

# DASAR-DASAR METODA GAYABERAT

MILIK PERPUSTAKAAN IKIP PD	
DITERIMA TGL. :	September '98
SUMBER / HARGA :	H /
KOLEKSI :	K
NO. INVENTARIS :	1001 / K / 98 - d 2 / 2
KLASIFIKASI :	531.14 PaU d 2



Oleh

Drs. Ahmad Fauzi, MSi

Drs. Ibnu Suud, MPd

## JURUSAN PENDIDIKAN FISIKA

FAKULTAS PENDIDIKAN DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

INSTITUT KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN PADANG

1998

MILIK UPT PERPUSTAKAAN  
IKIP PADANG

## KATA PENGANTAR

Syukur Alhamdulillah kami panjatkan kehadiran Allah Yang Maha Kuasa, karena berkat Ridho-Nya jualah kami dapat merampungkan buku ini yang diberi judul "DASAR-DASAR METODA GAYABERAT". Buku ini dapat digunakan sebagai buku penunjang dalam matakuliah "Metoda Gayaberat dan Magnetik" pada Program Studi Fisika Murni di Jurusan Pendidikan Fisika FPMIPA IKIP Padang.

Secara garis besar buku ini berisikan efek gayaberat terhadap benda-benda yang ada disekitar kita. Batu akan kembali ke bumi bila dilempar ke atas sekuat tenaga. Pita karet atau pegas akan bertambah panjang bila pada ujungnya digantungkan suatu beban. Peristiwa semacam ini menunjukkan bahwa efek gayaberat selalu bekerja pada benda-benda yang berada di dekat permukaan bumi. Berdasarkan pemahaman yang mendalam terhadap peristiwa ini, orang dapat merumuskannya dalam bentuk suatu metoda standar yang disebut metoda gayaberat. Metoda ini dipilih karena kemampuannya dalam membedakan rapat massa suatu material terhadap material lainnya. Berdasarkan perbedaan rapat massa, metoda ini banyak digunakan sebagai penyelidikan pendahuluan dalam eksplorasi minyak bumi dan mineral.

BAB I dari buku berisikan faktor-faktor yang mempengaruhi nilai gayaberat pada suatu titik di permukaan bumi. Pada BAB II, diturunkan efek gayaberat dari benda-benda sederhana seperti bola, batang tipis horizontal, batang tipis vertikal, silinder horizontal, silinder vertikal dan pendekatan sesar. Sedangkan teknik pengukuran dan reduksi data dibahas dalam BAB III dan teknik interpretasinya dibahas pada BAB IV. Buku ini ditutup dengan satu contoh tentang cara menafsirkan data gayaberat menggunakan model benda sederhana.

Dalam penyusunan buku ini, kami telah banyak menerima bantuan dari berbagai pihak. Untuk itu, ucapan terimakasih kami sampaikan kepada bapak Drs. Asrul, MA yang telah bersedia meluangkan waktu untuk memeriksa seluruh isi buku ini. Saran-saran dari beliau, merupakan masukan yang berharga demi perbaikan.

Kami sadar bahwa buku masih terdapat kekurangan di sana-sini. Oleh karena itu kritik-saran dari pembaca sekalian akan kami terima dengan hati terbuka. Semoga buku ini ada mamfaatnya.

Padang, Agustus 1998

Penulis

## DAFTAR ISI

KATA PENGANTAR .....	<i>hal.</i> i
DAFTAR ISI .....	ii
<b>BAB I    PENDAHULUAN</b>	
1. Apa Gayaberat Itu ? .....	2
2. Gaya Gravitasi Bumi. ....	4
3. Gaya Sentrifugal Bumi. ....	7
4. Gaya Gravitasi dan Gaya Sentrifugal. ....	9
5. Gayaberat dan Latitut .....	10
6. Geoid .....	12
<b>BAB II    TEORI MEDAN GAYABERAT</b>	
2.1. Potensial Gayaberat .....	15
2.2. Efek Gayaberat Benda-benda Sederhana .....	18
2.2.1. Bola .....	18
2.2.2. Batang Tipis Vertikal .....	19
2.2.3. Batang Tipis Horizontal .....	22
2.2.4. Silinder Vertikal .....	24
2.2.5. Sesar Vertikal .....	27
<b>BAB III    PENGUKURAN DAN REDUKSI GAYABERAT</b>	
3.1. Pengukuran Gayaberat .....	32
3.1.1. Kalibrasi Gravimeter .....	32
3.1.2. Penentuan Titik Ikat .....	35
3.1.3. Penentuan Tiik-titik Pengamatan .....	37
3.1.4. Pengukuran Elevasi .....	37

3.2. Reduksi Gayaberat . . . . .	39
3.2.1. Koreksi Tidal . . . . .	39
3.2.2. Koreksi Drif . . . . .	40
3.2.3. Koreksi Lintang (Latitut). . . . .	42
3.2.4. Koreksi Udara Bebas. . . . .	44
3.2.5. Koreksi Buoguer . . . . .	45
3.2.6. Koreksi Medan . . . . .	46
3.2.7. Anomali Buoguer . . . . .	47

BAB IV PEMODELAN GAYABERAT

4.1. Pemodelan Kedepan . . . . .	48
4.1.1. Model 2D . . . . .	49
4.1.2. Model 2,5D . . . . .	52
4.2. Pemodelan Inversi . . . . .	53
4.2.1. Inversi Linier . . . . .	54
4.2.1.1. Analisis Vektor Eigen . . . . .	57
4.2.1.2. Dekomposisi Nilai Singular . . . . .	58
4.2.1.3. Operator Inversi Tergeneralisasi . . . . .	61
4.2.2. Inversi Nonlinier . . . . .	64
4.2.3. Aplikasi Metoda Inversi Untuk Data Gayaberat . . . . .	66

DAFTAR PUSTAKA

## BAB I

### PENDAHULUAN

Metoda gayaberat merupakan metoda geofisika yang didasarkan pada pengukuran variasi medan gravitasi bumi. Pengukuran gayaberat dapat dilakukan di permukaan bumi, di kapal maupun di udara. Dalam metoda gayaberat yang dipelajari adalah variasi medan gravitasi bumi akibat variasi rapat massa batuan di bawah permukaan, sehingga dalam pelaksanaannya yang diselidiki adalah perbedaan gravitasi dari suatu titik observasi terhadap titik observasi lainnya. Karena perbedaan gravitasi ini relatif kecil maka alat yang digunakan harus mempunyai ketelitian tinggi.

Metoda gayaberat umumnya digunakan dalam eksplorasi minyak untuk menemukan struktur yang merupakan jebakan minyak (hidrokarbon). Disamping itu metoda gayaberat juga banyak dipakai dalam eksplorasi mineral. Meskipun metoda ini dapat dioperasikan dalam berbagai hal, tetapi pada prinsipnya metoda ini dipilih karena kemampuannya dalam membedakan rapat massa suatu material terhadap lingkungan sekitarnya. Pengetahuan tentang struktur dibawah permukaan sangat penting dalam perencanaan langkah-langkah eksplorasi minyak maupun mineral.

Dalam eksplorasi minyak metoda gayaberat digunakan sebagai penyelidikan pendahuluan. Data gayaberat dapat digunakan untuk memperkirakan apakah sedimen daerah tersebut cukup tebal atau tipis dan bagaimana pola umum struktur utama dan lokal dari daerah tersebut. Data gayaberat dapat dijadikan bahan pertimbangan untuk penyelidikan berikutnya. Pada mulanya metoda gayaberat

digunakan untuk mencari lokasi kubah garam yaitu suatu lokasi yang diduga mengandung minyak. Selanjutnya metoda gayaberat dapat pula digunakan untuk menentukan lokasi antiklin yaitu lapisan kerak bumi yang mengalami deformasi sehingga melengkung keatas dan lokasi ini diduga sebagai tempat jebakan minyak. Akhir-akhir ini beberapa struktur tertentu tempat dimana hidrokarbon terperangkap sudah dapat dilokalisasi dengan metoda gayaberat.

### 1. Apa gayaberat itu ?

Setiap benda di sekitar kita akan jatuh ke tanah bila dijatuhkan secara bebas pada ketinggian tertentu. Gerak benda jatuh bebas ini disebabkan oleh suatu gaya aksi yang bekerja pada benda itu dan gaya ini disebut gayaberat.

Bila kita memegang sebuah benda dengan tangan kanan atau tangan kiri, kita akan merasakan bahwa tangan tertekan ke bawah oleh berat benda. Keadaan berat ini disebabkan oleh gaya yang bekerja pada benda itu. Panjang dari pita karet atau pegas akan bertambah bila bagian bawahnya digantungkan sebuah beban. Peristiwa ini disebut efek gayeberat yang bekerja pada benda itu.

Gayaberat tidak hanya bekerja pada benda diam tetapi juga pada bergerak. Kecepatan turun dari sebuah benda yang dijatuhkan secara bebas bertambah terhadap waktu, sedangkan kecepatan naiknya berkurang terhadap waktu. Hal ini disebabkan gayaberat bekerja menuju pusat bumi atau searah gerak turun dari benda jatuh bebas.

Gayaberat yang bekerja pada sebuah benda sebanding dengan massanya. Jika konstanta pembadingnya ditulis  $g$  maka gayaberatnya ditulis  $F = mg$ . Untuk benda jatuh bebas, persamaan geraknya dapat ditulis

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} = mg \quad (1-1)$$

dimana  $z$  adalah ketinggian. Pada  $t = 0$ , berlaku  $\frac{dz(0)}{dt} = 0$ ,  $z(0) = 0$ , sehingga pers. (1-1) dapat ditulis

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = g \quad (1-2)$$

$$\frac{dz}{dt} = gt \quad (1-3)$$

$$z = \frac{1}{2} gt^2 \quad (1-4)$$

Hal ini menunjukkan bahwa percepatan dari benda jatuh bebas tidak bergantung pada massa atau kecepatan dari benda itu. Tetapi percepatan dari benda jatuh bebas adalah suatu konstanta. Nilai  $g$  melambangkan besarnya percepatan dari benda jatuh bebas.

Satuan dari percepatan gayaberat dalam cgs adalah  $1 \text{ cm/s}^2$  dan satuan ini disebut 1 gal. Satuan ini diberikan untuk mengenang Galileo Galilie (1564-1642) atas jasanya dalam studi gerak benda jatuh bebas dibawah pengaruh gayaberat. Nilai dari  $g$  sekitar  $980 \text{ cm/s}^2$  (atau 980 gal) dekat permukaan bumi. Seperseribu gal disebut 1 miligal (1 mgal) dimana nilainya sama  $10^{-3} \text{ cm/s}^2$ . Satuan mgal ini sering

digunakan dalam masalah geofisika. Pada tahun 1940, batas akurasi dari pengukuran nilai  $g$  ini dapat dicapai yaitu 1  $\mu$ gal atau sama dengan  $10^{-6} \text{ cm/s}^2$

## 2. Gaya Gravitasi Bumi

Bagian terbesar dari gaya berat yang bekerja pada sebuah benda di atas permukaan bumi disebabkan oleh gaya gravitasi bumi. Gaya gravitasi adalah gaya tarik-menarik antara dua buah (massa) benda yang terpisah pada jarak tertentu. Gaya gravitasi bumi adalah gaya tarik dari bumi terhadap benda-benda yang terletak didekat permukaan bumi. Selain dari gaya gravitasi, gaya sentrifugal juga berpengaruh terhadap pada benda-benda. Gaya sentrifugal adalah gaya yang timbul akibat perputaran bumi terhadap sumbunya dan arahnya keluar dari bumi. Gaya sentrifugal ini jauh lebih kecil dari gaya gravitasi sehingga dalam pengukuran gaya berat sering diabaikan..

Gaya gravitasi didekat permukaan bumi diturunkan atas beberapa asumsi

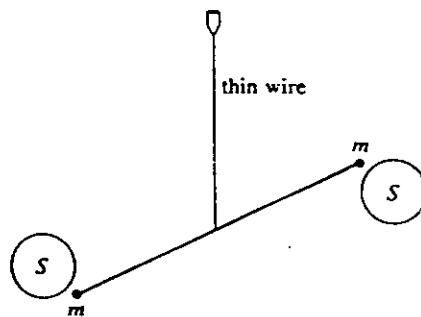
- a) bumi berbentuk bola
- b) densitas bumi merata
- c) bumi diam

Dari asumsi-asumsi diatas dapat diturunkan hubungan antara percepatan gravitasi  $g$  dengan massa dan jari-jari bumi yaitu  $M$  dan  $R$  sebagai berikut

$$g = G \frac{M}{R^2} \quad (1-5)$$



dimana  $G$  adalah konstanta gravitasi universal. Nilai  $G$  melambangkan besar gaya tarik-menarik antara dua buah benda titik masing-masing bermassa 1 gram dan ditempatkan pada jarak 1 cm satu sama lain. Nilai  $G$  tidak dapat diturunkan dari data pengamatan astronomi seperti petunjuk Newton tentang gravitasi umum (Nettleton, 1976). Tetapi nilai  $G$  dapat ditentukan secara eksperimen dengan menggunakan timbangan Cavendish seperti terlihat pada Gambar 1.1.



Gambar 1.1 Prinsip timbangan Cavendish  
(Menurut Nettleton, 1976)

Prinsip timbangan Cavendish ialah pada ujung kedua batang yang panjang ditempatkan dua buah massa kecil  $m$ , kemudian massa tersebut dapat digeser-geser secara horizontal untuk mencapai kondisi setimbang. Selanjutnya salah satu massa kecil ini ditempatkan di atas massa besar  $S$  sehingga batang berotasi membentuk sudut kecil dengan bidang horizontal. Dengan mengukur sudut kecil dengan bidang horizontal ini dapat ditentukan nilai  $G$ .

Pengukuran yang teliti telah dilakukan oleh Cavendish (1731-1810) dan secara historis dialah sebagai penemu dari nilai  $G$ . Dari hasil pengukurannya didapatkan

$$G = 6,672 \times 10^{-8} \text{ (cm}^3\text{/gram s}^2\text{)} \quad (1-6)$$

Bila nilai-nilai berikut diketahui :  $g = 980 \text{ gal}$ ,  $R = 6,4 \times 10^8 \text{ cm}$ , dan  $G = 6,672 \times 10^{-8} \text{ cm}^3\text{/gr s}^2$  maka massa bumi berdasarkan (1-5) dapat dihitung yaitu

$$M = \frac{gR^2}{G} = 6,0 \times 10^{27} \text{ (gram)} \quad (1-7)$$

Misalkan bumi berbentuk bola dan volumenya adalah  $V = \frac{4}{3} \pi R^3$ , maka densitas

rata-ratanya dapat dihitung yaitu

$$\bar{\rho} = \frac{M}{\frac{4}{3} \pi R^3} \approx 5,5 \text{ (gr/cm}^3\text{)} \quad (1-8)$$

Beberapa pengukuran lain dari  $G$  dan  $\rho$  telah dilakukan dengan cara memodifikasi timbangan Cavendish dan hasilnya dapat dilihat pada Tabel 1.1.

Tabel 1.1. Hasil Pengukuran dari nilai  $G$  dan  $\rho$ .

