GEOMETRI NETRAL
DAN
GEOMETRI INSIDENSI

D
I
S
U
S
U
N
OLEH

DRA. PUTRI YUANITA

FAKULTAS PENDIDIKAN MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
INSTITUT KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN
PADANG
1994

KATA PENGANTAR

Buku 'Geometri Netral dan Geometri Insidensi' ini penulis tulis agar pembaca, khusus yang berminat mempelajari ilmu tentang ilmu Geometri, dapat menambah wawasannya dalam ilmu matematika.

Buku ini terdiri dari 4 BAB, yaitu BAB I Pendahuluan, Bab II tentang Segi Empat Geometri Netral, BAB III Geometri Lobachaveky dan Geometri Rieman dan BAB IV adalah tentang Geometri Insidensi.

Penulis mengucapkan terima kasih kepada semua pihak yang telah membantu penulis dalam penulisan buku ini sampai selesai.

Semoga buku ini dapat bermanfaat bagi semua pembaca.

Padang, Juni 1994

Penulis

DAFTAR ISI

BAB I
PENDAHULUAN

1. GEOMETRI EUCLIDIK

Untuk membangun suatu Geometri diperlukan adanya :

1. Elemen-elemen atau unsur-unsur yang terdefinisi, misalnya titik, himpunan titik-titik tertentu yang disebut garis, himpunan titik-titik tertentu yang disebut bidang.
2. Aksioma-aksioma dan definisi-definisi.
3. Sifat-sifat atau teorema-teorema.

Abad ke 19, David Hilbert membenahi Geometri Eucklides tersebut agar supaya Geometri ini memenuhi aturan-aturan atau persyaratan-persyaratan yang lebih sesuai dengan perkembangan ilmiah moderen. Menurut Hilebrt ada 5 kelompok aksioma yang mendasari Geometri Euclides itu, yaitu :

1. Kelompok Aksioma Insidensi
2. Kelompok Aksioma Urutan
3. Kelompok Aksioma Kongruensi
4. Aksioma Kesejajaran
5. Aksioma Kekontinuan

<u>Contoh Kelompok Aksioma Insidensi adalah</u> :

(1) melalui 2 titik A dan B ada suatu garis

(2) melalui 2 titik A dan B tidak ada lebih dari satu garis.

(1) dan (2) dapat digabung menjadi.....

(3) melalui 2 titik A dan B ada satu dan tidak lebih dari satu garis.

(4) ada paling sedikit 2 titik pada tiap garis.

(5) Ada paling sedikit 2 titik yang tidak terletak pada satu garis.

(6) melalui tiga titik A, B, C yang tak segaris ada tepat 1 bidang.

(7) ada paling sedikit 4 titik yang tidak terletak pada satu bidang.

Contoh Kelompok Aksioma Urutan :

"Apa artinya bahwa apabila tiga titik A, B, C segaris dikatakan bahwa B terletak antara A dan C".

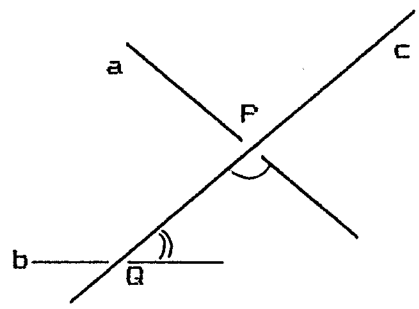
Jadi Kelompok Aksioma Urutan ini membahas arti relasi 'antara'.

Contoh Aksioma Kongruensi :

Kelompok ini membahas di antara. Contoh, sudut adalah hubungan dari dua garis ("setengah, garis") yang ujungnya berhimpit. Bila 2 sudut sama besar maka disebut 'kongruen'

Aksioma Kesejajaran Euclides adalah sebagai berikut :

Bentuk 1. Andaikan a dan b dua garis yang sebidang yang dipotong oleh garis ketiga c pada bidang itu di ruas-ruas P dan Q. Apabila ada jumlah dua sudut dalam, sepihak kurang dari 180°maka a dan b akan berpotongan pada bagian bidang yang memuat dua sudut dalam itu.



