A
156/95

PENGANTAR

GEOMETRI BIDANG

PERPUSTAKAAN IKIP PADANG
TELAH TERDAFTAR
JUDUL : PENGANTAR GEOMETRI BIDANG
PENGARANG : DRS. SYAHRIAL SYARIF, MSc.
JENIS : BUKU ILMIAH
No. DAFTAR : 147/PT57/FK.16/KKI/90
TANGGAL : 9 MEI 1990
KEPALA,
DRS. NAHARUDDIN HR. LENGGANA
NIP. 130 109 455.

PERPUSTAKAAN IKIP PADANG
24-9-95
KKI
1408/hd/95-93(+1)
516 Yun 93

Oleh

Drs. Syahrial Syarif
Drs. Nurlius

DOSEN FPMIPA IKIP PADANG

Diperbanyak Oleh :
BADAN PENERBIT FAKULTAS PENDIDIKAN MATEMATIKA
DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
(FPMIPA) IKIP PADANG

INSTITUT KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN
(I K I P) PADANG

1990

KATA PENGANTAR

Buku ini berjudul "**Pengantar Geometri Bidang**", karena isinya merupakan bagian-bagian dasar dari Geometri Datar yang perlu dikuasai, sehingga memudahkan mempelajari Geometri selanjutnya.

Buku Pengantar Geometri Bidang ini, menurut pendapat penulis akan banyak manfaatnya dan dapat dipergunakan oleh mahasiswa dan guru-guru matematika SMTP dan SMTA dalam memantapkan ilmunya pada bagian dasar dari Geometri Bidang.

Terima kasih penulis sampaikan kepada Badan Penerbit FPMIPA IKIP Padang yang telah memperbanyak buku ini dalam bentuk yang sekarang ini.

Tiada gading yang tak retak, maka diharapkan agar para teman pemakai buku ini, dapat menyampaikan kepada penulis segala kritikan yang membangun, sehingga buku ini dapat lebih disempurnakan.

Terima kasih.

Padang, Februari '1990

P e n u l i s.

DAFTAR ISI

halaman

KATA PENGANTAR ii
DAFTAR ISI iii
BAB I : GARIS LURUS 1
A. Beberapa Pengertian 1
B. Sudut 2
C. Garis-garis Sejajar 5
Soal-Soal 11
BAB II : SEGITIGA 12
A. Garis-garis Istimewa pada Segitiga 13
B. Jenis-jenis Segitiga 13
C. Segitiga-segitiga yang Sama dan Sebangun 16
D. Segitiga Sama Kaki 19
E. Segitiga Siku-siku 21
F. Ketidaksamaan Dalam Segitiga 26
Soal-Soal 29
BAB III : SEGI-EMPAT 31
Jenis-Jenis Segi-Empat 31
BAB IV : LUAS BANGUN DATAR 36
A. Luas Persegi Panjang 36
B. Luas Jajaran Genjang 37
C. Luas Segitiga 37
D. Luas Belah Ketupat 38
E. Luas Trapesium 39
Soal-Soal 39
BAB V : PERBANDINGAN SEHARGA SEGMEN GARIS-SEGMEN GARIS. 44
Soal-Soal 49
BAB VI : MELUKIS BANGUN DATAR 52
Soal-Soal 61
BAB VII : PERBANDINGAN BANGUN DAN KESEBANGUNAN 63
A. Hasil Perbanyakan Titik 63
B. Hasil Perbanyakan Potongan Garis 63
C. Hasil Perbanyakan Sudut 64
D. Soal-Soal 65

E. Segitiga-Segitiga Yang Sebangun..... 66
F. Soal-Soal..... 71
BAB VIII: DALIL PYTHAGORAS..... 72
A. Dalil Pythagoras..... 72
B. Triple Pythagoras..... 77
C. Rumus-Rumus Pada Segitiga..... 78
Soal-Soal..... 84
BAB IX : DALIL MENELAOS DAN DE CEVA..... 85
A. Perbandingan Seharga Segmen Garis-Segmen Garis..... 85
B. Garis Transversal..... 85
C. Dalil Menelaos..... 86
D. Dalil De Ceva..... 88
Soal-Soal..... 90
DAFTAR PUSTAKA..... 92

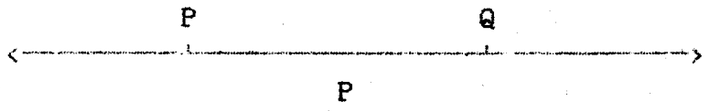
BAB I

GARIS LURUS

A. Beberapa Pengertian. (Balai Penataran Guru, hal.2)

Sebuah titik selalu dinyatakan dengan huruf besar, misalnya titik A, titik B dan sebagainya.

1. **Garis Lurus**: Secara umum garis lurus digambarkan dengan memberi tanda panah pada ujung dan pangkal garis tersebut.

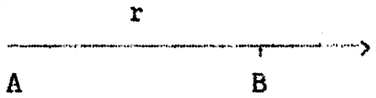


Gambar 1.

Garis lurus dapat dinyatakan dengan dua cara:
Pertama dinyatakan dengan huruf kecil, misalnya garis p, garis l dan sebagainya.
Kedua dengan meletakkan dua huruf besar pada garis itu, misalnya garis PQ.

Garis lurus yang digambarkan pada gambar 1 di atas, menyatakan bahwa garis itu tak terhingga panjangnya. Atau dengan kata lain garis lurus tidak mempunyai titik pangkal dan tidak mempunyai titik ujung.

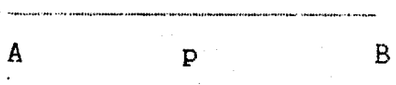
2. **Setengah Garis Lurus**: Setengah garis lurus digambarkan dengan memberi anak panah pada ujungnya. Setengah garis lurus sering pula disebut dengan *sinar*.



Gambar 2.

Dari gambar 2, setengah garis lurus AB atau setengah garis lurus r, mempunyai titik awal A dan tidak mempunyai titik ujung.

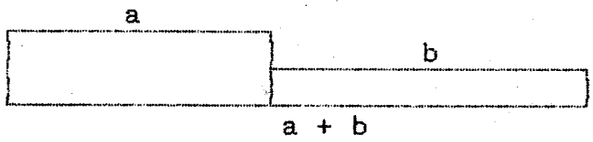
3. **Sepotong Garis**: Yaitu garis yang mempunyai titik awal dan titik akhir.



Gambar 3.

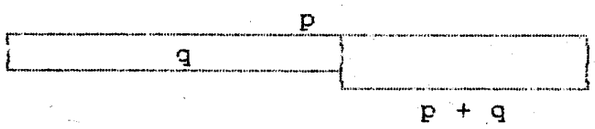
Sepotong garis, sering pula disebut dengan *segmen garis* atau *penggal garis*.

4. **Jumlah dan Selisih Dua Buah Potongan Garis**: Jumlah potongan garis a dan b diperoleh dengan jalan memperpanjang a dengan b atau memperpanjang b dengan a seperti terlihat pada gambar berikut:



Gambar 4.

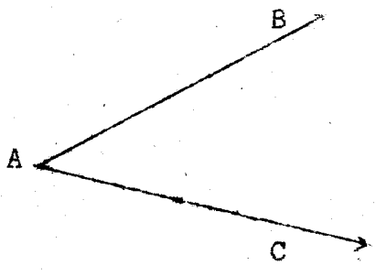
Sedangkan selisih dari dua potongan garis p dan q, berarti *"berapa lebih panjangnya p dari pada q"* atau *"berapa lebih pendeknya q dari pada p"* dimana p > q.
Dari pengertian ini berarti bahwa selisihnya itu selalu positif.



Gambar 5.

B. **Sudut**.

Sebuah sudut ialah sebuah bangun yang dibentuk oleh dua buah setengah garis lurus yang titik pangkalnya berimpit.



Gambar 6.

A disebut dengan titik sudut.

AB dan AC disebut dengan kaki-kaki sudut A.

Sudut biasa dilambangkan dengan " ∠ " dan selalu diikuti sudut yang dimaksud, misalnya ∠A, ∠B dan sebagainya.

1. Pembagian Sudut.

Sudut dapat dibedakan atas:

a. Sudut berat kedalam, yaitu sudut yang lebih besar dari 180^o.

b. Sudut lurus, yaitu sudut yang besarnya 180^o.

c. Sudut berat keluar, yaitu sudut yang lebih kecil dari 180^o.

Sudut berat keluar terbagi pula atas:

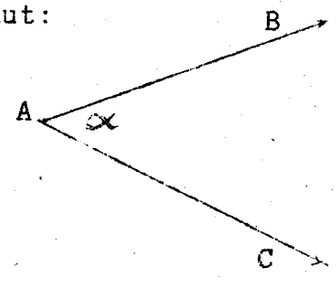
- Sudut tumpul, yaitu sudut yang besar dari 90^o.
- Sudut siku-siku, yaitu sudut yang besarnya 90^o.
- Sudut lancip, yaitu sudut yang lebih kecil dari 90^o.

Sudut-Sudut Sejenis.

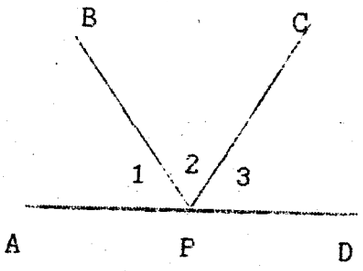
Sudut-sudut sejenis yaitu apabila sudut-sudut itu termasuk golongan yang sama.

Umpamanya 2 buah sudut lancip, maka kedua sudut itu disebut sejenis.

Untuk menyatakan atau menyebutkan suatu sudut ada beberapa cara yang dapat dipakai, perhatikanlah gambar berikut:



Gambar 7.



1 Sudut BAC atau sudut CAB

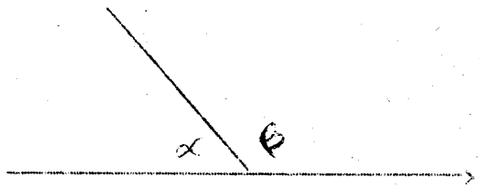
2 Sudut A

3 Sudut ∝

$\angle APB = \angle P_1 = \angle BPA.$

2. **Pelurus dan Penyiku**.

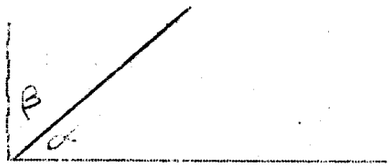
Pelurus (suplemen), yaitu penambah suatu sudut untuk menjadikan sudut lurus.



Gambar 8.

α adalah pelurus dari β , maka $\alpha = 180^\circ - \beta$ atau β adalah pelurus dari α , maka $\beta = 180^\circ - \alpha$.

Penyiku (komplemen), yaitu penambah suatu sudut untuk membentuk sudut siku-siku.



Gambar 9.

α adalah penyiku dari β , atau β adalah penyiku dari α .

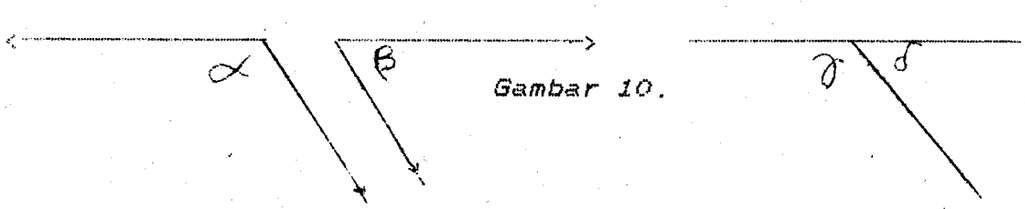
Jadi: $\alpha = 90^\circ - \beta$ atau

$\beta = 90^\circ - \alpha$.

Sudut bersisian; yaitu sudut-sudut yang salah satu kakinya bersekutu, sedangkan kaki-kaki yang lain segaris.

Sudut-sudut komplementer; yaitu dua buah sudut yang berjumlah 90°.

Sudut-sudut suplementer; yaitu dua buah sudut yang jumlahnya 180°.

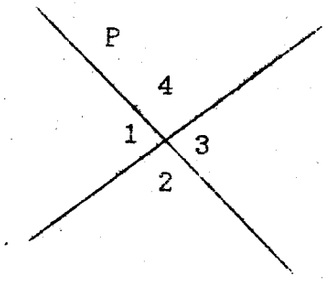


Gambar 10.

Pada gambar 10 di atas:
α dan β adalah sudut-sudut suplementer sedangkan γ dan δ merupakan sudut-sudut beririsan.
Dari pengertian di atas, maka sudut-sudut yang bersisian juga merupakan sudut-sudut suplementter.

Sudut-sudut bertolak belakang; yaitu sudut-sudut yang kaki-kakinya terletak pada perpanjangan yang satu dengan yang lainnya.

Dalil 1: Dua buah sudut bertolak belakang sama besar.



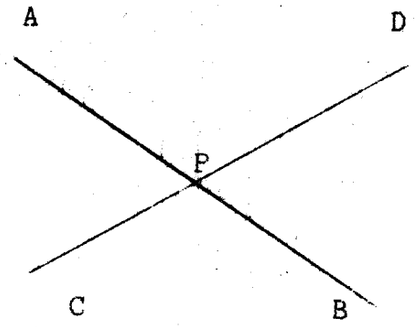
Gambar 11.

Buktikan $\angle P_1 = \angle P_3$.
Bukti:
$\angle P_1 + \angle P_4 = 180^o$
$\angle P_1 = 180^o - \angle P_4$ .....(1)
$\angle P_3 + \angle P_4 = 180^o$
$\angle P_3 = 180^o - \angle P_4$ .....(2)
Dari (1) dan (2) terbukti:
$\angle P_1 = \angle P_3$.

C. Garis-Garis Sejajar.

Dua buah garis lurus yang berpotongan membentuk suatu sudut yang tertentu besarnya, misalnya 30^o, 40^o, 42^o dan sebagainya.
Untuk menentukan sudut antara dua buah garis yang berpotongan diberikan batasan sebagai berikut:
Batasan: Sudut antara 2 buah garis yang berpotongan adalah sudut lancip yang dibentuk oleh kedua garis itu.

Disamping batasan yang telah diberikan di atas, kadang-kadang sudut yang dimaksudkan, sesuai dengan kegunaan dan tujuannya, maka kita sebutkan sudut yang mana dinyatakan oleh kedua garis yang berpotongan itu.



Gambar 12.

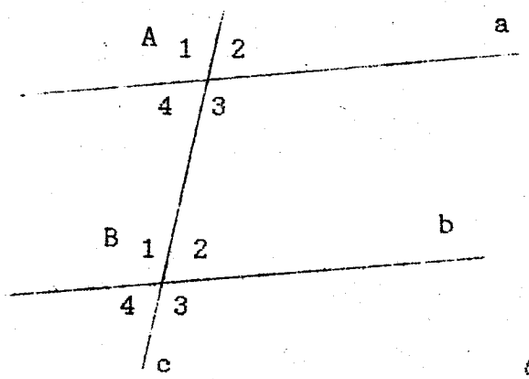
Kalau tidak ditentukan sudut mana yang diingini sesuai dengan petunjuk soal, maka yang dimaksud pada kedua garis yang berpotongan di atas, adalah ∠APC atau ∠BPD, karena sudut itulah yang terkecil.

Jadi berdasarkan batasan yang telah diberikan di atas, maka sudut antara 2 buah garis yang berpotongan paling besar adalah 90^{o}. Pada keadaan yang demikian dikatakan garis berpotongan tegak lurus.

Dua buah garis lurus pada suatu bidang datar, berkemungkinan:

1. Sejajar,jika kedua garis lurus itu tidak mempunyai titik yang bersekutu.
2. Berpotongan, jika kedua garis itu mempunyai hanya satu titik persekutuan.
3. Berimpit, jika semua titik-titik pada kedua garis itu bersekutu.

Jika dua buah garis a dan b dipotong oleh garis ke tiga,maka dijumpai bermacam-macam sudut seperti berikut:



Gambar 13.

1. **Sudut dalam-sudut dalam**, yaitu semua sudut yang terletak antara garis a dan garis b.

   Pada gambar yaitu $\angle A_3$, $\angle A_4$, $\angle B_1$ dan $\angle B_2$.

2. **Sudut luar-sudut luar**, yaitu semua sudut yang terletak disebelah luar dari garis a dan garis b.

   Pada gambar yaitu, $\angle A_1$, $\angle A_2$, $\angle B_3$ dan $\angle B_4$.

3. **Sudut-sudut berseberangan**, yaitu sudut-sudut yang terletak disebelah menyebelah garis c.

4. **Sudut-sudut sepihak**, yaitu sudut-sudut yang terletak pada pihak yang sama dari garis c.

Dari pengertian macam-macam sudut di atas, didapat pula hubungan-hubungan berikut:

1. **Sudut dalam berseberangan**, yaitu antara $\angle A_3$ dan $\angle B_1$ atau antara $\angle A_4$ dan $\angle B_2$.

2. **Sudut luar luar berseberangan**, yaitu antara $\angle A_1$ dan $\angle B_3$, atau antara $\angle A_2$ dan $\angle B_4$.

3. **Sudut dalam sepihak**, yaitu antara $\angle A_3$ dan $\angle B_2$ atau antara $\angle A_2$ dan $\angle B_3$.

4. **Sudut luar sepihak**, yaitu antara $\angle A_1$ dan $\angle B_4$ atau antara $\angle A_2$ dan $\angle B_3$.

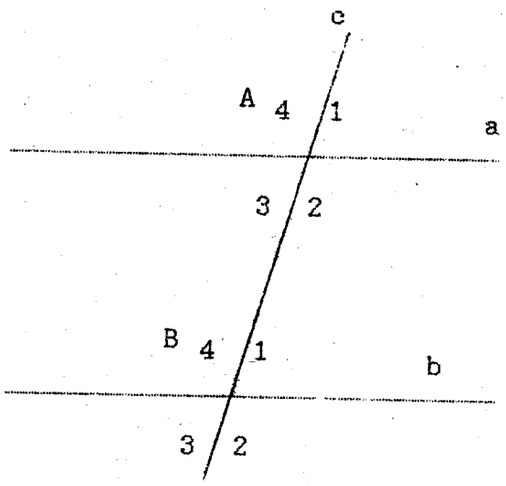
Aksioma I: *Kalau dua buah garis lurus dipotong olehgaris ke tiga membentuk dua buah sudut sehadap yang sama besar, maka kedua garis itu sejajar.*

Berdasarkan aksioma di atas, maka didapatkan ketentuan-ketentuan berikut:

Dalil 2: Kalau dua buah garis dipotong oleh garis ketiga, membentuk:

a. dua buah sudut dalam berseberangan sama besar.
b. dua buah sudut luar berseberangan sama besar.
c. dua buah sudut dalam sepihak berjumlah 180^o.
d. dua buah sudut luar sepihak berjumlah 180^o, maka kedua garis itu sejajar.

Untuk pembuktian dalil di atas didasarkan kepada dalil 1 dan aksioma I, seperti berikut:



Gambar 14.

a). Diketahui: $\angle A_3 = \angle B_1$

Buktikan a//b.

Bukti:

$\angle A_1 = \angle A_3$ (bertolak belakang).

$\angle A_3 = \angle B_1$ (diketahui).

$\therefore \angle A_1 = \angle B_1$.

Sesuai dengan aksioma I, maka a//b.

b). Diketahui: $\angle A_1 = \angle B_3$.

Buktikan: a//b.

Bukti:

$\angle A_1 = \angle B_3$ (diketahui)

$\angle B_1 = \angle B_3$ (bertolak belakang)

Jadi $\angle A_1 = \angle B_1$

Sesuai dengan aksioma I, maka a//b.

Untuk bukti c dan d, cobalah kerjakan sendiri.

