S_2}{\partial E_2} \delta E_2 \right] + 1/2 (\delta E)^2 \left[\frac{\partial^2 S_1}{\partial E_1^2} \quad \frac{\partial^2 S_2}{\partial E_2^2} \right] \quad (3.25)\end{aligned}$$

karena temperaturnya sama, maka $\frac{\partial S_1}{\partial E_1} = \frac{\partial S_2}{\partial E_2}$, sehingga suku dalam kurung pertama sama dengan nol.

$$\delta S = - \frac{(\delta E^2)}{2T^2} \left(\frac{\partial T_1}{\partial E_1} + \frac{\partial T_2}{\partial E_2} \right) \quad (3.26)$$

Karena dalam keadaan setimbang S harus maksimum, maka $\delta S < 0$; hal ini dapat dipenuhi jika :

$$\frac{\partial T_1}{\partial E_1} > 0, \quad \frac{\partial T_2}{\partial E_2} > 0. \quad (3.27)$$

Ini berarti bahwa temperatur naik jika energinya naik, atau jika energi naik, maka temperaturnya akan naik juga.

F. Kontak Difusi

Kontak difusi berarti atom atau molekul dari suatu sistem dapat bergerak ke sistem lain melalui proses difusi menembus dinding yang permeabilitas atau membran. Sekarang kita tinjau dua sistem yang berada dalam keadaan kontak difusi dan kontak termis.

Selama proses berlangsung berlaku kekekalan energi dan kekekalan jumlah partikel. Jadi dapat dituliskan :

$$E = E_1 + E_2 = \text{konstan};$$

$$\text{dan } N = N_1 + N_2 = \text{konstan} \quad (3.28)$$

Konfigurasi dengan kemungkinan terbesar terjadi bila perkalian jumlah keadaan tercapai, maksimum yaitu:

$$\Omega_1(N_1, E_1) \Omega_2(N - N_1, E - E_1) \text{ maksimum}$$

Dari persamaan (3.28) kita dapatkan :

$$dN_2 = d(N - N_1) = -dN_1$$

dan $dE_2 = d(E - E_1) = -dE_1,$

sehingga

$$\frac{\partial \Omega_2}{\partial N_2} = - \frac{\partial \Omega_2}{\partial N_1} ; \quad \frac{\partial \Omega_2}{\partial E_1} = - \frac{\partial \Omega_2}{\partial E_2}$$

maka :

$$\left(\frac{1}{\Omega_1} \frac{\partial \Omega_1}{\partial N_1} - \frac{1}{\Omega_2} \frac{\partial \Omega_2}{\partial N_2} \right) dN_2 + \left(\frac{1}{\Omega_2} \frac{\partial \Omega_1}{\partial E_1} - \frac{1}{\Omega_2} \frac{\partial \Omega_2}{\partial E_2} \right) dE_1 = 0 \quad (3.29)$$

entropi dasar didefinisikan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \tau_1 (E_1, N_1) &= \ln \Omega_1(N_1, E_1) ; \\ \tau_2 (E_2, N_2) &= \ln \Omega_2(N_2, E_2). \end{aligned} \quad (3.30)$$

Kondisi kesetimbangan difusi dan kesetimbangan termis dicapai jika :

$$\left(\frac{\partial \tau_1}{\partial E_1} \right)_{N_1} = \left(\frac{\partial \tau_2}{\partial E_2} \right)_{N_2} ; \quad \left(\frac{\partial \tau_1}{\partial N_1} \right)_{E_1} = \left(\frac{\partial \tau_2}{\partial N_2} \right)_{E_2} \quad (3.31)$$

Potensial kimia μ didefinisikan sebagai berikut :

$$-\frac{\mu}{\tau} = \frac{1}{\Omega} \left(\frac{\partial \Omega}{\partial N} \right)_E = \left(\frac{\partial \tau}{\partial N} \right)_E \quad (3.31)$$

Jadi syarat kesetimbangan difusi dan termis dapat ditulis :

$$1/\tau_1 = 1/\tau_2 ; \quad \mu_1/\tau_1 = \mu_2/\tau_2 \quad (3.32)$$

Perubahan entropi dasar untuk $\tau_1 = \tau_2 = \tau$ dapat ditulis juga dalam bentuk sebagai berikut :

$$\delta \tau = \left(\frac{\partial \tau_1}{\partial N_1} \right) \delta N_1 - \left(\frac{\partial \tau_2}{\partial N_2} \right) \delta N_2$$

$$\delta \tau = \left(\mu_1/\tau + \mu_2/\tau \right) \delta N_1 \quad (3.33)$$

Jika mula-mula $\mu_2 > \mu_1$, $\delta \tau$ positif maka terjadi transfer partikel dari sistem -2 ke sistem -1. Dengan perkataan lain : Transfer partikel terjadi dari sistem dengan potensial kimia tinggi ke sistem potensial kimia rendah.



BAB IV HUKUM DISTRIBUSI STATISTIK

A. Distribusi Maxwell-Boltzmann

Pada distribusi Maxwell-Boltzmann ini membahas cara mengatur partikel identik yang dapat dibedakan dengan suatu cara tertentu, juga semua keadaan kuantum dianggap berpeluang sama untuk diisi, sehingga penukaran dua partikel antara kelompok yang berbeda menghasilkan keadaan yang baru.

Oleh sebab itu dalam distribusi Maxwell-Boltzmann ini kumpulan N partikel dapat dibagi menjadi kelompok-kelompok yang terdiri dari $n_1, n_2, n_3, \dots, n_i$, partikel atau

$$\sum n_i = n_1 + n_2 + \dots = N \quad (4.1)$$

Energi untuk kumpulan N partikel tersebut terbatas pada harga $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \dots, \epsilon_i$, dengan energi terendah ϵ_1 . Energi-energi ini dapat menyatakan keadaan kuantum yang diskrit atau energi rata-rata untuk sederetan selang energi, dan lebih dari satu sel dalam ruang fase (ruang dimana suatu titik kedudukan dan momentumnya bersesuaian) dengan energi tertentu. Yang kita cari ialah peluang terbesar dari distribusi partikel diantara berbagai energi yang mungkin.

Suatu anggapan dasar dalam mekanika statistik ialah lebih besar W lebih besar pula peluang distribusi tersebut, dimana W adalah bilangan yang menyatakan

banyaknya cara partikel dapat ditata di antara sel dalam ruang fase untuk menghasilkan distribusi partikel dengan tingkat energi yang berdeda-beda.

Jadi distribusi berpeluang terbesar tentu distribusi dengan W maksimum. Sekarang bagaimana bentuk umum dari W hal penting yang harus dicari terlebih dulu.

Kita anggap bahwa setiap sel dalam ruang fase berpeluang sama untuk diisi, anggpan ini berkemungkinan besar memang terjadi, tetapi pembuktiannya (seperti juga dalam kasus persamaan Schrodinger) didapatkan dari keseimpulan karena cocok dengan hasil eksperimen.