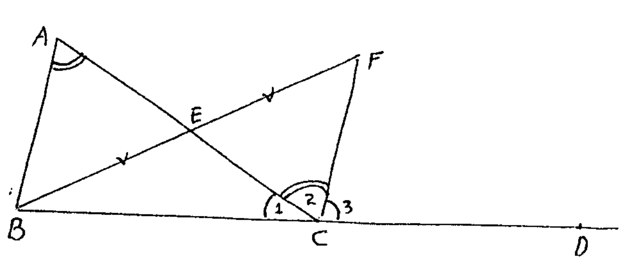
Suatu Geometri yang di dalamnya tidak berlaku Aksioma kesejajaran Euclides dikatakan "Geometri tak Euclides".

Bentuk 2. Melalui sebuah titik di luar suatu garis ada tepat satu garis yang sejajar dengan garis tersebut (bentuk Play Fair).

Teorama : Bentuk (1) dan bentuk (2) adalah 'ekivalen' (artinya kalau (1) dipakai sebagai aksioma, maka (2) dapat dibuktikan, sebaliknya kalau (2) dipakai sebagai aksioma maka (1) dapat dibuktikan).

Untuk membuktikan teorema ini ada teorema lain sebagai berikut :

Teorema 1. Sudut luar sebuah segitiga lebih besar dari sudut-sudut yang berjauhan dalam segitiga itu



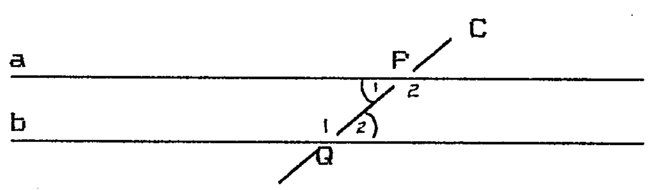
Pada perpanjangan BC, ambillah titik D, andaikan F tengah-tengah AC, tarik BE dan perpanjanglah dengan EF = BE. Tarik FC.

Maka ABC $\approx$ FEC

$$\left.\begin{array}{l} \text{Jadi } \angle A = \angle C_2 \\ \angle C_2 = \angle ACD \end{array}\right\} \angle A < \angle ACD$$

Teorama 2. Apabila dua garis yang sebidang dipotong oleh garis ketiga sehingga ada 2 sudut dalam berseberangan yang sama besar maka dua garis itu sejajar.

Bukti



Andaikan a dan b berpotongan di s maka diperoleh Δ PQS dengan $\angle P_1$ sebagai salah satu sudut luarnya, menurut teorema 1 haruslah $\angle P_1 > \angle Q_2$. Hal ini berlawanan dengan yang diketahui bahwa $\angle P_1 = \angle Q_2$. Jadi a dan b tidak berpotangan di s. Maka a // b.

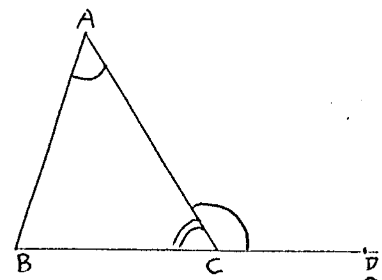
Akibat 1. Dua garis yang tegak lurus pada bidang yang sama dan sebidang adalah sejajar.

2. Melalui sebuah titik di luar sebuah garis hanya ada 1 garis yang tegak lurus padanya.

3. Apabila P tidak pada sebuah garis g, maka ada paling sedikit satu garis melalui P yang sejajar dengan g.

Teorama 3. Jumlah dua sudut dalam sebuah segitiga kurang dari sudut lurus.

Bukti



Akan dibuktikan $\angle A + \angle B < 180^o$

$\angle ABD$ adalah suatu sudut luar maka

$\angle ABD > \angle A$

$\angle ABD = 180^o - \angle B$

$\therefore 180^o - \angle B > \angle A$

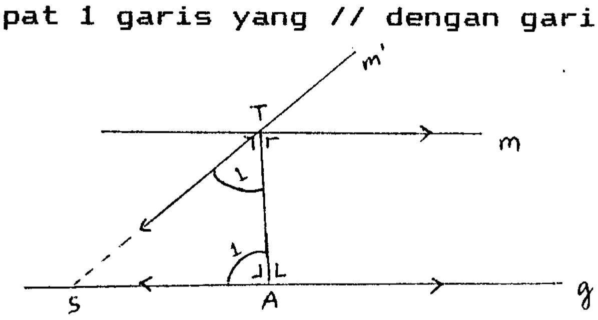
maka $\angle A + \angle B < 180^o$

juga $\angle A + \angle C < 180^o$

Teorama 4. Aksioma paralel Euclides (1) dengan Aksioma Play Fair (2).