Kebalikan aksioma I dan dalil 2 di atas juga berlaku yaitu:

Aksioma II: *Jika dua buah garis sejajar dipotong oleh garis ke tiga, maka sudut-sudut sehadapnya sama besar.*

Dalil 3: Jika 2 buah garis sejajar dipotong oleh garis ke-tiga, maka:

a. Sudut dalam berseberangan sama besar.

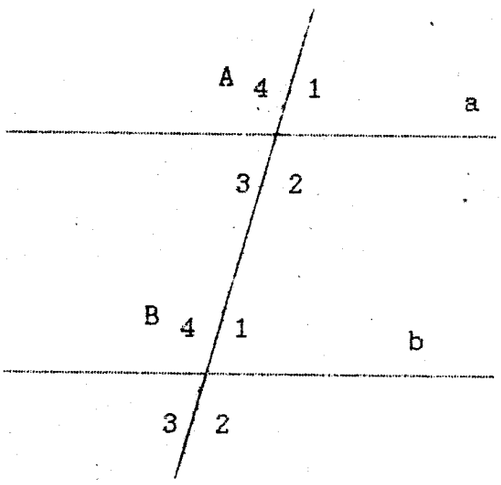
b. Sudut luar berseberangan sama besar.

c. Sudut dalam sepihak berjumlah 180^o.

d. Sudut luar sepihak berjumlah 180^o.

Pembuktian dalil di atas dengan mudah dapat pula dibuktikan.

Perhatikan gambar berikut:



Gambar 15.

Diketahui: a//b.

Buktikan: a). $\angle A_3 = \angle B_1$

b). $\angle A_1 = \angle B_3$

c). $\angle A_2 + \angle B_1 = 180^o$

d). $\angle A_1 + \angle B_2 = 180^o$.

Bukti:

a). Karena a//b, maka $\angle A_1 = \angle B_1$ (aks.II), sedangkan $\angle A_1 = \angle A_3$ (bertolak belakang)

$\therefore \angle A_3 = \angle B_1$.

b). Karena a//b, maka $\angle A_1 = \angle B_1$ (aks.II), sedangkan $\angle B_3 = \angle B_1$ (bertolak belakang).

$\therefore \angle A_1 = \angle B_3$.

c). Karena a//b, maka $\angle A_1 = \angle B_1$ (aks.II), $\angle A_1 + \angle B_2 = 180^o$ (bersisian).

$\therefore \angle A_2 + \angle B_1 = 180^o$.

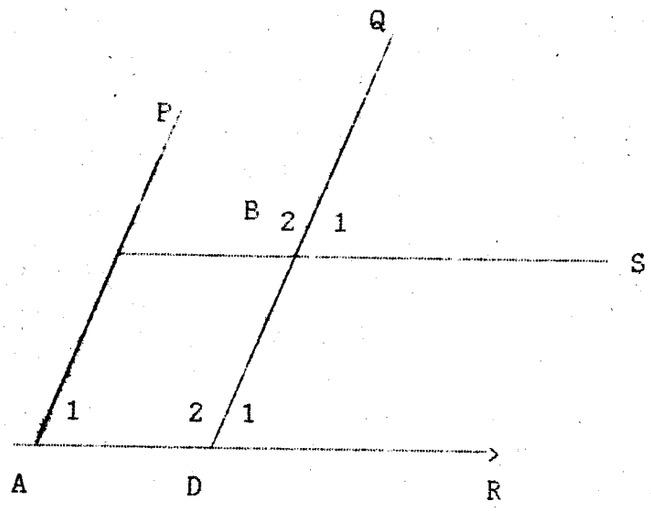
d). Karena a//b, maka $\angle A_1 = \angle B_1$ (aks.II), sedangkan $\angle B_1 + \angle B_2 = 180^o$ (bersisian).

$\therefore \angle A_1 + \angle B_2 = 180^o$.

Dalil 4: Kalau kaki-kaki dua buah sudut sepasang-sepasang sejajar, maka:

a). Sudut yang sejenis sama besar.

b). Sudut yang tidak sejenis berjumlah 180^{o}.



Gambar 16.

Dari gambar

Diketahui: BQ//AP, BS//AR.

Buktikan: a). $\angle B_1 = \angle A_1$

b). $\angle B_2 + \angle A_1 = 180^{o}$.

Bukti: Perpanjangan QB sampai memotong AR di D.

a). Karena AP//DQ, maka $\angle A_1 = \angle D_1$ dan $\angle B_1 = \angle D_1$.
Jadi $\angle A_1 = \angle B_1$.

b). Demikian pula $\angle B_2$ adalah pelurus dari $\angle B_1$, sedangkan $\angle A_1 = \angle B_1$.
Jadi $\angle A_1 + \angle B_2 = 180^{o}$.

Soal-Soal:

1. Garis a sejajar dengan garis b. Kedua garis itu dipotong oleh garis c. Jika dua sudut dalam yang terletak pada satu pihak garis c berbanding 5 :7.Hitunglah kedelapan sudut-sudut itu.

2. Penyiku dan pelurus suatu sudut berbanding seperti 2 : 5 Tentukanlah besar sudut itu.

3. Dua buah sudut jumlahnya = a°. Pelurus masing-masing sudut itu berbanding seperti b : c.
   Tentukanlah besar masing-masing sudut itu.

4. Jumlah sudut A dan sudut B = 50°, sedangkan $\angle A$ penyiku dari sudut C. Jika $\angle A$ berbanding $\angle C$ = 1 : 2.
   Tentukanlah besar sudut B.

1. **Segitiga lancip**, yaitu segitiga yang ketiga sudutnya kecil dari 90^{o} atau lancip.
2. **Segitiga siku-siku**, yaitu segitiga yang salah satu sudutnya = 90^{o}
3. **Segitiga tumpul**, yaitu segitiga yang salah satu sudutnya besar dari 90^{o} (tumpul).

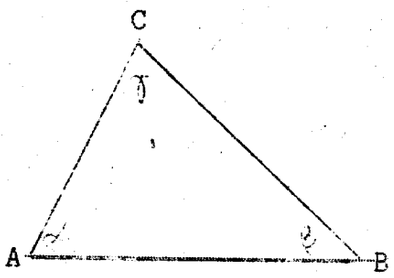
b. Ditinjau dari masing-masing sisinya, maka segitiga itu dapat pula dibedakan atas:
1. **Segitiga sembarangan**, yaitu segitiga yang ketiga sisinya berbeda panjangnya.
2. **Segitiga sama kaki**, yaitu segitiga yang dua buah sisinya sama panjang.
3. **Segitiga sama sisi**, yaitu segitiga yang ketiga sisinya sama panjang.

Penggabungan dari kedua peninjauan di atas, maka didapatkan:
Segitiga siku-siku sembarangan, segitiga siku-siku sama kaki, segitiga tumpul sembarangan, segitiga tumpul sama kaki, segitiga lancip sembarangan, segitiga lancip sama kaki (segitiga sama kaki) dan segitiga lancip sama sisi (segitiga sama sisi).

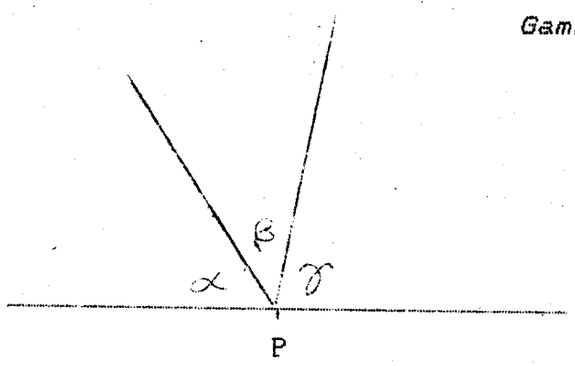
Dalil 5: Jumlah sudut-sudut suatu segitiga 180^{o}.

Pembuktian dalil 5 di atas, tidaklah begitu sukar.
Pada pengajaran tingkat SD, pembuktiannya diperagakan dengan penggabungan ketiga sudut segitiga itu, sehingga jumlah ketiga sudut segitiga itu membentuk suatu sudut lurus.

Perhatikan gambar berikut:

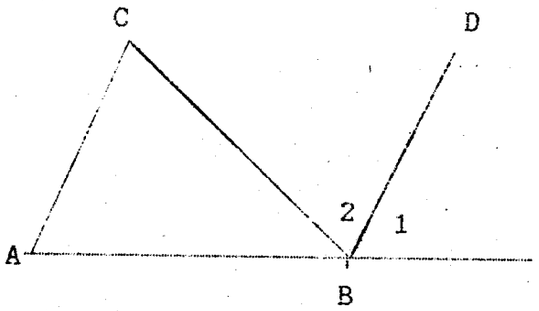


Gambar 19.



Pada gambar, jelas bahwa $\alpha + \beta + \gamma = 180^{\circ}$.

Pembuktian lain dapat dilakukan sebagai berikut:



Gambar 20.

Buat BD//AC, sehingga:

$\angle A = \angle B_1$ (sudut sehadap)

$\angle C = \angle B_2$ (sudut dalam berseberangan)

$\angle B = \angle B$

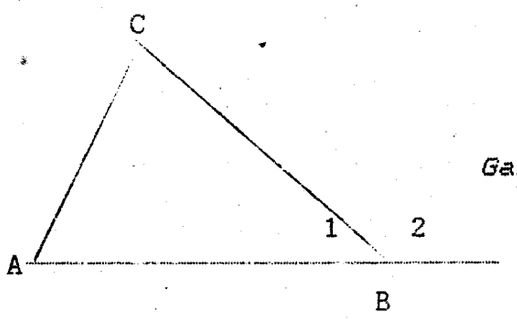
$\angle A + \angle B + \angle C = \angle B_1 + \angle B_2 + \angle B$ +

= sudut lurus.

Jadi terbukti $\angle A + \angle B + \angle C = 180^{\circ}$.

Dalil 6: Sudut luar suatu segitiga sama dengan jumlah kedua sudut lainnya yang tidak bersisian dengan sudut itu.

Yang dimaksud dengan sudut luar suatu segitiga, yaitu sudut yang bersisian sudut-sudut segitiga itu.



Gambar 21.

$\angle B_1$ dan $\angle B_2$ adalah sudut-sudut yang bersisian, maka $\angle B_2$ disebut sudut luar dari segitiga ABC

Diketahui: $\triangle ABC$

$\angle B_2$ = sudut luar $\triangle ABC$.

Buktikan : $\angle B_2 = \angle A + \angle C$.

Bukti:

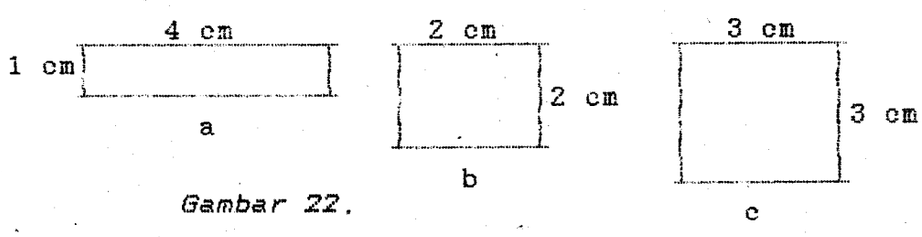
$\angle B_2 = 180^o - \angle B_1$ (bersisian)

$\angle A + \angle C = 180^o - \angle B_1$ (dalil 6).

Jadi $\angle B_2 = \angle A + \angle C$.

c. **Segitiga-segitiga yang sama dan sebangun**.

Pengertian sama dan sebangun (kongruen).



Gambar 22.

1488/Kd195-93(t1)

Pada gambar 22, terlukis suatu persegi panjang dengan ukuran 1 x 4 cm, dua buah bujur sangkar yang masing-masing bersisi 2 cm dan 3 cm.

Gambar 22 a dan 22 b mempunyai luas yang sama.

Kedua bangun tersebut dikatakan sama luasnya.

Gambar 22 b dan 22 c, merupakan dua buah bujur sangkar yang berbeda panjang sisinya.

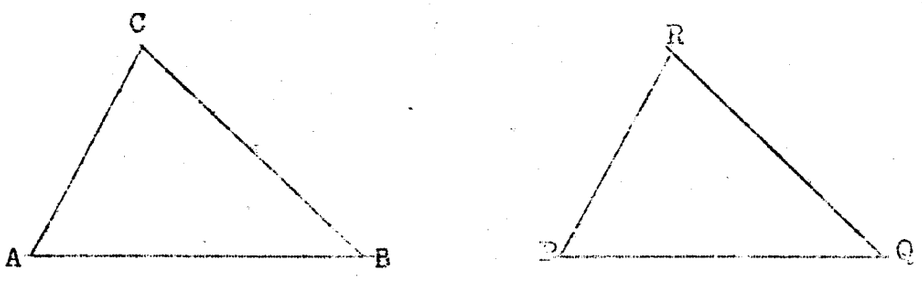
Kedua bangun itu luasnya tidak sama, tetapi bangunnya (bentuknya) sama, maka dikatakan kedua bangun itu disebut sebangun.

Jadi dua bangun dikatakan sama dan sebangun, jika kedua bangun itu sama luasnya dan sama bentuknya.

Tanda untuk "**sama dan sebangun**" adalah $\cong$ (= menyatakan luasnya sama, ~ menyatakan bangunnya sama).

Definisi: Dua buah bangun dikatakan sama dan sebangun (kongruen), jika bangun pertama dapat menutupi bangun kedua dengan sempurna. (BPG, hal.12).

Berdasarkan definisi di atas, jika ada dua buah segitiga, dimana segitiga yang pertama dapat menutupi segitiga yang kedua dengan sempurna, maka dikatakan kedua segitiga itu sama dan sebangun.



Gambar 23.

Jika $\triangle ABC \cong \triangle PQR$, maka unsur-unsur yang bersesuaian

pada kedua segitiga itu adalah sama; yaitu:

$\angle A = \angle P$, $\angle B = \angle Q$, $\angle C = \angle R$,

AB = PQ , BC = QR , dan AC = PR.

Untuk menyatakan dua buah segitiga kongruen, sekurang-kurangnya ada 3 unsur segitiga yang pertama sama dengan 3 buah unsur pada segitiga yang kedua.

Ketiga unsur yang sama itu haruslah:

1. Unsur-unsur itu yang satu tidak bergantungan dengan yang lain; misalnya diambil 3 pasang sudut, maka sudut yang ketiga bergantungan dengan kedua sudut yang lain. Atau dengan kata lain, kalau dua pasang sudutnya telah diketahui maka pasangan sudut yang ketiga didapatkan.
2. Unsur-unsur itu haruslah bersesuaian (seletak), artinya unsur-unsur pada kedua segitiga itu harus mengambil tempat yang sama.

Ada 5 buah dalil dasar untuk menyatakan 2 buah segitiga sama dan sebangun, yaitu:

Dalil 7: Dua buah segitiga dikatakan sama dan sebangun jika pada kedua segitiga itu:

a). Salah satu sisi dan kedua sudut yang terletak pada sisi itu sama (sd, s, sd).

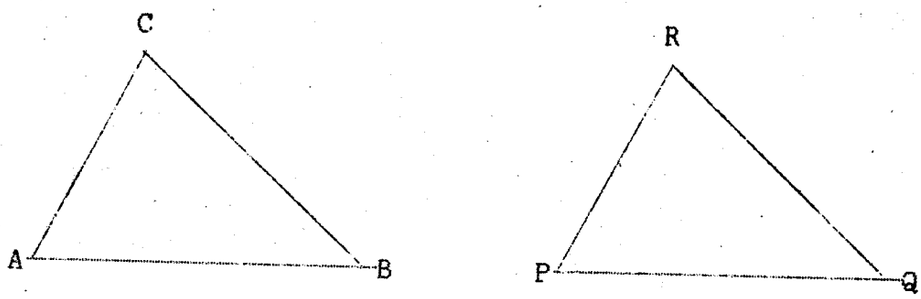
b). Satu sisi, salah satu sudut pada sisi itu dan didepan sisi itu sama (s, sd, sd).

c). Dua buah sisi dan sudut yang diapitnya sama (s, sd, s).

d). Ketiga sisinya sama (s, s, s).

e). Dua buah sisi dan salah satu sudut didepan salah satu sisi sama (s, s, sd).

Untuk pembuktian dalil di atas (semuanya ada 5 buah), didasarkan kepada definisi 2 buah bangun yang sama dan sebangun.



Gambar 24.

Diketahui: $\triangle ABC$ dan $\triangle PQR$

$\angle A = \angle P$, $AB = PQ$, $\angle B = \angle Q$

Buktikan : $\triangle ABC \cong \triangle PQR$.

Bukti:

Tempatkan AB pada PQ, sehingga P berimpit dengan A dan Q berimpit dengan B.

Karena $\angle A = \angle P$, maka AC menutupi PR, dan karena $\angle B = \angle Q$ maka BC menutupi QR.

Dengan demikian C berimpit dengan R.

Jadi ketiga sisi $\triangle ABC$ menutupi ketiga sisi $\triangle PQR$.

Sesuai dengan definisi, maka $\triangle ABC \cong \triangle PQR$.

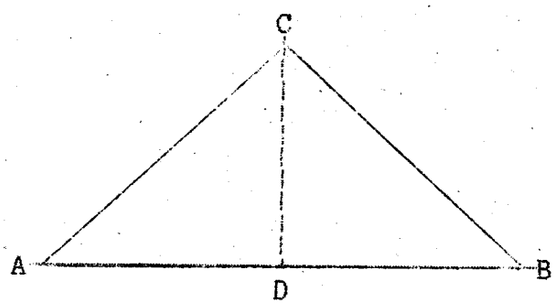
Untuk bukti ke 4 dalil yang lainnya cobalah buktikan sendiri.

D. Segitiga sama kaki

Di atas telah dijelaskan, bahwa segitiga yang mempunyai 2 buah sisi sama panjang, maka segitiga itu disebut segitiga sama kaki.

Dengan pertolongan dalil-dalil sama dan sebangun, maka dalil-dalil berikut dapat dibuktikan.

Dalil 8: Pada segitiga sama kaki, kedua sudut alasnya sama besar.



Gambar 25.

Diketahui: $\angle\triangle ABC$

$AC = BC$

Buktikan: $\angle A = \angle B$.

Bukti:

Buat $CD \perp AB$.

Perhatikan $\angle\triangle ADC$ dan $\angle\triangle DBC$

$AD = BC$ (diketahui)

$\angle ADC = \angle BDC$ (dibuat)

$CD = CD$

$\therefore \angle\triangle ADC \cong \angle\triangle BDC$.

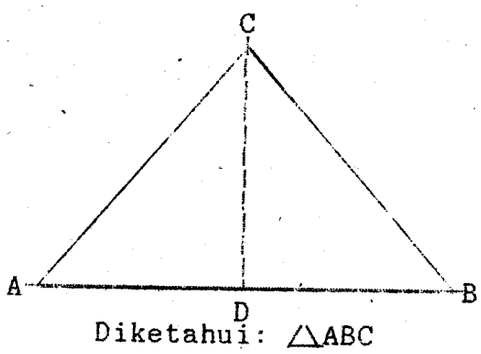
Jadi terbukti: $\angle A = \angle B$.

Akibat dari dalil di atas maka:

1. Sudut dasar segitiga samakaki selalu lancip, karena tidak mungkin jumlah 2 buah sudut 180^o.
2. Garis tinggi dari titik puncak C, merupakan garis-garis istimewa dari $\angle\triangle ABC$. Maksudnya CD juga merupakan garis bagi, garis berat dan garis sumbu.
3. CD merupakan simetri lipat atau simetri cermin dari $\angle\triangle$ samakaki ABC.
4. Fada segitiga samasisi, masing-masing sudutnya adalah 60^o.
5. Sudut dasar sebuah segitiga samakaki = $90^o - \frac{1}{2}$ dari sudut puncak.

Kebalikan dalil 8 juga berlaku, yaitu:

Dalil 9: Kalau 2 buah sudut suatu segitiga sama besar, maka segitiga itu samakaki.