Jika terdapat g_i sel dengan energi ϵ_i , keadaan keseluruhan banyaknya cara partikel memiliki energi tertentu didalam sel tertentu adalah

Nomor keadaan	1	2	3	...
Energi	ϵ_1	ϵ_2	ϵ_3	...
Sel	g_1	g_2	g_3	...
Banyak cara	$g_1^{n_1}$	$g_2^{n_2}$	$g_3^{n_3}$...

Banyak cara total n_i partikel masing-masing berenergi ϵ_i ialah $(g_i)^{n_i}$. Kalau untuk N molekul merupakan perkalian faktor $(g_i)^{n_i}$, yaitu :

$$(g_1)^{n_1} (g_2)^{n_2} (g_3)^{n_3} \dots \quad (4.2)$$

dengan syarat seperti persamaan (4.1).

Untuk mendapatkan harga W kita masih harus memperhitungkan pemutasi yang mungkin dari partikel diantara energi yang berbeda, dengan perkataan lain, N molekul dapat diatur dalam $N!$ urutan berbeda. Sebagai contoh jika kita memiliki empat partikel a,b,c d, berarti ada $4!$ ($4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$) permutasinya, sehingga ada 24 cara mengatur empat partikel tersebut seperti contoh berikut:

abcd	bacd	cabd	dabc
abdc	badc	cadb	dacb
acbd	bcad	cbad	dbac
acdb	bcda	cbda	dbca
adbc	bdac	cdab	dcab
adcb	bdca	cdba	dcba

Gambar (4-1)
4 partikel dalam satu sel ada 24 cara menemukannya
Arthur Beiser (1986 halaman 507)

Untuk partikel yang boleh menempati lebih dari satu tingkat energi, banyaknya cara menemukannya adalah

$$\frac{N!}{n_1!n_2!n_3! \dots} \quad (4.3)$$

Banyaknya cara N molekul dapat didistribusikan diantara tingkat energi yang mungkin ialah perkalian dari persamaan (4.2) dan (4.3)

$$W = \frac{N!}{n_1! n_2! n_3! \dots} (g_1)^{n_1} (g_2)^{n_2} (g_3)^{n_3} \dots \quad (4.4)$$

Untuk menghitung kebolehjadian yang diinginkan, harus dicari distribusi $n_1, n_2, n_3, \dots, n_i$ yang menyebabkan W maksimum.

Pemecahan ini memerlukan aproksimasi analitis yang sesuai untuk faktorial dari suatu bilangan yang besar, karena

$$n! = n(n-1)(n-2)\dots(4)(3)(2)(1)$$

dan

$$\ln n! = \ln 2 + \ln 3 + \ln 4 + \dots + \ln(n-1) + \ln n$$

untuk mendapatkan $\ln n!$ dengan mengintegrasikan $\ln n$ dari $n=1$ hingga $n = n$.

$$\begin{aligned} \ln n! &= \int_1^n \ln n \, dn \\ &= n \ln n - n + 1 \end{aligned}$$

Karena $n \gg 1$, kita dapat mengabaikan 1 dalam hasil diatas, dan kita peroleh :

$$\ln n! = n \ln n - n \quad n \gg 1$$

persamaan ini disebut *rumus Stirling*.

Sehingga logaritma alamiah persamaan (4.4) menjadi:

$$\ln W = \ln N! - \sum \ln n_i! + \sum n_i \ln g_i \quad (4.5)$$

dengan menggunakan rumus Stirling memungkinkan kita menulis persamaan (4.5) sebagai berikut:

$$\ln W = N \ln N - N - \sum n_i \ln n_i + \sum n_i + \sum n_i \ln g_i$$

untuk $\sum n_i = N$,

$$\ln W = N \ln N - \sum n_i \ln n_i + \sum n_i \ln g_i \quad (4.6)$$

Distribusi berpeluang besar terjadi bila:

$$(\ln W)_{\max} = \ln W_{\max}$$

Persyaratan supaya suatu distribusi berpeluang terbesar ialah perubahan kecil δn_i pada setiap n_i tidak mempengaruhi harga W . (Jika n_i variabel malar atau terbatas pada bilangan bulat, kita dapat menyatakan syarat ini dengan cara yang biasa $\partial W / \partial n_i = 0$). Jika perubahan $\ln W$ bersesuaian dengan perubahan n_i yaitu δn_i ialah $\delta \ln W$, dari persamaan (4.6) kita dapatkan,

$$\delta \ln W_{\max} = -\sum n_i \delta \ln n_i - \sum \ln n_i \delta n_i + \sum \ln g_i \delta n_i = 0 \quad (4.7)$$

karena $N \ln N$ konstan, maka

$$\delta \ln n_i = 1/n_i \delta n_i$$

Sehingga

$$\sum n_i \delta \ln n_i = \sum \delta n_i$$

Karena banyaknya molekul total konstan, maka jumlah $\sum \delta n_i$ untuk semua perubahan molekul tiap-tiap tingkat energi harus 0, ini berarti

$$\sum n_i \delta \ln n_i = 0$$

Jadi Persamaan (4.7) menjadi

$$-\sum \ln n_i \delta n_i + \sum \ln g_i \delta n_i = 0 \quad (4.8)$$

Persamaan (4.8) harus dipenuhi oleh distribusi partikel antara tingkat energi, yang berpeluang terbesar, namun persamaan itu sendiri tidak memberi spesifikasi secara lengkap pada distribusi itu. Kita harus memperhitungkan kekekalan jumlah partikel seperti persamaan (4.1) dan kekekalan energi,

$$\sum_i n_i \epsilon_i = n_1 \epsilon_1 + n_2 \epsilon_2 + n_3 \epsilon_3 + \dots = E \quad (4.9)$$

dengan E menyatakan energi total kumpulan partikel itu. Akibatnya variasi $\delta n_1, \delta n_2, \dots$ dari jumlah molekul dalam masing-masing tingkat energi tidak bebas satu terhadap lainnya tetapi harus memenuhi hubungan

$$\sum \delta n_i = \delta n_1 + \delta n_2 + \delta n_3 + \dots = 0 \quad (4.10)$$

$$\sum \epsilon_i \delta n_i = \epsilon_1 \delta n_1 + \epsilon_2 \delta n_2 + \epsilon_3 \delta n_3 + \dots = 0 \quad (4.11)$$

Untuk memasukkan persyaratan nilai berbagai δn_i dalam persamaan (4.8), kita memakai pengali tak tertentu Lagrange yang merupakan alat matematis yang memudahkan. Yang harus kita lakukan ialah mengalikan persamaan (4.10) dengan $-\alpha$ dan (4.11) dengan $-\beta$, α dan β merupakan kuantitas yang bebas dari n_i , dan jumlahkan dengan persamaan (4.8). Kita peroleh

$$\sum (-\ln n_i + \ln g_i - \alpha - \beta \epsilon_i) \delta n_i = 0 \quad (4.12)$$

δn_i secara efektif merupakan variabel bebas. Supaya persamaan (4.12) dipenuhi, kuantitas dalam tanda

kurung harus 0 untuk setiap harga i . Jadi

$$-\ln n_i + \ln g_i - \alpha - \beta \epsilon_i = 0$$

$$n_i = g_i e^{-\alpha} e^{-\beta \epsilon} \quad (4.13)$$

Persamaan (4.13) ini yang dikenal dengan hukum distribusi Maxwell-Boltzmann rumus ini memberi banyaknya molekul n_i yang memiliki energi ϵ_i dinyatakan dalam banyaknya sel dalam ruang fase g_i yang memiliki energi ϵ_i dan kuantitas α serta β .