Name	Year	Method	$G, 10^{-8}$ cgs units	$\Delta, \text{g/cm}^3$
Cavendish	1797-1789	Torsion balance	6.754	5.448
Reich	1837	Torsion balance	6.70†	5.49
Baily	1841-1842	Torsion balance	6.485†	5.674
Reich	1849	Torsion balance	6.594†	5.58
Cornu and Baille	1870	Torsion balance	6.618†	5.56
Jolly	1878-1881	Common balance	6.465	5.692
Wilsing	1886	Metronome balance	6.596	5.579
Boys	1895	Torsion balance	6.6576	5.5270
Braun	1896	Torsion balance	6.6579	5.5275
Eötvös	1896	Torsion balance	6.65	5.53
Richarz and Krigar-Menzel	1898	Common balance	6.684	5.505
Burgess	1899	Buoyant torsion balance	6.64	5.55
Poynting	.....	Ordinary balance	6.6984	5.4934
Heyl	1930	Torsion balance	6.670	5.517†
Zahradnicek	1932	Resonance	6.659	5.526†
Heyl and Chrzanowski	1942		6.673	5.514†
Rose et al.	1969	Rotating table	6.674	5.513†

(Menurut, Nettleton, 1976)

HOUSTON  
TX  
JAN

Nilai percepatan gravitasi yang dialami oleh suatu benda pada suatu titik di atas permukaan bumi makin berkurang terhadap ketinggian. Jika tempatnya makin tinggi, maka jaraknya bertambah terhadap pusat bumi sehingga gaya gravitasinya makin berkurang. Percepatan gravitasi pada suatu tempat setinggi  $h$  di atas permukaan bumi (laut) dapat dirumuskan sebagai berikut (dengan asumsi  $h \ll R$ )

$$\begin{aligned} a_g &= \frac{GM}{(R-h)^2} \\ &= \frac{GM}{R^2} \left(1 - \frac{2h}{R}\right) \\ &= g - \frac{2gh}{R} \end{aligned} \quad (1-9)$$

Berdasarkan pendekatan ini, nilai  $g$  berkurang secara linier terhadap pertambahan  $h$  yaitu sebesar

$$\frac{2g}{R} = 0,3086 \text{ mgal/m} \quad (1-10)$$

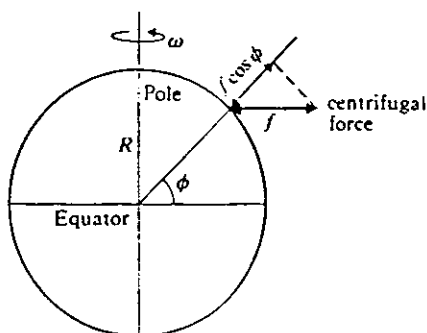
sehingga nilai  $g$  juga berkurang sebesar 0,3 mgal setiap meter ketinggian, atau 1 gal setiap 3,2 m ketinggian. Di gunung Fuji ( $h = 3776$ ) di Jepang, nilai  $g$  adalah 1165 mgal, lebih kecil dari nilai  $g$  di atas permukaan laut. Di Bandara Tabing Padang, tepatnya pada posisi  $00^{\circ}53'0''$  LS dan  $100^{\circ}21'0''$  BB, nilai  $g$  adalah 978.034,68 gal.

### 3. Gaya Sentrifugal Bumi

Bumi berputar terhadap sumbunya dan setiap titik pada permukaan bumi bekerja gaya sentrifugal. Gaya sentrifugal disebabkan oleh perputaran bumi terhadap sumbunya (Gambar 1.2) Periode dari perputaran bumi terhadap

sumbunya adalah  $T = 1 \text{ hari} = 86.164 \text{ s}$ . Dengan demikian kecepatan angkulernya adalah

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{86.164} \text{ rad/s} \approx 7,3 \times 10^{-5} \text{ rad/s} \quad (1-11)$$



Gambar 1.2. Gaya sentrifugal yang disebabkan oleh perputaran bumi (Menurut, Tsuboi, 1983)

Jika bumi berbentuk bola sempurna, percepatan sentrifugal yang disebabkan oleh kecepatan angkulernya ini pada suatu titik dengan latitud  $\phi$  dapat ditulis

$$a_f = \omega^2 R \cos^2 \phi \quad (1-12)$$

Komponen percepatan sentrifugal dalam arah gaya gravitasi bumi adalah  $a_f \cos \phi$  atau  $\omega^2 R \cos^3 \phi$  dan efeknya menambah nilai gayaberat. Pada ekuator,  $\phi = 0$ .

sehingga percepatan sentrifugal pada titik ini adalah terbesar, yaitu

$$a_f = \omega^2 R \cos^2 0 = \omega^2 R = 3,4 \text{ gal} \quad (1-13)$$

atau sekitar 1/300 dari nilai  $g$ . Nilai ini sangat kecil bila dibanding dengan nilai  $g$  sehingga dalam studi gayaberat nilai percepatan sentrifugal sering diabaikan. Nilai  $g$  di kutub adalah 983.218 gal dan di ekuator adalah 978.032 gal

#### 4. Gaya Gravitasi dan Gaya Sentrifugal

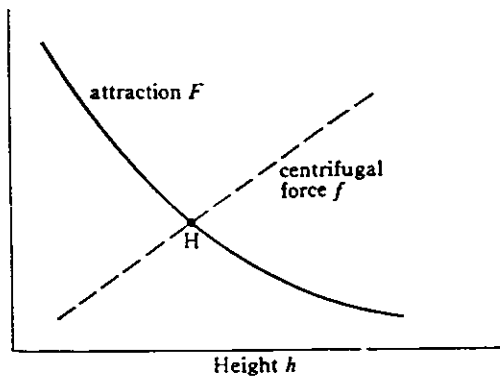
Misalkan sebuah gedung setinggi  $h$  terletak di ekuator. Percepatan sentrifugal yang bekerja pada puncak gedung adalah

$$a_p = \omega^2(R - h) = \omega^2 R \left( \frac{R - h}{R} \right) \quad (1-14)$$

dan nilai ini bertambah secara linier terhadap nilai  $h$ . Pada sisi lain, percepatan gravitasi bumi pada puncak gedung justru berkurang terhadap  $h$

$$a_g = \frac{GM}{(R + h)^2} = \frac{GM}{R^2} \left( \frac{R}{R + h} \right)^2 \quad (1-15)$$

Gambar 1.3 memperlihatkan hubungan antara percepatan gravitasi  $a_g$  dan percepatan sentrifugal  $a_f$  terhadap ketinggian  $h$ .



Gambar 1.3. Ketergantungan percepatan gravitasi  $a_g$  dan percepatan sentrifugal  $a_f$  terhadap ketinggian  $h$ .  
(Menurut, Tsuboi, 1983)

Pada  $h$  tertentu katakanlah  $H$ , nilai  $a_g$  sama dengan  $a_f$  dan benda berada pada posisi setimbang. Jika tinggi gedung lebih rendah dari  $H$ , maka gaya gravitasi lebih kuat dari gaya sentrifugal sehingga sebuah benda akan selalu bergerak ke arah pusat

bumi bila dilempar ke arah atas. Sebaliknya, jika tinggi gedung lebih tinggi dari H, maka gaya sentrifugal lebih kuat dari pada gravitasi sehingga sebuah benda akan selalu bergerak keluar dari bumi. Pada jarak yang sangat tinggi dari bumi, sebuah benda berada pada posisi setimbang dimana pada titik tersebut gaya gravitasi sama dengan gaya sentrifugal atau percepatan gravitasi sama dengan percepatan sentrifugal. Akibatnya benda tetap berputar mengelilingi bumi dengan perioda tetap satu hari. Ini merupakan prinsip dasar dari gerak sebuah satelit buatan. Pada ketinggian ini, satelit tetap beredar dalam orbitnya mengelilingi bumi tanpa jatuh ke bumi atau keluar dari bumi. Tinggi orbit satelit buatan tersebut (tinggi H) dapat dihitung dengan menggunakan pers. (1-14) dan (1-15), sehingga

$$\omega^2 R \left( \frac{R+h}{R} \right) = \frac{GM}{R^2} \left( \frac{R}{R+h} \right)^2 \quad (1-16)$$

atau

$$\left( \frac{R+h}{R} \right)^3 = \frac{g}{\omega^2 R}$$

Secara numerik, nilai H dapat ditentukan dari (1-16), yaitu  $h = 5,6 R = 36000$  km.

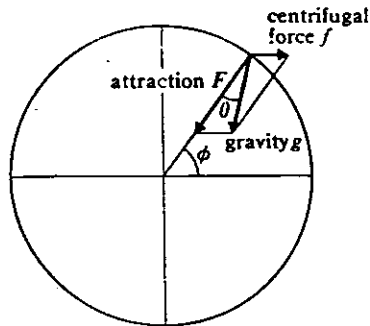
Jadi semua satelit buatan mempunyai ketinggian yang sama yaitu 36000 km di atas permukaan bumi.

## 5. Gayaberat dan Latitut

Gayaberat pada sebuah titik dipermukaan bumi adalah resultan vektor antara gaya gravitasi dengan gaya sentrifugal. Misakan kita sekarang meninjau perhitungan

untuk melihat bagaimana nilai  $g$  berubah terhadap latitud  $\phi$ . Untuk penyederhanaan, bumi diasumsikan berbentuk bola sempurna dan berputar terhadap sumbunya dengan kecepatan anguler  $\omega$ .

Tinjau tiga buah vektor gaya yang bekerja pada sebuah titik di permukaan bumi seperti diperlihatkan pada Gambar 1.4. Ketiga vektor tersebut membentuk segitiga dengan sisi-sisi  $g$ ,  $a_g$  dan  $a_f$ .



Gambar 1.4. Gaya gravitasi, gayaberat dan gaya sentrifugal pada permukaan bumi (Menurut, Tsuboi, 1983)

Panjang vektor  $g$  adalah

$$\begin{aligned} g^2 &= a_g^2 + a_f^2 - 2a_g a_f \cos \phi \\ &= \left( \frac{GM}{R^2} \right)^2 + (\omega^2 R \cos \phi)^2 - 2 \frac{GM}{R^2} \omega^2 R \cos^2 \phi \end{aligned} \quad (1-17)$$

atau

$$g \approx \frac{GM}{R^2} \left( 1 - \frac{\omega^2 R}{GM/R^2} \cos^2 \phi \right) \quad (1-18)$$

Jika

$$\begin{aligned} \frac{GM}{R^2} &= 980 \\ \frac{\omega^2 R}{GM/R^2} &= 1/300 = 0,0033 \end{aligned}$$



maka pers. (1-18) dapat ditulis

$$g = 980(1 - 0,0033 \cos^2 \phi) \quad (1-19)$$

atau

$$g = 977(1 - 0,0032 \sin^2 \phi) \quad (1-20)$$

Pers. (1-20) memperlihatkan bahwa nilai  $g$  ini berubah terhadap latitud  $\phi$ . Walaupun pendekatan ini tidak sesuai dengan pengamatan karena sangat kasar namun secara sederhana dapat memperlihatkan bahwa nilai  $g$  bervariasi terhadap latitud.

### 1.6. Geoid

Perhitungan-perhitungan di atas didasarkan atas asumsi bahwa bumi berbentuk bola sempurna. Arah dari  $g$  belum dihitung terhadap sudut  $\theta$  pada permukaan bumi seperti terlihat pada Gambar 1.4. Dengan kata lain permukaan bumi tidak horizontal terhadap titik-titik di permukaan bumi. Hubungan geometri antara latitud  $\phi$  dan sudut  $\theta$  adalah

$$\frac{g}{\sin \phi} = \frac{f}{\sin \theta} \quad (1-21)$$

dimana  $g$  adalah gayaberat dan  $f$  adalah gaya sentrifugal. Bila  $\theta$  cukup kecil,  $\sin \theta \approx \theta$ , maka nilai  $\theta$  dapat dihitung

$$\begin{aligned} \theta &= \frac{f \sin \phi}{g} \\ &= \frac{\omega^2 R \cos \phi \sin \phi}{g} \\ &= \frac{1}{2} \frac{\omega^2 R}{g} \sin 2\phi \end{aligned} \quad (1-22)$$

Dari sini, sudut kemiringan  $\theta$  terlihat paling besar pada  $\phi = 45^\circ$ , yaitu  $5'$ . Sudut ini berhubungan dengan inklinasi 1,5 m pada jarak 1 km. Supaya terhindar dari kesimpulan yang salah, terlebih dahulu ditinjau hubungan antara arah gayaberat dan bentuk permukaan bumi. Defenisi bentuk permukaan bumi menurut Tsuboi (1983) adalah sebagai berikut

“ Bentuk permukaan bumi tegak lurus terhadap arah gayaberat pada setiap titik-titik dipermukaan ”

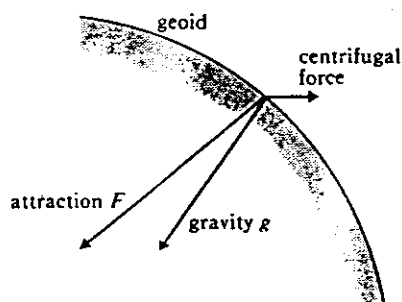
atau

“ bentuk dari permukaan bumi adalah tegak lurus terhadap resultan vektor dari gaya gravitasi dan gaya sentrifugal”

atau

“ permukaan bumi adalah horizontal terhadap setiap titik-titik”

Hubungan antara permukaan bumi dan arah dari ketiga gaya (gaya gravitasi, gayaberat, dan gaya sentrifugal) tersebut diatas dapat dilihat pada Gambar 1.5.



Gambar 1.5. Hubungan antara geoid, gaya gravitasi, gayaberat dan gaya sentrifugal (Menurut, Tsuboi, 1983)

Permukaan horizontal tegak lurus terhadap arah gayaberat dinamakan geoid. Geoid adalah sebuah permukaan halus dan secara teoritis berbeda dengan permukaan bumi sebenarnya. Geoid mengambil permukaan air laut rata-rata diambil sebagai acuan.

Karena geoid adalah horizontal terhadap setiap titik dipermukaan bumi, maka tidak ada kerja yang dibutuhkan untuk memindahkan gayaberat bila sebuah benda digerakkan sepanjang geoid. Pada dinamikanya, kita katakan bahwa permukaan mempunyai potensial gayaberat konstan di sepanjang geoid. Secara umum, hal ini dapat dikatakan sebagai permukaan ekipotensial dimana potensial setiap titi-titik dipermukaan adalah sama dan tidak ada dua potensial yang saling memotong. Bila kita mengatakan "geoid" dalam masalah gayaberat, mengandung pengertian bahwa permukaan ekipotensial bertepatan dengan permukaan air laut rata-rata.

## BAB II

### TEORI MEDAN GAYABERAT

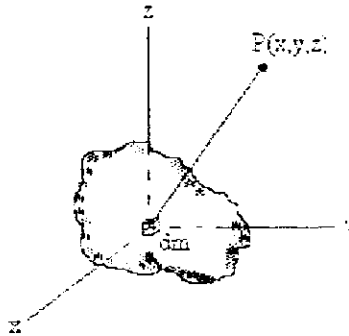
#### 2.1. Potensial Gayaberat

Potensial gayaberat yang disebabkan oleh sebuah benda bawah permukaan sangat dipengaruhi oleh variasi densitas, geometri dan kedalaman dari benda tersebut. Sehingga anomali gayaberat yang diturunkan dari potensial gayaberatnya dan diamati pada permukaan tertentu juga akan menggambarkan adanya variasi densitas dari benda penyebab anomali pada kedalaman tertentu di bawah permukaan. Potensial gayaberat dapat dianggap sebagai kerja yang dibutuhkan untuk memindahkan suatu satuan massa di dalam medan gayaberat. Usaha yang dilakukan untuk memindahkan massa selama masih dalam pengaruh medan gayaberat ini tidak bergantung kepada lintasan yang dilewati, tetapi bergantung kepada keadaan awal dan akhir dari massa tersebut.

Untuk memahami potensial gayaberat secara lebih mendalam, tinjau sebuah elemen massa tiga dimensi dengan geometri seperti pada Gambar 2.1 Potensial gayaberat pada suatu titik dapat diperoleh dengan membagi massa kedalam elemen-elemen kecil. Potensial total yang disebabkan oleh massa dengan elemen volume  $dx dy dz$  pada jarak  $r$  dari titik P adalah

$$U(r) = \rho G \iiint_V \frac{1}{r} dx dy dz \quad (2-1)$$

dimana  $\rho$  adalah densitas yang dianggap konstan dan  $r = \sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)}$  adalah jarak elemen massa ke titik P.