Bukti

I. Andaikan (1) dianggap sebagai aksioma akan dibuktikan (2). Harus dibuktikan : Melalui "Setelah seluruh titik di luar sebuah garis ada tepat 1 garis yang // dengan garis tersebut".



Tarik melalui T sebuah k garis $\perp$ g, ternyata cuma ada satu k. Di T maka k ditarik m $\perp$ k melalui P sehingga $\angle P_1 = \angle Q_1$. Jadi g dan b adalah dua garis yang dipotong oleh garis ke tiga c sehingga ada dua sudut dalam berseberangan yang sama, maka menurut teorama (2) g//b

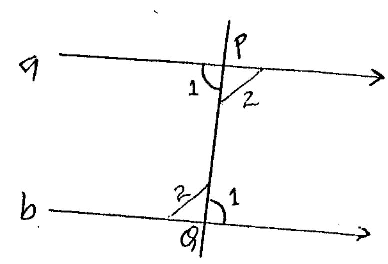
$\angle P_1 + \angle Q_1 < 180^\circ$

$\therefore \angle P_1 \neq \angle Q_1 \longrightarrow a \neq b \longrightarrow$ maka oleh karena g satu-satunya garis yang // b, maka a harus memotong b andaikan a dan b berpotongan di X, yaitu dibagian bidang yang tidak dimuat $\angle P_1$ dan$\angle Q_1$. Maka diperolah Δ PXQ dengan $\angle Q_1$ sebagai salah satu sudut luarnya.

Jadi $\angle Q_1 > \angle P_3$.Ini akan berarti bahwa $\angle P_2 > \angle P_3$, berlawanan dengan sifat yang telah kita peroleh sebelumnya. Jadi pemisalan bahwa a dan b berpotongan di X tidak benar. Jadi a dan b berpotongan dibagian bidang yang memuat $\angle P_1$ dan$\angle Q_1$.

Akibat :

1. Apabila a dan b dipotong oleh garis ketiga c maka dua sudut dalam berseberangan sama besar (di gambar $\angle P_1 = \angle Q_1$).



Disini dikertahui a // b

Harus dibuktikan $\angle P_1 = \angle Q_1$

* Andaikan $\angle P_1 \neq \angle Q_1$

Andaikan $\angle P_1 < \angle Q_1$

$\angle P_1 + \angle Q_2 < \angle Q_1 + \angle Q_2 = 180^\circ \longrightarrow \angle P_1 + \angle Q_2 < 180^\circ$.

Jadi menurut aksioma paralel Euclides a memotong b dibagian bidang yang memuat $\angle P_1$ dan $\angle Q_2$. Ini berarti a tidak sejajar b, berlawanan dengan a // b.

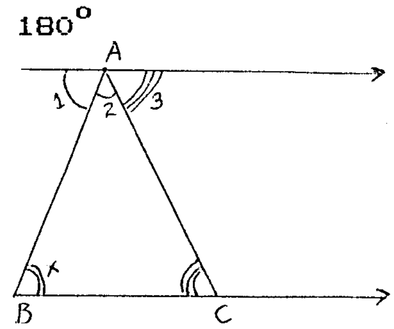
* Andaikan $\angle P_1 > \angle Q_1$

$\angle P_1 + \angle Q_2 > \angle Q_1 + \angle Q_2 = 180^\circ \longrightarrow \angle P_1 + \angle Q_2 > 180^\circ$. Maka ini berlawanan dengan aksioma Euclides. Ini berarti a tidak memotong b maka a // b. Berarti $\angle P_1 + \angle Q_1 < 180^\circ$, maka menurut aksioma Euclides Berpotongan ini ...... dengan yang diketahui ....