Kuantitas $e^{-\alpha} e^{-\beta \epsilon}$ dalam persamaan (4.13) menjadi fungsi distribusi $A e^{-\epsilon \beta}$, jika kita ambil $e^{-\alpha} = A$, dan jika $\beta = 1/kT$.

B. Distribusi Bose-Einstein

Distribusi Bose-Einstein ini membahas cara mengatur partikel identik yang tidak dapat dibedakan, walaupun partikel itu dapat dicacah, dan semua keadaan kuantum dianggap berpeluang sama untuk diisi, sehingga g_i menyatakan banyaknya keadaan yang memiliki energi sama ϵ_i . Setiap keadaan kuantum bersesuaian dengan satu sel dalam ruang fase, untuk menentukan banyaknya cara n_i partikel takterbedakan dapat didistribusikan dalam sel g_i . Sebagai contoh menempatkan $n = 2$ partikel dalam 4 sel diterangkan dengan gambar berikut:

o	o		
o		o	
o			o
	o	o	
	o		o
		o	o
oo			
	oo		
		oo	
			oo

Gambar (4-2)

Deretan $n = 2$ partikel tak terbedakan dalam $g = 4$ sel

Dari gambar terlihat banyak partikel tak terbedakan $n_i = 2$, banyaknya sel $g_i = 4$, dan banyak pembatas ($g_i - 1 = 3$). Untuk mencarinya, kita anggap deretan $n_i + g_i - 1$ benda yang diletakkan dalam garis pembatas. Kita perhatikan bahwa $g_i - 1$ benda dapat dianggap sebagai pembatas yang memisahkan g_i selang, sedangkan seluruh deretan menggambarkan n_i partikel yang diatur dalam g_i sel. Dalam gambar itu $g_i = 4$ dan $n_i = 2$; 3 pembatas memisahkan 2 partikel menjadi 4 sel. Sel pertama berisi satu partikel, yang kedua satu partikel, yang ketiga kosong, yang ke-empat kosong, dan seterusnya. Terdapat $(n_i + g_i - 1)!$ permutasi n_i partikel dan $(g_i - 1)!$ permutasi dari $g_i - 1$ pembatas. Jadi terdapat :

$$\frac{(n_i + g_i - 1)!}{n_i!(g_i - 1)!} \quad (4.14)$$

pengaturan berbeda yang mungkin dari n_i partikel tak terbedakan di antara g_i sel.

Banyaknya cara w supaya N partikel dapat didistribusikan ialah perkalian.

$$W = \prod \frac{(n_i + g_i - 1)}{n_i!(g_i - 1)!} \quad (4.15)$$

dari banyaknya pengaturan yang berbeda dari partikel di antara keadaan yang memiliki energi tertentu. Kita anggap

$$(n_i + g_i) \gg 1$$

sehingga $(n_i + g_i - 1)$ dapat diganti dengan $(n_i + g_i)$, dan dengan mengambil logaritma alamiah dari kedua ruas persamaan (4.15), didapatkan :

$$\ln W = \sum [\ln (n_i + g_i)! - \ln n_i! - \ln (g_i - 1)!]$$

Rumus Stirling $\ln n! = n \ln n - n$ memperoleh kita

untuk menulis $\ln W$ sebagai berikut :

$$\ln W = \sum [(n_i + g_i) \ln (n_i + g_i) - n_i \ln n_i - \ln(g_i - 1) - g_i] \quad (4.16)$$

seperti sebelum ini, persyaratan supaya distribusi ini menjadi berpeluang terbesar ialah perubahan kecil δn_i dalam setiap n_i individual tidak mempengaruhi harga W . Jika perubahan $\ln W$ yaitu $\delta \ln W$ terjadi ketika n_i berubah dengan δn_i , persyaratan tersebut dapat ditulis sebagai berikut :

$$\delta \ln W_{\max} = \sum [\ln (n_i + g_i) - \ln n_i] \delta n_i = 0 \quad (4.17)$$

dengan

$$\delta \ln n = 1/n \delta n$$

Seperti sebelumnya kita memasukkan kekekalan jumlah partikel dengan menyatakannya dalam bentuk :

$$\sum \delta n_i = 0$$

dan kekekalan energi, dalam bentuk

$$\sum \varepsilon_i \delta n_i = 0$$

dengan mengalikan persamaan yang terdahulu dengan $-\alpha$ dan yang kemudian dengan $-\beta$ dan menembarkannya pada persamaan (4.17), kita dapatkan

$$\sum [\ln (n_i + g_i) - \ln n_i - \alpha - \beta \varepsilon_i] \delta n_i = 0$$

Karena secara efektif δn_i bebas, maka kuantitas dalam tanda kurung harus nol untuk setiap harga i . Jadi

$$\ln \frac{n_i + g_i}{n_i} - \alpha - \beta \varepsilon_i = 0$$

$$1 + g_i/n_i = e^\alpha e^{\beta \varepsilon_i}$$

dan
$$n_i = \frac{g_i}{e^\alpha e^{\beta \varepsilon_i} - 1}$$

Karena $\beta = 1/kT$, maka kita dapatkan hukum distribusi Bose-Einstein seperti berikut:

$$n_i = \frac{g_i}{e^\alpha e^{\varepsilon_i/kT} - 1}$$

C. Distribusi Fermi-Dirac

Statistik Fermi-Dirac membahas cara mengatur partikel takterbedakan yang sesuai dengan prinsip eksklusi. Penurunan rumus mengenai hukum distribusi Fermi-Dirac akan sama dengan hukum distribusi Bose-Einstein kecuali pada distribusi ini setiap sel

(yaitu, keadaan kuantum) dapat diisi paling banyak satu partikel.

Jika ada g_i sel yang berenergi sama ϵ_i dan ada n_i partikel, maka n_i sel terisi tetapi ada $n_i!$ permutasi dari sel terisi diantara mereka yang tak relevan karena partikel itu tak terbedakan dan $(g_i - n_i)!$ permutasi sel kosong di antara mereka yang tak relevan karena sel itu tidak ada isinya. Jadi banyaknya pengaturan partikel diantara sel ialah :

$$\frac{g_i}{n_i!(g_i - n_i)!}$$

Peluang W dari seluruh distribusi partikel ialah perkalian :

$$W = \prod \frac{g_i}{n_i!(g_i - n_i)!}$$

Dengan mengambil logaritma alamiah dari kedua ruas,

$$\ln W = \sum [\ln g_i! - \ln n_i! - \ln(g_i - n_i)!]$$

kemudian dengan memakai rumus Stirling $\ln n! = n \ln n - n$ kita dapat menuliskannya dalam bentuk :

$$\ln W = \sum \left[g_i \ln g_i - n_i \ln n_i - (g_i - n_i) \ln (g_i - n_i) \right]$$