Gambar 2.1. Potensial yang disebabkan oleh elemen massa 3D

Jika massa sangat panjang dalam arah sumbu-y, dan mempunyai penampang merata dalam bidang-xz, sehingga (2.1) dapat ditulis

$$U(r) = \rho G \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{r} dy \quad (2-2)$$

Supaya integral mempunyai nilai berhingga, maka limit  $\pm \infty$  diubah menjadi  $\pm L$  sehingga integral suku sebelah kanan pada (2.2) dapat ditulis

$$U_L = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy}{r} = \int_{-L}^{+L} \frac{dy}{\sqrt{x^2 + z^2 + y^2}} = \int_{-L}^{+L} \frac{dy}{\sqrt{a^2 + y^2}} \quad (2-3)$$

dimana  $a^2 = x^2 + z^2$ . Hasilnya ialah

$$U_z = \ln \left( \frac{L + \sqrt{a^2 + L^2}}{-L + \sqrt{a^2 + L^2}} \right) \quad (2-4)$$

Untuk menjaga agar  $U_z$  berhingga maka perlu mengurangi potensial 2D dengan sebuah konstanta  $a^2 = 1$ . Pers. (2.4) kemudian menjadi

$$U_z = \ln \left( \frac{L + \sqrt{a^2 - L^2}}{-L + \sqrt{a^2 + L^2}} \right) - \ln \left( \frac{L + \sqrt{1 + L^2}}{-L + \sqrt{1 + L^2}} \right) \quad (2-5)$$

Karena  $L \gg a$ , maka

$$U_z = \ln \left[ \left( \frac{1 + (1 + \frac{a^2}{L^2})}{\frac{a^2}{L^2}} \right) \left( \frac{\frac{1}{L^2}}{2 + \frac{1}{L^2}} \right) \right] = \ln \frac{1}{a^2} = -\ln(x^2 + z^2) = -2 \ln r \quad (2-6)$$

dimana sekarang  $r^2 = x^2 + z^2$ . Masukkan (2.6) ke dalam (2.2) sehingga rumus potensial 2D dapat ditulis

$$U(r) = -2\rho G \int \int \ln r dx dz \quad (2-7)$$

Differensiasi (2.7) terhadap sumbu-z menghasilkan percepatan gayaberat komponen vertikal

$$g(r) = -2\rho G \int \int \frac{z}{r} dx dz \quad (2-8)$$

dimana percepatan gayaberat komponen vertikal tersebut adalah percepatan gayaberat yang teramati oleh gravimeter pada permukaan bumi. Dalam suatu

۱۳۵۰ - ۸۳۱ - ۵۱ - ۲

interpretasi anomali gayaberat, pers.(2.8) merupakan dasar bagi penentuan parameter-parameter benda penyebab anomali dapat didekati dengan benda-benda sederhana dua dimensi.

## 2.2. Efek Gayaberat Benda-benda Sederhana

Interpretasi gayaberat dapat dilakukan dengan berbagai cara, salah satunya ialah dengan mengasumsikan model benda penyebab anomali dengan benda-benda sederhana seperti bola, batang tipis miring, batang tipis horizontal, silinder horizontal, silinder vertikal, lapisan tipis miring, lapisan tipis horizontal dan pendekatan sesar (Telford, et.al., 1976). Berikut ini akan dibahas efek gayaberat yang ditimbulkan oleh masing-masing benda-benda sederhana diatas .

### 2.2.1. Bola

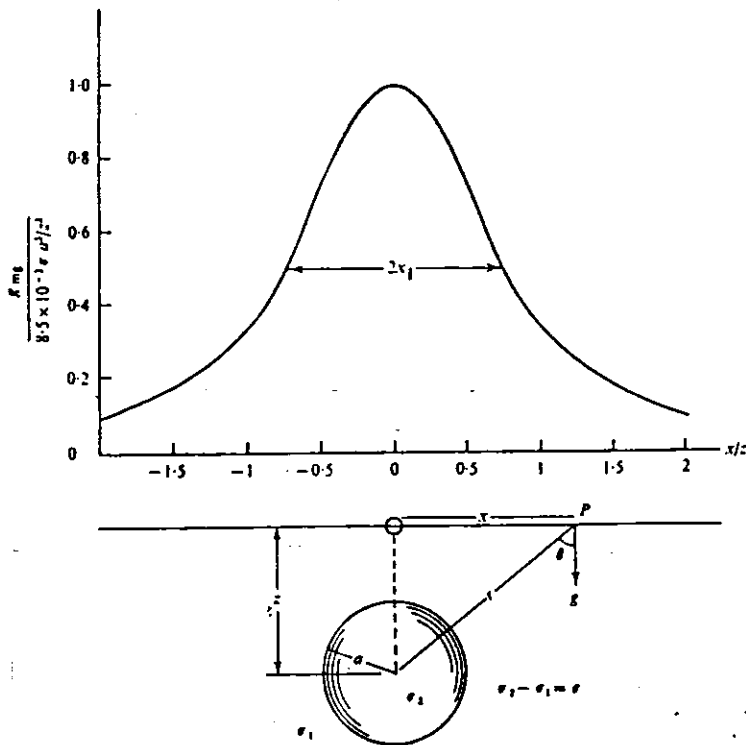
Bola adalah bentuk geometri paling sederhana dari benda-benda yang digunakan sebagai model benda penyebab anomali. Geometri dan efek gayaberat yang ditimbulkan oleh benda berbentuk bola dapat dilihat pada Gambar 2.2. Efek gayaberat yang ditimbulkan oleh bola mudah dihitung dan diinterpretasikan. Syarat yang harus dipenuhi adalah bola yang ditinjau berbentuk rigid dan dimensi horizontalnya lebih kecil dari kedalaman. Pendekatan ini biasanya digunakan untuk memodelkan struktur geologi berbentuk kubah garam (*salt domes*).

Efek gayaberat komponen vertikal dari bola dapat ditulis

$$g = g_r \cos\theta = GM \frac{z}{r^3} = \frac{4\pi G\rho R^3}{3} \frac{z}{(x^2 + z^2)^{3/2}} \quad (2-9)$$



dimana  $R$  adalah jari-jari bola,  $\rho$  adalah kontras densitas bola dengan lingkungan sekitar,  $z$  adalah kedalaman pusat bola dan  $x$  adalah titik pengamatan arah horizontal. Pada posisi  $x = 0$ , merupakan efek gayaberat dari pusat bola.



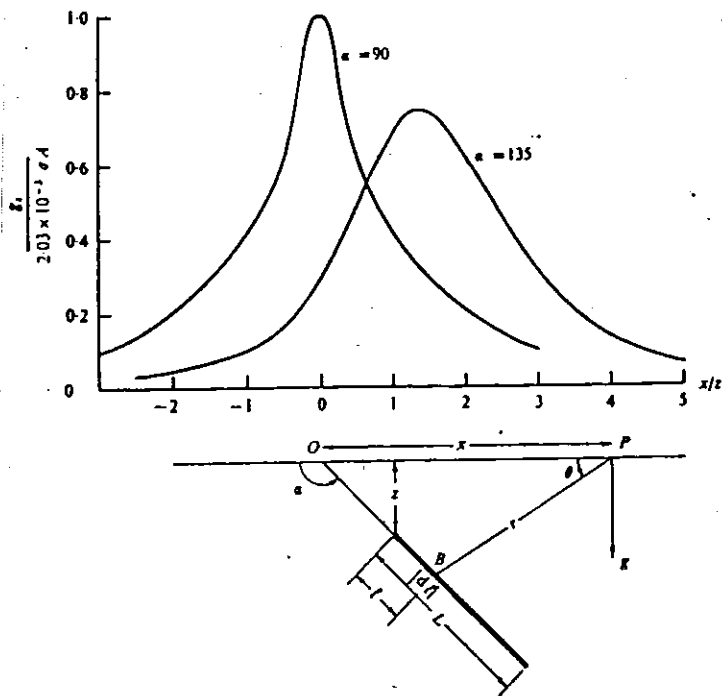
Gambar 2.2. Efek gayaberat dari bola  
(Menurut Telford, et.al, 1976)

### 2.2.2. Batang Tipis Vertikal

Geometri dari batang tipis miring dapat dilihat pada Gambar 2.3 dimana  $\alpha$  adalah sudut inklinasi dan  $l$  adalah panjang dari batang. Efek gayaberat komponen vertikal yang ditimbulkan oleh elemen batang  $dl$  adalah

$$dg = G_p \frac{A dl \sin \theta}{r^2} \quad (2-10)$$

dimana  $A$  adalah luas penampang batang.



Gambar 2.3. Efek gayaberat dari batang tipis dengan kemiringan  $45^\circ$   
(Menurut Telford, et.al., 1976)

Berdasarkan geometri dari batang tipis, didapatkan hubungan-hubungan berikut

$$r^2 = (1 + z \operatorname{cosec} \alpha)^2 + x^2 - 2x(1 + z \operatorname{cosec} \alpha) \cos \alpha \quad (2-11)$$

$$\sin \theta = \frac{(1 + z \operatorname{cosec} \alpha) \sin \alpha}{r} \quad (2-12)$$

Dengan mensubstitusikan pers. (2-11)-(2-12) ke (2-10) didapatkan efek gayaberat total dari batang tipis

$$g = G\rho A \sin \alpha \int_0^L \frac{(1 + z \operatorname{cosec} \alpha) dl}{\left( (1 + z \operatorname{cosec} \alpha)^2 + 2x(1 + z \operatorname{cosec} \alpha) \cos \alpha + x^2 \right)^{1/2}} \quad (2-13)$$

dimana 0 dan L adalah batas integrasi terhadap l.

Dengan sedikit manipulasi, hasil integrasi pada pers. (2-13) dapat ditulis

$$g = \frac{G\rho A}{x \sin \alpha} \left[ \frac{x + z \cot \alpha}{\left\{ z^2 \operatorname{cosec}^2 \alpha + 2xz \cot \alpha + x^2 \right\}^{1/2}} - \frac{x + z \cot \alpha + L \cos \alpha}{\left\{ (1 + z \operatorname{cosec} \alpha)^2 - x^2 + 2x(L \cos \alpha + z \cot \alpha) \right\}^{1/2}} \right] \quad (2-14)$$

Bila batang adalah vertikal, maka pers. (2-14) dapat disederhanakan menjadi

$$g = G\rho A \left[ \frac{1}{(z^2 + x^2)^{1/2}} - \frac{1}{\left\{ (z+L)^2 + x^2 \right\}^{1/2}} \right] \quad (2-15)$$

Jika L sangat panjang, maka pers. (2-14) dapat ditulis

$$g = \frac{G\rho A}{x \sin \alpha} \left[ \frac{x + z \cot \alpha}{\left\{ z^2 \operatorname{cosec}^2 \alpha + 2xz \cot \alpha + x^2 \right\}^{1/2}} - \cos \alpha \right] \quad (2-16)$$

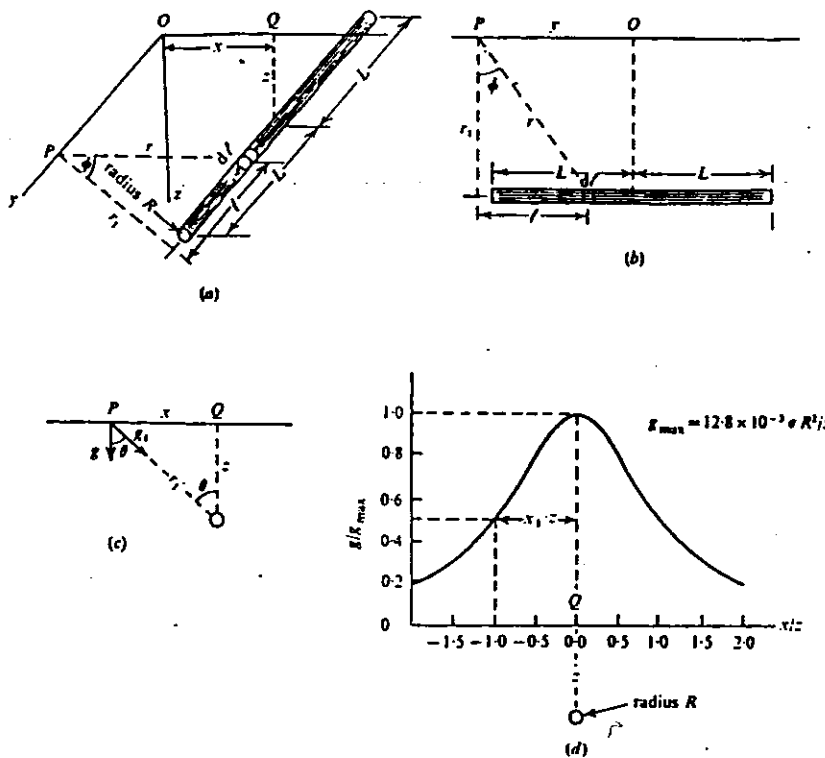
dan dengan kondisi yang sama, pers. (2-15) dapat ditulis

$$g = \frac{G\rho A}{(z^2 - x^2)^{1/2}} \quad (2-17)$$

Pers. (2-17) memperlihatkan efek gayaberat dari sebuah batang tipis sangat panjang dalam arah vertikal. Batang tipis vertikal ini dapat digunakan untuk memodelkan silinder tipis dimana diameter silinder harus lebih kecil dari kedalaman pada bagian atas.

### 2.2.3. Batang Tipis Horizontal

Geometri dari batang tipis horizontal dapat dilihat pada Gambar 2.4. dimana  $R$  adalah radius batang paralel terhadap sumbu  $y$  dan pusat batang di bawah sumbu  $x$  pada kedalaman  $z$ . Gambar 2.4(a) memperlihatkan posisi batang dalam tiga dimensi. Efek gayaberat komponen vertikal pada titik  $P$  terhadap sumbu  $y$  ditentukan dari efek gayaberat total batang pada titik  $P$  yang diproyeksikan tegak lurus terhadap sumbu  $y$ . Gambar 2.4(b) memperlihatkan geometri batang sejajar dengan sumbu  $y$ .



Gambar 2.4. Efek gayaberat dari batang horizontal. (a) pandangan dalam tiga dimensi, (b) proyeksi pada bidang yang memperlihatkan posisi batang dan sumbu  $y$ , (c) proyeksi pada bidang tegak lurus pada batang (paralel dengan bidang- $xz$ ) dan (d) profil gayaberat sepanjang sumbu  $x$  (Menurut Telford, et.al., 1976)

Efek gayaberat pada titik P yang disebabkan oleh elemen dl adalah

$$dg_r = G \frac{dM}{r^2} = G \frac{\pi R^2 \rho dl}{r^2} = G \pi R^2 \rho \frac{r_1 d\phi / \cos^2 \phi}{r^2} = G \pi R^2 \rho \frac{d\phi}{r_1} \quad (2-18)$$

dimana  $r_1$  adalah jarak batang terhadap sumbu y dan  $\phi$  adalah sudut yang dibentuk antara r dan  $r_1$ .

Komponen gayaberat sepanjang  $r_1$  dapat ditulis

$$dg_1 = dg_r \cos \phi = G \pi R^2 \rho \cos \phi d\phi / r_1 \quad (2-19)$$

dan integrasi terhadap  $d\phi$  dengan batas  $\tan^{-1}[(y+L)/r_1]$  dan  $\tan^{-1}[(y-L)/r_1]$  menghasilkan

$$g_1 = \frac{G \pi R^2 \rho}{r_1} \left[ \frac{y+L}{\{(y+L)^2 + r_1^2\}^{1/2}} - \frac{y-L}{\{(y-L)^2 + r_1^2\}^{1/2}} \right] \quad (2-20)$$

dimana L adalah panjang batang.

Dengan meninjau kembali Gambar 2.4(c) yang memperlihatkan sebuah bidang tegak lurus terhadap batang yang paralel terhadap bidang xz, kita mendapatkan gayaberat komponen vertikal dari batang

$$g = g_1 \cos \theta = \frac{G \pi R^2 \rho z}{r_1^2} \left[ \frac{y+L}{\{(y+L)^2 + r_1^2\}^{1/2}} - \frac{y-L}{\{(y-L)^2 + r_1^2\}^{1/2}} \right] \quad (2-21)$$

atau

$$g = \frac{G \pi R^2 \rho}{z(1 + \frac{x^2}{z^2})} \left[ \frac{1}{\{1 + (x^2 - z^2)/(y+L)^2\}^{1/2}} - \frac{1}{\{1 + (x^2 + z^2)/(y-L)^2\}^{1/2}} \right] \quad (2-22)$$

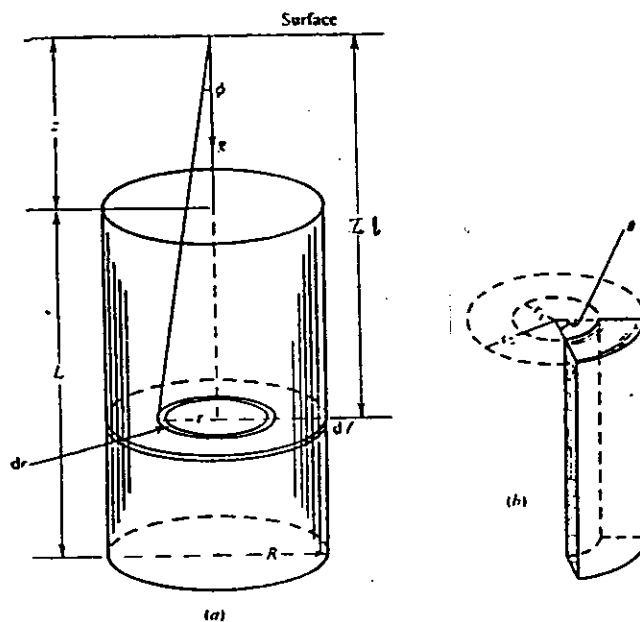
Jika batang mempunyai panjang tak hingga, batas integrasi menjadi  $\pm \pi/2$ . Rumus  $g$  pada pers. (2-22) dapat ditulis

$$g = \frac{2G\pi R^2 \rho}{z(1 + \frac{x^2}{z^2})} \quad (2-23)$$

yang memperlihatkan formula untuk efek gayaberat dari silinder horizontal panjang tak hingga. Profil gayaberat dari batang sepanjang sumbu  $x$  dapat dilihat pada Gambar 2.4(d).