Gambar 26.

Diketahui: $\triangle ABC$

$\angle A = \angle B$

Buktikan: AC = BC.

Bukti:

Buat CD $\perp$ AB.

Perhatikan $\triangle ADC$ dan $\triangle DBC$

$\angle A = \angle B$ (diketahui)

$\angle ADC = \angle BDC$ (dibuat)

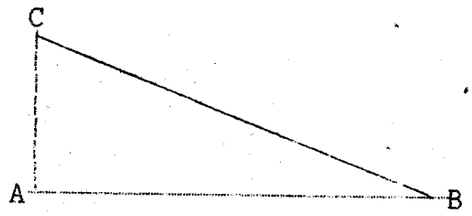
CD = CD

$\therefore \triangle ADC \cong \triangle BDC$. (s, sd, sd).

Jadi terbukti: AC = BC.

E. Segitiga siku-siku

Definisi: Segitiga yang salah satu sudutnya 90^o, maka segitiga itu disebut dengan segitiga siku-siku.



Gambar 27.

Segitiga siku-siku ABC.

$\angle A$ = sudut siku-siku

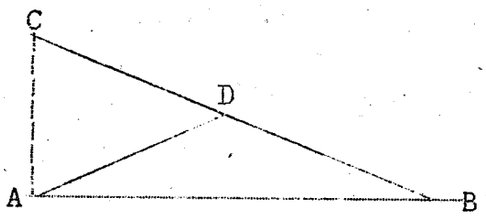
BC disebut dengan sisi miring (hypotenusa)

AC dan AB disebut sisi siku-siku.

Pada segitiga siku-siku ditemui beberapa sifat yang merupakan dalil-dalil, diantara lain adalah:

Dalil 10: Pada segitiga siku-siku yang salah satu sudutnya 30^o, maka sisi siku-siku didepan sudut 30^o itu

sama dengan separoh sisi miring.



Gambar 28.

Diketahui: $\triangle$siku-siku ABC.

$\angle B = 30^{\circ}$

Buktikan: $AC = {}^{1}/_{2}\ BC$.

Bukti:

Buat $\angle BAD = \angle ABD = 30^{\circ}$

Karena $\angle DAB = \angle ABD$ maka $AD = BD$ .....(1)

$\angle CAD = 90^{\circ} - \angle DAB$

$= 90^{\circ} - 30^{\circ}$

$= 60^{\circ}$

Jadi $\angle DAB = \angle ACD = 60^{\circ}$

$\therefore CD = AD.$

Karena $\angle C = 60^{\circ}$, maka $\triangle$ADC samasisi, sehingga

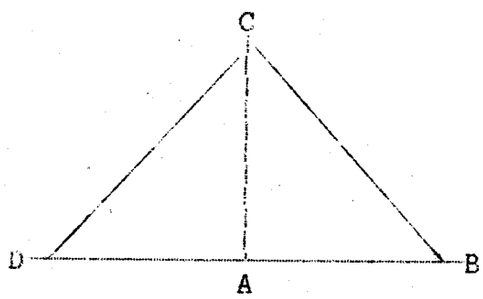
$AD = AC = CD$.....(2)

Dari (1) dan (2) maka $AC = BD = DC$ atau $AC = {}^{1}/_{2}\ BC$.

Kebalikan dalil 10 juga berlaku, yaitu:

Dalil 11: Pada segitiga siku-siku, yang salah satu sisi siku-sikunya sama dengan setengah sisi miring, maka sudut didepan sisi itu = 30°.

Untuk buktinya perhatikan gambar berikut:



Gambar 29.

Diketahui: $\triangle$ siku-siku ABC.

$AB = {}^{1}/_{2}\ BC$

Buktikan: $\angle C = 30^{o}$

Bukti:

Perpanjang BA dengan AD sehingga AB = AD.

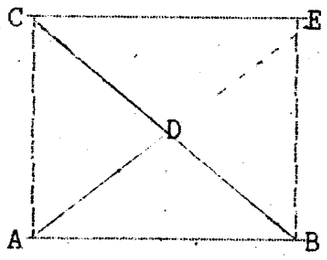
D hubungkan dengan C, maka $\triangle ABC \cong \triangle ADC$ (mengapa?).

$\therefore$ DC = BC.

Karena $AB = {}^{1}/_{2}\ BC$, maka DB = DC = BC atau segitiga ABC samasisi.

Jadi terbukti $\angle ACB = 30^{o}$.

Dalil 12: Pada setiap segitiga siku-siku garis berat dari titik sudut siku-siku sama dengan setengah sisi miring.



Gambar 30.

Diketahui: $\triangle$ siku-siku ABC

AD = garis berat pada sisi miring.

Buktikan: $AD = {}^{1}/_{2}\ BC$.

Bukti:

Perpanjang AD dengan DE, sehingga AD = DE.

Perhatikan $\triangle DAB$ dan $\triangle CDE$

$\angle ADB = \angle CDE$

AD = BE (dibuat)

BD = DC (diketahui)

$\therefore \triangle ADB \cong \triangle EDC$ (s, sd, s)

maka $\angle DAB = \angle DEC$ dan AB = CE, $\angle ABC = \angle BEC$

Jadi AB // CE.

Akibatnya $\angle ACE = 90^{o}$.

Perhatikan $\triangle ABC$ dan $\triangle ACE$

AB = CE

$\angle ABC = \angle BCE$

$\angle BAC = \angle ACE = 90^{o}$.

$\therefore \triangle ABC \cong \triangle CEA$ (s, sd, s).

Jadi AE = BC.

Karena BD = DC dan AD = DC maka terbukti AD = $^{1}/_{2}$ BC.

Soal-Soal:

1. Jumlah 2 buah sudut luar suatu segitiga = 300^{o}.
   Tentukanlah besar sudut yang lain dari segitiga itu.

2. Dari $\triangle ABC$, diketahui $\angle A = 56^{o}$ dan $\angle B = 70^{o}$.
   Perpanjangan garis bagi $\angle A$ dan $\angle B$ berpotongan pada titik T. Hitunglah besar $\angle ATB$.

3. Dua buah segitiga tumpul, diketahui sisi didepan sudut tumpul dan garis tinggi-garis tinggi pada kedua sisi yang lain adalah sama.
   Buktikan kedua segitiga itu sama dan sebangun.

4. Buktikan 2 buah segitiga sama dan sebangun jika keliling dan 2 buah sudutnya sama.

5. Pada segitiga ABC dibuat garis berat AD.
   Dari titik sudut B dan C dibuat garis-garis yang tegak lurus pada AD. Buktikan kedua garis itu sama panjang.

6. Buktikan 2 buah segitiga siku-siku sama dan sebangun.
   Jika garis tinggi pada sisi miring dan salah satu sudut lancip sama besar.

7. Buktikan 2 buah segitiga siku-siku sama dan sebangun, jika garis tinggi dan garis bagi sudut siku-siku sama.

8. Buktikan.....

8. Buktikan 2 buah segitiga sama dan sebangun jika sebuah sisi tegak, sudut puncak dan garis bagi dari sudut puncak sama.

9. Buktikan 2 buah segitiga sama dan sebangun jika sebuah sisi tegak, sisi alas dan garis berat pada sisi alas sama.

10. Dari $\triangle ABC$ diketahui AC = BC. AD dan BE merupakan garis bagi dari $\angle A$ dan $\angle B$.
Buktikan AE = ED = DB.

11. Segmen garis AB dan CD yang berpotongan pada titik S membagi masing-masing segmen garis itu atas 2 bagian yang sama panjang.
Buktikan AC = BD dan AC // BD.

12. Diketahui sebuah $\triangle ABC$. Pada sisi AB dan pada sisi AB dan BC dibuat segitiga samasisi ABD dan BCE kesebelah luar. Buktikan AE = DC.

13. Buktikan 2 buah segitiga samakaki dan sebangun, apabila pada kedua segitiga itu sama:
    a. alas dan garis tinggi pada alas.
    b. alas dan garis tinggi pada salah satu kaki.
    c. sebuah sudut alas dan garis tinggi pada kakinya.
    d. sudut puncak dan garis bagi sudut alas.
    e. sebuah kaki dan garis berat pada kaki.

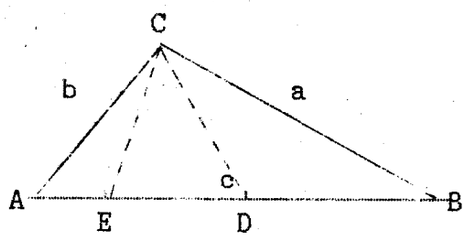
14. Dari $\triangle$ samakaki ABC, dengan AC = BC. Melalui B dibuat garis yang tegak lurus AB dan memotong perpanjangan AC di D. Buktikan AC = CD.

F. Ketidaksamaan dalam segitiga

Kita tidak mungkin dapat membentuk suatu segitiga yang masing-masing sisinya 4, 6 dan 10 satuan. Demikian pula tidak mungkin membuat sudut-sudut suatu segitiga, misalnya 50°, 60° dan 100°.

Berdasarkan hal tersebut, ada beberapa hubungan tertentu antara sisi-sisi dan sudut-sudut suatu segitiga. Hubungan-hubungan tersebut antara lain adalah sebagai berikut:

Dalil 13: Didalam setiap segitiga didepan sisi yang terpanjang terletak sudut yang terbesar.



Gambar 31.

Diketahui: $\angle\!\!\backslash ABC$

$c > b$ dan $c > a$

Buktikan: $\angle C > \angle B$, dan $\angle C > \angle A$.

Bukti:

Buat AD = AC, maka $\angle\!\!\backslash ADC$ samakaki.

$\angle ADC = \angle ACD$.....(1)

$\angle ADC = \angle DBC + \angle BCD$.....(2)

Dari (1) dan (2) terbukti $\angle C > \angle B$.

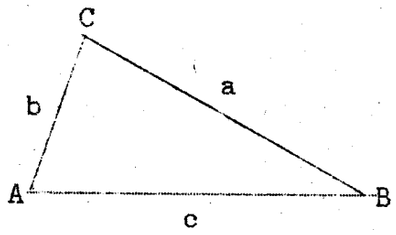
Selanjutnya buat BE = BC, maka

$\angle BEC = \angle BCE$.....(3)

$\angle BEC = \angle A + \angle AEC$.....(4)

Dari (3) dan (4) terbukti $\angle C > \angle A$.

Dalil 14: Didalam segitiga dihadapan suout yang terbesar terletak sisi yang terpanjang.



Gambar 32.

Diketahui: $\angle\backslash ABC$

$\angle A > \angle B$, $\angle A > \angle C$

Buktikan: a > b, dan a > c.

Bukti:

Antara a dan b atau antara a dan c ada 3 kemungkinan.

1. a = b atau a = c
2. a < b atau a < c
3. a > b atau a > c

Jika a = b, maka $\angle A = \angle B$

a = c, maka $\angle A = \angle C$.

Hal ini bertentangan dengan yang diketahui.

Jika a < b atau a < c, maka tentulah;

$\angle A < \angle B$ atau $\angle A < \angle C$. Hal ini bertentangan dengan dalil 13.

Jadi kemungkinan ke 3 lah yang harus benar, yaitu

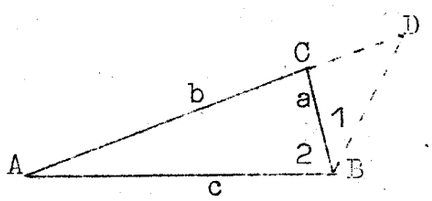
a > b dan a > c.

Dalil 15: Pada setiap segitiga sebuah sisi:

a. lebih kecil dari pada jumlah kedua sisi yang lain.

b. lebih besar dari pada selisih kedua sisi yang lain.

Bukti untuk a, perhatikan gambar berikut:



Gambar 32.

Diketahui: $\angle\!\!\backslash ABC$

Buktikan: $c < a + b$, $a < b + c$ dan $b < a + c$.

Bukti:

Perpanjang AC dengan CD = a, maka $\angle\!\!\backslash BDC$ samakaki.

$\angle B_1 = \angle D$

$\therefore \angle D < \angle B_1 + \angle B_2$.

Pada $\angle\!\!\backslash ABD$, $\angle D < \angle ABD$.

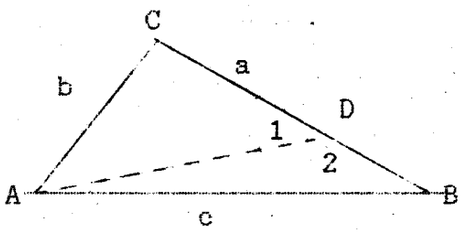
Jadi $c < AD$ atau

$c < a + b$.

Dengan cara yang sama dapat pula dibuktikan bahwa;

$a < b + c$ dan $b < a + c$.

Bukti bahagian b:



Gambar 34.

Diketahui: $\angle\!\!\backslash ABC$

Buktikan : $c > a - b$, $a > b - c$ dan $b > a - c$.

Bukti:

Buat CD = b, sehingga BD = a - b.

$\angle\!\!\backslash ADC$ samakaki, berarti $\angle D_1$ lancip atau $\angle D_2$ tumpul.

Pada $\angle\!\!\backslash ABD$, $\angle D_2 > \angle BAD$.

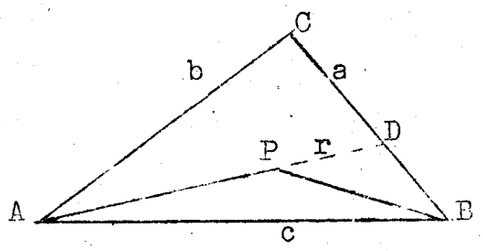
$\therefore c > BD$ atau $c > a - b$.

Dengan cara yang sama dapat pula dibuktikan

$a > b - c$.

Cobalah selesaikan sendiri.

Dalil 16: Jika sebuah titik dalam sebuah segitiga diperhubungkan dengan titik-titik ujung sebuah sisi, maka jumlah garis-garis hubung itu lebih pendek dari pada jumlah kedua sisi yang lain.



Gambar 35.

Diketahui: $\triangle ABC$ titik P di dalam $\triangle ABC$.

Buktikan : PA + PB < a + b.

Bukti:

Perpanjang AP sehingga memotong BC di D.

Misalkan PD = r, BD = a_1, dan DC = a_2.

Di dalam $\triangle ADC$, AP + r < a_2 + b

AP < a_2 + b - r.....(1)

Dalam $\triangle BDP$; BP < a_1 + r.....(2)

(1) dan (2) ====> AP + BP < a_1 + a_2 + b

atau AP + BP < a + b.

Soal-Soal:

1. Buktikan bahwa pada segitiga siku-siku, sisi miringnya merupakan sisi yang terpanjang.

2. Dari trapesium ABCD dengan AB // DC, AB > DC
   Buktikan AB < AD + DC + BC.

3. Buktikanlah bahwa garis yang ditarik dari salah satu titik sudut ke salah satu titik pada sisi di depan sudut itu lebih pendek dari separoh jumlah ketiga sisi segitiga itu.

4. Titik P terletak di dalam $\triangle ABC$ yang samakaki. Titik P dihubungkan dengan ketiga titik sudut segitiga itu.
   Buktikanlah bahwa jumlah ketiga garis hubung itu lebih pendek dari 3 kali salah satu kakinya.

5. Pada.....

5. Pada $\triangle ABC$ dibuat garis tinggi AD.
   Buktikan bahwa $AD < {}^{1}/_{2}\,(b + c)$.

6. Dari trapesium ABCD, dimana AB // DC dan AB > DC.
   Jika BC > AD, buktikan $\angle A > \angle B$.

7. Kalau dalam sebuah segitiga garis berat pada sisi yang terpanjang lebih pendek dari setengah sisi itu, buktikanlah bahwa segitiga itu tumpul.

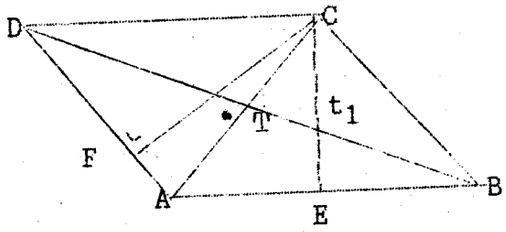
8. Buktikanlah bahwa sebuah sisi suatu segitiga lebih kecil dari ${}^{1}/_{2}$ dari jumlah sisi-sisi segitiga itu.

9. Dalam $\triangle ABC$, CD adalah garis bagi $\angle C$.
   Buktikan bahwa AD < AC dan BD < BC.

10. Dari $\triangle ABC$ diketahui, bahwa BC > AC.
    Garis-garis bagi $\angle A$ dan $\angle B$ berpotongan pada titik M.
    Buktikan bahwa BM > AM.

2. **Jajaran genjang**:

Definisi : Segi-empat yang sisi-sisi berhadapannya sejajar, disebut jajaran genjang.



Gambar 40.

Sifat-sifat jajaran genjang:

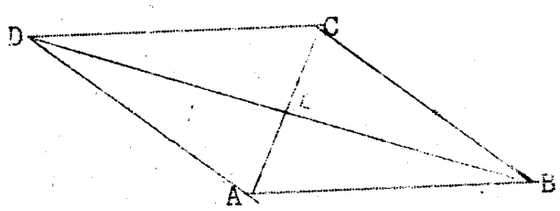
1. Sisi-sisi yang berhadapan sejajar dan sama panjang, AB # DC , AD # BC.
2. Sudut-sudut yang berhadapan sama besar, $\angle A = \angle C$, $\angle B = \angle D$.
3. Diagonal-diagonal potong memotong atas bagian-bagian yang sama, AT = TC, BT = TD.

Tinggi dari jajaran genjang, yaitu jarak antara sisi-sisi yang sejajar.

Kalau AB merupakan alasnya, maka CE = tinggi jajaran genjang ABCD, dan jika AD menjadi sisi alas, maka CF = tinggi jajaran genjang ABCD.

3. **Belah ketupat**:

Definisi: Jajaran yang 2 buah sisi berdekatan sama panjang disebut dengan belah ketupat.



Gambar 41.

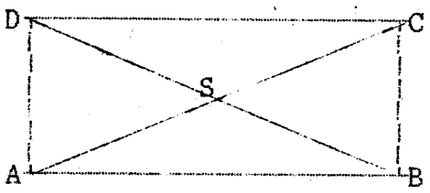
Karena 2 buah sisi berdekatan (bersebelahan) sama panjang, maka ke-4 sisi belah ketupat tersebut akan sama panjang.

Sifat-sifat belah ketupat:

1. Semua sifat-sifat jajaran genjang dipenuhi oleh belah ketupat.
2. Kedua diagonal saling berpotongan tegak lurus.
3. Diagonal-diagonal belah ketupat membagi sudutnya atas 2 bagian yang sama besar.

4. **Persegi panjang.**

Definisi: Jajaran genjang yang salah satu sudutnya 90^{o} disebut dengan persegi panjang



Gambar 42.

Sifat-sifat:

1. Semua sifat jajaran genjang dipenuhi oleh persegi panjang.
2. Kedua diagonal sama panjang.

5. **Bujur sangkar.**

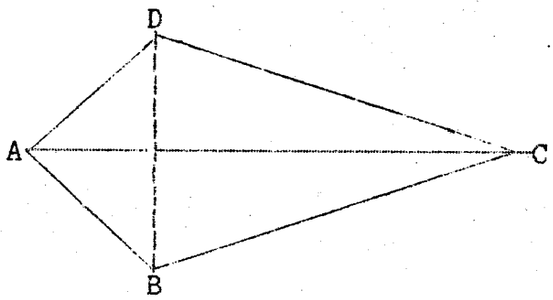
Definisi: Bujur sangkar yaitu belah ketupat yang salah satu sudutnya = 90^{o}, atau
Bujur sangkar yaitu persegi panjang yang dua buah sisi berdekatan (bersebelahan) sama panjang.