Supaya distribusi ini menyatakan peluang terbesar, perubahan kecil δn_i dari setiap n_i individual harus tidak merubah W . Jadi :

$$\delta \ln W_{\max} = \sum [-\ln n_i + \ln (g_i - n_i)] \delta n_i = 0$$

Kita memperhitungkan kekekalan jumlah partikel dan kekekalan energi dengan menambahkan : $-\alpha \sum \delta n_i = 0$ dan

$$-\beta \sum \epsilon_i \delta n_i = 0$$

sehingga

$$\sum [-\ln n_i + \ln (g_i - n_i) - \alpha - \beta \epsilon_i] \delta n_i = 0$$

karena δn_i secara efektif bebas, kuantitas dalam tanda kurung harus nol untuk setiap i , sehingga :

$$\ln \frac{g_i - n_i}{n_i} - \alpha - \beta \epsilon_i = 0$$

$$n_i = \frac{g_i}{e^{\alpha} e^{\beta \epsilon_i} + 1}$$

Substitusi $\beta = 1/kT$, menghasilkan hukum distribusi Fermi-Dirac sebagai berikut:

$$n_i = \frac{g_i}{e^{\alpha} e^{\epsilon_i/kT} + 1}$$

D. Membandingkan Distribusi Maxwell-Boltzmann (M-B), Bose-Einstein (B-E), dan Fermi-Dirac (F-D)

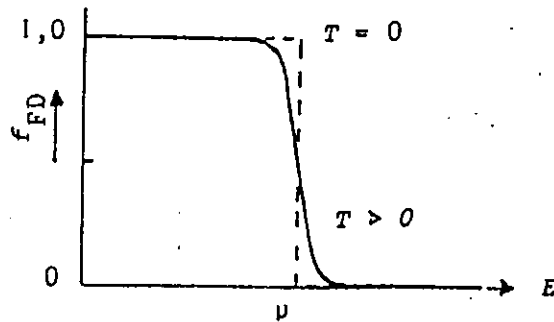
Kebolehjadian pengisian satu keadaan misalnya pada energi ϵ_s sebagai nilai rata-rata pengisian keadaan-keadaan dikelompok yang bersangkutan.

$$\bar{n}_s \equiv \frac{n_i}{g_i}$$

Ketiga fungsi distribusi dapat ditulis :

Fermi Dirac

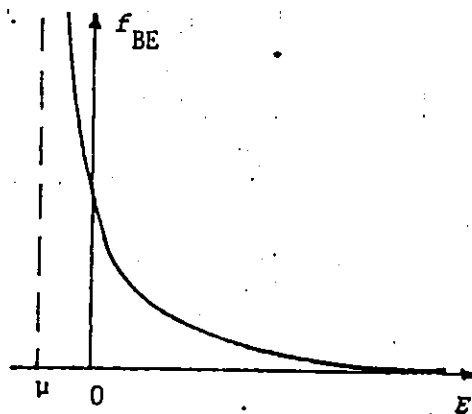
$$f_{F-D} = \bar{n}_s = \frac{1}{e^{\alpha + \beta \epsilon_s} + 1} \quad (4.18)$$



Gambar (4-3)
Distribusi Fermi Dirac
D.R.M.Mills (1984 halman 80)

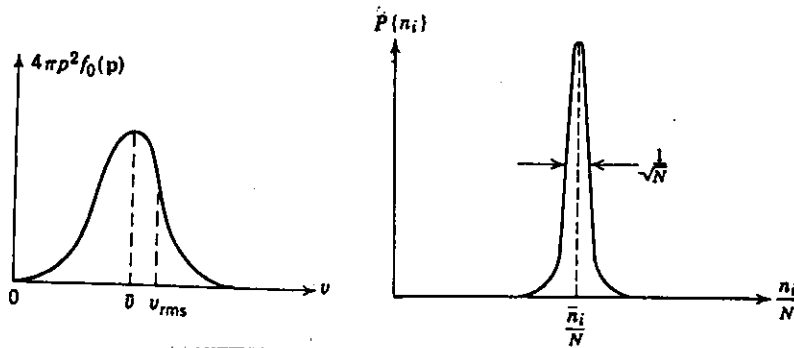
Bose Einstein

$$f_{B-E} = \bar{n}_s = \frac{1}{e^{\alpha + \beta \epsilon_s} - 1} \quad (4.19)$$



Gambar (4-4)
Distribusi Bose Einstein
D.R.M.Mills (1984 halman 81)

$$\text{Maxwell Boltzmann } f_{M-B} = \bar{n}_s = \frac{1}{e^{\alpha + \beta \epsilon_s}} \quad (4.20)$$



Gambar (4.5)
Distribusi Maxwell Boltzmann
Kerson Huang (1987 halman 78 dan 85)

Dari rumus-rumus dan gambar di atas nampak bahwa pada energi yang cukup tinggi, distribusi Maxwell Boltzmann menjadi pendekatan yang cukup baik untuk distribusi Fermi Dirac maupun Bose-Einstein. Pada energi tinggi ternyata $\beta \epsilon_s \gg 1$ dan kebolehjadian $\bar{n}_s \ll 1$.

Perlu diingat bahwa untuk distribusi F-D dan B-E, parameter β masih merupakan konstanta yang harus dicari, yang berasal dari metode pengali Lagrange. Telah ditunjukkan bahwa dalam distribusi Maxwell-Boltzmann, $\beta = 1/kT$. Karena pada energi tinggi, distribusi B-E dan F-D menjadi sama dengan distribusi M-B, maka jelas bahwa konstanta β harus identik dengan $1/kT$ pada ketiga

karena \bar{n}_s harus positif maka dari persamaan f_{B-E} jelas bahwa $\mu < \epsilon_s$ untuk semua aras sistem yang bersangkutan. Lagi pula pada suhu rendah partikel-partikel akan semakin berkumpul di tingkat energi yang terendah. Ada suatu gejala yang disebut Kondensi Bose-Einstein, dimana, jika sistim boson didinginkan di bawah suatu suhu tertentu T_C , terjadilah suatu transisi fase. Pada He^4 , $T_C = 4,2$ K dan dibawah suhu ini sifat-sifat cairan He^4 menyimpang "superfluidity", dimana viskositas (kekentalan) menjadi nol. Teorinya terlalu ruwet untuk dibahas disini. Namun kecenderungan sistem boson untuk menarik partikel lebih banyak ke dalam aras yang sudah berisi partikel, adalah hal yang cukup menarik, dibandingkan dengan sistem Fermion dimana seolah-olah partikel ditolak dari tingkat energi yang sudah terisi. Seandainya pada suhu rendah semua N berada di tingkat terendah ($\epsilon = 0$),

$$\bar{n}_s = \frac{1}{e^\alpha - 1} = N$$

sehingga,

$$\begin{aligned} \mu &= -kT\alpha = -kT \ln(1 + 1/N) \\ &= -kT/N \end{aligned}$$

Karena N besar, dapat disimpulkan bahwa μ sangat atas terendah, $\epsilon = 0$.

Handwritten text, possibly a signature or date, located in the bottom left corner of the page. The text is illegible due to blurriness and low contrast.

distribusi. Perbedaan antara ketiga distribusi paling besar pada energi rendah.