#### 2.2.4. Silinder Vertikal

Silinder vertikal dapat didekati dengan sebuah batang vertikal dimana dimensi horizontalnya selalu lebih kecil dari dimensi vertikal. Geometri dan efek gayaberat dari silinder vertikal dapat dilihat pada Gambar 2.5. Efek gayaberat yang ditimbulkan oleh silinder vertikal cenderung lebih tajam dari pada efek gayaberat yang ditimbulkan oleh bola. Pendekatan dengan silinder vertikal biasanya digunakan untuk memodelkan struktur geologi berbentuk saluran magma gunungapi (*volcanic plug*).



Gambar 2.5. Efek gayaberat dari silinder vertikal, (a) perhitungan gayaberat pada sumbu dan (b) geometri dari sayatan silinder (Menurut Telford, et.al., 1976)

Perhitungan efek gayaberat komponen vertikal dari silinder vertikal dimulai dari elemen cincin dengan lebar  $dr$  di dalam silinder. Elemen massa dari cincin dapat ditulis

$$dm = 2\pi G\rho r dr dl \quad (2-24)$$

dimana  $r$  adalah jari-jari cincin.

Efek gayaberat yang ditimbulkan oleh elemen cincin dapat ditulis

$$dg = 2\pi G\rho dl \sin \phi d\phi \quad (2-25)$$

Intgrasi pers. (2-25) terhadap  $d\phi$  dengan batas 0 sampai  $\tan^{-1} R/l$  menghasilkan

$$dg = 2\pi G\rho \left( 1 - \frac{l}{\sqrt{l^2 + R^2}} \right) dl \quad (2-26)$$

dimana  $R$  adalah jari-jari silinder. Untuk menghitung efek gayaberat silinder, pers. (2-26) diintegrasikan terhadap  $l$  dari  $z$  sampai  $z + L$ , sehingga didapatkan

$$g = 2\pi G\rho \int_z^{z+L} \left( 1 - \frac{l}{\sqrt{l^2 + R^2}} \right) dl = 2\pi G\rho \left( L + \sqrt{z^2 + R^2} - \sqrt{\{(z+L)^2 + R^2\}} \right) \quad (2-27)$$

Ada beberapa kasus untuk mengaplikasikan pers. (2-26) dan (2-27) diatas.

(i) Jika  $R \rightarrow \infty$ , kita mendapatkan efek gayaberat dari sebuah lapisan (slab) horizontal tak hingga

$$g = 2\pi G\rho L \quad (2-28)$$

Pers. (2-28) ini merupakan koreksi Buoguer dan dibahas dalam BAB III.

(ii) Jika hanya meninjau hanya sebuah sektor dari silinder (Gambar 2.4(b)), batas integrasi untuk cincin tipis adalah 0 sampai  $\theta$  dan  $\tan^{-1} r_1/l$  dan  $\tan^{-1} r_2/l$ . Modifikasi dari persamaan ini menghasilkan ungkapan untuk  $g$

$$g = G\rho\theta dl \left( \frac{1}{\sqrt{r_1^2 + l^2}} - \frac{1}{\sqrt{r_2^2 + l^2}} \right) \quad (2-29)$$

Sebagai hasilnya adalah

$$g = G\rho\theta \left[ \sqrt{z^2 + r_2^2} - \sqrt{z^2 + r_1^2} + \sqrt{(z+L)^2 + r_1^2} - \sqrt{(z+L)^2 + r_2^2} \right] \quad (2-30)$$

Pada  $z = 0$ , didapatkan

$$g = G\rho\theta \left[ (r_2 - r_1) + \sqrt{(r_1^2 + L^2)} - \sqrt{(r_2^2 + L^2)} \right] \quad (2-31)$$

Pers. (2-31) merupakan koreksi terrain dan dibahas dalam BAB III.

(iii) Jika  $z = 0$ , silinder muncul ke permukaan bumi dan pers. menjadi

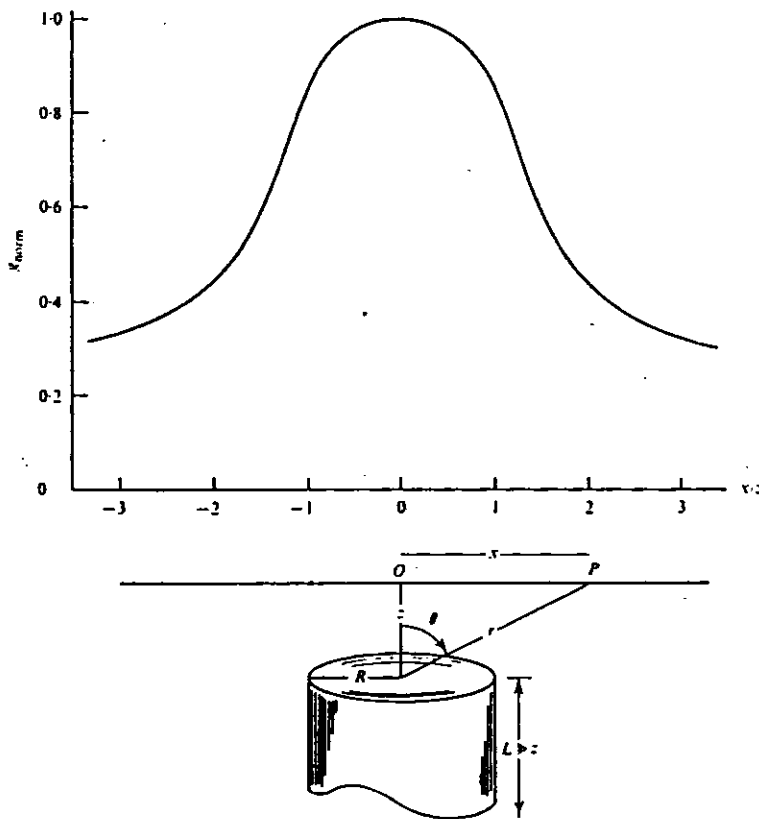
$$g = 2\pi G\rho \{L + R - \sqrt{(L^2 + R^2)}\} \quad (2-32)$$

(iv) Jika  $L \rightarrow \infty$ , pers. (2-27) menjadi

$$g = 2\pi G\rho R \quad (2-33)$$

yang memberikan efek gayaberat dari batang tipis. Efek gayaberat dari silinder vertikal tipis dapat dilihat pada Gambar 2.6.





Gambar 2.6. Efek gayaberat dari silinder vertikal tipis  
(Menurut Telford, et.al., 1976)

### 2.2.5. Sesar Vertikal

Sesar vertikal dapat dididekati dengan sebuah lapisan horizontal setengah hingga. Efek gayaberat lapisan horizontal setengah hingga dapat diturunkan dari efek gayaberat yang disebabkan oleh sebuah lapisan tipis miring dimana lapisan dianggap terletak pada posisi horizontal dengan panjang lapisan setengah hingga. Sesar vertikal dapat digunakan untuk memodelkan struktur geologi berbentuk patahan dimana salah satu lapisan tersesarkan secara vertikal.

Tinjau efek gayaberat yang disebabkan oleh sebuah lapisan tipis miring (Gambar.2.6) Berdasarkan geometri dari lapisan tipis miring tersebut, dapat ditulis hubungan berikut

$$p = (x - h \cot \alpha) \sin \alpha \quad (2-34)$$

$$r = p \sec \theta \quad (2-35)$$

$$z = p (\sin \alpha \tan \theta - \cos \alpha) \quad (2-36)$$

$$r_1 = \sqrt{(x^2 + h^2)} \quad (2-37)$$

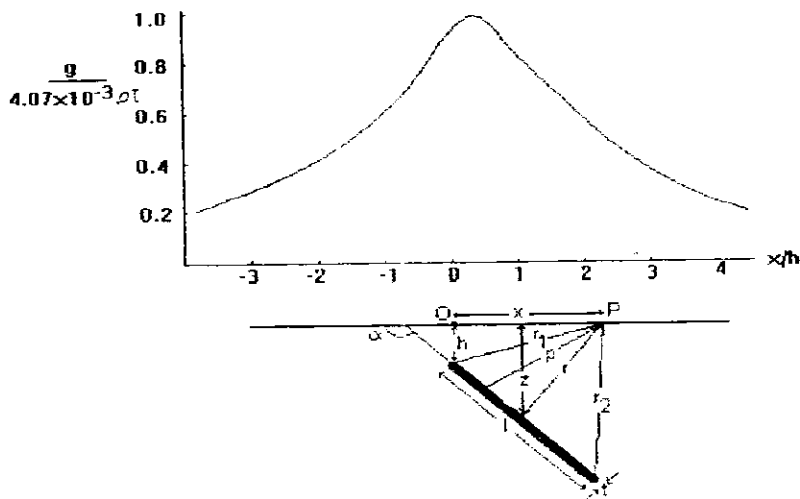
$$r_2 = \sqrt{(x + l \cos \alpha)^2 + (h + l \sin \alpha)^2} \quad (2-38)$$

$$dz = p \sin \alpha \sec^2 \theta d\theta \quad (2-39)$$

$$dx = \operatorname{cosec} \alpha dt \quad (2-40)$$

$$\tan \theta_1 = (x \cos \alpha + h \sin \alpha)/p \quad (2-41)$$

$$\tan \theta_2 = (x \cos \alpha + l + h \sin \alpha)/p \quad (2-42)$$



Gambar 2.7. Penampang anomali gayaberat yang disebabkan oleh lapisan tipis miring

Dengan memasukkan (2-33)-(2-41) kedalam (2-8), didapatkan efek gayaberat pada lapisan tipis miring

$$\begin{aligned}
 g &= 2G\rho \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{(\sin \alpha \tan \theta - \cos \alpha) \cos \alpha \sin \alpha \sec^2 \theta}{\sec^2 \theta} d\theta \\
 &= 2G\rho t \int_{\theta_1}^{\theta_2} (\sin \alpha \tan \theta - \cos \alpha) d\theta = 2G\rho t \left[ \sin \alpha \ln(\sec \theta) - \theta \sec \alpha \right]_{\theta_1}^{\theta_2} \quad (2-43)
 \end{aligned}$$

Dengan menyisipkan nilai  $\theta_1$  dan  $\theta_2$  pada (2-43) didapatkan

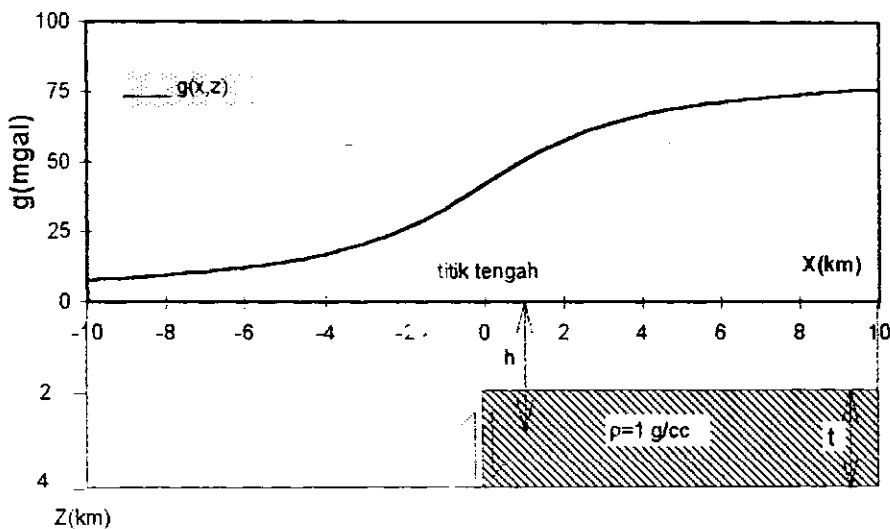
$$g = 2G\rho t \left[ \frac{1}{2} \sin \alpha \ln \left\{ \frac{(h + l \sin \alpha)^2 + (x + l \cos \alpha)^2}{(x^2 + h^2)} \right\} - \cos \alpha \left\{ \tan^{-1} \left( \frac{h \sin \alpha + l + x \cos \alpha}{x \sin \alpha - h \cos \alpha} \right) - \tan^{-1} \left( \frac{h \sin \alpha + x \cos \alpha}{x \sin \alpha - h \cos \alpha} \right) \right\} \right] \quad (2-44)$$

dimana  $\rho$  adalah kontras densitas antara lapisan tipis miring dengan lapisan sekelilingnya,  $t$  adalah ketebalan lapisan tipis miring,  $h$  adalah kedalaman lapisan tipis miring,  $x$  adalah posisi titik pengamatan arah horizontal, dan  $\alpha$  adalah sudut kemiringan lapisan tersebut terhadap posisi horizontal.

Sebuah lapisan tipis horizontal setengah hingga dapat didekati dengan cara menganggap lapisan tipis miring terletak pada posisi horizontal dengan panjang lapisan setengah hingga. Sehingga dengan memasukkan  $\alpha=180^\circ$  dan  $l \rightarrow \infty$  ke dalam (2-44), didapatkan efek gayaberat sebuah lapisan tipis horizontal setengah hingga atau efek gayaberat sebuah sesar vertikal

$$g = 2G\rho t \left( \frac{\pi}{2} + \tan^{-1} \frac{x}{h} \right) \quad (2-45)$$

dimana  $\rho$  adalah kontras densitas antara lapisan yang tersesarkan dengan lapisan sekelilingnya,  $t$  adalah ketebalan lapisan yang tersesarkan,  $h$  adalah kedalaman lapisan yang tersesarkan dan  $x$  adalah posisi titik pengamatan arah horizontal. Titik dimana lapisan tersesarkan disebut titik tengah (titik  $x=0$ ). Profil atau penampang anomali gayaberas yang disebabkan oleh sesar vertikal yang didekati dengan sebuah lapisan tipis horizontal setengah hingga dapat dilihat pada Gambar 2.8. dimana kedalaman dan ketebalan sesar adalah 3 km dan 2 km dan kontras densitas adalah 1 g/cc.



Gambar 2.8 Penampang anomali gayaberas yang disebabkan oleh sesar vertikal yang didekati dengan sebuah lapisan tipis horizontal setengah hingga ( $h = 4$  km,  $t = 2$  km dan  $\rho = 1$  g/cc).

Jika kontras densitas bernilai negatif, maka efek anomali gayaberas yang ditimbulkan pada Gambar 2.8 cenderung melandai searah dengan arc-tangen negatif. Kecenderungan dari landaian anomali dapat dipakai untuk menduga lapisan

mana yang tersesarkan. Beda antara anomali maksimum dan minimum pada penampang anomali gayaberat dapat dijadikan sebagai indikasi dari ketebalan sesar dimana perbedaan yang besar memberi indikasi bahwa lapisan yang tersesarkan relatif tebal (kontras densitas diasumsikan konstan). Sedangkan ketajaman landaian anomali dapat dijadikan sebagai indikasi dari kedalaman sesar dimana landaian yang semakin tajam menunjukkan bahwa lapisan yang tersesarkan dekat ke permukaan. Pengetahuan tentang sifat dan karakter dari anomali gayaberat yang disebabkan oleh sesar vertikal ini merupakan hal sangat penting untuk memperkirakan parameter-parameter sesar secara kuantitatif. Permodelan sesar vertikal yang didekati dengan sebuah lapisan tipis horizontal setengah hanya berlaku untuk  $h/t \leq 2$ .