Pada bujur sangkar, semua sifat trapesium, jajaran genjang, belah ketupat dan persegi panjang dipenuhi oleh bujur sangkar.

Cobalah periksa sendiri kebenarannya.

6. **Segi-4 layang-layang.**

Definisi: Segi-4 layang-layang adalah segi-4 dimana sepasang-sepasang sisi bersebelahan sama panjang.

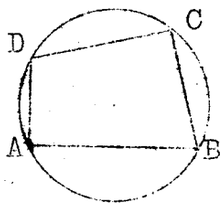


Gambar 43.

Segi-4 layang-layang ABCD, dengan AB = AD dan BC = DC.
Sifat-sifat segi-4 layang-layang:
- Kedua diagonal saling tegak lurus.

7. <u>Segi-4 tali busur</u>.

Definisi: Segi-4 tali busur ialah segi-4 yang ke-4 titik sudutnya terletak pada keliling lingkaran.

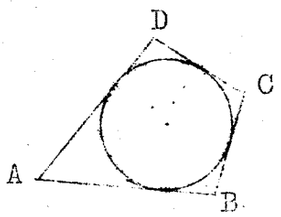


Gambar 44.

Titik-titik A, B, C dan D terletak pada lingkaran, maka segi-4 ABCD disebut dengan segi-4 tali busur.
Sifat-sifat segi-4 tali busur:
- Sudut-sudut yang berhadapan berjumlah 180^{o}.

8. <u>Segi-4 garis singgung</u>.

Definisi: Segi-4 garis singgung adalah segi-4 yang ke-4 sisinya menyinggung suatu lingkaran.



Gambar 45.

AB, BC, CD dan AD menyinggung lingkaran L, maka ABCD disebut dengan segi-4 garis singgung.

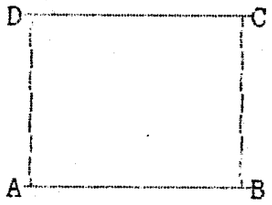
BAB IV
LUAS BANGUN DATAR

Suatu bangun datar mempunyai luas, kalau bangun datar itu merupakan suatu kurva tertutup sederhana atau merupakan suatu segi-n.

Definisi: Luas suatu segi-n ialah luas sebagian bidang datar yang dibatasi oleh sisi-sisi segi-n itu.

Untuk menentukan luas suatu segi-n, maka luas segi-n itu dibandingkan dengan luas suatu bangun datar lain yang dijadikan satuan luas.

Sebagai satuan luas dipakai luas bujur sangkar yang panjang sisinya mempunyai satuan panjang tertentu.
Jika satuan panjang sisi bujur sangkar itu cm, maka satuan luasnya adalah cm^2.



Gambar 46.

Pada gambar 46, terlukis bujur sangkar ABCD dengan panjang sisinya = a cm, maka: Luas ABCD = AB x AD

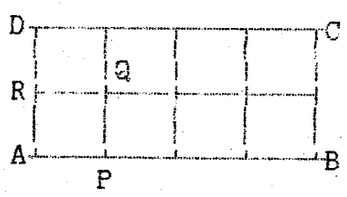
$= a \text{ cm} \times a \text{ cm}$

$= a^2 \text{ cm}^2$.

Berdasarkan perumusan luas bujur sangkar di atas, maka kita dapat menentukan luas bangun datar lainnya.

. **Luas persegi panjang**.

Dalil 17: Luas persegi panjang sama dengan hasil perbanyakan panjang dengan lebarnya.



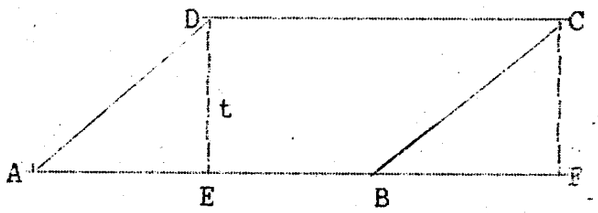
Gambar 47.

Pada gambar 47, terlukis suatu persegi panjang yang tersusun atas 4 x 2 bujursangkar APQR.

Luas ABCD = 4 x 2 x AP x AR
= 4 AP x 2 AR
= AB x AD
= panjang x lebar.

. **Luas jajaran genjang:**

Dalil 18: Luas jajaran genjang sama dengan hasil perbanyakan alas dan tingginya.



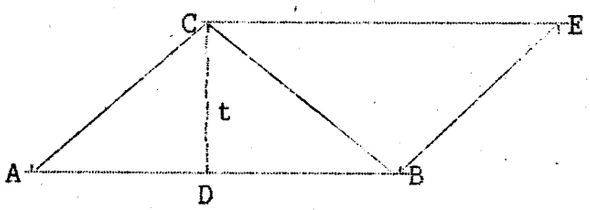
Gambar 48.

Diketahui: Jajaran genjang ABCD
DE = tinggi jajaran genjang.
Buktikan : Luas ABCD = AB x DE.

Bukti: Buat CF ⊥ AB (perpanjangannya)
△AED ≅ △BFC (kenapa?)
∴ luas AED = luas BFC.....(1)
Jadi luas ABCD = luas EFCD
= EF x DE
= AB x DE
= alas x tinggi.

. **Luas segitiga.**

Dalil 19: Luas segitiga sama dengan separoh dari hasil perbanyakan salah satu sisi dengan garis tinggi pada sisi itu.



Gambar 48.

Diketahui : $\triangle ABC$

Buktikan : Luas ABC = $^1/_2$ .AB.CD

Bukti: Buat dari B garis yang sejajar dengan AC dan melalui C garis yang sejajar dengan AB yang berpotongan pada titik E.

ABEC merupakan jajaran genjang.

$\triangle ABC = \triangle ECB$ (kenapa?)

Jadi luas ABC = luas BEC

= $^1/_2$ luas ABEC

= $^1/_2$ AB x CD.

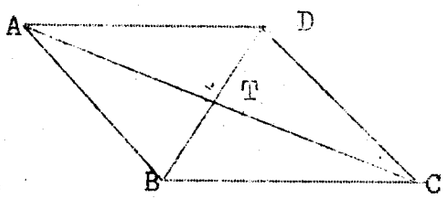
Luas Belah Ketupat.

Dalil 20: a). Luas belah ketupat = alas x tinggi

b). Luas belah ketupat = setengah dari hasil perbanyakan kedua diagonal.

Untuk pembuktian bagian a) sama dengan pembuktian jajaran genjang.

Untuk pembuktian bagian b) adalah sebagai berikut:



Gambar 50.

Diketahui : Belah ketupat ABCD.

Buktikan : Luas ABCD = $^1/_2$ .AC.BD.

Bukti: Diagonal AC $\perp$ BD (siafat belah ketupat)

Luas ABCD = luas $\triangle ABD$ + luas $\triangle BCD$

= $^1/_2$ BD x AT + $^1/_2$ BD x TC

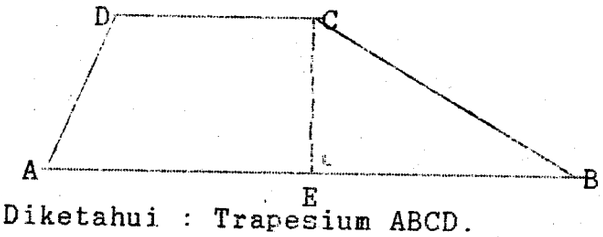
= $^1/_2$ BD (AT + TC)

= $^1/_2$ BD.AC.

Berdasarkan perumusan luas belah ketupat bagian b diatas, maka setiap segi-4 yang diagonal-diagonalnya saling tegak lurus, maka perumusan bagian b) di atas dapat digunakan, misalnya segi-4 layang-layang ataupun segi-4 lainnya dimana diagonal-diagonalnya saling tegak lurus.

Luas Trapesium.

Dalil 21: Luas trapesium sama dengan setengah dari hasil perbanyakan antara jumlah kedua sisi sejajar dengan tinggi trapesium itu



Gambar 51.

Diketahui : Trapesium ABCD.

CE = tinggi trapesium ABCD.

Buktikan : Luas ABCD = $^1/_2$ CE(AB + DC).

Bukti: Luas $\triangle$ABD = $^1/_2$ AB x CE

Luas $\triangle$BCD = $^1/_2$ DC x CE

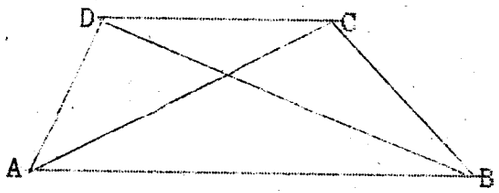
Luas ($\triangle$ABD + $\triangle$BCD) = $^1/_2$ CE(AB + DC)

Luas ABCD = $^1/_2$ CE(AB + DC).

Berapa akibat dari perumusan luas bangun-bangun datar di atas adalah:

1. Pada jajaran genjang, belah ketupat, persegi panjang dan bujur sangkar, diagonal-diagonalnya membagi luas jajaran genjang, belah ketupat, persegi panjang dan bujur sangkar atas 2 bagian yang sama.

2. Pada trapesium, diagonal-diagonalnya membagi luas trapesium itu sebanding dengan sisi-sisi sejajarnya.



Gambar 52.

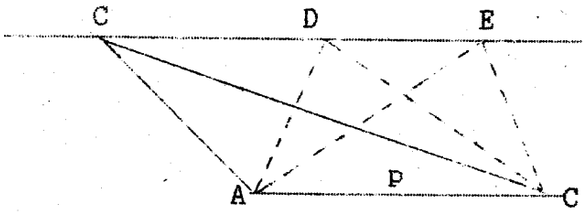
Luas ABC : luas ACD = luas ABD : luas BCD = AB : DC.

3. Dua buah segitiga yang dasarnya sama, maka luasnya berbanding sebagai tinggi-tinggiñya, dan

Dua buah segitiga yang sama tingginya, luasnya berbanding sebagai alas-alasnya.

4. Luas segitiga siku-siku sama dengan separoh dari hasil kali kedua sisi siku-sikunya.

5. Sekalian segitiga yang dasarnya potongan garis p, dan titik puncaknya pada garis yang sejajar dengan p, sama luasnya.

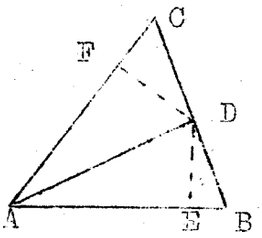


Gambar 53.

Luas $\triangle ABC$ = luas $\triangle ABD$ = luas $\triangle ABE$

6. Garis-garis tinggi sebuah segitiga berbanding seharga dengan kebalikan sisi-sisi tempat garis tinggi itu tegak, atau
Pada setiap segitiga hasil kali suatu sisi dengan garis tinggi pada sisi itu adalah sama.

7. Pada setiap segitiga, sebuah garis bagi membagi sisi didepannya menjadi bagian-bagian yang sebanding dengan sisi-sisi yang berdampingan.



Gambar 54.

Diketahui : $\triangle ABC$.
AD = garis bagi (garis bagi dalam).
Buktikan : BD : DC = AB : AC.

Bukti: Luas $\triangle ABD = {}^{1}/_{2}$ AB.DE)
Luas $\triangle ADC = {}^{1}/_{2}$ AC.DF) > .....(1)

$\triangle AED \cong \triangle AFD$ (kenapa?)

maka DE = DF.....(2)

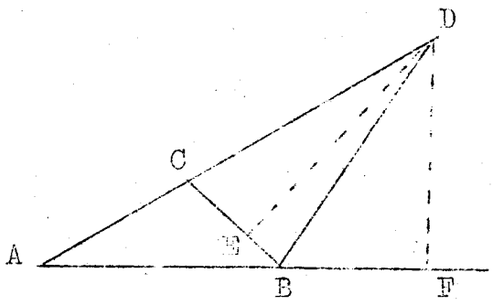
Dari (1) dan (2),

Luas ABD : luas ADC = AB : AC .....(3)

Luas ABD : luas ADC = BD : DC .....(4)

Dari (3) dan (4) didapat:

AB : AC = BD : DC.



Gambar 55.

Diketahui : $\triangle ABC$, BD = garis bagi luar $\angle B$.

Buktikan : AD : CD = AB : BC.

Bukti: $\triangle BFD \cong \triangle BED$ (kenapa?)

$\therefore$ DE = DF.

Luas $\triangle ABD$: luas $\triangle BCD$ = AB : BC.....(1)

Luas $\triangle ABD$: luas $\triangle BCD$ = AD : CD.....(2)

Dari (1) dan (2) terbukti AB : BC = AD : CD.

Soal-Soal:

1. Salah satu sisi persegi panjang = $21\frac{1}{2}$ cm dan luasnya = 295 cm^2. Tentukanlah keliling persegi panjang itu.

2. Sisi-sisi yang berdekatan dari suatu jajaran genjang 15 cm dan 20 cm. Jika luas jajaran genjang itu 450 cm^2, tentukanlah jarak antara sisi-sisi yang berhadapan.

3. Panjang sisi-sisi sejajar suatu trapesium 15 cm dan 11 cm, sedangkan tingginya 8 cm.
   Tentukanlah luas trapesium itu.

4. Luas.....

4. Luas sebuah segitiga adalah $67^1/_2$ cm^2. Sedangkan alas dan tingginya berbanding seperti 5 dengan 3.
   Tentukanlah alas dan tinggi segitiga itu.

5. Dari segitiga ABC diketahui $\angle A = 30^o$, AB = 15 cm dan AC = 10 cm. Tentukanlah luas segitiga itu.

6. CD merupakan garis berat $\triangle ABC$ dan titik P terletak pada CD.
   Buktikan luas $\triangle APC$ = luas $\triangle BPC$.

7. AD merupakan garis bagi sudut A dari $\triangle ABC$ dan titik P terletak pada AD.
   Buktikan luas $\triangle ABP$: luas $\triangle ACP$ = AB : AC.

8. Dua buah persegi panjang luasnya berbanding seperti 1:2 Panjangnya berbanding seperti 3 : 4. Jika jumlah lebarnya = 8 cm, tentukanlah lebar masing-masing persegi panjang itu.

9. Dalam jajaran genjang ABCD terletak titik T. Titik T di hubungkan dengan ke 4 titik sudut jajaran genjang itu. Buktikanlah bahwa jumlah 2 buah segitiga yang berhadapan sama luasnya.

10. Diketahui segitiga samakaki ABC dengan AC = BC. Titik T terletak pada alas AB. Dari T dibuat TD//AC dan TE//BC. Buktikanlah TE : TA = TD : TB.

11. Didalam segitiga samasisi ABC terletak titik T. Dari T dibuat garis-garis yang tegak lurus kesisi-sisi segitiga itu. Buktikan bahwa jumlah ketiga garis-garis itu sama dengan panjang salah satu garis tinggi segitiga itu.

12. Hitunglah.....

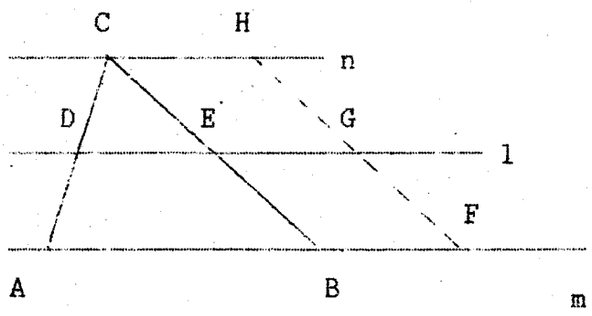
12. Hitunglah luas segitiga yang sisi-sisinya 13, 20 dan 21 cm.

13. Suatu jajaran genjang, diketahui 2 buah sisi yang berdekatan panjangnya 6 dan 7 cm dan salah satu diagonalnya 9 cm. Hitunglah luas jajaran genjang itu.

14. Diketahui segitiga samakaki ABC dengan AC = BC. AB = a dan garis tinggi pada AB = b. Didalam segitiga dibuat persegi panjang yang 2 titik sudutnya pada alas AB dan 2 titik sudut yang lain terletak pada AC dan BC. Tentukanlah keliling persegi panjang itu sehingga luasnya maksimum.

jar dengan a, maka diperoleh pula ;
PS = SQ = QT = TK = KR, atau PQ terbagi pula atas 2 bagian dan QR atas 3 bagian yang sama.
Jadi PQ : QR = 2 : 3
Jadi terbukti AB : BC = PQ : QR.

Dalil 24: Sebuah garis yang ditarik sejajar dengan salah satu sisi sebuah segitiga, maka garis itu membagi sisi-sisi yang lain atas bagian-bagian yang berbanding seharga.

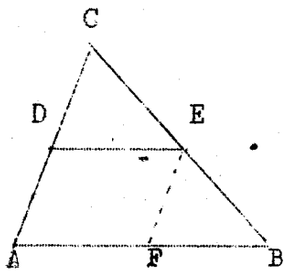


Gambar 58.

Diketahui: $\triangle ABC$
$l \parallel AB$
Buktikan : AD : DC = BE : EC.

Bukti: Buat garis m // BC, dan melalui C buat garis n // AB yang memotong garis m pada H, sehingga terbentuk jajaran genjang BFHC.
Jadi HG = CE dan GF = EB.....(1)
Dari dalil 23, AD : DC = FG : GH.....(2)
Dari (1) dan (2), maka AD : DC = BE : EC.

Dalil 25: Didalam segitiga, garis yang dibuat sejajar dengan salah satu sisinya, sehingga terbentuk suatu segitiga yang baru, maka sisi-sisi yang persesuaian dari kedua segitiga itu berbanding seharga.



Gambar 59.

Diketahui: $\triangle ABC$

DE // AB

Buktikan : CD : CA = CE : CB = DE : AB.

Bukti: Buat garis EF // AC, maka AFED merupakan jajaran genjang, jadi DE = AF dan AD = FE.

Karena DE // AB, maka CD : DA = CE : EB.

(CD + DA) : (CE + EB) = CD : CE.

CA : CB = CD : CE

atau CE : CB = CD : CA.....(1)

Karena FE // AC, maka BE : FA = BE : EC.

(BF + FA) : (BE + EC) = FA : EC.

AB : CB = FA : EC.

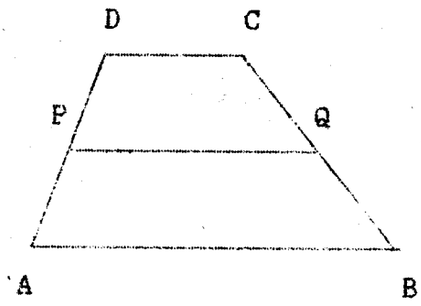
EC : CB = DE : AB.....(2)

Dari (1) dan (2) terbukti:

CD : CA = CE : CB = DE : AB.

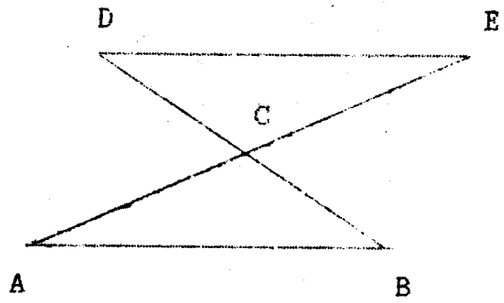
Beberapa akibat dari sifat-sifat atau dalil-dalil di atas maka dijumpai pula hal-hal berikut:

* Pada trapesium ABCD, seperti gambar berikut, dimana PQ sejajar dengan sisi-sisi sejajar trapesium, maka sisi-sisi yang tidak sejajar akan terbagi atas bagian-bagian yang berbanding seharga.



Gambar 60.

Trapesium ABCD,dimana PQ // AB // DC, maka :
AP : PD = BQ : QC.