Pada umumnya konstanta α harus ditentukan untuk setiap sistim dengan menggunakan syarat,

$$N = \sum_i n_i = \sum g_i f_x(\epsilon_i)$$

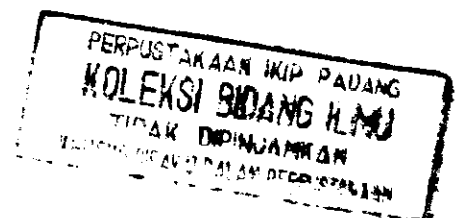
dimana f_x = fungsi distribusi yang bersangkutan. Untuk sistim Fermi-Dirac dan Bose-Einstein, tidak ada penyelesaian umum secara analitik dan harus dipakai metode numerik, akan tetapi untuk statistik Maxwell-Boltzmann penentuan α tidak sulit.

Bentuk distribusi Fermi Dirac mudah ditentukan untuk suhu rendah (β besar). Dengan mendefinisikan $\alpha \equiv -\mu/kT$, diperoleh :

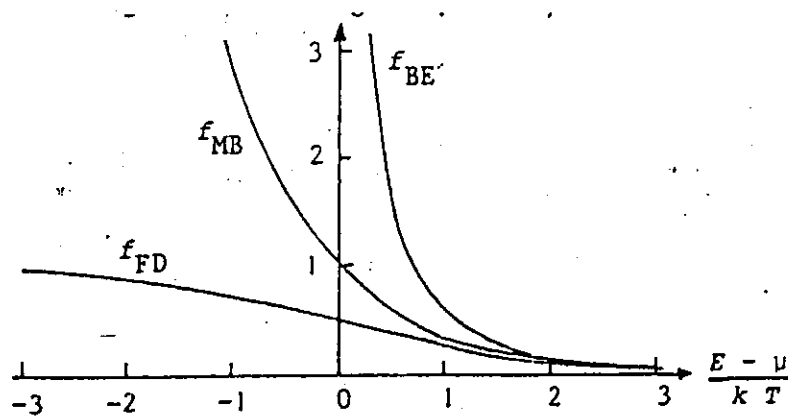
$$f_{F-D} = \bar{n}_s = \frac{1}{1 + \exp.(\epsilon_s - \mu) / kT}$$

Pada $T = 0$ untuk ($\epsilon_s > \mu$, $n_s = 0$) dan untuk ($\epsilon_s < \mu$, $n_s = 1$) seperti terlihat di gambar (4.3). Pada $T > 0$, kurva menyimpang dari fungsi disekitar $\epsilon_s = \mu$. Jelas bahwa distribusi ini memenuhi syarat $\bar{n}_s \leq 1$ yang berlaku untuk fermion. Nilai μ pada suhu rendah sama dengan tingkat energi tertinggi yang terisi, dan energi itu yang didefinisikan sebagai tingkat energi Fermi dalam logam.

Untuk distribusi Bose-Einstein, kebolehjadian f_{B-E} semakin besar bila energi semakin rendah, sehingga kelihatan berbeda sekali dari distribusi F-D. Oleh



Dari rumus-rumus untuk distribusi F-D dan B-E kiranya jelas bahwa $\bar{n}_\epsilon \ll 1$ bila $e^{\alpha} \gg 1$. Ini merupakan syarat agar distribusi F-D atau B-E praktis dapat diganti dengan distribusi M-B. Gambar (4-6) berikut ini menunjukkan ketiga distribusi sekaligus berpusatkan μ .



Gambar (4-6)
Membandingkan ketiga distribusi , F-D, B-E dan M-B.
D.R.M.Mills (1984 halman 81)

Terlihat pada gambar (4-6) perbandingan ketiga fungsi distribusi untuk $\alpha = -1$. Jelaslah $f_{BE}(\epsilon)$ untuk boson selalu lebih besar dari molekul pada suatu harga ϵ/kT tertentu, dan $f_{FD}(\epsilon)$ untuk fermion selalu lebih kecil.

Dari persamaan (4.18) kita lihat bahwa $f_{FD}(\epsilon) = \frac{1}{2}$ untuk energi:

$$\epsilon_F = -\alpha kT$$

Energi ini disebut energi Fermi, yang merupakan suatu kuantitas yang sangat penting dalam sistim formion, seperti elektron dalam logam. Dinyatakan dalam $\epsilon_F =$ fungsi distribusi Fermi-Dirac menjadi

$$f_{FD}(\epsilon) = \frac{1}{e^{(\epsilon - \epsilon_F)/kT} + 1}$$

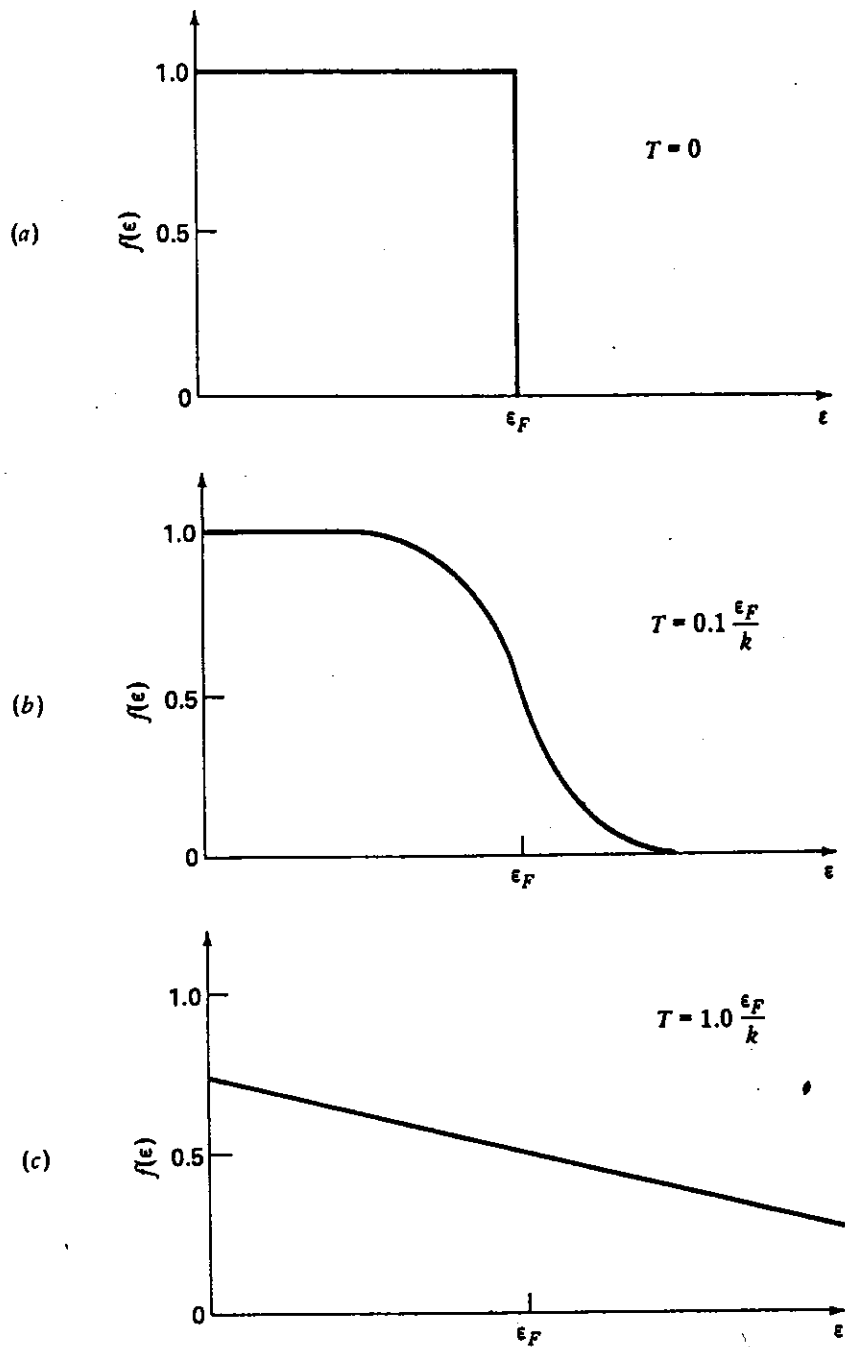
marilah kita tinjau sistem fermion pada $T=0$ dan kita periksa isi keadaan yang energinya kurang dari ϵ_F dan yang energinya lebih dari ϵ_F . Kita dapatkan :