## BAB III

### PENGUKURAN DAN REDUKSI GAYABERAT

#### 3.1. Pengukuran Gayaberat

Alat ukur gayaberat disebut gravimeter. Setiap alat ukur memerlukan kalibrasi. Hal ini disebabkan keadaan komponen-komponen alat ukur dapat berubah setiap waktu. Perubahan tersebut dapat disebabkan oleh temperatur dan tekanan udara luar dan dapat juga disebabkan oleh guncangan-guncangan selama perjalanan.

##### 3.1.1 Kalibrasi Gravitimeter.

Kalibrasi gravitimeter pada dasarnya bertujuan untuk menera kembali koefisien pegas yang berubah terhadap waktu sehingga mengakibatkan perubahan faktor skala. Peneraan dilakukan dengan membaca gravimeter melalui suatu jalur kalibrasi dengan titik-titik yang mempunyai nilai gayaberat baku. Dengan cara membandingkan nilai gayaberat terukur dengan nilai gayaberat baku, maka didapatkan faktor skala kalibrasi. Di Indonesia, terdapat dua jalur kalibrasi yang biasa digunakan untuk mengkalibrasi gravimeter yaitu jalur Bandung-Tangkuban Perahu berjarak 20 km dengan stasiun DG0 - DG6 dan jalur Tangkuban Perahu-Subang berjarak 30 km dengan stasiun GB1 - GB6. Nilai gayaberat baku setiap stasiun pada kedua jalur kalibrasi tersebut dapat dilihat pada Tabel 3.1 berikut .

Tabel 3.1. Nilai gayaberat pada jalur kalibrasi.

Jalur Kalibrasi	Stasiun	Nilai g (mgal)
Bandung-Tangkuban Perahu	DG 0	977 976,380
	DG I	977 976,550
	DG II	977 939,240
	DG III	977 901,970
	DG IV	977 881,910
	DG V	977 826,650
	DG IV	977 946,760
Tangkuban Perahu-Subang	GB1	978 091,631
	GB2	978 008,178
	GB3	977 957,221
	GB4	977 914,823
	GB5	977 882,303
	GB6	977 815,992

(Menurut Komisi Gayaberat Nasional, 1992)

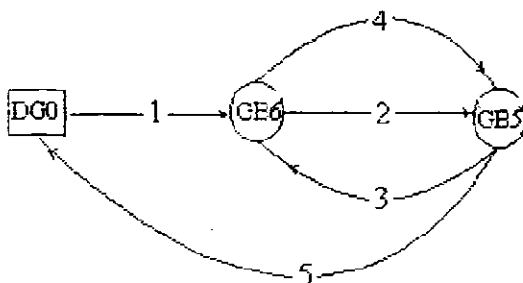
Kalibrasi atau tidaknya suatu gravimeter ditunjukkan oleh nilai faktor skala kalibrasi dari gravimeter tersebut. Cara untuk menghitung faktor skala kalibrasi ialah membandingkan perubahan nilai gayaberat baku dari dua stasiun tetap dengan perubahan nilai gayaberat hasil pengamatan di stasiun tersebut. Faktor skala kalibrasi ditentukan dengan rumus berikut :

$$K = \frac{g_1 - g_2}{g'_1 - g'_2} \quad (3-1)$$

dimana  $g_1$  dan  $g_2$  adalah nilai gayaberat baku yang sudah diketahui pada stasiun 1 dan stasiun 2 sedangkan  $g'_1$  dan  $g'_2$  adalah nilai gayaberat yang diamati pada

stasiun 1 dan stasiun 2 setelah dikoreksi terhadap tidal dan drif. Bila nilai  $K \cong 1$ , maka dapat disimpulkan bahwa gravimeter berada dalam keadaan baik (stabil).

Contoh pengukuran gayaberat pada jalur kalibrasi diperlihatkan pada Gambar 3.1.



Gamabr 3 1. Jalur Kalibrasi

Misalkan jalur kalibrasi yang digunakan adalah jalur Tangkuban Perahu-Subang. Stasiun yang pertama kali diukur nilai gayaberatnya adalah stasiun DG0 di Jl. Diponegoro No. 57 Bandung. Pengukuran selanjutnya adalah stasiun GB6 dan GB5 di Gunung Batu dan kedua stasiun tersebut diukur nilai gayaberatnya dua kali secara bolak-balik dan kembali ke stasiun DG0. Dalam hal ini stasiun DG0 berfungsi sebagai pengontrol adanya drif. Contoh hasil pengukuran nilai gayaberat pada jalur kalibrasi Tangkuban Perahu-Subang oleh Fauzi (1997) dapat dilihat pada Tabel 3.2.

Berdasarkan Tabel 3. 2 perbedaan nilai gayaberat rata-rata hasil pengamatan antara stasiun GB-5 dan GB-6 adalah 66,367 mgal. Sedangkan perbedaan nilai gayaberat hasil perhitungan antara kedua stasiun tersebut adalah 66,311 mgal (lihat Tabel 3.1).



Tabel 3.2. Contoh hasil pengukuran nilai gayaberat pada jalur kalibrasi.

Sta	Time	g-read	g-scale	Tidal	Drif	Value	Dif to Bs	g-Obs
1	4	5	6	7	8	9	10	11
DG0	9:48	1726.32	1772.112	-0.018	0.000	1772.094	0.000	977976.380
GB6	11:00	1569.405	1611.068	0.049	-0.005	1611.122	-160.972	977815.408
GB5	11:15	1634.103	1677.469	0.063	-0.006	1677.538	-94.556	977881.824
GB6	11:33	1569.475	1611.14	0.079	-0.007	1611.226	-160.868	977815.512
GB5	11:59	1634.07	1677.435	0.102	-0.008	1677.545	-94.549	977881.831
DG0	13:11	1726.15	1771.937	0.144	-0.013	1772.094	0.000	977976.380

(Menurut Fauzi, 1997)

Jadi nilai faktor skala kalibrasi dari gravimeter adalah

$$K = \frac{\Delta g_{diketahui}}{\Delta g'_{rata-rata}} = \frac{66,311}{66,367} \cong 0,9992$$

Dalam hal ini nilai  $K \approx 1$ , maka sebagai kesimpulan ialah bahwa gravimeter dianggap dalam kondisi baik.

### 3.1.2. Penentuan Titik Ikat.

Prinsip pengukuran dengan gravimeter adalah mengukur perbedaan nilai gayaberat suatu titik dengan titik-titik lain yang gayaberatnya telah diketahui secara baku. Titik dimana nilai gayaberatnya telah diketahui secara baku disebut titik pangkal. Suatu sebaran titik-titik pangkal dengan nilai gayaberatnya yang andal mencakup daerah tertentu disebut jaringan gayaberat. Titik pangkal adalah titik acuan dimana pengamatan gayaberat berpangkal. Jaringan gayaberat pada suatu

negara disebut Jaringan Gayaberat Nasional, sedangkan jaringan yang sifatnya setempat dan dipergunakan untuk kepentingan penelitian atau pengamatan setempat disebut Jaringan Gayaberat Setempat. Jaringan Gayaberat Nasional terdiri dari beberapa titik pangkal dengan berbagai tingkatan yang tersebar secara teratur dan mencakup daerah yang luas. Selang antara titik-titik tersebut berkisar antara puluhan sampai ratusan kilometer. Titik pangkal dibuat dengan cara mengikatkan kepada satu titik acuan tertentu yang mempunyai nilai mantap; titik acuan ini disebut Titik Pangkal Utama. Titik-titik lain didalam jaringan tersebut di atas disebut Titik Pangkat Tingkat I dan II. Nilai gayaberat di Titik Pangkal Utama diperoleh dengan cara pengukuran nilai mutlak dan pengukuran relatif. Keabsahan Jaringan Gayaberat Nasional diperoleh setelah mendapat persetujuan Komite Gayaberat Nasional. Titik pangkal mutlak ialah titik dengan nilai mutlak yang diamati secara mutlak. Nilai ini dipakai sebagai acuan titik-titik pangkal berikutnya. Di Indonesia titik pangkal mutlak belum ada, sedangkan titik pangkal utama terdapat di Jl. Diponegoro No. 57 Bandung yaitu stasiun DG0. Jaringan titik-titik yang diikatkan kepada jaringan titik pangkal utama disebut jaringan titik pangkal tingkat I. Menurut Komite Gayaberat Nasional, titik-titik pangkat tingkat I di Indonesia pada waktu ini berjumlah lebih kurang 100 dan pada umumnya terletak di lapangan terbang. Di Sumatera Barat titik pangkat tingkat I terdapat di Bandara Tabing yaitu pada posisi  $00^{\circ}53'0''$ LS dan  $100^{\circ}21'0''$ BB dengan nilainya 978034.68 gal. Titik-titik pangkal tingkat II dibuat di lapangan (lokasi penelitian) dengan mengikatkan kepada jaringan titik pangkal tingkat I. Salah satu contoh titik pangkal tingkat II yang telah dibuat

yaitu di Sungaipenuh pada posisi  $101^{\circ}23'41,5''$ BT dan  $02^{\circ}03'52,8''$ LS dengan nilai 977866,191 mgal. Titik pangkal ini dibuat sewaktu dilaksanakan penelitian gayaberat di Sungaipenuh pada tahun 1995, dalam rangka mitigasi bencana gempa bumi.

### 3.1.3. Penentuan Titik-titik Pengamatan

Sebelum pelaksanaan pengukuran di lapangan, perlu kesiapan kerja yang matang terutama dari segi kelengkapan alat dan bahan seperti : peta topografi, peta geologi, gravimeter, sipat datar, theodolite, altimeter, termometer, kompas, generator, alat ukur posisi (Global Positioning System), dan sebagainya. Titik-titik pengamatan dapat ditentukan berdasarkan peta topografi dan pengetahuan geologi daerah tersebut. Ada dua model pengukuran yang dapat dilakukan yaitu pengukuran berbentuk grid (luas) dan pengukuran berbentuk lintasan. Pengukuran berbentuk grid biasanya dilakukan untuk menentukan struktur geologi suatu daerah yang belum pernah diketahui sedangkan pengukuran berbentuk lintasan dilakukan pada suatu daerah dimana struktur geologinya sudah diketahui. Pengukuran berbentuk grid menghasilkan penampang (profil) gayaberat tiga dimensi dan pengukuran berbentuk lintasan menghasilkan penampang gayaberat dua dimensi.

### 3.1.4. Pengukuran Elevasi

Pengukuran elevasi atau ketinggian bertujuan untuk menentukan perbedaan tinggi antara titik pengamatan dengan bidang geoid. Ada beberapa metoda yang

digunakan untuk mengukur elevasi ini, diantaranya metoda satu basis dan metoda dua basis.

Metoda satu basis menggunakan 1(satu) titik yang sudah diketahui ketinggiannya sebagai titik acuan untuk menentukan ketinggian titik-titik lain. Metoda satu basis minimal menggunakan dua buah altimeter, sebuah digunakan untuk mengamati perubahan tekanan udara di stasiun basis (acuan), sedangkan sebuah lagi digunakan untuk mengamati perubahan tekanan udara pada titik-titik yang akan ditentukan tingginya. Jalannya pengukuran dapat merupakan kring tertutup, pulang pergi, yaitu titik-titik yang diukur pada pengukuran pergi diukur lagi pada pengukuran pulang.

Metoda dua basis menggunakan 2 (dua) stasiun basis yang telah diketahui tingginya. Altimeter yang digunakan minimal 3 buah (tiga) buah, dua buah pada masing-masing stasiun basis sedangkan yang lainnya dipakai untuk mengamati perubahan tekanan udara pada titik-titik pengamatan. Jalur pengukuran pada metoda dua basis ini dapat berupa jalur terbuka dan jalur tertutup. Jalur terbuka yaitu mengukur elevasi mulai dari stasiun basis pertama dan berakhir pada stasiun basis kedua dimana kedua stasiun tersebut sudah diketahui tingginya. Sedangkan jalur tertutup yaitu pengukuran elvasi pada titik-titik pengamatan mulai dari stasiun basis pertama berakhir pada stasiun basis kedua dan kembali ke stasiun basis pertama melalui titik-titik pengamatan yang berlainan.

Prinsip pengukuran dengan gravimeter adalah mengukur perbedaan percepatan gayaberat dari suatu tempat ke tempat lain pada permukaan bumi. Nilai gayaberat yang terukur pada suatu tempat dengan tempat lain akan sama jika bumi berbentuk bulat sempurna dan densitas bumi merata. Tapi kenyataannya bumi berbentuk tidak bulat sempurna dan densitas bumi tidak merata. Karena itu nilai gayaberat yang terukur mesti direduksi terhadap suatu bidang acuan yang disebut geoid guna mendapatkan nilai gayaberat sebenarnya (teori). Beberapa faktor yang biasa ditinjau antara lain koreksi tidal, koreksi drif, koreksi lintang, koreksi udara bebas, koreksi Bouguer dan koreksi medan. Perbedaan antara nilai gayaberat teori dengan nilai gayaberat terukur disebut anomali gayaberat.

### 3.2.1. Koreksi Tidal

Koreksi tidal (pasang surut) didefinisikan sebagai efek tarikan massa yang disebabkan oleh benda-benda langit, terutama bulan dan matahari. Harga koreksi ini berubah-ubah setiap waktu secara periodik tergantung dari kedudukan benda-benda langit tersebut. Mengacu pada perhitungan Longman (1959), gaya pasang surut yang disebabkan gaya tarik bulan persatuan massa komponen vertikal dan horizontal secara berturut-turut adalah

$$g_m = \frac{GMr}{d^3(3\cos^2\theta - 1)} + \frac{3GMr^2}{2d^4(5\cos^3\theta - 3\cos\theta)} \quad (3-2)$$

$$h_m = \frac{3GMr}{2d^3} \sin 2\theta - \frac{3GMr^2}{2d^4} (5\cos^2\theta - 1) \sin\theta \quad (3-3)$$

dimana  $G$  adalah konstanta gravitasi universal,  $M$  adalah massa bulan,  $\theta$  adalah sudut zenit bulan,  $r$  adalah jarak antara pusat bumi ke titik observasi  $P$  dan  $d$  adalah jarak dari pusat bumi ke pusat bulan.

Sedangkan gaya tidal yang disebabkan oleh gaya tarik matahari per satuan massa komponen vertikal dan horizontal secara berturut-turut adalah

$$g_z = \frac{GSr}{D^3} (3\cos^2 \varphi - 1) \quad (3-4)$$

$$h_z = \frac{3GSr}{2D^3} (\sin 2\theta\varphi) \quad (3-5)$$

dimana  $S$  adalah massa matahari,  $D$  adalah jarak antara pusat bumi ke pusat matahari dan  $\varphi$  adalah sudut zenit matahari. Sehingga gaya total dari pasang surut yang disebabkan oleh matahari dan bulan ialah

$$g_t = g_m + g_z \quad (3-6)$$

$$h_t = h_m + h_z \quad (3-7)$$

Dalam perhitungan anomali Buoguer, koreksi pasang surut dijumlahkan terhadap percepatan gayaberat yang terbaca oleh gravitimeter setelah dikonversi ke dalam satuan mgal.

### 3.2.2. Koreksi Drif

Gravimeter biasanya dirancang dengan sistem keseimbangan pegas dan dilengkapi dengan massa yang tergantung bebas pada ujungnya. Karena pegas tidak

elastis sempurna, maka sistem pegas tidak kembali ke kedudukan semula bila ada tarikan. Koreksi karena sifat pegas ini disebut koreksi drif. Jadi koreksi drif adalah koreksi yang disebabkan oleh sifat alat itu sendiri yang selalu menunjukkan perubahan harga setiap waktu yang dapat dianggap linier pada waktu yang relatif pendek (Komisi Gaya Berat Nasional, 1992).