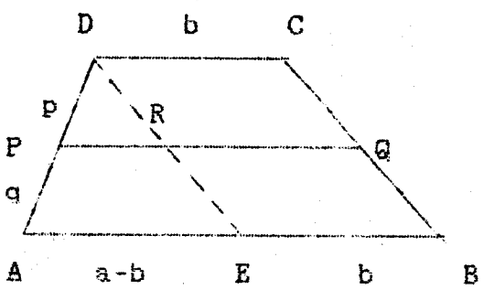


Gambar 61.

Pada $\triangle$ABC dengan DE // AB, maka :
CA : CE = CB : CD = AB : DE.

Dalil 26: Dalam trapesium ABCD dengan alas AB = a, dan sisi DC = b, dibuat PQ sejajar dengan AB, dimana ; DP : PA = p : q, maka panjang ;

$$PQ = \frac{ap + bq}{p + q}.$$ **((Kuipers, hal.77).**



Gambar 62.

Diketahui: Trapesium ABCD, PQ // AB // DC.
AB = a, DC = b, DP : PA = p : q.

Buktikan : $PQ = \frac{ap + bq}{p + q}$

Bukti: Buat DE // CB, maka EB = DC = b = RQ.
AE = a - b.
Dalam $\triangle AED$, PR // AE, maka:
DP : DA = PR : AE
p : p + q = PR : a - b

$$PR = \frac{p(a - b)}{p + q}$$

PQ = PR + RQ

$$= \frac{p(a - b)}{p + q} + b$$

$$= \frac{pa - pb + pb + bq}{p + q}$$

$$= \frac{ap + bq}{p + q}.$$

Soal-Soal:

1. Dari trapesium ABCD (AB // DC), diketahui AB = 6 cm, DC = 3 cm, AD = 5 cm dan BC = 4 cm. AD dan BC diperpanjang yang berpotongan pada titik T.
   Tentukanlah panjang TD dan TC.

2. Dari trapesium ABCD, titik M terletak pada diagonal AC, sehingga AM : MC = p : q. Melalui M dibuat MN // AB (N pada BD). Jika AB = a, DC = b.
   Nyatakanlah panjang MN dalam a, b, p dan q.

3. Diagonal-.....

3. Diagonal-diagonal trapesium ABCD berpotongan pada titik S. Melalui S dibuat garis yang sejajar dengan AB, yang memotong sisi tegak AD pada P dan sisi tegak BC pada Q. Buktikan PS = SQ.

4. Dari jajaran genjang ABCD, diketahui AB = 27 cm dan BC = 18 cm. Titik S terletak pada diagonal AC, sehingga AS : SC = 4 : 5. Melalui S dibuat garis-garis yang sejajar dengan AB dan AD. Tentukanlah panjang bagian-bagian tersebut.

5. Diagonal-diagonal trapesium ABCD (AB // DC) berpotongan pada titik P.
Buktikan PA x PD = PB x PC.

6. Dari trapesium ABCD (AB // DC), dibuat PQ // AB (P pada AD dan Q pada BC). Jaika DP : PA = 1 : 2, AB = 14 cm dan DC = 8 cm, tentukanlah panjang PQ.

7. Dari $\triangle$ABC dengan AC = BC. Titik T terletak pada sisi alas AB. Dari T dibuat TD // AC dan TE // BC.
Buktikan TA x TD = TE x TB.

8. Titik-titikP; Q, R dan S merupakan titik-titik tengah sisi-sisi segi-4 ABCD.
Buktikan PQRS jajaran genjang.

9. Pada sisi AC dari $\triangle$ABC terletak titik E, sehingga AE : EC = 3 : 4 dan pada sisi BC terletak titik D sehingga BD : DC = 2 : 3.
AD dan BE berpotongan pada titik S.
Tentukanlah perbandingan AS : SD dan BS : SE.

10. Diketahui.....

10. Diketahui segi-4 ABCD dengan AD > BC. Melalui A dibuat garis sejajar DC dan memotong perpanjangan diagonal DB pada titik P. Melalui D dibuat garis sejajar AB dan memotong perpanjangan diagonal AC pada titik Q.
Buktikan PQ // BC.

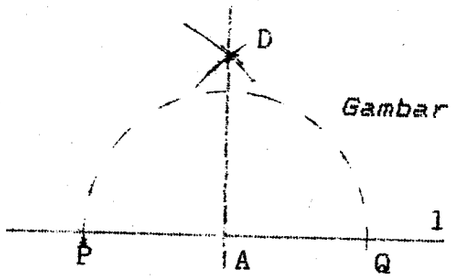
11. Dari trapesium ABCD (AB // DC) dibuat PQ // AB (P pada AB dan Q pada BC). Jika AB = a, PQ = b dan DC = c, buktikan AP : PD = (a - b) : (b - c).

BAB VI

MELUKIS BANGUN DATAR

Untuk melukis atau membentuk suatu bangun datar/segi-n, maka perlu diketahui beberapa lukisan dasar.
Lukisan dasar-lukisan dasar yang perlu diketahui adalah sebagaf berikut: (BPG, hal.20).

1. Membuat garis tegak lurus melalui suatu titik yang terletak pada garis itu.

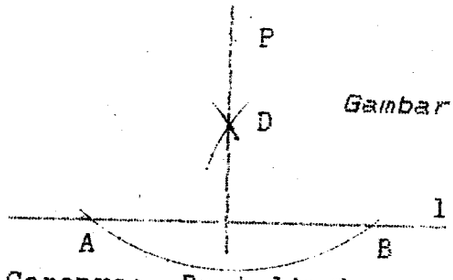


Gambar 63.

Diketahui: garis 1 dan titik A pada 1.
Ditanya : lukislah garis melalui A tegak lurus pada 1.

Caranya:- Buat busur dengan pusat A dan jari-jari = r (r = sembarangan) yang memotong 1 pada titik P dan Q.
- P dan Q sebagai pusat-pusat lingkaran dibuat busur yang jari-jarinya sama panjang, yang berpotongan pada titik D.
- AD adalah garis yang dimaksud.

2. Membuat garis yang tegak lurus pada garis 1 dari suatu titik P yang terletak diluar garis 1.



Gambar 64.

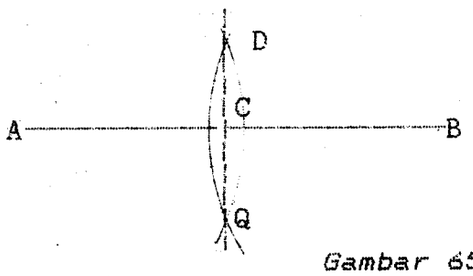
Diketahui: garis 1 dan titik P diluar garis 1.
Ditanya : lukis garis melalui P tegak lurus pada 1.

Caranya:- Buat lingkaran dengan pusat P hingga memotong garis 1 pada titik A dan B.
- A dan B sebagai pusat-pusat lingkaran dibuat

lingkaran-lingkaran yang sama jari-jarinya hingga berpotongan pada titik D.

- PD adalah garis yang diminta.

3. Membagi potonmgan garis AB atas 2 bagian sama panjang.



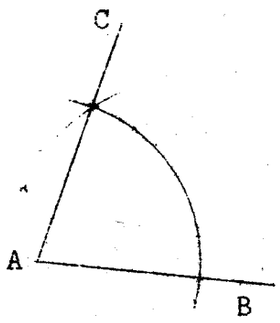
Diketahui: potongan garis AB
Ditanya : bagilah AB atas 2 bagian sama panjang.

Gambar 65.

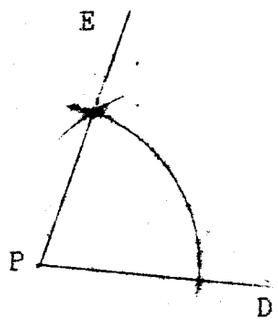
Caranya: 1. A dan B sebagai pusat dibuat lingkaran-lingkaran yang sama besar yang berpotongan pada 2 titik (P dan Q).

2. PQ memotong AB pada titik C.
3. AC = CB.

4. Membuat sebuah sudut yang sama besar dengan sudut A yang diketahui.



Gambar 66.



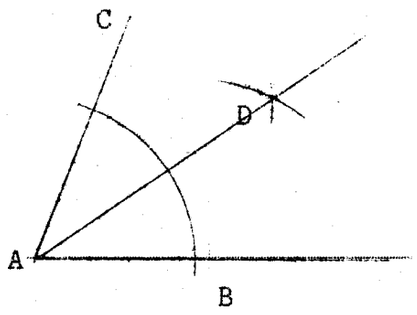
Misalnya pada titi P dengan PQ salah satu sisinya dibuat sudut yang sama besar dengan sudut A.

Caranya:

1. Buat busur dengan jari-jari = p, pusat A yang memotong kaki-kaki sudut A pada titik B dan C.
2. Dengan pusat P buat busur dengan r = p, yang memotong PQ pada titik D.

3. Ukurkan dengan jangka panjang BC, kemudian pindahkan dengan pusat D dan jari-jari BC yang berpotongan pada titik E.
4. Hubungkan P dengan E, maka ∠DPE = ∠A.

5. Membagi sudut atas 2 bagian yang sama besar.

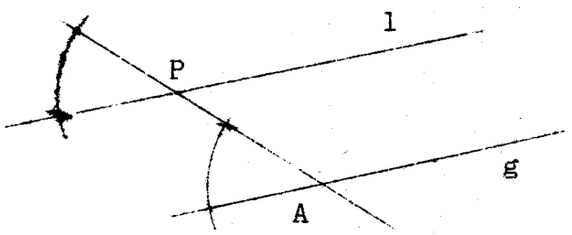


Gambar 67.

Caranya:

1. Buat busur lingkaran dengan pusat A, yang memotong kaki-kaki ∠A pada titik B dan C.
2. Dengan B dan C sebagai pusat lingkaran busur-busur yang sama yang berpotongan pada titik D.
3. AD membagi ∠A atas 2 bagian sama besar.

6. Membuat sebuah garis melalui titik P, sejajar dengan garis g.



Gambar 68.

Caranya:

1. Buat sembarang garis melalui P yang memotong garis g pada titik A.
2. Pindahkan ∠A pada titik P.
3. Garis l // g.

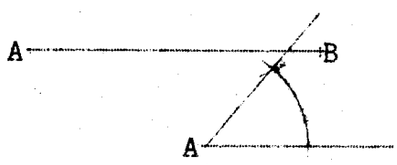
Dengan bantuan ke 6 lukisan dasar di atas, maka kita dapat

membentuk atau melukis bangun-bangun datar tertentu.
Untuk melukis suatu segi-n tertentu, umumnya perlu melukis segitiga-segitiga terlebih dahulu. Hal ini disebabkan karena segi-n ($n \geq 4$) merupakan gabungan dari beberapa buah segitiga.

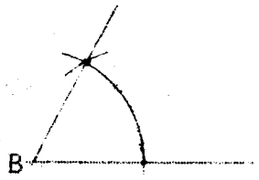
Untuk dapat melukis suatu segitiga, sekurang-kurangnya harus diketahui 3 unsur dari segitiga itu yang berdiri sendiri-sendiri, maksudnya yang satu tidak tergantung dengan yang lain.

Ada 5 buah lukisan dasar untuk dapat melukis suatu segitiga. Ke lima lukisan dasar itu adalah sebagai berikut:

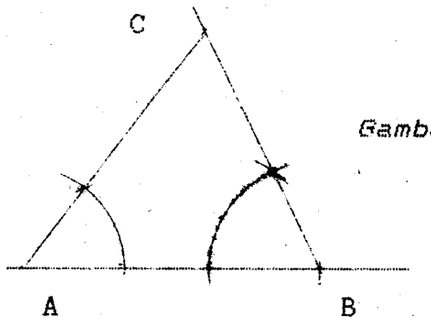
1. Suatu segitiga dapat dilukis jika diketahui sebuah sisi dan kedua sudut pada sisi itu (sd, s, sd).
   Contoh: Lukislah $\triangle ABC$ kalau diketahui sisi AB, sudut A dan sudut B.



Gambar 69.



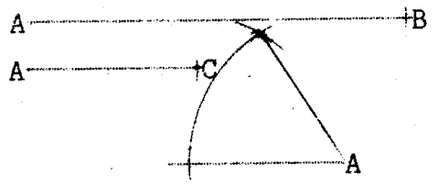
Lukisan: 1. Buat AB.
2. Pada titik A buat $\angle A$.
3. Pada titik B buat $\angle B$.
4. Segitiga ABC didapat.



Gambar 70.

2. Suatu segitiga dapat dilukis jika diketahui sebuah sisi, salah satu sudut pada sisi itu dan di depan sisi itu (s, sd, sd).
   Lukisan ke dua ini, sebetulnya sama dengan lukisan yang pertama, karena ketiga sudut segitiga itu dapat diketahui. Jadi dengan demikian lukisannya adalah seperti lukisan yang pertama.

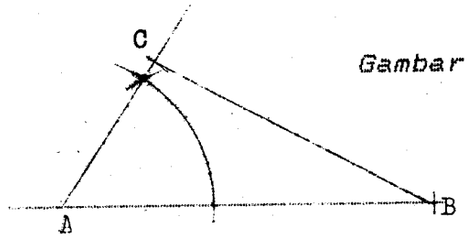
3. Suatu segitiga dapat dilukis jika diketahui dua buah sisinya dan sudut yang diapitnya (sd, s, sd).
   Contoh: Lukislah segitiga ABC, jika diketahui sisi AB, sisi AC dan ∠A, seperti berikut:



Gambar 71.

Lukisan:

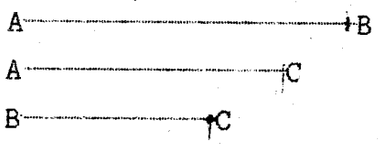
1. Buat suatu sudut = ∠A.
2. Ukurkan AB pada salah satu kakinya.
3. Ukurkan AC pada kaki yang lain.
4. Segitiga ABC di dapat.



Gambar 72.

4. Suatu segitiga dapat dibentuk atau dilukis, jika diketahui ketiga sisinya (s, s, s).

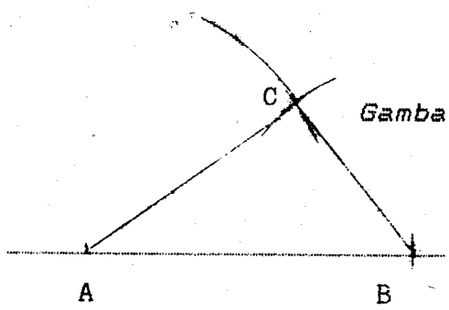
Contoh: Lukislah $\triangle ABC$, jika sisi-sisinya adalah seperti berikut:



Gambar 73.

Lukisan:

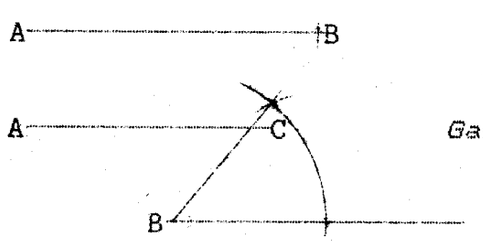
1. Buat salah satu sisi itu, misalnya AB.
2. A sebagai pusat AC sebagai jari-jari, buat busur.
3. Buat busur dengan pusat B dan jari-jari BC.
4. Segitiga ABC didapat.



Gambar 74.

5. Suatu segitiga dapat dilukis, jika diketahui dua buah sisinya dan sudut didepan salah satu sisi itu (s, s, sd)

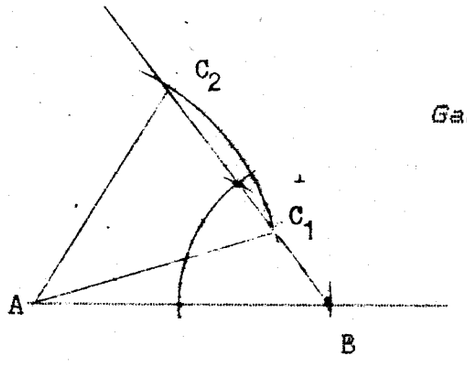
Contoh: Lukislah segitiga ABC dengan unsur-unsur seperti berikut:



Gambar 75.

Lukisan:

1. Buat AB = AB yang diketahui.
2. Pada titik B buat sudut = $\angle B$.
3. Buat busur dengan pusat A, jari-jari = AC.
4. Segitiga ABC didapat.



Gambar 76.

Catatan: - Kedua segitiga tersebut, $\triangle ABC_1$, dan $\triangle ABC_2$ memenuhi syarat.

Untuk membentuk atau melukis suatu bangun yang soalnya agak sukar, maka diperlukan beberapa tahapan.
ahapan-tahapan atau langkah-langkah itu adalah sebagai berikut:

1. **Persediaan**.
   Pada persediaan (analisa) ini, kita gambarkan suatu bangun, seolah-olah bangun yang diminta itu adalah gambar bangun tersebut. Dari unsur-unsur yang diketahui, kita uraikan sehingga didapatkan unsur-unsur baru.
   Dari unsur-unsur baru yang diperoleh, maka kita dapatkan untuk membentuk bangun yang diminta.

2. **Lukisan**.
   Berdasarkan persediaan (analisa), maka selanjutnya kita lanjutkan dengan lukisan yang bangun yang diminta.
   Lukisan itu dikerjakan sesuai dengan langkah-langkah yang telah diuraikan dalam persediaan.

3. **Bukti**.
   Kalau lukisan suadah siap,kadang-kadang perlu dibuktikan bahwa bangun yang dilukis itu memenuhi syarat, sesuai dengan apa yang diketahui.

4. Pembicaraan.

Kadang-kadan pada lukisan kita tidak dapat membentuk atau kita dapatkan lebih dari satu bangun yang diminta. Kalau hal ini terjadi, maka perlu dibicarakan/diterangkan.

Keempat langkah-langkah tersebut tidak selamanya perlu dibuat. Hal tersebut tergantung dari unsur-unsur yang diketahui dari suatu soalan. Kadang-kadang hanya diperlukan lukisan saja dan ada kalanya perlu persediaan dan lukisan saja.

Contoh: Bentuklah $\triangle ABC$ jika diketahui sisi alas AB, sudut puncak C dan jumlah kedua sisi tegak AC dan BC.

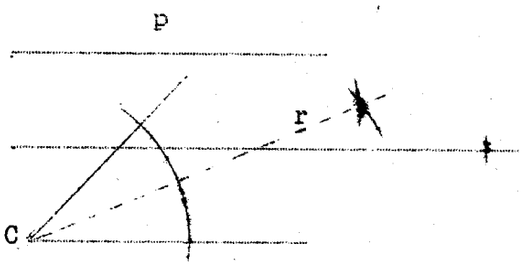
Diketahu: segitiga ABC, sisi alas AB = p.

$\angle C = \alpha$.

sisi BC + sisi AC = r

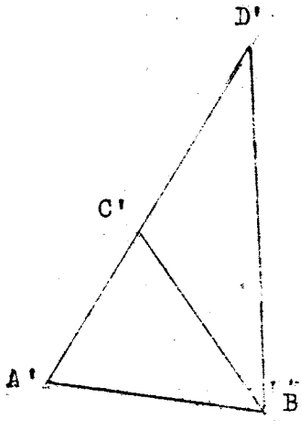
Ditanya : bentuklah segitiga ABC tersebut.

Jawab:



Gambar 77.

Persediaan:



Gambar 78.

Misalkan segitiga yang akan dibentuk itu adalah $\triangle A'B'C'$ seperti gambar berikut, dimana diketahui A'B', $\angle C'$ dan, A'C' + B'C'.

Sambung A'C' dengan C'D' = B'C'.

Karena B'C' = D'C', maka $\triangle B'D'C'$ merupakan segitiga samakaki, jadi;

$\angle D'B'C' = \angle D'$.

$\angle D'B'C' + \angle D' = \angle C'$.

$\therefore \angle D' = {}^1/_2 \angle C'$.