$$T = 0, \epsilon < \epsilon_F$$

$$f_{FD}(\epsilon) = \frac{1}{e^{(\epsilon - \epsilon_F)/kT} + 1} = \frac{1}{e^{-\infty} + 1} = \frac{1}{0+1} = 1$$

$$T = 0, \epsilon > \epsilon_F$$

$$f_{FD}(\epsilon) = \frac{1}{e^{(\epsilon - \epsilon_F)/kT} + 1} = \frac{1}{e^{\infty} + 1} = 0$$



Gambar (4-7)
 Distribusi Fermi Dirac pada
 tiga temperatur yang berbeda
 Arthur Beiser (1986 halman 294)

Terlihat pada gambar (4-7) (a) di atas pada harga nol semua keadaan energi sampai ϵ_F terisi, dan di atas ϵ_F kosong. Jika sistemnya terdiri dari N fermion, kita dapat menghitung energi Fermi dengan mengisi keadaan energinya dengan N partikel dalam urutan pertambahan energi mulai dari $\epsilon = 0$. Keadaan teratas yang terisi harus berenergi $\epsilon = \epsilon_F$.

Ketika temperaturnya dinaikkan di atas $T = 0$, tetapi kT masih jauh lebih kecil dari ϵ_F , fermion akan meninggalkan keadaan yang berada sedikit dibawah ϵ_F untuk pindah ke keadaan yang berada sedikit diatasnya seperti dalam gambar (4-7) (b). Pada temperatur yang lebih tinggi lagi, bahkan fermion dari keadaan terendah akan mulai tereksitasi ke keadaan yang lebih tinggi, sehingga $f_{FD}(0)$ akan turun dibawah 1. Dalam situasi ini $f_{FD}(\epsilon)$ akan mengambil bentuk seperti dalam gambar (4-7) (c) yang bersesuaian dengan kurva terbawah dalam gambar (4-3)

Sifat ketiga fungsi distribusi ini dirangkum dalam tabel 4.1. Harus diingat untuk mendapatkan bilangan sebenarnya $n(\epsilon)$ dari partikel berenergi ϵ , fungsi $f(\epsilon)$ harus dikalikan dengan banyaknya keadaan $g(\epsilon)$ dengan energi tersebut :

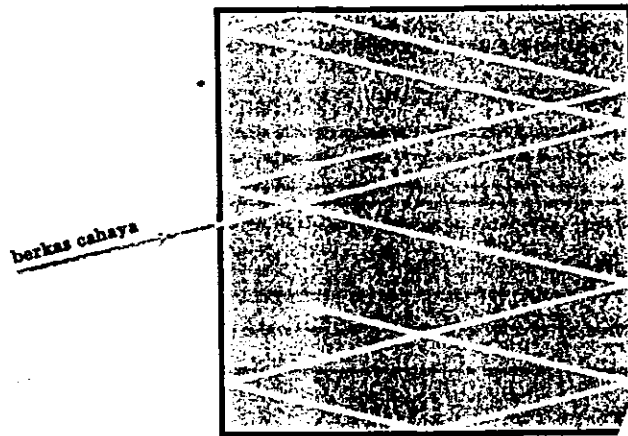
$$n(\epsilon) = g(\epsilon)f(\epsilon)$$

Tabel 4.1
Sifat fungsi distribusi untuk M-B, B-E, dan F-D
Arthur Beiser (1986 halaman 295)

TABEL 9.1 KETIGA FUNGSI DISTRIBUSI STATISTIK			
	MAXWELL-BOLTZMANN	BOSE-EINSTEIN	FERMI-DIRAC
Dapat diterapkan untuk sistem	Identik, partikel terbedakan	Identik, partikel tak terbedakan yang tidak memenuhi prinsip eksklusi	Identik, partikel tak terbedakan dan memenuhi prinsip eksklusi
Kategori partikel	Klasik	Boson	Fermion
Sifat partikel	Setiap spin, partikel berjarak cukup berjauhan sehingga fungsi gelombang tidak bertumpang-tindih	Spin 0, 1, 2, ... ; fungsi gelombang-nya simetrik terhadap pertukaran label partikel	Spin $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots$; fungsi gelombang antisimetrik terhadap pertukaran label partikel
Contoh	Molekul gas	Foton dalam rongga; fonon dalam zat padat; helium cair pada temperatur rendah	Elektron bebas dalam logam; elektron dalam bintang yang atomnya telah ambruk (bintang kerdil putih).
Fungsi distribusi (jumlah partikel pada setiap keadaan berenergi ϵ pada temperatur T).	$f_{MB}(\epsilon) = Ae^{-\epsilon/kT}$	$f_{BE}(\epsilon) = \frac{1}{e^{\epsilon/kT} - 1}$	$f_{FD}(\epsilon) = \frac{1}{e^{\epsilon/kT} + 1}$
Sifat distribusi	Tidak ada batas pada jumlah partikel per keadaan	Tidak ada batas pada jumlah partikel per keadaan; lebih banyak partikel per keadaan dari f_{MB} pada energi rendah; mendekati f_{MB} pada energi tinggi	Tidak lebih dari satu partikel per keadaan; lebih sedikit jumlah partikel per keadaan dari f_{MB} pada energi rendah; mendekati f_{MB} pada energi tinggi

BAB V CONTOH PEMAKAIAN STATISTIK KUANTUM

Penjelasan metoda statistik kuantum yang dijelaskan di atas dapat diterapkan pada hal yang menarik dan penting, yaitu radiasi termal atau radiasi benda hitam. Disini radiasi dipandang sebagai partikel-partikel yang dinamakan foton, yang berada dalam keadaan setimbang termal. Semua benda memancarkan radiasi termal yang bergantung pada suhunya, akan tetapi tidak selalu berada dalam keadaan setimbang termal. Untuk memperoleh radiasi yang setimbang pada suhu tertentu, biasanya dibuat suatu rongga yang tertutup pada suhu T yang merata, dan radiasi diboletkan keluar melalui suatu lobang yang sangat kecil dibandingkan dengan ukuran rongga, seperti gambar (5-1) berikut ini:



Gambar (5-1)

Lubang pada dinding dari benda berongga merupakan aproksimasi yang baik dari benda hitam

Arthur Beiser (1986 halaman 297)

Radiasi yang keluar mempunyai sifat yang identik dengan radiasi benda hitam. Distribusi dari rapat energi (distribusi intensitas) terhadap frekuensi atau riak gelombang menjadi masalah pokok dalam perkembangan teori kuantum yang akhirnya dipecahkan oleh Max. Plank.