Selain sifat tersebut koreksi drif dapat juga disebabkan oleh pengaruh eksternal seperti perubahan temperatur udara luar dan perubahan tekanan. Torge (1989, hal. 250) mengelompokkan drif atas dua bagian yakni *drif stasioner* dan *drif transportasi*. Drif stasioner disebabkan oleh usia pegas, fluktuasi temperatur gelombang panjang dan tekanan udara yang dapat ditaksir dengan pengamatan jangka panjang pada sebuah stasiun tunggal. Sedangkan drif transportasi disebabkan oleh getaran, fluktuasi temperatur gelombang pendek dan sebab-sebab lain selama perjalanan. Koreksi drif dapat dicari dengan pengukuran berulang dengan menghitung perubahan harga pengamatan bebas pasang surut di titik yang sama dalam selang waktu antara  $t_1$  dan  $t_2$ . Jika gayaberat pada suatu titik diamati dua kali pada  $t_1$  dan  $t_2$ , maka terdapat dua nilai gayaberat yang berbeda pada titik tersebut. Perbedaan ini disebut gejala drif dan besarnya tiap satuan waktu adalah

$$D = \frac{g_2 - g_1}{t_2 - t_1}, \left( \frac{mgal}{menit} \right) \quad (3-8)$$

dimana  $D$  adalah drif per satuan waktu,  $g_1$  dan  $g_2$  adalah percepatan gayaberat bebas tidal yang diukur pada waktu  $t_1$  dan  $t_2$ . Karena koreksi drif berbanding lurus

terhadap waktu, maka koreksi drif tiap-tiap titik pengamatan pada saat  $t$  (dimana  $t_1 < t < t_2$ ) dapat ditulis

$$K_D = D(t - t_1), \quad (mgal) \quad (3-9)$$

sehingga nilai gayaberat  $g_x'(t)$  yang terukur pada suatu titik pengamatan ke- $x$  setelah dikoreksi drif adalah

$$g_x'(t) = K_D + g_x(t), \quad (magl) \quad (3-10)$$

dimana  $g_x(t)$  adalah nilai gaya berat terukur sebelum dikoreksi drif.

### 3.2.3. Koreksi Lintang (Latitud)

Telford *et al.* (1976) mendefenisikan permukaan bumi sebagai permukaan ekuipotensial dimana gayaberat pada semua titik tegak lurus terhadap bidang tersebut. Permukaan ekuipotensial tersebut dinamakan referensi spheroid (Grant & West, 1965) dimana permukaan bumi dianggap sebagai permukaan ellipsoid

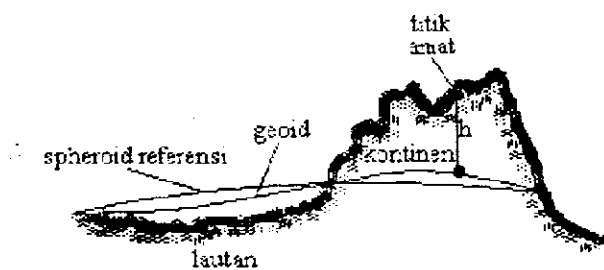
Bentuk bumi yang ellipsoid menyebabkan jari-jari bumi bervariasi terhadap lintang tertentu sehingga perlu dibuat perumusan gayaberat sebagai fungsi kedudukan lintang. Kebergantungan nilai gayaberat terhadap kedudukan lintang pada referensi spheroid diberikan dalam ekspansi deret berikut

$$g_\varphi = g_0(1 + \beta \sin^2 \varphi - \beta' \sin^2 2\varphi), \quad (mgal) \quad (3-11)$$



dimana  $g_0$  adalah gayaberat di ekuator,  $\varphi$  adalah latitude,  $\beta$  dan  $\beta'$  adalah konstanta. Berdasarkan GRS (Geodetic Reference System) tahun 1967, nilai  $g_0$  adalah 978031,8 mgal, konstanta  $\beta$  dan  $\beta'$  adalah 0,0053024 dan 0,0000058 secara berturut-turut.

Perumusan gayaberat teoritis pada referensi spheroid sebenarnya merupakan suatu pendekatan yang sangat kasar (Telford *et al.*, 1976), sebab pendekatan tersebut mengasumsikan tidak ada undulasi pada permukaan bumi, sementara kenyataannya bumi terdiri dari kontinen dan lautan. Untuk itu, ahli geodesi mendefenisikan sebuah permukaan air laut rata-rata sebagai acuan untuk mengukur elevasi. Bidang acuan tersebut disebut geoid yakni sebuah permukaan air laut rata-rata yang mendapat gaya tarik ke atas di daratan dan gaya tarik ke bawah di lautan (Grant & Wast, 1965). Perbedaan antara bidang spheroid referensi dengan geoid dapat dilihat pada Gambar 3..2



Gambar 3.1. Perbedaan referensi spheroid dengan geoid

### 3.2.4. Koreksi Udara Bebas

Koreksi udara bebas bertujuan untuk meniadakan faktor ketidakteraturan permukaan bumi, sebagai akibat adanya variasi ketinggian terhadap permukaan geoid. Koreksi udara bebas hanya mempertimbangkan elevasi antara titik pengamatan dengan permukaan air laut rata-rata (Heiskanen & Meinesz, 1958) tanpa mempertimbangkan massa sumber anomali (Ervin, 1977; Telford *et al.*, 1976; Grant & West, 1965).

Nilai elevasi dari titik pengamatan lebih kecil dari pada nilai jari-jari bumi.

Uraian deret Taylor percepatan gayaberat pada titik pengamatan adalah

$$g(R+h) = G \frac{M}{(R+h)^2} = G \frac{M}{R^2} \left( 1 - 2 \frac{h}{R} \right) \quad (3-12)$$

dimana  $M$  adalah massa bumi,  $h$  adalah elevasi dari titik pengamatan dan  $R$  adalah jari-jari bumi. Dengan mengurangkan percepatan gayaberat pada bidang geoid ( $h = 0$ ) terhadap percepatan gayaberat pada titik pengamatan maka diperoleh rumus Koreksi Udara Bebas (KUB)

$$KUB = |g(r) - g(R+h)| = 2 \frac{GM}{R^3} h = 0,3086h, \quad (mgal) \quad (3-13)$$

dimana  $h$  dinyatakan dalam meter. Elevasi menarik titik pengamatan keluar dari bidang geoid sehingga mengurangi percepatan gayaberat pada bidang tersebut. Oleh sebab itu KUB mesti dikurangkan dengan percepatan gayaberat pada bidang geoid untuk memperoleh gayaberat teoritis pada titik pengamatan.

### 3.2.5. Koreksi Buoguer

Koreksi Buoguer bertujuan untuk menghilangkan pengaruh tarikan massa yang terletak antara titik pengamatan dengan bidang geoid dimana pada koreksi udara bebas pengaruh tersebut tidak diperhitungkan (Telford *et al.*, 1976; Grant & West, 1965). Lebih jauh Ervin (1977) mengatakan bahwa koreksi Buoguer adalah sebuah kuantitas teoritis karena hal ini mengasumsikan sebuah lempeng tak hingga dan sebuah lapisan homogen dengan ketebalan konstan. Hal ini berarti memasukkan sebuah pengaruh lapisan yang diidealkan terhadap nilai gaya berat teoritis.

Dua asumsi yang dipakai untuk menurunkan rumus koreksi Buoguer adalah pertama bahwa lempeng mempunyai densitas merata dan kedua bahwa lempeng horizontal tak hingga (Telford *et al.*, 1976). Bila tofografi disekitar titik pengamatan cukup rata, maka efek massa di bawah titik pengamatan dapat didekati sebagai lempeng horizontal tak hingga dengan ketebalan  $h$  dan densitas  $\rho$  merata. Dengan memenuhi ke dua asumsi di atas, rumus Koreksi Buoguer (KB) dapat ditulis

$$KB = 0,04193 \rho h \text{ (mgal)} \quad (3-14)$$

dimana  $\rho$  densitas lempeng dinyatakan dalam ( $g/cc$ ) dan  $h$  ketebalan lempeng dinyatakan dalam ( $m$ ).

Dalam penerapannya, densitas lempeng  $\rho$  ditafsirkan sebagai densitas rata-rata batuan kerak bumi di atas bidang geoid dan ketebalan lempeng  $h$  ditafsirkan sebagai elevasi titik pengamatan. Menurut Nettleton (1976) densitas rata-rata batuan kerak bumi di atas permukaan laut adalah  $2.67 g/cc$ . Berdasarkan pada harga rata-

rata batuan kerak bumi yang dikemukakan oleh Nettleton, dapat diasumsikan bahwa anomali Bouguer yang diperoleh dari hasil reduksi gayaberat merupakan anomali yang ditimbulkan oleh kontras densitas terhadap densitas acuan sebesar 2,67 g/cc pada daerah diatas permukaan laut. Karena efek massa di bawah titik pengamatan memperbesar nilai pembacaan gayaberat maka koreksi Bouguer ditambahkan terhadap percepatan gayaberat teoritis pada titik pengamatan

### 3.2.6. Koreksi Medan

Koreksi medan merupakan koreksi akibat efek massa dan undulasi topografi disekitar titik pengamatan, misalnya dengan adanya bukit dan lembah. Undulasi topografi ini mempengaruhi pengukuran gayaberat di titik pengamatan dalam pengertian bukit akan mengurangi percepatan gayaberat yang terukur karena menarik titik pengamatan ke luar, sementara lembah akan mengurangi percepatan gayaberat karena kekurangan massa. Oleh sebab itu koreksi medan selalu ditambahkan terhadap percepatan gayaberat yang terukur atau dikurangkan terhadap percepatan gayaberat teoritis.

Rumus dan asumsi yang digunakan untuk menghitung koreksi medan hampir sama dengan rumus dan asumsi yang digunakan untuk menghitung koreksi Bouguer tetapi silinder yang ditinjau adalah sebuah sektor. Rumus Koreksi Medan (KM) dapat ditulis

$$KM = \rho G \theta \left[ (r_c - r_s) + \sqrt{(r_s^2 + z^2)} - \sqrt{(r_c^2 + z^2)} \right] (mgal) \quad (3-15)$$

dimana  $\theta$  adalah sudut sektor (*rad*),  $\rho$  adalah densitas (*g/cc*),  $r_o$  adalah jari-jari sektor luar (*ft*),  $r_i$  adalah jari-jari sektor dalam (*ft*) dan  $z = |h - h_{rata-rata}|$  adalah beda tinggi antara titik pengamatan dan tinggi rata-rata dalam sektor (*ft*).

Dalam prakteknya, koreksi medan dihitung dengan menggunakan tabel Hammer yaitu membuat lingkaran-lingkaran kosentris pada plastik transparan dengan beberapa sektor. Jari-jari lingkaran disesuaikan dengan luas peta tofografi sehingga mencakup seluruh kondisi medan pada titik pengamatan.

### 3.2.7. Anomali Buoguer

Penyimpangan nilai percepatan gaya berat yang diamati dengan nilai percepatan gaya berat teoritis (Ervin, 1977) yang disebabkan oleh sebuah model bumi yang didefenisikan (La Fehr, 1991) disebut anomali Buoguer ( $\Delta g_{AB}$ ). Penyimpangan tersebut disebabkan oleh adanya perubahan densitas batuan secara lateral. Percepatan gayaberat yang diamati adalah nilai pembacaan gravimeter setelah dikonversi ke dalam satuan *mgal* dan dikoreksi terhadap efek tidal dan drif. Sedangkan percepatan gayaberat teoritis adalah percepatan gayaberat yang diperkirakan pada bidang geoid setelah dikoreksi terhadap elevasi, efek massa dan undulasi tofografi. Rumus anomali Buoguer ( $\Delta g_{AB}$ ) dapat ditulis

$$\Delta g_{AB} = g_{obs} - (g_N - KUB + KB - KM) \quad (3-16)$$

Suku kedua pada pers. (3-16) disebut juga percepatan gayaberat normal. Jadi Anomali Buoguer ( $\Delta g_{AB}$ ) dapat pula didefenisikan sebagai selisih percepatan gayaberat  $g_{obs}$  yang diamati dengan percepatan gaya normal  $g_N$  pada titik tersebut.

## BAB V

### PEMODELAN GAYABERAT

Data geofisika secara kuantitatif dapat ditafsirkan dalam dua cara, yaitu secara langsung dan secara tidak langsung. Penafsiran secara langsung disebut *permodelan kedepan* (forward modeling) dan penafsiran secara tidak langsung disebut *permodelan inversi* (inverse modeling). Berikut ini akan dibahas masing-masing metoda diatas dalam pemodelan gayaberat.

#### 4.1. Pemodelan Kedepan

Penafsiran dengan pemodelan kedepan dilakukan dengan cara coba-coba yaitu mencocokkan penampang gayaberat model dengan penampang gayaberat hasil pengamatan. Model dibuat lebih dahulu dan kemudian dihitung medan gayaberatnya pada setiap titik pengamatan. Medan gayaberat dari model yang dibuat ini kemudian dibandingkan dengan medan gayaberat hasil pengamatan. Ini berarti hasil pengukuran gayaberat di lapangan tidak dipakai dalam proses perhitungan, tetapi hanya dilihat sebagai pedoman dalam memperkirakan parameter-parameter model. Pemodelan dilakukan secara berulang-ulang sampai diperoleh kecocokan antara data gayaberat model dan data gayaberat hasil pengamatan.

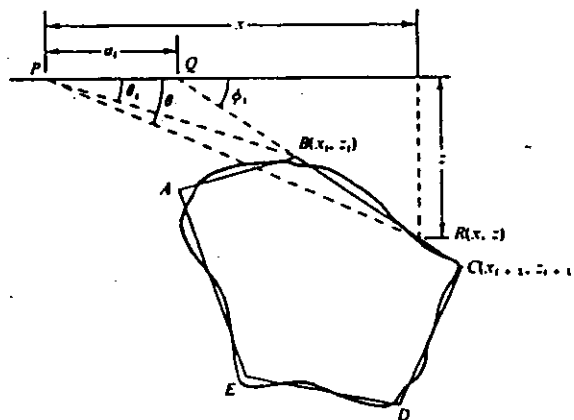
Pemodelan kedepan biasanya menggunakan benda berbentuk poligon bersisi  $n$  sebagai model. Pemodelan kedepan ini telah mengalami banyak kemajuan dimana teknik pemodelannya telah berkembang dari model 2D (dua dimensi)

dimana teknik pemodelannya telah berkembang dari model 2D (dua dimensi) sampai model 2,5D (dua-setengah dimensi). Model 2D adalah model dimana salah satu dimensinya (dalam arah  $y$ ) tidak berhingga sedangkan model 2,5D adalah model dimana salah satu dimensinya tidak tak berhingga tetapi berhingga. Model 2,5D adalah perbaikan dari model 2D.

#### 4.1.1. Model 2D

Talwani (1959) memperkenalkan poligon bersisi  $n$  sebagai dasar pemodelan kedepan. Misalkan potongan benda penyebab anomali adalah suatu poligon ABCDE seperti pada Gambar 4.1. Poligon tersebut mempunyai titik sudut  $A(x_1, y_1)$ ,  $B(x_2, y_2)$ ,  $C(x_3, y_3)$ ,  $D(x_4, y_4)$ , dan  $E(x_5, y_5)$ . Efek gayaberat vertikal yang disebabkan oleh sisi poligon dapat dihitung dengan menggunakan integral garis pada masing-masing sisi poligon.

Tinjau benda 2D berbentuk poligon bersisi  $n$  dengan luas penampang  $A$  berikut



Gambar 4.1. Pendekatan poligon untuk benda 2D  
(Menurut Telford, et.al, 1976)

Efek gayaberat yang ditimbulkan oleh benda-benda tersebut di titik P secara umum ditulis

$$\Delta g = 2G\Delta\rho \iiint \frac{z dx dz}{(x^2 + z^2)} \quad (4-1)$$

Untuk menghitung integral pada pers. (4-1), gunakan transformasi dari sistem koordinat kartesian ke sistem koordinat polar, yaitu dari koordinat  $(x, z)$  ke koordinat  $(\theta, z)$ , sehingga pers. (4-1) dapat ditulis

$$\Delta g = 2G\Delta\rho \iiint d\theta dz \quad (4-2)$$

Efek gayaberat komponen vertikal yang disebabkan oleh poligon dapat ditentukan dengan menyatakan  $z = z(\theta)$ . Integral luas  $\iiint d\theta dz$  dapat diubah menjadi integral garis tertutup yang dapat dianggap sebagai jumlah dari integral garis, sehingga pers.(4-2) menjadi

$$\Delta g = 2G\Delta\rho \oint z(\theta) d\theta$$

atau

$$\Delta g = 2G\Delta\rho \sum_i^n Z_i \quad (4-3)$$

dengan  $Z_i$  adalah posisi masing-masing poligon,  $G$  adalah konstanta gravitasi dan  $\Delta\rho$  adalah kontras densitas antara poligon dengan lingkungannya.