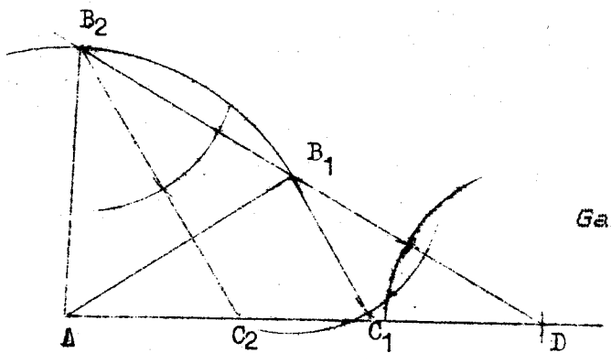
Karena $A'D' = AC' + A'B'$, $A'B'$ dan $\angle D' = {}^1/_2 \angle C'$ diketahui, maka $\triangle A'B'D'$ dapat dilukis (s, s, sd).

Selanjutnya untuk melukis segitiga ABC yang sebenarnya, maka pada titik B buat $\angle DBC = \angle D$, maka didapatkan $\triangle ABC$ yang diminta.

Lukisan: 1. Lukis $\triangle ABD$ dengan unsur AB = p, AD = r dan $\angle D = {}^1/_2 \alpha$.

2. Pada titik B buat $\angle DBC = \angle D$.

3. Segitiga ABC didapat.



Gambar 79.

Bukti: AD dibuat sama dengan r yang diketahui.

$\angle ACB = \angle ADB + \angle DBC$, $\angle ADB = \angle DBC$.

AB dijangkakan sama denganm p.

$\triangle DBC$ samakaki, maka AC + CD = AC + CB.

Jadi $\triangle ABC$ memenuhi syarat.

Pembicaraan:

Terdapat 2 buah segitiga yang memenuhi syarat, yaitu $\triangle AC_1B_1$ dan $\triangle AC_2B_2$.

Jika AB = jarak titik A ke kaki lain dari $\angle D$, maka hanya didapatkan satu buah segitiga.

Jika AB < jarak titik A ke kaki lain dari $\angle D$, maka tidak didapatkan segitiga.

Soal-Soal:

1. Lukislah segitiga sama sisi ABC, jika diketahui:
   a). kelilingnya.
   b). garis tingginya.

2. Lukislah $\triangle ABC$ jika diketahui AB, $\angle A$ dan jumlah sisi AC + sisi BC.

3. Lukislah $\triangle ABC$ jika diketahui sisi AB, sudut A (sudut A > sudut B) dan selisih sisi AC dan BC.

4. Lukislah $\triangle ABC$ jika diketahui sisi alas AB, sudut alas yang terkecil dan selisih sisi-sisi tegak.

5. Lukislah $\triangle ABC$ jika diketahui 2 buah sudutnya dan kelilingnya.

6. Lukislah suatu segi-4 ABCD, jika diketahui sisi AB, BC, CD dan kedua diagonalnya.

7. Lukislah $\triangle ABC$ jika diketahui garis tinggi CD, garis bagi CE dan sudut C.

8. Lukislah jajaran genjang ABCD, jika diketahui sisi AB dan kedua diagonalnya.

9. Lukislah trapesium ABCD, jika diketahui jumlah sisi sejajar AB dan DC, $\angle A$ dan kedua diagonalnya.

10. Lukislah belah ketupat ABCD, jika diketahui diagonal yang terapanjang dan salah satu sudutnya.

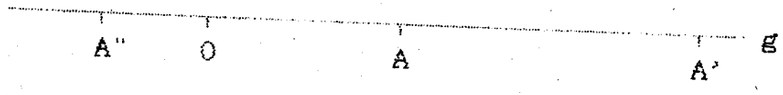
11. Lukislah persegi panjang ABCD, jika diketahui kelilingnya dan diagonalnya = $^1/_2$ kelilingnya.

12. Lukislah sebuah belah ketupat jika diketahui jumlah kedua diagonalnya dan salah satu sudutnya.

13. Lukislah trapesium ABCD (AB // DC, AB > DC), jika diketahui sisi DC, sisi AD dan jarak antara AB dan DC serta diagonal AC.

BAB VII
PERBANYAKAN BANGUN DAN KESEBANGUNAN

A. Hasil Perbanyakan Titik



Gambar 80

Pada gambar 80 di atas, titik O diambil 3 cm dari titik A. Searah OA diambil titik A'yang jaraknya dari A = 6 cm, atau OA' = 3 x OA.

Dikatakan titik A' terjadi karena titik A diperbanyakan dengan faktor 3 terhadap titik O.

Dipihak yang berlawanan dari OA diambil titik A" yang jaraknya 4 $^1/2$ cm dari titik A.
Dikatakan titik A"terjadi karena titik A diperbanyakan terhadap titik O dengan faktor - $^1/2$ atau OA" = - $^1/2$ OA.

Definisi: Sebuah titik A diperbanyakan dengan faktor k terhadap titik O, kalau pada garis OA diletakan titik A', sehingga berlaku OA' = k x OA.

Akibat dari definisi di atas ditemui hal-hal berikut:
a). Kalau k > 1: titik A' terletak pada perpanjangan OA.
b). Kalau 1 > k > 0: titik A' terletak antara O dan A.
c). Kalu k < 0: titik A' terletak pada perpanjangan AO (lawan OA).

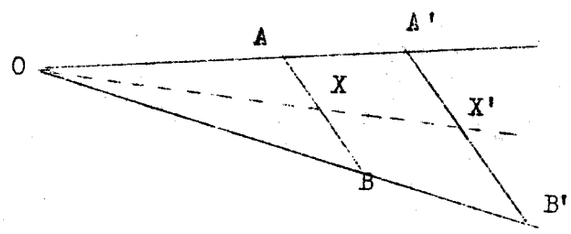
Keterangan: O = titik pusat perbanyakan.
A = titik asal.
A'= titik hasil perbanyakan.
k = faktor perbanyakan.

B. Hasil Perbanyakan Potongan Garis

Dalil 27: Hasil perbanyakan sebuah potongan garis dengan faktor k,selalu merupakan suatu potong-

an garis yang sejajar dengan potongan garis semula dan panjangnya k kali potongan garis itu.

Bukti:



Gambar 81.

Potongan garis AB diperbanyakan terhadap titik O dengan faktor k.

Titik A diperbanyakan pula terhadap O dengan faktor k, dan A' merupakan titik hasilnya, maka menurut definisi:

$$OA' = k.OA.$$

Demikian pula titik B diperbanyakan pula terhadap titik O dan menghasilkan titik B', maka:

$$OB' = k.OB.$$

Kemudian ambil titik X pada AB dan perbanyakan pula terhadap O, dan X' merupakan hasil perbanyakannya, maka berlaku pula Ox' = kx OX.

Jadi:

$$k = \frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = \frac{OX'}{OX}, \text{ atau}$$

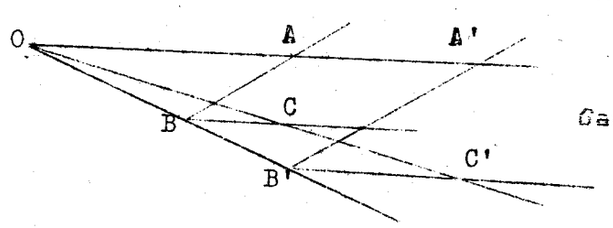
$OA' : OA = OB' : OB = OX' : OX$. Jadi $AB // A'B'$.

Karena $AB // A'B'$, maka $\frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = \frac{A'B'}{AB} = k.$

atau $A'B' = k.AB.$

C. Hasil Perbanyakan Sebuah Sudut

Dalil 28: Hasil perbanyakan sebuah sudut adalah sebuah sudut yang sama besar dan kaki-kakinya sejajar dengan dengan kaki-kaki sudut asal.



Gambar 82.

$\angle ABC$ diperbanyakan terhadap titik O dengan faktor k, maka hasil perbanyakannya adalah $\angle A'B'C'$ yang besarnya sama dengan $\angle ABC$. Sedangkan $AB // A'B'$ dan $BC // B'C'$.
Cobalah buktikan sendiri.

D. Soal-Soal:

1. Didalam $\triangle ABC$ ada titik T. Tentukanlah hasil perbanyakan $\triangle ABC$ tersebut terhadap titik dengan faktor $1\ ^1/_2$, 2 dan 1.

2. Titik O terletak diluar persegi panjang ABCD.
   Lukislah hasil perbanyakan terhadap titik O dengan faktor 2 dan -2.

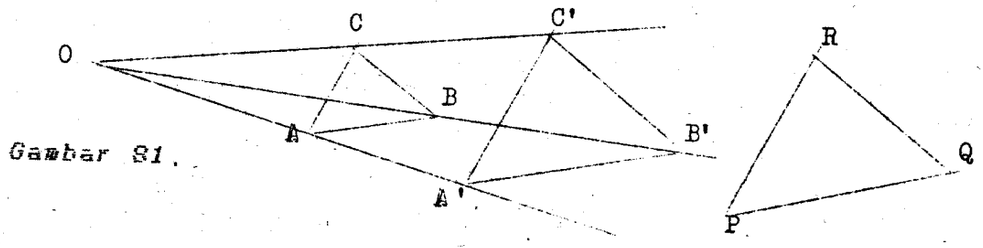
3. Diketahui trapesium siku-siku ABCD, dengan sisi siku-siku tegak AD = 4 cm, sisi siku-siku sejajar AB dan DC masing-masing panjangnya 7 cm dan 5 cm.
   Trapesium ABCD diperbanyakan terhadap titik sudut A dengan faktor 3.
   Tentukanlah hasil perbanyakannya dan luas hasil perbanyakannya.

4. Persegi panjang ABCD dengan AB = 8 cm dan AD = 3 cm, diperbanyakan dengan faktor 2 terhadap titik O.
   Tentukanlah hasil perbanyakannya (gambar) jika O terletak: a). pusat ABCD.
   b). titik sudut A.
   c). pertengahan AB.

5. Diketahui segitiga siku-siku ABC dengan $\angle A = 90^o$.
   Titik D terletak pada pertengahan sisi miring BC.
   Perbanyakanlah segitiga ABC itu terhadap titik D dengan faktor 2 dan -2.

E. Segitiga-Segitiga Yang Sebangun

Perhatikan gambar berikut:



Gambar 81.

Segitiga ABC diperbanyakan terhadap titik O dengan faktor k, dan menghasilkan $\triangle A'B'C'$.

Jika $\triangle A'B'C' \cong \triangle PQR$, maka dikatakan $\triangle ABC$ sebangun dengan $\triangle PQR$. Lambang untuk sebangun disimbulkan dengan $\sim$.

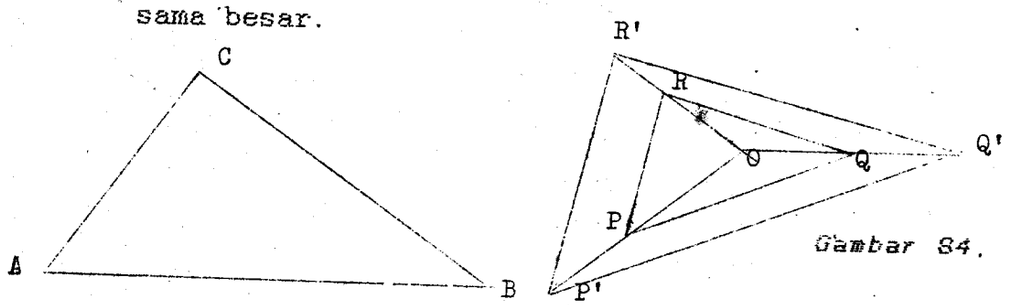
Setiap hasil perbanyakan dari suatu bangun (segi-n), maka bangun asal dan bangun hasilnya merupakan bangun-bangun yang seletak. Jadi kedua bangun itu juga sebangun. Karena itu;

$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$, dan $\triangle ABC$ seletak dengan $\triangle A'B'C'$.

Definisi: Dua buah segitiga dikatakan sebangun jika segitiga yang satu diperbanyakan dengan suatu faktor tertentu menghasilkan suatu segitiga yang sama dan sebangun (kongruen) dengan segitiga yang satu lagi.

Dari definisi diatas bahwa antara 2 buah segitiga yang sebangun, tidak perlu bahwa kedua segitiga itu yang satu merupakan hasil perbanyakan segitiga yang pertama.

Dalil 29: Sisi-sisi yang bersesuaian dua buah segitiga yang sebangun merupakan perbandingan seharga yang berangkai, sedangkan sudut-sudut yang bersesuaian sama besar.



Gambar 84.

Diketahui: $\triangle ABC \sim \triangle PQR$.

Buktikan : 1). $AB : PQ = BC : QR = AC : PR$.

2). $\angle A = \angle P$, $\angle B = \angle Q$, $\angle C = \angle R$.

Bukti: Karena $\triangle ABC \sim \triangle PQR$, maka $\triangle PQR$ dapat diperbanyakan dengan suatu faktor k, sehingga menghasilkan $\triangle P'Q'R' \cong \triangle ABC$.

Selanjutnya $\triangle P'Q'R'$ dan $\triangle PQR$ adalah seletak, maka $\angle P' = \angle P$, $\angle Q' = \angle Q$ dan $\angle R' = \angle R$, sedangkan:

$$k = \frac{OP'}{OP} = \frac{OQ'}{OQ} = \frac{OR'}{OR}$$

$\triangle P'Q'R' \cong \triangle ABC$, maka $\angle P' = \angle A$, $\angle Q' = \angle B$ dan $\angle R' = \angle C$ dan $P'Q' = AB$, $Q'R' = BC$ dan $P'R' = AC$.

Jadi terbukti, $AB : PQ = BC : QR = AC : PR$ dan

$\angle A = \angle P$, $\angle B = \angle Q$ dan $\angle C = \angle R$.

Ada 4 buah dalil dasar yang menyatakan 2 buah segitiga sebangun. Keempat dalil tersebut adalah sebagai berikut:

Dalil 30: Dua buah segitiga disebut sebangun jika pada kedua segitiga:

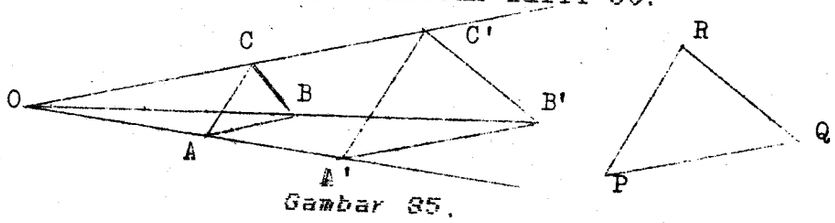
a). dua pasang sudut sama besar (sd,sd).

b). dua pasang sisi berbanding seharga sedangkan sudut-sudut yang diapitnya sama besar (s,sd,s)

c). ketiga pasang sisi berbanding seharga (s,s,s).

d). dua pasang sisi berbanding seharga dan salah satu sudut didepan salah satu sisi yang berbanding seharga itu sama besar(s,s,sd).

Untuk membuktikan dalil-dalil di atas, haruslah kita buktikan bahwa kita dapatkan suatu segitiga yang merupakan hasil perbanyakan segitiga pertama yang kongruen dengan segitiga kedua. Perhatikanlah pembuktian dalil 30a



Gambar 85.

Diketahui: $\triangle ABC$ dan $\triangle PQR$

$\angle A = \angle P$, $\angle C = \angle R$.

Buktikan : $\triangle ABC \sim \triangle PQR$.

Bukti: Tarik dari sembarang titik A' sebuah potongan garis A'B' yang sama dengan PQ dan sejajar AB.
Garis-garis yang menghubungkan A' dengan A dan B' dengan B berpotongan di titik O.
Ini berarti bahwa titik A' dan B' terjadi karena titik A dan B diperbanyakan terhadap titik O dengan faktor tertentu (misalnya faktor p).
Jika titik C diperbanyakan pula terhadap O dengan p maka akan didapat C' atau dengan kata lain $\triangle A'B'C'$ terjadi karena $\triangle ABC$ diperbanyakan terhadap titik O dengan faktor p.
Akibatnya $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ .....(1).

$\therefore \angle A' = \angle A$ maka $\angle A' = \angle P$.

$\angle B' = \angle B$ maka $\angle B' = \angle Q$.

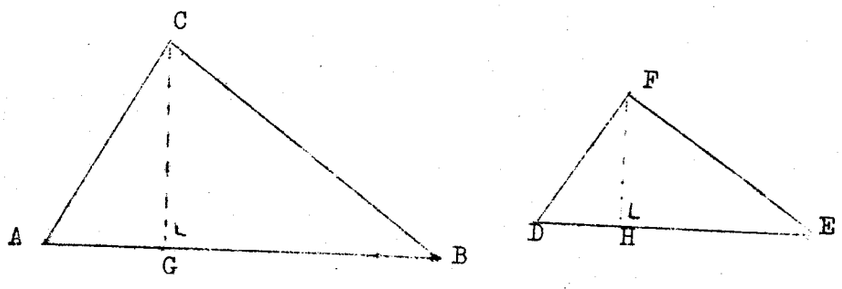
$A'B' = PQ$.

Jadi $\triangle A'B'C' \cong \triangle PQR$ .....(2).
Dari (1) dan (2) terbuktilah $\triangle ABC \sim \triangle PQR$.

Untuk bukti dalil-dalil 30b, 30c, 30d tidaklah sukar, cobalah buktikan sendiri.

Berdasarkan sifat-sifat dari dua buah segitiga yang sebangun (~), maka akan berlaku dalil/sifat berikut:

Dalil 31: Dua buah segitiga yang sebangun luasnya berbanding sebagai hasil kali 2 buah sisi yang berdekatan.



Gambar 86.

Diketahui: $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.

Buktikan : Luas $\triangle ABC$: luas $\triangle DEF$ = AB x AC : DE x DF.

Bukti: Pada $\triangle ABC$ dibuat garis tinggi CG.

Pada $\triangle DEF$ dibuat garis tinggi FH.

Luas $\triangle ABC = {}^{1}/_{2}$ AB x CG.

Luas $\triangle DEF = {}^{1}/_{2}$ DE x FH.

Pada segitiga siku-siku AGC ——> CG = AC sin $\angle A$.

Pada segitiga siku-siku DHF ——> FH = DF sin $\angle D$.

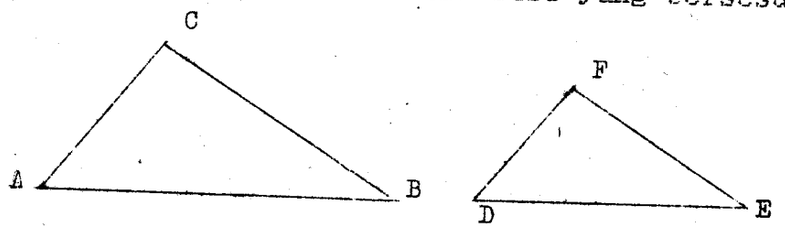
Jadi luas $\triangle ABC$: luas $\triangle DEF$ =

$${}^{1}/_{2}\ AB.AC \sin \angle A : {}^{1}/_{2}\ DE.DF \sin \angle D$$

Karena $\angle A = \angle D$, terbuktilah.

Luas $\triangle ABC$: luas $\triangle DEF$ = AB x AC : DE x DF.

Dalil 32: Dua buah segitiga yang sebangun luasnya berbanding sebagai kwadrat sisi-sisi yang bersesuaian.



Gambar 87.

Diketahui: $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.

Buktikan : Luas $\triangle ABC$: Luas $\triangle DEF$

$= AB^2 : DE^2 = BC^2 : EF^2 = AC^2 : DF^2$.