Foton merupakan partikel boson karena spinnya adalah $1\hbar$, sehingga akan sesuai dengan distribusi Bose-Einstein. Juga perlu diingat bahwa tidak ada interaksi antar foton, yang juga dapat dilihat dari kelinieran persamaan-persamaan Maxwell, sehingga pembahasan-pembahasan di atas masih berlaku. Akan tetapi ada suatu hal yang baru disini, bahwa jumlah foton didalam sistem (rongga dan lain-lain) tidak konstan foton-foton terus-menerus diciptakan dan dipancarkan, juga diserap pada dinding rongga. Jumlah foton sesaat tidak konstan melainkan berfluktuasi di sekitar suatu nilai rata-rata yang bergantung pada keadaan keseimbangan sendiri. Ini berarti bahwa di dalam jabaran persamaan distribusi Bose-Einstein di atas, syarat bahwa N konstan, tidak dipakai, sehingga di dalam metode penggali Lagrange, tidak terpakai parameter α , dan hasil jabaran dari pers. (4.16) menjadi

$$n_s = f_{B-E}, \text{ foton} = \frac{1}{e^{\beta \epsilon_s} - 1} \quad (\text{untuk foton})$$

Sekarang Hukum Planck dapat diturunkan. pertama-tama perlu diketahui jumlah keadaan yang mempunyai energi antara ϵ dan $\epsilon + d\epsilon$, dan untuk gelombang mempunyai frekuensi sudut antara ω dan $\omega + d\omega$, yang merambat dalam rongga volume V , dan punya dua mode polarisasi, diperoleh jumlah keadaan

$$2 g(\omega) d\omega = \frac{V \omega^2}{\pi^2 c^3} d\omega$$

dimana c adalah kecepatan cahaya. Maka jumlah foton dalam range ω sampai dengan $\omega + d\omega$ diberi dengan

$$\begin{aligned} dN_\omega &= 2g(\omega) d\omega \cdot f_{B-E}, \text{ foton} \\ &= \frac{V \omega^2 d\omega}{c^3 \pi^3 (\exp \beta h \omega - 1)} \end{aligned}$$

di mana energi foton $E = h \omega$. Energi radiasi dalam range frekuensi tersebut adalah :

$$d\epsilon_\omega = h \omega \cdot dN_\omega$$

dan karena radiasi seluruh volum V secara merata, maka rapat energi radiasi diberi dengan :

$$\rho_\omega d\omega = \frac{d\epsilon_\omega}{V} = \frac{h \omega^3 d\omega}{\pi^2 c^3 (\exp \beta h \omega - 1)}$$

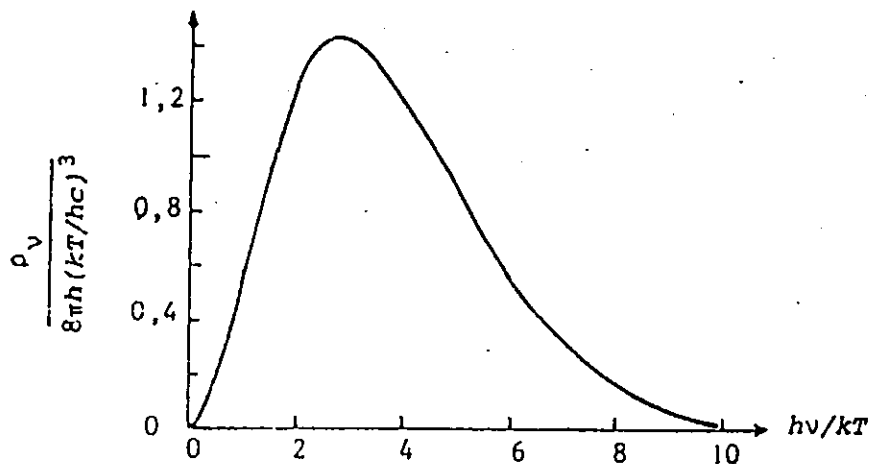
Persamaan ini adalah Hukum Radiasi Planck, yang juga

dapat ditulis sebagai fungsi $\nu = \omega / 2\pi$, dan riak gelombang $\lambda = c/\nu$:

$$\rho_\nu d\nu = \frac{8 \pi h \nu^3 d\nu}{c^3 [\exp(h\nu/kT)-1]}$$

$$\rho_\lambda d\lambda = \frac{8 \pi c h}{\lambda^5 [\exp (hc/\lambda kT) - 1]}$$

Gambar (5-1) berikut ini menunjukkan bentuk distribusi Planck dengan memakai ordinat dan absis yang ternormalisasi.



Gambar (5.2)

Distribusi radiasi benda hitam menurut Hukum Planck.
D.R.M.Mills (1984 halman 86)

Untuk contoh selanjut mari kita ambil sebuah sistem dari 5 osilator harmonik , semuanya dengan sifat yang sama dan frekuensi ν , yang mana diikat satu sama

lain dengan hubungan yang lemah. Fungsi gelombangnya adalah $\psi(a)\psi(b)\psi(c)\psi(d)\psi(e)$ dapat digunakan untuk menyusun perkiraan fungsi gelombang pada sistem dengan metode variasi konstan. Disini $\psi(a), \dots$ lambangkan fungsi gelombang osilator harmonik, huruf a,b,c,d,e menunjukkan koordinat dari 5 osilator, untuk setiap osilator punya seperangkat fungsi $\psi_{n_a}(\omega)$ dengan nilai 0, 1, 2, ... untuk nomor kuantum n_a . Total energi vibrasi (unperturbed) dari sistem adalah :

$$W_n^0 = (n_a + 1/2)h\nu + \dots + (n_e + 1/2)h\nu$$

$$= (n + 5/2)h\nu,$$

dimana $n = n_a + n_b + n_c + n_d + n_e$.