Maka haruslah......

2. Jumlah besar sudut-sudut dalam tiap segitiga sama dengan 180°

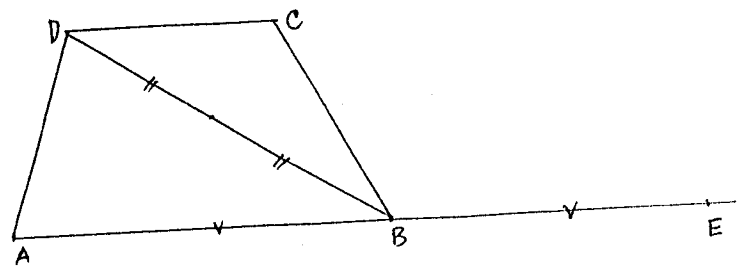
<u>Bukti</u>



Melalui A buat garis // BC. Maka akibatnya dua sudut dalam berseberangan sama besar.

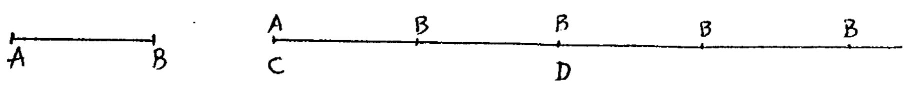
$\angle A_1 + \angle A_2 + \angle A_3 = \angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$

3. Jumlah besar sudut-sudut dalam suatu segi-4 adalah 360^o, (buktikan sendiri).



5. <u>Aksioma Kekontinuan atau Aksioma Archimedes</u>

Jika AB danCD dua ruas garis maka ada bilangan (asli) sehingga n AB > CD



* Untuk mengetahui lebih banyak tentang Geometri Euclides kita membentuk suatu Geometri yang tidak ada Aksioma Paralel Euclides. Geometri demikian yang didalamnya tidak berlaku Aksioma Paralel Euclides disebut "Geometri Netral" atau "Geometri Absolut". Didalam Geometri ini hanya berlaku kelompok aksioma (1), (2), (3), (5). Disini konsep dua garis sejajar tetap ada.

<u>Geometri Netral</u>

Geometri Netral adalah suatu Geometri yang didalamnya berlaku ssmua teorama yang tidak didasarkan pada aksioma kesejajaran Euclides.

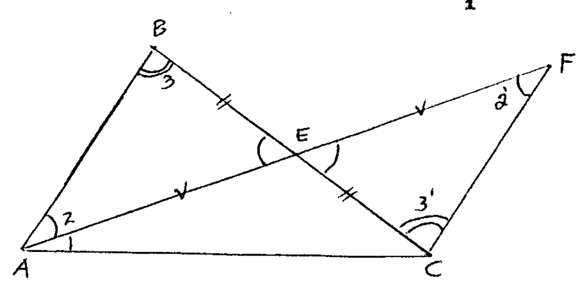
Salah satu contoh yang didalamnya berlaku aksioma sebagai berikut :

- Melalui sebuah titik diluar suatu garis, ada paling sedikit dua garis yang sejajar dengan garis tersebut.

Geometri yang salah satu aksiomanya adalah aksioma paralel tersebut. Dinamakan "Geomentri Lobachevky".

Untuk menyelidiki

LEMMA : Diketahui Δ ABC, maka ada Δ $A_1B_2C_3$ sehingga jumlah besar sudut-sudutnya sama dengan jumlah besar sudut-sudut Δ ABC, dan $\angle A_1 \leq 1/2 \angle A$.



Bukti E Tengah-tengah BC, Perpanjang AE = EF, buat FC // AB, Δ AEB $\sim \Delta$ FEC

$\angle A + \angle B + \angle C = \angle_1 + \angle_2 + \angle_3 + \angle_4$

Jadi jumlah besar sudut-sudut Δ ABC sama dengan jumlah besar sudut-sudut Δ ACF.

$\angle A = \angle_1 + \angle_2$

atau

$\angle A = \angle_1 + \angle_{2'}$

maka sudut-sudut diruas kanan, $\angle_1$ atau $\angle_{2'}$ tidak dapat lebih dati setengah $\angle$ A.