Bukti: Menurut dalil 31:

Luas $\triangle ABC$: Luas $\triangle DEF$ = AB x AC : DE x DF.....(1)

Karena $\triangle ABC \sim \triangle DEF$, maka

$$AB : DE = AC : DF.$$

$$DF = \frac{DE \cdot AC}{AB} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

$$AB = \frac{DE \times AC}{DF} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

Sub (3) ke (1):

Luas $\triangle ABC$: Luas $\triangle DEF$ = AB x AC : DE . $\frac{DE \cdot AC}{AB}$

$$= AB : \frac{DE^2}{AB}$$

$$= AB^2 : DE^2.$$

Jika (2) sub ke (1):

$$\text{Luas } \triangle ABC : \text{Luas } \triangle DEF = \frac{DE \cdot AC}{DF} \cdot AC : DE \cdot DF$$

$$= \frac{AC^2}{DF} : DF$$

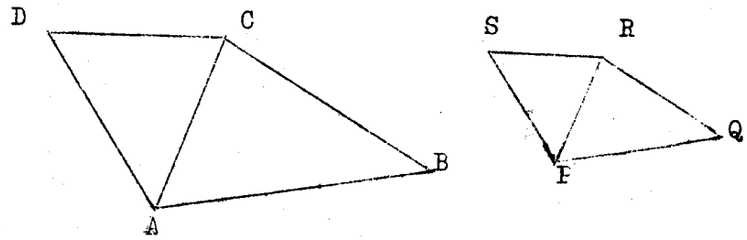
$$= AC^2 : DF^2.$$

Dengan cara yang sama akan diperoleh pula:

Luas $\triangle ABC$: Luas $\triangle DEF = BC^2 : EF^2$

Perluasan dalil 32 di atas, maka setiap 2 buah segi-n yang sebangun luasnya akan berbanding sebagai kwadrat-kwadrat sisi yang bersesuaian.

Perhatikan gambar berikut:



Gambar 33.

Segi-4 ABCD ~ segi-4 PQRS, maka:

Luas PQRS : luas ABCD = $PQ^2 : AB^2 = QR^2 : BC^2 = RS^2 : CD^2 =$
$= PS^2 : AD^2.$

Buat diagonal AC dan PR.

Maka $\triangle ABC \sim \triangle PQR$ dan $\triangle ACD \sim \triangle PRS$.

Luas $\triangle ABC$: luas $\triangle PQR = AB^2 : PQ^2 = AC^2 : PR^2$

Luas $\triangle ACD$: luas $\triangle PRS = AC^2 : PR^2 = AD^2 : PS^2$

Luas $(\triangle ABC + \triangle ACD)$: Luas $(\triangle PQR + \triangle PRS) = AC^2 : PR^2$

Atau luas ABCD : luas PQRS $= AC^2 : PR^2$

Jadi luas ABCD : luas PQRS $= AB^2 : PQ^2 = BC^2 : QR^2 = CD^2 : RS^2$
$= AD^2 : PS^2.$

Jadi dengan demikian akan berlakulah dalil di atas untuk setiap 2 bangun yang sebangun.

F. Soal-Soal:

1. Diketahui $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$. Jika AD dan A'D' garis-garis bagi dari $\angle A$ dan $\angle A'$, AE dan A'E' merupakan garis-garis berat dari titik sudut A dan A', maka buktikanlah AE : A'E' = AD : A'D'.

2. Buktikanlah 2 buah segitiga samakaki sebangun, jika diketahui:
   a). Sudut puncaknya sama besar.
   b). Alas dan garis tinggi pada sebuah kaki dari segitiga yang pertama berbanding seharga dengan alas dan garis tinggi pada sebuah kaki pada segitiga yang kedua.
   c). Alas dan garis tinggi pada alas dari segitiga yang pertama berbanding seharga dengan alas dan garis tinggi pada alas dari segitiga yang kedua.

3. Diketahui trapesium ABCD sebangun dengan trapesium PQRS. Jumlah sisi-sisi ABCD = 76 cm dan jumlah sisi-sisiPQRS = 95 cm. Jika panjang diagonal AC = 20 cm, tentukanlah panjang diagonal PR.

4. Diketahui $\triangle ABC \sim \triangle PQR$. Jiaka AB = 30 cm, BC = 45 cm dan AC = 60 cm, sedangkan PQ + QR = 50 cm. Tentukanlah panjang PR.

5. Dalam $\triangle ABC$ ditarik garis tinggi BE dan CF yang berpotongan di T. Buktikanlah.
   a). AF x AB = AE x AC.
   b). CE x BT = CT x BF.

6. Sisi-sisi sejajar suatu trapesium panjangnya 15 cm dan 25 cm. Melalui titik potong kedua diagonal dibuat garis yang sejajar dengan sisi-sisi sejajar tersebut. Tentukanlah panjang garis tersebut.

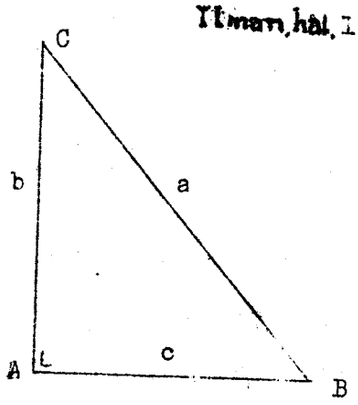
BAB VIII

DALIL PYTHAGORAS

Pythagoras yaitu seorang ahli matematika Yunani yang hidup ±300 tahun sebelum Masehi, menemukan suatu perumusan, yang dikenal dengan **dalil Pythagoras**.

A. Dalil Pythagoras tersebut berbunyi sebagai berikut:

Dalil 33 : Pada setiap segitiga siku-siku, kuadrat sisi miring sama dengan jumlah kuadrat kedua sisi siku-siku yang lain. (Poespowardojo, hal 84 dan Oetjoep Timan, hal 172).

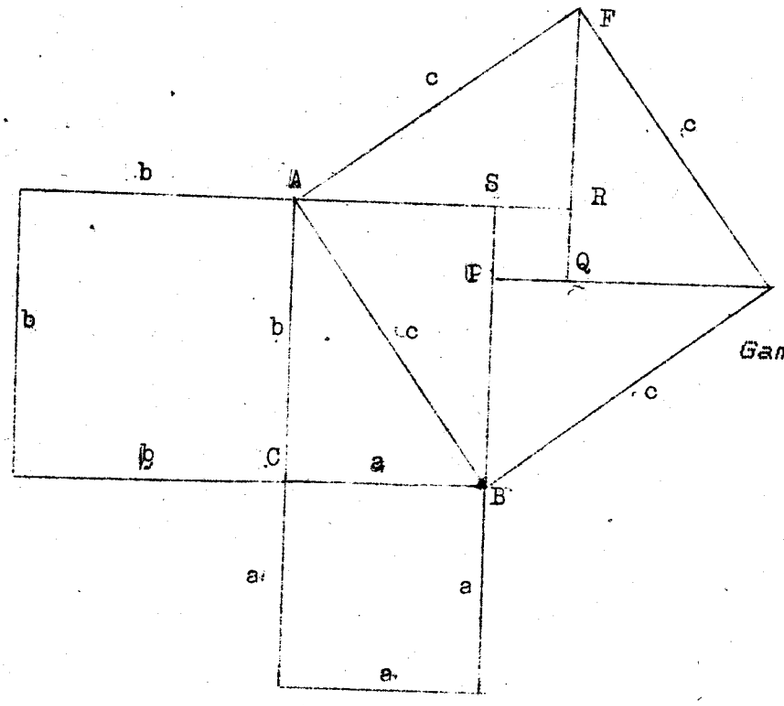


Gambar 89

Menurut dalil pythagoras, maka pada segitiga siku-siku ABC di atas berlaku $c^2 = a^2 + b^2$.

Dalil tersebut dapat dibuktikan dengan beberapa macam, antara lain adalah sebagi berikut:

Perhatikan gambar berikut:.....



Gambar 90

Kearah luar dari segitiga ABC dibuat bujur sangkar-bujur sangkar yang masing-masing sisinya adalah a, b dan c.
Dari gambar, maka segitiga-segitiga ABC, $\triangle$BEP, $\triangle$EFQ dan $\triangle$FAR adalah segitiga-segitiga yang kongruen (kenapa ?).

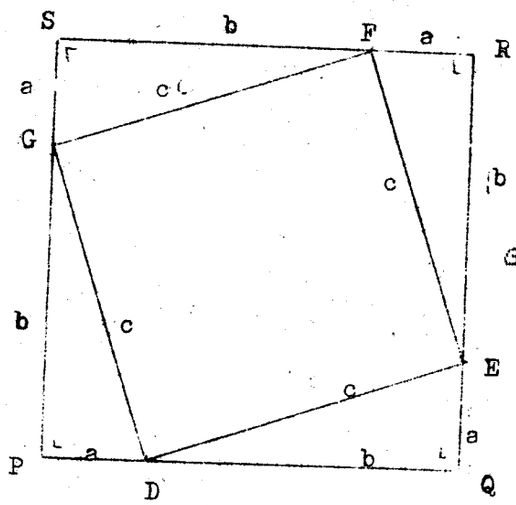
Jadi luas ABEF = 4 luas $\triangle$ABS + luas PQRS

$$c^2 = 4(\tfrac{1}{2} ab) + (b - a)^2$$

$$\Longrightarrow \quad c^2 = 2ab + b^2 - 2ab + a^2$$

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Cara kedua: Jika 4 buah segitiga siku-siku, disusun, sehingga terbentuk bujur sangkar berikut:



Gambar 91

maka didapatkan:

$$\text{Luas PQRS} = 4 \text{ luas } \triangle PDG + \text{luas DEFG}$$

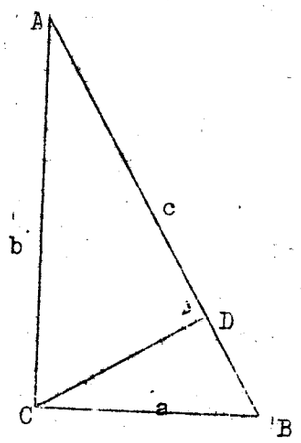
$$(a + b)^2 = 4(\tfrac{1}{2} ab) + c^2$$

$$a^2 + b^2 + 2ab = 2ab + c^2$$

atau

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Cara lain adalah sebagai berikut:



Gambar 92

CD = garis tinggi pada sisi miring.

$\triangle ABC \sim \triangle CBD$ (kenapa ?)

$BC : BD = AB : BC$

$BC^2 = BD.AB \Longrightarrow a^2 = c.BD$.....(1)

$\triangle ABC \backsim \triangle ACD$ (kenapa ?)

$AC : AD = AB : AC$

$AC^2 = AD.BD \Longrightarrow b^2 = c.AD$.....(2)

(1) + (2) $\Longrightarrow a^2 + b^2 = c(BD + AD)$

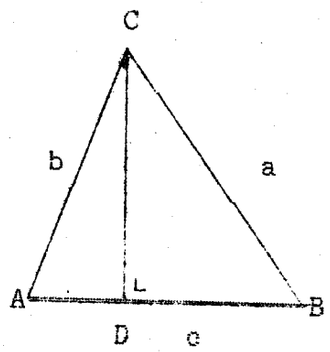
$= c.AB$

$= c.c$

Jadi $a^2 + b^2 = c^2$.

Akibat dari dalil Pythagoras ini, maka:

1. Pada segitiga lancip, kuadrat salah satu sisi lebih kecil dari pada jumlah kuadrat kedua sisi yang lain.



Gambar 93

Diketahui: $\triangle ABC$ dengan sudut-sudutnya lancip.

Buktikan : $a^2 < b^2 + c^2$

$b^2 < a^2 + c^2$

$c^2 < a^2 + b^2$.

Bukti:

Buat $CD \perp AB$.

Misalkan $AD = x$, maka $DB = c - x$

Dalam $\triangle ADC$: $CD^2 = AC^2 - AD^2$.....(1)

Dalam $\triangle DBC$: $CD^2 = BC^2 - DB^2$.....(2)

Dari (1) dan (2) maka:

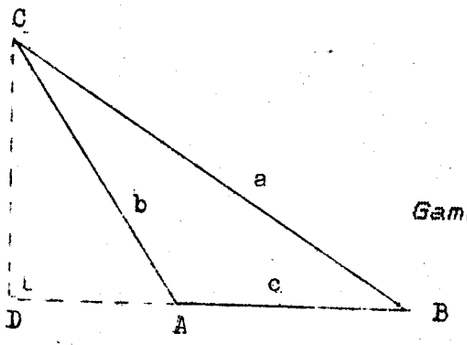
$$AC^2 - AD^2 = BC^2 - DB^2$$
$$b^2 - x^2 = a^2 - (c - x)^2$$
$$b^2 - x^2 = a^2 - c^2 + 2cx - x^2$$
$$b^2 + c^2 = a^2 + 2cx$$

atau

$$a^2 < b^2 + c^2$$

Dengan cara yang sama dapat pula dibuktikan bahwa; $b^2 < a^2 + c^2$ dan $c^2 < a^2 + b^2$.

2. Pada segitiga tumpul, kuadrat sisi di depan sudut tumpul lebih besar dari pada jumlah kuadrat kedua sisi yang lain.



Gambar 94

Diketahui: $\triangle ABC$ dengan $\angle A$ tumpul.

Buktikan : $a^2 > b^2 + c^2$.

Bukti: Buat CD $\perp$ AB (pada perpanjanagan BA).

Misalkan AD = x, maka DB = c + x.

Dalam $\triangle ADC$: $CD^2 = AC^2 - AD^2$.....(1)

Dalam $\triangle DBC$: $CD^2 = BC^2 - DB^2$.....(2)

Dari (1) dan (2) maka:

$$AC^2 - AD^2 = BC^2 - DB^2$$
$$b^2 - x^2 = a^2 - (c - x)^2$$
$$b^2 - x^2 = a^2 - c^2 - 2cx - x^2$$
$$a^2 = b^2 + c^2 + 2cx$$

atau

$$a^2 > b^2 + c^2$$

B. TRIPLE PYTHAGORAS. (Oetjoep Ilman, hal.73).

Jika sisi-sisi suatu segitiga siku-siku masing-masing panjangnya merupakan bilangan-bilangan bulat, maka himpunan ketiga bilangan bulat tersebut dinamai dengan **triple Pythagoras** atau bilangan **tigaan Pythagoras**.

Jadi triple Pythagoras adalah himpunan tiga buah bilangan bulat yang merupakan panjang sisi-sisi suatu segitiga siku-siku.

Umpamanya, segitiga siku-siku yang masing-masing sisi panjangnya 3, 4 dan 5 satuan, maka himpunan ketiga bilangan tersebut dinamai trple Pythagoras.

Untuk mendapatkan sisi-sisi suatu segitiga siku-siku yang masing-masing panjangnya merupakan bilangan-bilangan bulat, maka dapat dicari dengan menggunakan tabel berikut:

m	n	$m^2 + n^2$	$m^2 - n^2$	2 mn

Catatan: m dan n bilangan asli

$m > n$

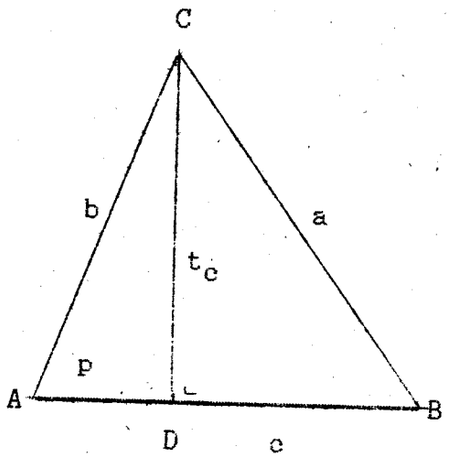
$m^2 + n^2$ = sisi miring

$m^2 - n^2$ dan 2 mn = kedua sisi siku-siku.

Dengan menggunakan tabel di atas, maka dengan mudah kita mendapatkan himpunan bilangan **Triple Pythagoras**.

C. Rumus-rumus pada segitiga

1. Perumusan garis tinggi.



Gambar 95

Pada segitiga ABC seperti gambar di atas dengan sisi-sisi a, b dan c.

Jika CD merupakan garis tinggi dari titik sudut C pada sisi c, maka biasanya garis tinggi itu disimbolkan dengan t_c.

Dari segitiga ABC di atas, kalau AD = p, maka panjang DC = c - p.

Dalam segitiga ADC berlaku: $t_c^2 = b^2 - p^2$ .....(1)

Dalam segitiga BDC berlaku: $t_c^2 = a^2 - (c - p)^2$ .....(2)

Jadi $b^2 - p^2 = a^2 - c^2 - p^2 + 2cp$

$a^2 = b^2 - c^2 - 2cp$

atau

$$p = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}.$$

Substitusikan harga p tersebut dalam (1)

$$t_c^2 = (b + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c})(b - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c})$$

$$= (\frac{2bc + b^2 + c^2 - a^2}{2c})(\frac{2bc - b^2 - c^2 + a^2}{2c})$$

$$= \frac{(2bc + b^2 + c^2 - a^2)(2bc - b^2 - c^2 + a^2)}{4c^2}$$

$$= \frac{\{(b + c)^2 - a^2\}\{a^2 - (b - c)^2\}}{4c^2}$$

$$= \frac{(b + c + a)(b + c - a)(a + b - c)(a - b + c)}{4c^2}$$

$$= \frac{2s(2s - 2a)(2s - 2c)(2s - 2b)}{4c^2}$$

$$t_c^2 = \frac{16s(s - a)(s - b)(s - c)}{4c^2}$$

$$t_c = \frac{2}{c}\sqrt{s(s - a)(s - b)(s - c)}$$

Catatan: $2s = a + b + c$ (keliling segitiga)

$$s = \frac{1}{2}(a + b + c)$$

Dengan cara yang sama akan diperoleh pula:

$$t_a = \frac{2}{a}\sqrt{s(s - a)(s - b)(s - c)}$$

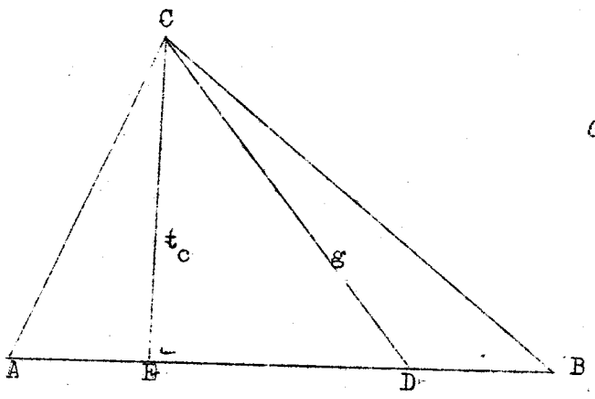
$$t_b = \frac{2}{b}\sqrt{s(s - a)(s - b)(s - c)}$$

Berdasarkan perumusan luas segitiga, maka akan kita peroleh prumusan baru untuk mencari luas segitiga, yaitu:

Luas segitiga ABC = $\sqrt{s(s - a)(s - b)(s - c)}$

Perumusan/dalil Stewart.

Perhatikan gambar 96 berikut:



Gambar 96.

Seandainya dari titik sudut C ditarik sembarang garis CD, dan jika AD = c_1, DB = c_2, CD = g dan ED = x = proyeksi g pada c, maka:

Dalam $\triangle$ADC, $b^2 = g^2 + c_1^2 - 2c_1x$ .....(1)

Dalam $\triangle$DBC, $a^2 = g^2 + c_2^2 - 2c_2x$ .....(2)

(1) xc_2 : $b^2c_2 = g^2c_2 + c_1^2c_2 - 2c_1c_2x$

(2) xc_1 : $a^2c_1 = g^2c_1 + c_2^2c_1 + 2c_1c_2x$

$$b^2c_2 + a^2c_1 = g^2(c_1 + c_2) + c_1c_2(c_1 + c_2)$$

$$b^2c_2 + a^2c_1 = g^2c + c_1c_2c.$$

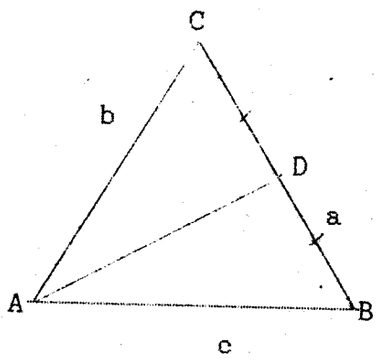
atau

$$\boxed{g^2c = a^2c_1 + b^2c_2 - cc_1c_2}$$

Bentuk terakhir ini disebut dengan dalil Stewart.