Perhatikan Gambar 4.1, efek gayaberat yang disebabkan oleh benda tersebut dapat dihitung dengan menggunakan model integral garis dengan mengintegrasikan terhadap keliling ABCDE sebagai berikut :



$$\sum_i^6 Z_i = \left[ \int_A^B z d\theta + \int_B^C z d\theta + \int_C^D z d\theta + \int_D^A z d\theta \right] \quad (4-4)$$

Kedalaman titik  $Q(x,z)$  yang berada pada salah satu poligon dapat ditulis

$$z = x \tan \theta = (x - a_i) \tan \phi_i, \quad i = 1, 2, \dots, 5 \quad (4-5)$$

dimana  $a_i$  adalah jarak sepanjang sumbu x.

Dengan mengeliminasi harga x pada pers.(4 -5) akan memberikan nilai kedalaman sebagai fungsi  $\theta$

$$z = \frac{a_i \tan \theta \tan \phi_i}{\tan \phi_i - \tan \theta} \quad (4-6)$$

Jika kita integrasikan salah satu sisi (BC) terhadap sudut  $\theta$  maka akan didapat persamaan berikut :

$$\int_B^C z d\theta = a_i \sin \phi_i \cos \phi_i \left[ (\theta_i - \theta_{i+1}) \tan \phi_i \ln \frac{\cos \theta_i (\tan \theta_i - \tan \phi_i)}{\cos \theta_{i+1} (\tan \theta_{i+1} - \tan \phi_i)} \right] \quad (4-7)$$

dimana

$$\theta_i = \tan^{-1} \left( \frac{z_i}{x_i} \right) \quad (4-8)$$

$$\phi_i = \tan^{-1} \left( \frac{z_{i+1} - z_i}{x_{i+1} - x_i} \right) \quad (4-9)$$

$$a_i = x_{i+1} - z_{i+1} \cot \phi_i \quad (4-10)$$

Dengan mensubstitusikan pers. (4-8)-(4-10) ke dalam pers. (4-7) dan masukkan hasilnya ke dalam persamaan (4-3), maka didapat efek gayaberat total yang ditimbulkan oleh poligon.

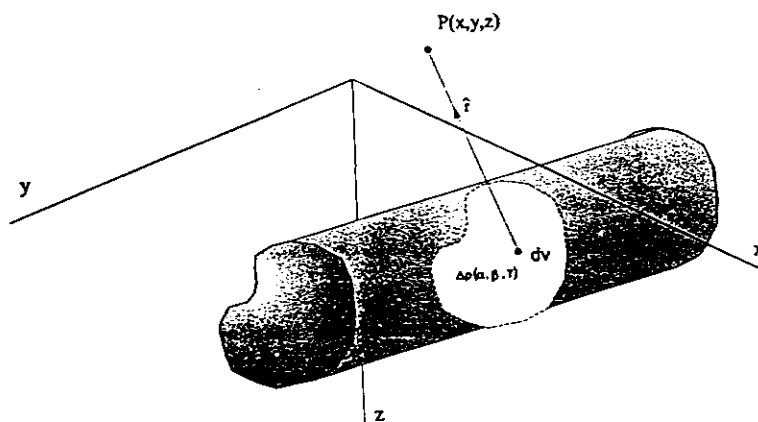
$$\Delta g = 2G\Delta\rho \sum_{i=1}^6 \left( \frac{x_i z_{i+1} - z_i x_{i+1}}{(x_{i+1} - x_i)^2 + (z_{i+1} - z_i)^2} \right) \left( (x_{i+1} + x_i)(\theta_i - \theta_{i-1}) - (z_{i+1} - z_i) \ln \frac{r_{i+1}}{r_i} \right) \quad (4-11)$$

dimana  $r_i = \sqrt{(x_i^2 + z_i^2)}$ .

Pers. (4-11) dapat dipakai untuk menghitung efek gayaberat yang disebabkan oleh masing-masing sisi poligon yang mempunyai konfigurasi dan densitas tertentu, kemudian dengan menjumlahkan masing-masing efek gayaberat tersebut akan didapat efek gayaberat totalnya.

#### 4.1.2. Model 2,5D

Interpretasi 2,5D merupakan perbaikan dari 2D yaitu dengan menganggap ketebalan poligon dalam arah  $y$  tidak *tak berhingga* tetapi *berhingga*. Untuk jelasnya dapat dilihat Gambar 4.2 berikut.



Gambar 4.2. Pendekatan poligon untuk benda-benda 2,5D  
(Menurut Kadir, 1997)

Efek gayaberat yang ditimbulkan poligon pada titik P dapat ditulis

$$\Delta g = G\rho\Delta A \int_{y_1}^{y_2} \frac{z_1}{(x_1^2 + y^2 + z_1^2)^{3/2}} dy \quad (4-12)$$

dimana A adalah luas poligon. Integrasi pers. (4-12) terhadap dy sehingga didapatkan

$$\Delta g = G\rho \frac{\Delta A}{z_1} \left(1 + \frac{y_1^2}{z_1^2}\right)^{-1} \left( \frac{y_2}{(x_1^2 - y_2^2 + z_1^2)^{1/2}} - \frac{y_1}{(x_1^2 - y_1^2 + z_1^2)^{1/2}} \right) \quad (4-13)$$

atau

$$\Delta g = G\rho \frac{\Delta A}{z_1} \left(1 - \frac{x_1^2}{z_1^2}\right)^{-1} \left( \frac{y_2}{R_{121}} - \frac{y_1}{R_{111}} \right)$$

dimana  $R_{121} = (x_1^2 + y_2^2 + z_1^2)^{1/2}$  dan  $R_{111} = (x_1^2 + y_1^2 + z_1^2)^{1/2}$ . Dengan menggunakan pers. (4-12), kita dapat menghitung efek gayaberat total yang disebabkan oleh poligon 2,5D.

#### 4.2. Pemodelan Inversi

Pemodelan inversi adalah teknik interpretasi data gayaberat dimana parameter-parameter model diestimasi secara tidak langsung dari suatu model yang diasumsikan. Model benda penyebab anomali diasumsikan dengan benda-benda sederhana seperti bola, batang vertikal, batang hirozontal, silinder horizontal, silinder vetikal, dan sesar. Anomali gayaberat model dihitung dan dibandingkan dengan anomali gayaberat hasil pengamatan. Proses ini dilakukan secara berulang-ulang sampai diperoleh perbedaan antara anomali gayaberat model dan anomali

gayaberat hasil pengamatan adalah minimum. Selisih dari keduanya, dapat dipakai sebagai identifikasi dalam merubah parameter awal, sampai mendapatkan model yang otimum, artinya anomali hitung mendekati anomali hasil pengamatan. Dalam metode inversi, perlu memperhitungkan turunan parsial terhadap parameter model.

Metoda inversi dapat dibedakan atas metode inversi linier dan inversi nonlinier. Inversi nonlinier dapat pula diklasifikasikan atas metode inversi nonlinier rendah (*weakly nonlinier*), nonlinier sedang (*quasi-nonlinier*) dan nonlinier tinggi (*highly-nonlinier*). Pengklasifikasian ini bergantung kepada hubungan antara perubahan dalam parameter model dan efeknya pada data pengamatan. Berikut ini akan dibahas inversi linier dan nonlinier saja secara garis besar saja.

#### 4.2.1. Inversi Linier

Problem dalam inversi linier dalam literatur biasanya diselesaikan dengan menggunakan aljabar linier. Sistem dari persamaan linier ini dipecahkan dengan bantuan beberapa algoritma.

Sepanjang gangguan model dari taksiran awal adalah kecil, kita mengharapkan bahwa hubungan antara perubahan pada parameter model dan efeknya pada data pengamatan adalah linier. Problem seperti itu diketahui sebagai nonlinier rendah dan dapat dilinierkan. Secara umum, hubungan antara perbedaan data yang diamati dengan data yang dihitung dengan parameter model dapat ditulis

$$y_i = \int_0^r A_i(r)x_i(r)dr \quad (4-14)$$

dimana  $y_i$  adalah perbedaan antara data yang diamati dengan data yang dihitung dari model awal,  $x_i(r)$  adalah perbedaan parameter model baru dan parameter model awal, dan  $A_i(r)$  adalah kernel yang dihitung terhadap taksiran awal. Dalam bentuk diskrit, pers.(4-14) ditulis

$$y_i = \sum_{j=1}^M A_{ij} x_j \quad (4-14)$$

Dalam kasus dimana pers. (4-14) adalah nonlinier, kita dapat melakukan linierisasi dengan menguraikannya kedalam deret Taylor disekitar nilai awal  $x_i^0$

$$y_i = A_i x_i^0 + \left( \frac{\partial A_i}{\partial x_i} \right)_{z_i^0} \delta x_i + \left( \frac{\partial^2 A_i}{\partial^2 z_i^2} \right)_{z_i^0} (\delta z_i)^2 + \dots \quad (4-16)$$

Dengan mengabaikan bentuk turunan suku kedua dan suku-suku tinggi, diperoleh

$$y_i - A_i x_i^0 = \left( \frac{\partial A_i}{\partial x_i} \right)_{z_i^0} \delta x_i \quad (4-17)$$

atau

$$Y = AX \quad (4-18)$$

dimana  $Y = y_i - A_i x_i^0$  beda vektor antara data yang diamati dengan data yang dihitung untuk model awal,  $x = \delta x_i$  adalah beda vektor antara parameter-parameter

dan  $A = \left( \frac{\partial A_i}{\partial x_i} \right)_{z_i^0}$  adalah matriks turunan parsial yang melambangkan efek pada

data akibat perubahan parameter.

Solusi dari pers. (4-18) dapat diturunkan dari metoda inversi least-squares sebagai berikut : Kalikan pers. (4-18) dengan  $A^T$  sehingga menghasilkan

$$(A^T A)x = A^T Y \quad (4-19)$$

dimana  $A^T$  adalah transpos dari matriks A. Kemudian nilai x yang diestimasi pada (4-19) dapat ditulis

$$\bar{x} = (A^T A)^{-1} A^T Y \quad (4-20)$$

dimana  $(A^T A)^{-1} A^T$  disebut inversi pseudo atau inversi Moore-Penrose tergeneralisasi (Dimri, 1992).

Sistem persamaan yang digambarkan oleh pers. (4-18) dapat dikatakan dalam keadaan 'overdetermined' atau underdetermined'. Sistem persamaan ini dikatakan overdetermined bila jumlah data yang diketahui lebih banyak dari pada jumlah parameter yang tidak diketahui. Solusi sistem seperti itu diberikan oleh pers. (4-18). Pada sisi lain, bila jumlah data yang diketahui lebih sedikit dari jumlah parameter yang tidak diketahui, maka sistem diberikan oleh pers. (4-18) dikatakan underdetermined. Dalam kasus ini, inversi pseudo memberikan solusi

$$\bar{x} = A^T (A^T A)^{-1} A^T Y \quad (4-21)$$

Dalam beberapa kasus, pengamatan dibuat dengan akurasi tinggi dibanding dengan yang lain. Solusi dikenal sebagai least-squares terbobot (the weighted least-squares) dan diberikan oleh

$$\bar{x} = (A^T W A)^{-1} A^T W Y \quad (4-22)$$

dimana  $W$  adalah matriks yang mendefinisikan kontribusi relatif dari masing-masing error individu terhadap error total, dan dikenal dengan nama *weightage*.

Matriks  $A^T A$  kadang-kadang singular atau mendekati singular, jadi inversi matriks tidak eksis atau perhitungannya tidak akurat. Perbaikan untuk menanggulangi situasi ini diusulkan dalam bentuk inversi least-squares teredam. Menurut Dimri (1992) metoda ini pertama kali diusulkan oleh Levenberg pada tahun 1944 dan kemudian oleh Marquardt pada tahun 1963. Algoritma inversi seperti ini dikenal sebagai algoritma Levenberg-Marquardt dan solusinya diberikan oleh

$$\bar{x} = (A^T A + \alpha I)^{-1} A^T Y \quad (4-23)$$

dimana  $\alpha$  adalah parameter redaman dan  $I$  adalah matriks identitas.

Perhitungan  $A^T A$  atau  $AA^T$  diselesaikan secara tidak langsung. Ada beberapa metoda klasik yang dapat digunakan untuk menyelesaikan matriks seperti ini seperti eliminasi Gauss, metoda dekomposisi Choleski dan metoda-metoda iterasi.

#### 4.2.1.1. Analisis Vektor Eigen

Misalkan kita menulis lagi set persamaan linier pada pers. (4-18)

$$Y = Ax \quad (4-24)$$

Solusi dari pers. (4-18) diberikan oleh

$$\bar{x} = A^{-1}Y \quad (4-25)$$

Dengan mensubstitusikan nilai Y dari pers. (4-24) ke dalam (4-25) memberikan

$$\bar{x} = A^{-1}Ax \quad (4-26)$$

dimana  $x$  adalah parameter model awal dan  $\bar{x}$  adalah parameter hitung

Masalah utama kemudian adalah mencari inversi dari matriks  $A$  dengan melakukan analisis terhadap vektor eigen dari  $A$ . Dalam literatur dikenal sebagai dekomposisi nilai singular dari matriks  $A$ . Berikut ini akan dibicarakan masalah dekomposisi nilai singular tersebut dan disingkat dengan SVD (singular value decomposition)

#### 4.2.1.2. Dekomposisi Nilai Singular

Lanczos (1961) dikutip Dimri (1990) telah memberikan deskripsi yang baik tentang dekomposisi nilai singular dari matriks  $A$ . Menurut Lanczos, diasumsikan sebuah matriks simetris  $S$  sebagai berikut

$$S = \begin{bmatrix} 0 & A \\ A^T & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} n \\ m \end{matrix} \quad (4-27)$$

dimana  $S$  adalah matriks Hermitian. Pers. (4-27) dapat diselesaikan untuk mencari nilai eigen dan vektor eigen dari  $S$

$$\begin{bmatrix} 0 & A \\ A^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \end{bmatrix} = \lambda_i \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \end{bmatrix} \begin{matrix} n \\ m \end{matrix} \quad (4-28)$$



Disini, kita mempunyai pembagian vektor eigen kedalam  $u_i$  dan  $v_i$ . Untuk nilai eigen non-zero, kita mendapatkan pasangan vektor eigen

$$Av_i = \lambda_i u_i \quad (4-29)$$

$$A^T u_i = \lambda_i v_i \quad (4-30)$$

Dengan mensubstitusi nilai  $v_i$  dari pers. (4-30) ke (4-29) menghasilkan

$$AA^T u_i = \lambda_i^2 u_i \quad (4-31)$$

Dengan cara yang sama, pengsubtitusian nilai  $u_i$  dari pers. (4-29) dan (4-30) ke (4-30) menghasilkan

$$A^T A v_i = \lambda_i^2 v_i \quad (4-32)$$

dimana matriks  $S$ , matriks  $A^T A$  dan  $AA^T$  adalah Hermitian. Nilai eigen adalah real dan vektor eigen adalah ortogonal. Misalkan matriks  $U$  dan  $V$  terdiri dari vektor eigen  $u_i$  dan  $v_i$ . Matriks  $U$  dan  $V$  dibagi kedalam  $U_p$  dan  $U_0$  dan matriks  $V$  dibagi kedalam  $V_p$  dan  $V_0$  dimana  $U_p$  dan  $V_p$  dibuat dari nilai eigen non-zero dan  $U_0$  dan  $V_0$  adalah dan nilai eigen zero. Misalkan kita memperkenalkan sebuah matriks diagonal  $\Lambda$  dimana elemennya adalah nilai eigen non-zero,  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ .

Jadi, pers. (4-29) untuk nilai eigen non-zero dapat ditulis sebagai

$$AV_p = U_p \quad (4-33)$$

dan untuk nilai eigen zero dalam matriks  $V$  adalah

$$AV_0 = 0 \quad (4-34)$$

Jadi, matriks  $A V$  terdiri dari matriks  $V_p$  dan  $V_0$  dapat ditulis sebagai

$$AV = A(V_p, V_0) \quad (4-35)$$

Dengan mensubstitusikan pers. (4-33) dan (4-34) ke (4-35) menghasilkan

$$V = (U_p, U_0) \begin{bmatrix} \Lambda_p & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4-36)$$

Kalikan (4-36) dengan  $V^T$  sehingga didapatkan

$$AVV^T = (U_p, U_0) \begin{bmatrix} \Lambda_p & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V^T \quad (5-37)$$

Sisi kanan dari pers. (4-37) tidak seimbang dengan sisi kiri. Oleh karena itu  $V^T$  diuraikan ke dalam komponen  $p$  dan zero, sehingga pers. (4-37) dapat ditulis

$$AVV^T = (U_p, U_0) \begin{bmatrix} \Lambda_p & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_p^T \\ V_0^T \end{bmatrix} \quad (5-38)$$

dimana sekarang sudah seimbang antara sisi kanan dan sisi kiri.

Karena sifat ortogonalitas, kita mempunyai  $VV^T = I$  dan pers. (4-38) dapat ditulis menjadi

$$A = U_p \Lambda_p V_p^T \quad (4-39)$$

dan dekomposisi nilai singularnya ditunjukkan pada Gambar 5.3.

$$\begin{pmatrix} \vdots \\ A \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vdots \\ U_p \\ \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_1 & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vdots \\ V_F^T \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Gambar 5.3. Dekomposisi nilai singular dari matriks A

#### 4.2.1.3. Operator Inversi Tergeneralisasi

Pada pembahasan sebelumnya kita mengatakan bahwa matriks A dapat difaktorisasikan sebagai berikut

$$A = UAV^T \quad (4-40)$$

dimana U dan V melambangkan ruang data dan ruang model secara berurutan.

Operator inversi, katakanlah B, dapat ditulis

$$B = VA^{-1}U^T \quad (4-41)$$

Kalikan pers.(4-41) dengan (4-40) memberikan

$$BA = VA^{-1}U^T UAV^T = I \quad (4-42)$$

dimana  $VV^T = I$  dan  $UU^T = I$ , karena U dan V adalah matriks ortogonal.

Jadi, B adalah sebuah operator inversi eksak. Secara rata-rata untuk satu nilai eigen zero, inversi dari operator tidak dapat dicari. Operator inversi dengan nilai eigen non-zero diberikan oleh

$$B_g = V_p \Lambda^{-1} U_p^T \quad (4-43)$$

dimana  $V_p$  dan  $U_p$  adalah vektor eigen non-zero. Operator inversi  $B_g$  disebut operator inversi tergeneralisasi disingkat GIO (the generalized inverse operator) dan dekomposisi nilai singularnya ditunjukkan pada Gambar 5.4.

$$B_g = \left( V_p \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_1 & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_p \end{pmatrix} U_p^T \right)$$

Gambar 5.4. Dekomposisi nilai singular dari operator inversi tergeneralisasi

Misalkan kita ingin menguji sifat-sifat dari GIO dalam ruang model dan ruang data.

Dalam ruang model parameter yang diestimasi adalah

$$\bar{x} = B A x \quad (4-44)$$

Salah satu strategi yang dapat diusulkan untuk membuang nilai eigen zero adalah menghapus nilai tersebut dari analisis. Kemudian faktorisasi dari matriks B dan A dengan vektor eigen non-zero adalah

$$B = V_p \Lambda_p^{-1} U_p^T \quad (4-45)$$

$$A = U_p \Lambda_p V_p^T \quad (4-46)$$

Dengan mensubstitusikan pers. (4-45) dan (4-46) ke (4-44) menghasilkan parameter yang diestimasi sebagai berikut

$$\bar{x} = V_p V_p^T X \quad (4-47)$$

Matriks  $V_p^T V_p$  disebut matriks resolusi. Jika matriks resolusi adalah matriks identitas, maka solusinya adalah unik. Dengan kata lain, resolusi adalah sempurna. Tidak seperti  $VV^T$ , matriks ini bukan matriks identitas karena  $V$  non-simetrik. Secara umum,  $V_p V_p^T$  adalah fungsi 'bell-shaped' dengan puncak disekitar elemen diagonal. Ukuran atau pemekaran elemen diagonal dari  $V_p V_p^T$  dapat diukur dari resolusi dan diberikan dalam least-squares berikut

$$\text{Pemekaran } (r) = [r_{ij} - I_{ij}]^2 \quad (4-48)$$

Bila matriks resolusi  $r$  sama dengan identitas matriks, maka pemekaran  $(r)$  menjadi nol. Keberadaan ruang  $U_0$  dan  $V_0$  puncak dikenal sebagai titik lemah (blind spot). Hal ini adalah penyebab dari utama dari ketidak-unikan.

Resolusi dalam ruang data dibentuk sebagai matriks densitas informasi. Matriks ini adalah suatu ukuran ketidak-cocokan antara nilai data yang diamati dengan nilai data yang diprediksi.

Dari operator inversi tergeneralisasi, dapat ditulis hubungan antara data yang diprediksi dengan data yang diamati

$$\begin{aligned}
 \bar{x} &= A^{-1}Ax \\
 &= B.Ax \\
 &= BY
 \end{aligned}
 \tag{4-50}$$

Kalikan pers. (4-50) dengan matriks A, didapat

$$A\bar{x} = ABY = Y \tag{4-51}$$

Dengan mensubstitusikan nilai A dan B dari pers. (4-45) dan (4-46) ke (4-51) menghasilkan

$$\bar{Y} = U_p U_p^T Y \tag{4-52}$$

Matriks  $U_p U_p^T$  dikenal sebagai matriks densitas informasi. Interpretasi dari matriks ini adalah sebagai berikut : Jika  $U_p U_p^T$  adalah matriks identitas maka terdapat kecocokan antara nilai data yang diamati dengan nilai data yang diprediksi. Jika matriks ini bukan matriks identitas, kemudian terdapat ketidak-cocokkan antara data yang diamati dengan data yang diprediksi.

#### 4.2.2. Inversi Nonlinier

Seperti sudah dijelaskan sebelumnya, pengklasifikasikan metode inversi didasarkan atas hubungan antara gangguan kecil terhadap model dan efeknya terhadap data pengamatan. Jika semuanya dicatat, ada empat kemungkinan bentuk hubungan antara gangguan dalam model dan efeknya pada data.

(1) Hubungan tersebut linier seperti ditunjukkan pada pers. (4-14). Pada tipe ini peluang fungsi densitas terhadap ketidak-cocokan pada data adalah fungsi Gaussian. Sangat banyak literatur yang tersedia untuk mencari solusi dari hubungan linier seperti ini.

(2) Hubungannya tidak linier, tetapi dapat dilinierkan di sekitar referensi atau model *priori* ( $x_{prior}$ ) sebagai berikut

$$F(x) = F(x_{prior}) + A_0(x - x_{prior}) \quad (4-53)$$

dimana  $Y = F(x)$  adalah hubungan antara data dan model,  $F$  melambangkan operator nonlinier beroperasi pada model untuk membangun ruang data dan  $A$  adalah operator turunan terhadap elemen-elemen

$$A_0 = \left( \frac{\partial F}{\partial x} \right)_{x_{prior}} \quad (4-54)$$

Dalam tipe ini peluang fungsi densitas terhadap ketidak-cocokan dari data didekati dengan fungsi Gauss. Ini merupakan kasus paling sederhana dari kasus nonlinier dan dikenal dengan nonlinier lemah. Solusinya telah didiskusikan secara panjang lebar pada pembahasan sebelumnya.

(3) Hubungan adalah nonlinier sedang. Dalam kasus ini hubungan dapat dilinierkan terhadap suatu referensi atau model *priori* dari titik sekitar maksimum dimana ada sebuah minimum dari sebuah fungsi misfit antara data pengamatan dan data prediksi.

$$F(x) = F(x_{ML}) + A_\infty(x - x_{ML}) \quad (4-53)$$

dimana  $A_{\infty}$  adalah operator turunan dengan elemen  $A_{\infty} = \left( \frac{\partial a}{\partial X} \right)_{x_{ML}}$ ,  $x_{ML}$  adalah titik kemungkinan maksimum pada minimum dari fungsi misfit atau fungsi objektif dimana gradient akan berakhir.

Titik  $x_{ML}$  dicari dengan meminimisasi fungsi misfit menggunakan sebuah algoritma iterasi

$$x_{n+1} = x_n + \delta x_n \quad (4-54)$$

dimana  $x_n$  adalah titik awal dan  $x_{n+1}$  adalah titik baru. Metoda gradient dapat digunakan untuk mencari arah turunannya (descent).

(4) Hubungannya adalah nonlinier tinggi dan tidak dapat dilinerkan. Dalam tipe ini, peluang dari fungsi densitas ketidak-cocokan pada data adalah jauh dari fungsi Gaussian. Metoda trial dan error dapat diaplikasikan untuk mencari solusinya.

#### 4.2.3. Aplikasi Metoda Inversi Untuk Data Gayaberat

Contoh numerik berikut ini menjelaskan aplikasi dari dekomposisi nilai singular untuk data gayaberat. Misalkan kita meninjau sebuah contoh sederhana dari anomali gayaberat dari benda berbentuk silinder di bawah permukaan. Anomali gayaberatnya diberikan oleh

$$g = 2\pi GR^2 \rho \frac{z}{x^2 + z^2} \quad (4-55)$$



dimana  $R$  adalah radius dari silinder,  $z$  adalah kedalaman silinder dari permukaan,  $\rho$  adalah kontras densitas.

Misalkan kita mengawali dengan parameter  $R$ ,  $z$  dan  $\rho$  dan turunan parsialnya terhadap parameter-parameter awal tersebut adalah .

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial R} &= 4\pi GR\rho \frac{z}{x^2 + z^2} \\ \frac{\partial g}{\partial \rho} &= 2\pi GR^2 \frac{z}{x^2 + z^2}\end{aligned}\quad (4-56)$$

$$\frac{\partial g}{\partial z} = 2\pi GR\rho z \left\{ \frac{1}{x^2 + z^2} - \frac{2z^2}{(x^2 + z^2)^2} \right\}$$

Matriks transformasi hasil akan singular jika dua kolom dari matriks adalah sebanding dengan masing-masing lainnya. Dalam kasus ini, konstanta perbandingan adalah  $R/2\rho$ .

Misalkan kita mengasumsikan parameter model awal adalah  $R = 1,0$  unit,  $\rho = 1,0$  unit dan  $z = 10,0$  unit. Matriks original yang terdiri dari turunan parsial dibentuk dengan menginisialisasi terhadap model awal dan hasilnya adalah

$$\begin{bmatrix} 0,198 & 0,099 & -0,186 \\ 0,160 & 0,080 & -0,120 \\ 0,100 & 0,050 & -0,045 \end{bmatrix}$$

Kita melihat bahwa nilai dalam kolom kedua adalah setengah dari nilai pada kolom pertama, oleh karena itu matriks adalah singular. Inversi sederhana yang dibentuk pada matriks seperti di atas akan meledakkan solusi. Oleh karena itu dekomposisi

nilai singular dari matriks dibentuk untuk mencari solusi. Dekomposisi nilai singular dari matriks di atas memberikan hasil sebagai berikut

No	Nilai Singular	Nilai Normalisasi
1	3784,05772307	1
2	365,38629980	0,096559
3	0,0	$3,7453 \times 10^{-13}$

Vektor eigennya diberikan sebagai berikut

$$U = \begin{bmatrix} -0,76 & -0,52 & 0,39 \\ -0,57 & 0,25 & -0,78 \\ -0,31 & 0,82 & 0,49 \end{bmatrix}$$

dan

$$V = \begin{bmatrix} -0,72 & 0,53 & 0,45 \\ -0,36 & 0,26 & -0,89 \\ 0,59 & 0,81 & -0,00 \end{bmatrix}$$

Dalam hasil di atas kita mengamati bahwa nilai eigen ketiga adalah nol. Untuk mencari resolusi matriks, kita menghapus nilai eigen ketiga dan dimisalkan dengan vektor eigen, sehingga resolusi matriks dari  $V^T V$  dicari dan hasilnya diberikan dibawah ini

$$\begin{bmatrix} 0,7993 & 0,3970 & 0,0045 \\ 0,3970 & 0,1970 & -0,0018 \\ 0,0045 & 0,0018 & 1,0042 \end{bmatrix}$$

Oleh karena itu parameter estimasi dapat ditentukan yaitu

$$\bar{x} = V^T V x$$

$$\bar{x} = V^T V x$$

$$\begin{bmatrix} R \\ \rho \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,7993 & 0,3970 & 0,0045 \\ 0,3970 & 0,1970 & -0,0018 \\ 0,0045 & 0,0018 & 1,0042 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1,0 \\ 1,0 \\ 10,0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,2008 \\ 0,5762 \\ 10,0482 \end{bmatrix}$$

Dari matriks diatas kita dapat mengestimasi parameter-parameter tadi yaitu  $R = 1,2008$ ,  $\rho = 0,576$  dan kedalaman  $z = 10,0482$ . Untuk beberapa tingkatan parameter kedalaman dapat diestimasi. Radius dan densitas tidak dapat diestimasi secara akurat. Estimasi yang akurat dapat dicapai dengan menambahkan persamaan kendala seperti nilai yang diketahui, dan berikut prosedur yang sama untuk menentukan nilai eigen, vektor eigen dan resolusi matriks dimana kemudian akan menjadi identitas matriks.

Disamping metoda dekomposisi nilai singular, masih banyak metoda-metoda inversi lain yang dapat digunakan untuk manafsirkan data gayaberat. Namun yang menjadi permasalahan utama dari setiap metoda inversi ialah adanya keterbatasan memori komputer dalam menghitung resolusi dari matrik ukuran besar. Untuk itu perlu dikembangkan algoritma-algoritma tertentu agar dapat dicapai metoda yang efisien, murah dan mudah digunakan.

## DAFTAR PUSTAKA

- Dimri, V., 1992, *Deconvolution and Inverse Theory: Application to Geophysical Problems*, Elsevier, New York.
- Dobrin, M. B., and Savit, C. H., 1988. *Introduction to Geophysical Prospecting*, McGraw-Hill Book Company, New York.
- Ervin, C. P., 1977, *Theory of Bouguer Anomaly*, *Geophysics*, Vol. 42. No. 7
- Fauzi, A., 1997, *Penafsiran Kedalaman Sesar Kerinci Dari Turunan Horizontal Pertama Anomali Gayaberat Residual Rata-rata Berjalan Menggunakan Pendekatan Kuadrat Terkecil*, Tesis Magister, Program Pascasarjana-Institut Teknologi Bandung.
- Grant, F. S., and West, G. F., *Interpretation Theory in Applied Geophysics*, McGraw-Hill Book Company, New York.
- Heiskanen, W. A., and Meinesz, F. A. V., 1958, *The Earth and Its Gravity Field*, McGraw-Hill Book Company, New York.
- Kadir, W.G.A., 1997, *Dekonvolusi Anomali Gayaberat Bouguer dan Derivatif Vertikal Orde Dua Dengan Menggunakan Persamaan Dasar Potensial, Studi Kasus Pulau Sumatra*, Disertasi, Fakultas Pascasarjana, Institut Teknologi Bandung.
- Komisi Gayaberat Nasional, 1992, *Buku Petunjuk untuk Operator Gravimeter Lacoste & Romberg*.
- LaFehr, T. R., 1991, *Standardization in Gravity Reduction*, *Geophysics*, Vol. 56, No. 8.
- Longman, I. M., 1959, *Formula for Computing the Tidal Accelerations due to the Moon and the Sun*, *Journal Geophysical Research*, Vol. 64, No. 12.
- Nettleton, L. L., 1976, *Gravity and Magnetiks In Oil Prospecting*, McGraw-Hill Book Company, New York.
- Talwani, M., Worzel, J.W., and Landisman, M., 1959, *Rapid gravity computations for 2-D bodies with application to the Mendicino submarine fractures zone*, *J.Geophy.Res.*, 64,49-59, 1959.

Telford, W. M., Geldart, L. P., Sheriff, R. E., and Key, D. A., 1976, *Applied Geophysics*, Cambridge University Press, Cambridge.

Torge, W., 1989, *Gravimetry*, Walter de Gruyter, Berlin.

Tsuboi, C., 1983, *Gravity*, George Allen & Unwin, London.