Misal : $\angle_1 \leq \angle A$

Dalam hal ini sebut titik A, sebagai A_1, F sebagai B_1, C sebagai C_1. Kalau $\angle_{2'} \leq 1/2 \angle A$, sebutlah F sebagai A_1, C sebagai C_1 dan A sebagai B_1.

THEORAMA SACCHERI-LEGENDRE

> Didalam suatu Geometri Netral, jumlah besar sudut-sudut dalam suatu segitiga kurang atau sama dengan 180°

Andaikan ada segitiga yang jumlah besar sudut-sudutnya lebih dari 180°, andaikan segitiga ini Δ ABC dengan $\angle A + \angle B + \angle C = p + 180^\circ$ dengan $p > 0$. Maka menurut theorama

- Ada $\Delta A_1B_1C_1$ dengan $\angle A_1 + \angle B_1 + \angle C_1 = p + 180^\circ$ dengan $\angle A_1 \leq 1/2 \angle A$
- Ada $\Delta A_2B_2C_2$ dengan $\angle A_2 + \angle B_2 + \angle C_2 = p + 180^\circ$ dengan $\angle A_2 \leq 1/2^2 \angle A$, dan seterusnya.
- ada $\Delta A_nB_nC_n$ dengan $\angle A_n + \angle B_n + \angle C_n = p + 180^\circ$ dengan $\angle A_n \leq 1/2^n \angle A$. n kita pilih sedemikian rupa sehingga $1/2^n \angle A \leq p$.

  $\therefore$ untuk n ini berlaku $\angle A_n \leq p$.

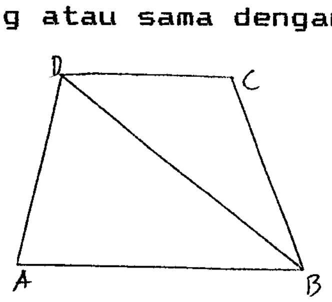
  Jadi didalam $\Delta A_1B_1C_1$ berlaku $\angle A_n = p$

  tetapi $\angle A_n + \angle B_n + \angle C_n = p + 180^\circ \geq \angle A_n + 180^\circ$

  $\therefore \angle B_n + \angle C_n \geq 180^\circ$

  Ini berlawanan dengan sifat bahwa jumlah besar dua sudut didalam tiap segi tiga kurang dari 180°.

  Akibat : Jumlah besar sudut-sudut dalam suatu sudut segi empat kurang atau sama dengan 360°



Geometri Rieman

Melalui titik diluar suatu garis tidak dapat ditarik garis yang sejajar garis tersebut. (Jadi konsep kesejajaran tidak ada).

BAB II

SEGIEMPAT GEOMETRI NETRAL

DEFENISI

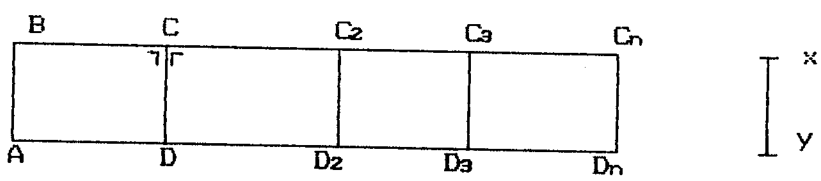
> Suatu persegi panjang (segiempat) adalah segi empat yang tiap sudutnya sama dengan 90°.

Adanya persegi panjang dalam suatu Geometri Netral nantinya dapat merupakan ciri bahwa geometri netral itu adalah suatu geometri Euclides.

Theorama 1

Apabila ada suatu persegi panjang di dalam geometri netral dan $\overline{XY}$ suatu ruas garis yang diketahui, maka ada persegi panjang lain yang salah satu sisinya lebih panjang dari ruas $\overline{XY}$.