Perumusan garis berat

Perhatikan segitiga ABC berikut dengan sisi-sisi a, b dan c



Gambar 97

AD merupakan garis berat pada sisi a, dan biasa dilambangkan dengan m_a.

Menurut perumusan/dalil Stewart, maka:

$$m_a^2 xa = b^2 . \frac{1}{2} a + c^2 . \frac{1}{2} a - \frac{1}{2} a . \frac{1}{2} a . a$$

$$m_a^2 = \frac{1}{2} ab^2 + \frac{1}{2} ac^2 - \frac{1}{4} a^3$$

$$\boxed{m_a^2 = \frac{1}{2} b^2 + \frac{1}{2} c^2 - \frac{1}{4} a^2}$$

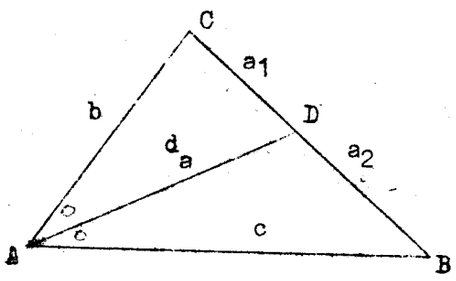
Dengan cara yang sama diperoleh pula:

$$\boxed{m_b^2 = \frac{1}{2} a^2 + \frac{1}{2} c^2 - \frac{1}{4} b^2}$$

$$\boxed{m_c^2 = \frac{1}{2} a^2 + \frac{1}{2} b^2 - \frac{1}{4} c^2}$$

Perumusan garis bagi dalam

Perhatikan $\triangle ABC$ seperti gambar 90 berikut:



Gambar 98.

AD merupaakan garis bagi dalam dari sudut A, dan biasanya dilambangkan dengan d_a.

Jika CD = a_1 dan DB = a_2, maka:

$$a_1 : a_2 = b : c$$

Menurut sifat perbandingan seharga:

$$(a_1 + a_2) : (b : c) = a_1 : b$$

$$a : (b + c) = a_1 : b = a_2 : c$$

$$a_1 = \frac{ab}{b + c} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$a_2 = \frac{ac}{b + c} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Menurut perumusan Steewart:

$$d_a^2.a = b_{a2}^2 + c_{a1}^2 - a_1.a_2.a \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

Substitusikan (1) dan (2) ke (3), maka:

$$d_a^2.a = b^2.\frac{ac}{b+c} + c^2.\frac{ab}{b+c} - a_1.a_2.a$$

$$= \frac{ab^2c + abc^2}{b+c} - a_1.a_2.a$$

$$= \frac{abc(b+c)}{b+c} - a_1.a_2.a$$

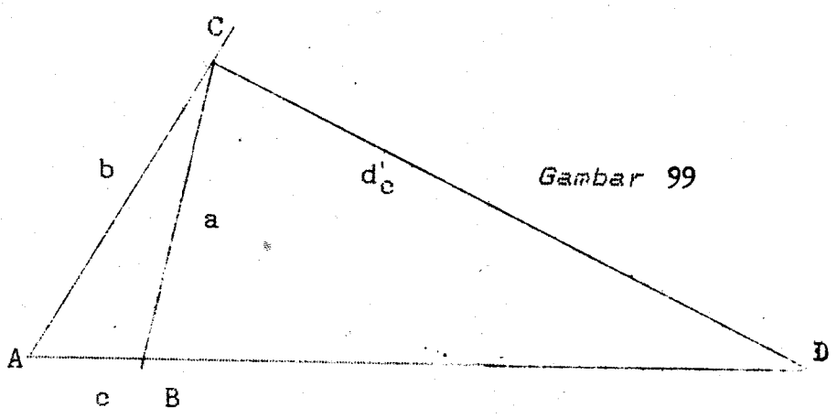
$$d_a^2.a = abc - a_1.a_2.a$$

$$\therefore \boxed{d_a^2 = bc - a_1.a_2}$$

Dengan cara yang sama didapatkan pula:

$$\boxed{\begin{aligned} d_b^2 &= ac - b_1.b_2 \\ d_c^2 &= ab - c_1.c_2 \end{aligned}}$$

Perumusan garis bagi luar



Gambar 99

Perhatikan $\triangle ABC$ seperti gambar 91 di atas.

$CD = d_c$ = garis bagi luar dari $\angle C$.

Jika $BD = c_1$ dan $AD = c_2$

$$c_1 : c_2 = a : b$$

$$c_1 b = ac_2$$

$$= a(a + c_1)$$

$$c_1 b = ac + ac_1$$

$$c_1 = \frac{ac}{b - a} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$c_1 : c_2 = a : b$$

$$(c_2 - c) : c_2 = a : b$$

$$c_2 a = b(c_2 - c)$$

$$c_2 a = bc_2 - bc$$

$$c_2(a - b) = -bc$$

$$c_2 = \frac{bc}{b - a} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Menurut perumusan Stewart:

$$a^2 c_2 = d'_c{}^2 c + b^2 c_1 - c_1 c_2 c$$

$$d'_c{}^2 c = a^2 c_c{}^2 - b^2 c_1 - c_1 c_2 c$$

$$= a^2 . \frac{bc}{b - a} - b^2 . \frac{ac}{b - a} + c_1 c_2 c$$

$$d'_c{}^2 c = \frac{a^2 b - b^2 a}{b - a} + c_1 c_2$$

$$= \frac{ab(a - b)}{b - a} + c_1 c_2$$

$$= -ab + c_1 c_2$$

$$\boxed{d'_c{}^2 c = c_1 c_2 - ab}$$

Dengan yang sama, maka diperoleh:

$$\boxed{d'_a{}^2 = a_1 a_2 - bc}$$

$$\boxed{d'_b{}^2 = b_1 b_2 - ac}$$

Catatan:

d'_c = garis bagi luar $\angle C$.

d'_a = garis bagi luar $\angle A$.

d'_b = garis bagi luar $\angle B$.

Soal-Soal:

1. Diketahui $\triangle ABC$ dengan sisi-sisi a = 13, b = 14 dan c = 15.

   Tentukan: a). Panjang ketiga garis tinggi $\triangle ABC$ itu.
   b). Panjang ketiga garis bagi $\triangle ABC$ itu.
   c). Panjang ketiga garis tinggi $\triangle ABC$ itu.
   d). Luas $\triangle ABC$ itu.

2. Dalam $\triangle ABC$ dibuat garis tinggi AD dan garis berat CE. Jika DE = $\sqrt{30}$, $\angle B = 45^\circ$ dan $\angle CAD = 30^\circ$, tentukanlah panjang sisi-sisi segitiga ABC.

3. Diketahui $\triangle ABC$ dengan AB = 16, BC = 15 dan AC = 14, dibuat garis tinggi AD dan garis bagi BE. Jika AD dan BE berpotongan di T.
   Tentukanlah panjang DT.

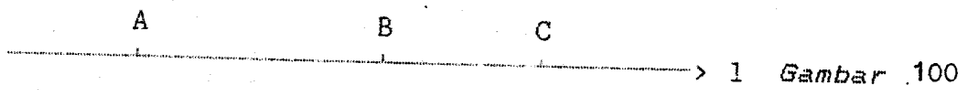
4. Buktikanlah, pada sebuah jajaran genjang jumlah kuadrat diagonal-diagonalnya sama dengan jumlah kuadrat sisi-sisinya.

BAB IX

DALIL MENELAOS DAN DE CEVA

Sebelum kita membicarakan dalil Menelaos dan de Ceva, terlebih adahulu marilah kita bicarakan beberapa pengertian yang erat kaitannya dengan dalil-dalil di atas.

A. Perbandingan seharga segmen garis-segmen garis berarah.



Gambar 100

Pada gambar 91 di atas, titik-titik A, B dan C terletak pada garis l. Kumpulan titik-titik A, B dan C disebut koliner (segaris), sedangkan garis l disebut garis kolinasi.

Perabandingan antara segmen garis AB dengan segmen garis BC di tulis $\frac{AC}{BC}$. Perbandingan tersebut biasa disimbulkan dengan (ABC).

Perbandingan (ABC) = $\frac{AC}{BC}$ atau (ABC) = $\frac{CA}{CB}$ adalah bernilai positif, karena AC dan BC atau CA dan CB adalah searah.

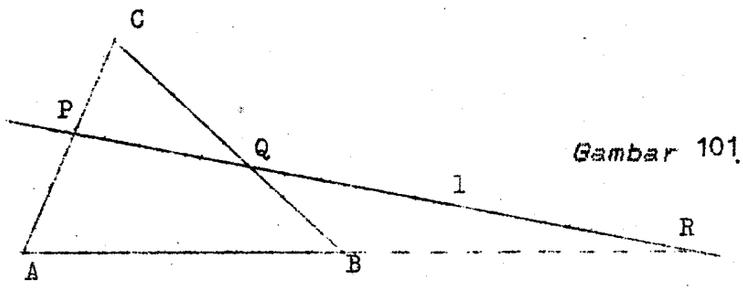
Tetapi perbandingan segmen garis (ACB) yang berarti $\frac{AB}{CB}$ atau $\frac{BA}{BC}$ adalah bernilai negatif, karena arah AB dan CB atau arah BA dan BC adalah berlawanan.

Dari uraian di atas dapat diambil kesimpulan sebagai berikut: Suatu perbandingan seharga bernilai positif kalau arahnya sama dan bernilai negatif kalau arahnya berlawanan.

B. Garis transversal.

Jika suatu garis memotong sisi-sisi suatu bangun datar, maka garis tersebut dinamai dengan garis transversal.

Pada gambar berikut garis l memotong sisi-sisi segitiga ABC pada titik-titik P, Q dan R maka garis l disebut dengan garis transversal.



Gambar 101

Garis transversal dapat dibedakan atas:

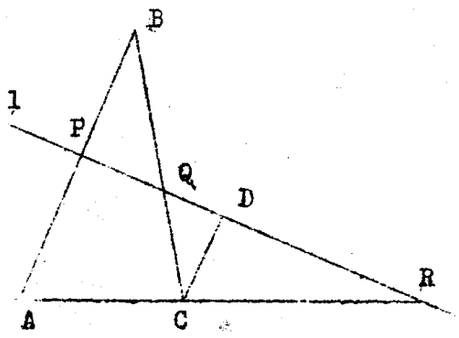
a. Garis transversal sudut, yaitu garis transversal yang melalui salah satu titik sudut segi-n.
b. Garis transversal sisi, yaitu garis transversal yang tidak melalui titik sudut suatu segi-n.

C. Dalil Menelaos (Kuipers, hal.134).

Jika garis transversal sisi l memotong sisi-sisi $\triangle ABC$ pada titik P (pada sisi AB), Q(pada sisi BC) dan R (perpanjangan sisi AC) maka:

$$(ABP) \times (BCQ) \times (CAR) = 1$$

Bukti:



Gambar 102

Yang harus dibuktikan;

$(ABP) \times (BCQ) \times (CAR) = 1$, (*)

atau

$$\frac{AP}{BP} \times \frac{BQ}{CQ} \times \frac{CR}{AR} = 1$$

Buat CD // AB, maka;

$\triangle PBQ \sim \triangle DCQ$ (kenapa ?)

jadi

$$\frac{BQ}{CQ} = \frac{PB}{DC} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Dalam $\triangle APR$, CD // AP, maka;

$$\frac{DC}{AP} = \frac{CR}{AR} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Dari $\frac{AP}{BP} \times \frac{BQ}{CQ} \times \frac{CR}{AR}$, harga $\frac{AP}{BP}$ = positif, $\frac{BQ}{CQ}$ = negatif dan $\frac{CR}{AR}$ = negatif.

Jadi harga $\frac{AP}{BP} \times \frac{BQ}{CQ} \times \frac{CR}{AR}$ = positif.

Substitusikan (1) dan (2) ke (*), maka diperoleh:

$$\frac{AP}{BP} \times \frac{BQ}{CQ} \times \frac{CR}{AR} = \frac{AP}{BP} \times \frac{PB}{DC} \times \frac{DC}{AP} = 1$$

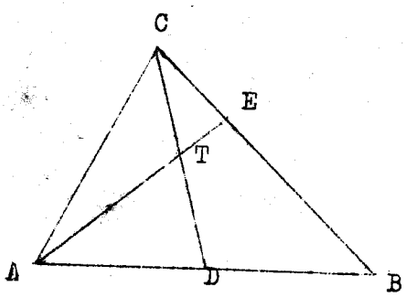
Jadi terbukti bahwa: $\frac{AP}{BP} \times \frac{BQ}{CQ} \times \frac{CR}{AR} = 1.$

Dalam pemakaian dalil Menelaos, yang harus diperhatikan adalah segitiga asal dan garis transversal. Selanjutnya tanda-tanda diruas kirinya tidak perlu diperhatikan, cukup tanda pada hasilnya saja.

Untuk lebih jelasnya perhatikanlah contoh berikut.

Pada segitiga ABC dibuat garis berat CD. Titik E terletak pada BC sehingga BE : EC = 2 : 1. CD dan AE berpotongan pada titik T. Tentukanlah perbandingan antara AT dan TE.

Penyelesaian:



Gambar 103

Diketahui: $\triangle ABC$

CD = garis berat

BE : EC = 2 : 1.

Ditanya: AT : TE = ?.

Jawab: Karena yang dicari adalah perbandingan antara AT dan TE, maka garis ATE haruslah merupakan salah satu sisi segitiga asal.

Dari gambar sisi ATE dapat merupakan sisi-sisi $\triangle ABE$ atau sisi $\triangle ACE$. Dari kedua segitiga itu yang memenuhi adalah $\triangle ABE$ karena CDT dapat diambil sebagai garis transversal sisi. Jadi dengan demikian maka kita dapat memakaikan dalil Menelaos sebagai berikut:

$$(ABD) \cdot (BEC) \cdot (EAT) = 1$$

$$\frac{AD}{BD} \cdot \frac{BC}{EC} \cdot \frac{ET}{AT} = 1$$

$$\frac{1}{1} \cdot \frac{3}{1} \cdot \frac{ET}{AT} = 1$$

atau $3\ ET = AT$

Jadi AT : ET = 3 : 1 atau AT : TE = 3 : 1.

Perhatian:

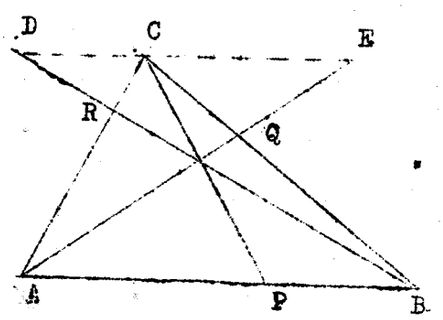
Dalam pemakaian dalil Menelaos, perbandingan segmen garis-segmen garis pada masing-masing sisi didahului dua buah titik sudut segitiga asal selanjutnya titik potong garis transversal dengan sisi itu.

Pada contoh di atas, (ABD) umpamanya, A dan B adalah titik sudut sesgitiga asal sedangkan P adalah titik potong garis transversal dengan sisi AB. Begitu juga (BEC), B dan E adalah dua buah titik sudut segitiga asal, sedangkan C adalah titik potong garis transversal dengan sisi BE.

D. Dalil De Ceva (Kuipers, hal.139).

Jiaka ketiga garis transversal sudut $\triangle$ABC berpotongan pada satu titik dan memotong sisi-sisi AB di P, sisi BC di Q dan sisi AC di R, maka (ABP) . (BCQ) . (CAR) = -1.

Bukti:



(ABP) . (BCQ) . (CAR) = -1

Hasil kali ketiga perbandingan segmen garis-segmen garsis tersebut adalah negatif, karena $\frac{AP}{BP}$ = negatif, $\frac{BQ}{CQ}$ = negatif dan $\frac{CR}{CQ}$ = negatif.

Buat garis melalui C sejajar AB yang memotong garis transversal sudut AQ di E dan garis transversal sudut BR di D.

$\triangle ABQ \sim \triangle ECQ$ (kenapa ?).

maka BQ : CQ = AB : CE atau

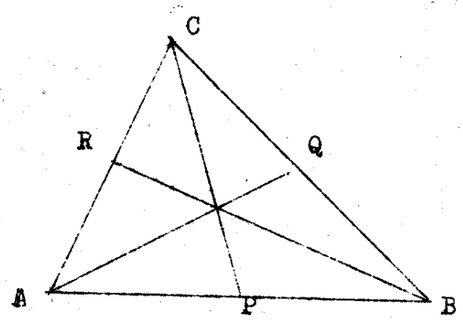
$$\frac{BQ}{CQ} = \frac{AB}{CE} \quad \ldots\ldots\ldots\

$\triangle ABR \sim \triangle CDR$ (kenapa ?),

maka CR : AR = CD : AB atau

$$\frac{CR}{AR} = \frac{CD}{AB} \quad \ldots\ldots\ldots\

Bukti:



Menurut dalil de Ceva (ABP)(BCQ)(CAR) = -1

$$(ABP)(BCQ)(CAR) = \left(-\frac{AP}{BP}\right)\left(-\frac{BQ}{CQ}\right)\left(-\frac{CR}{AR}\right)$$

$$= -\left(\frac{\frac{1}{2}c}{\frac{1}{2}c}\right)\left(-\frac{\frac{1}{2}a}{\frac{1}{2}a}\right)\left(-\frac{\frac{1}{2}b}{\frac{1}{2}b}\right)$$

$$= -1.$$

Karena (ABP)(BCQ)(CAR) = -1, maka tentulah ketiga garis berat tersebut berpotongan pada satu titik.

Soal-Soal:

1. Diketahui segitiga ABC, titik D pada BC sehingga BD : DC = 2 : 3 dan titik E pada AC sehingga AE : EC = 3 : 4. AD dan BE berpotongan pada titik S. Tentukanlah perbandingan AS dengan SD dan BS dengan SE.

2. Dari $\triangle ABC$, titik P pada AC sehingga AP = $^3/_4$ AC dan titik Q pada BC sehingga BQ = $^1/_3$ BC. Garis berat CD memotong PQ pada titik T. Tentukanlah perbandingan CT dengan TD.

3. Diketahui jajaran genjang ABCD. Titik P pada AD sehingga AP : PD = 3 : 1, dan titik Q pada pertengahan AB. Diagonal AC memotong PQ pada titik N. Tentukanlah perbandingan AN dengan NC.

4. Dari trapesium ABCD, AB // DC. Titik P terletak pada pertengahan sisi BC. AP dan BD berpotongan pada titik Q. Jiaka AB : DC = 3 : 2, tentukanlah perbandingan BQ dengan QD.

5. Dari segitiga ABC, titik Q apada AB sehingga AQ : QB = 1 : 3. Garis berat AP memotong CQ pata titik R. Tentukanlah perbandingan antara QR dengan RC.

DAFTAR PUSTAKA

Balai Pendidikan Guru, 1954, **Ilmu Ukur Bidang**, Balai Pendidikan Guru, Bandung.

Kuipers, L dan Wirasto, 1959, **Planimetri**, Noor Dhoff-Kolff NV, Jakarta.

M. Oetjoep Ilman, dkk, 1984, **Geometri Untuk SMA**, Wijaya, Jakarta.

Poespowardojo, T, 1962, **Ilmu Ukur**, PT Bima Baru, Sala.