Sebagai contoh perlakuan variasi konstan menunjukkan bahwa kalau sistem satu waktu diketahui mempunyai sebuah energi total disekitar W_n^0 , dimana n' adalah nilai kuantum, kemudian fungsi gelombang dapat dinyatakan $n = n'$, fungsi gelombang untuk n tidak sama dengan n' , membuat kontribusi dapat diabaikan dimana hubungannya bersifat lemah. Mari kita umpamakan bahwa sistem mempunyai energi sekitar $12,5 h\nu$, dimana n' sama dengan 10. Hasil hubungan fungsi gelombang pada nilai dari n' adalah ditampilkan oleh 1001 nilai-nilai dari bilangan kuantum n_a, \dots, n_e seperti terlihat pada tabel 5-1 berikut ini.

probabilitas (kebolehjadiaannya) digambarkan sebagai berikut:

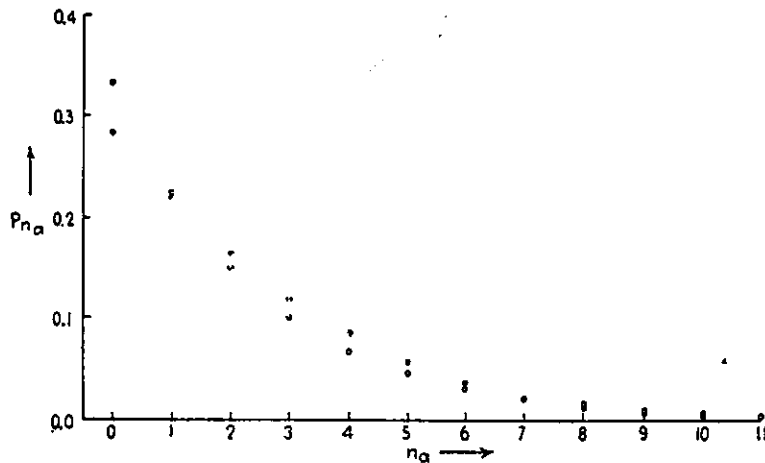


FIG. 49-1.—The probability values P_{n_a} for system-part a in a system of five coupled harmonic oscillators with total quantum number $n = 10$ (closed circles), and values calculated by the Boltzmann distribution law (open circles).

Gambar (5-3)
Linus Pauling (1981 halaman 399)

Beberapa pemakaian statistik kuantum telah disebutkan dan selanjutnya dapat diperluas pemakaiannya. Pemakaian distribusi klasik atau distribusi Maxwell-Boltzmann antara lain adalah:

- Menghitung energi total gas ideal untuk satu atom
- Menentukan potensial kimia
- Mencari entropi
- Menentukan kapasitas kalor, dan lain-lain.

Untuk pemakaian distribusi Fermi-Dirac adalah:

- Menentukan kerapatan keadaan
- Menentukan energi dan kapasitas kalor gas elektron
- dan lain-lain.

Pemakaian distribusi Bose-Einstein adalah:

- Mencari distribusi foton
- Menentukan entropi osilator harmonik
- Menentukan kerapatan modus foton
- Hukum radiasi M. Plank
- Fonon dalam zat padat
- Hukum Debye T^3
- dan lain-lain.

BAB VI. PENUTUP

Pada Bab VI Penutup ini dapat dibuat kesimpulan dari pembahasan Bab-bab sebelumnya :

1. Distribusi Maxwell Boltzmann dapat diterapkan untuk sistim yang identik, partikel terbedakan, dengan katagori partikel klasik serta sifat partikel spin, partikel berjarak cukup berjauhan sehingga fungsi gelombang tidak bertumpangan. Sebagai contoh molekul gas. Fungsi distribusi : $f_{MB}(\epsilon) = Ae^{-\epsilon/kT}$ dengan sifat distribusi tidak ada batas pada jumlah partikel per keadaan.

2. Fungsi distribusi Bose Einstein dapat diterapkan untuk sistem identik, partikel tak terbedakan yang tidak memenuhi prinsip eksklusi, dengan katagori partikel Boson. Sebagai contohnya foton dalam rongga; fonon dalam zat padat; helium cair pada temperatur rendah. Fungsi distribusinya adalah :

$$f_{BE}(\epsilon) = \frac{1}{e^{\alpha} e^{\epsilon/kT-1}}$$

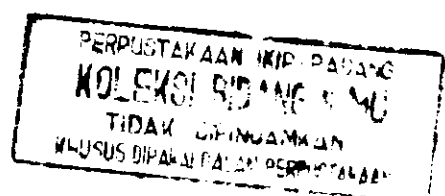
Sifat distribusi Bose Einstein tidak ada batas pada jumlah partikel per keadaan; lebih banyak partikel per keadaan dari f_{MB} pada energi rendah; mendekati f_{MB} pada energi tinggi.

3. Distribusi fungsi Fermi Dirac dapat diterapkan untuk sistem identik, partikel tak terbedakan dan memenuhi

prinsip eksklusi. Katagori partikel fermion dengan sifat partikel spin $1/2, 3/2, 5/2, \dots$; fungsi gelombang antisimetrik terhadap pertukaran label partikel. Contohnya antara lain elektron bebas dalam logam; elektron dalam bintang yang atomnya telah ambruk. Fungsi distribusi : $f_{FD}(\epsilon) = \frac{1}{e^{(\epsilon - \epsilon_f)/kT} + 1}$

Sifat distribusi Fermi Dirac adalah tidak lebih dari satu partikel per keadaan, lebih sedikit jumlah partikel per keadaan dari f_{MB} pada energi rendah; mendekati f_{MB} pada energi tinggi.

4. Pemakaian distribusi Maxwell bolttzmann, Bose Einsteins dan Fermi Dirac antara lain pada : radiasi benda hiam, osilator harmonik, menghitung energi tttotal gas ideal, menenttttukan potensial kimia, mencari entropi, menentukan kapasitas kalor, menenukan kerapatan keadaan, mencari disribusi foton, dan lain-lain.



DAFTAR PUSTAKA

- Beiser, Arthur (1986). Concepts of Modern Physics. Terjemahan : The Houw Liong. Erlangga. Jakarta.
- Boas, Mary, L (1983). Mathematical Methods in the Physical Sciences. Second edition. John Wiley & Son. New York.
- Daniels, Alberty (1988). Kimia Fisika. Kimia FPMIPA ITB Bandung.
- Gasirowicz, Stephen (1974). Quantum Physics. Jhon Wiley & Sons. New York.
- Huang, Kerson (1987). Statistical Mechanics. John Wiley & sons. New York.
- Hzykson, Claude (1986). Quantum Field Theory. Mc. Graw-Hill. Auckland.
- Mills, D.R.M. (1987). Pengantar Mekanika Statistik dan Termodinamika. Fisika FPMIPA USU Medan.
- Murjono. (1989). Fisika Kuantum. Fisika ITB Bandung.
- Pauling, Linus. (1981). Introduction to Quantum Mechanics. Mc.Graw-Hill. Auckland.
- Reif, Federick. (1985). Fundamentals of Statistical and Thermal Physics. Mc.Graw-Hill. Auckland.
- Schiff, Leonard I. (1968). Quantum Mechanics. Mc.Graw-Hill. Auckland.
- Soepangkat, P.Hariadi.(1988). Fisika Kuantum. Fisika FPMIPA ITB Bandung.
- Soepangkat, P.Hariadi. (1988). Fisika Moderen. Fisika FPMIPA ITB Bandung.
- Tarasov, L.V. (1986). Basic Concepts of Quantum Mechanics. MIR Publishers. Moskow.