Bukti :



$AD_n > XY$

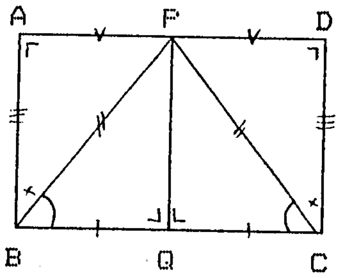
Perpanjang AD dengan DD_2 = AD dan BC dengan CC_2 = BC. Tarik C_2D_2 maka D_2C_2C juga suatu persegi panjang (buktikan !!!). (C_2 dan D_2 siku-siku maka $C_1C_2D_2$ persegi panjang sehingga AD_2BC_2 persegi panjang).

Menurut aksioma Kekontinuan ada n sehingga $nAD = AD_n > \overline{xy}$ karena AD_nC_nB suatu persegi panjang maka AD_nC_nB adalah persegi panjang yang dicari.

Ingat :

Dalam <u>Geometri</u> <u>Netral</u> bila diketahui <u>besar</u> <u>sudut</u>

dalam berseberangan sama besar maka kedua garis itu sejajar. Tapi kalau sebaliknya tidak boleh/ tidak berlaku.



$\Delta PBQ \equiv \Delta PCQ \rightarrow$ Ukur titik tengah BC sebut Q tarik garis Q yang tegak lurus BC sehingga memotong di P

$PB = PC$

$\angle PBQ = \angle PCQ$

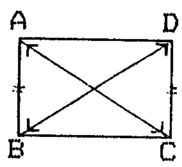
$\angle ABP = \angle DCP$

$\Delta ABP \equiv \Delta DCP$

$AB = DC$

$AP = PD$

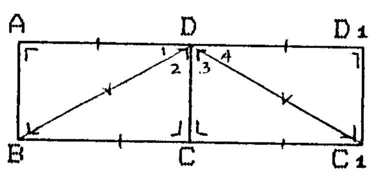
Jadi di dalam persegi panjang sisi-sisi hadapnya sama.



Tarik AC dan BD

$AB = DC$, $BC = BC$, $\angle ABC = \angle DCB = 90^\circ$

$\Delta ABC \equiv \Delta DCB$, $AC = BD$



Tarik BD dan DC_1

$\Delta BCD \equiv \Delta C_1CD \rightarrow BD = DC_1$

$\angle D_2 = \angle D_3 \rightarrow \angle D_1 = \angle D_4$

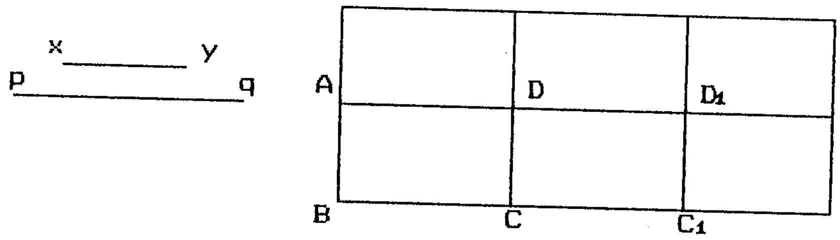
$\Delta ADB \equiv \Delta C_1DD_1 \rightarrow \angle D_1 = \angle A = 90^\circ$

Begitu pula $\angle C_1 = \angle B = 90^\circ$

ABC_1D_1 adalah persegi panjang.

Akibat :

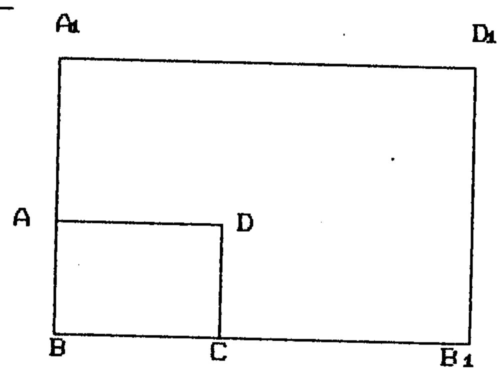
Kalau ada persegi panjang dalam Geometri Netral maka ada persegi panjang lain yang sisinya melebihi ruas-ruas garis yang diketahui.



Diketahui persegi panjang ABCD. Lukislah persegi panjang lain yang sisi-sisinya melebihi ruas-ruas $\overline{xy}$ dan $\overline{pq}$. Ini dibuktikan menggunakan theorama tadi menyangkut isi BC, kemudian menyangkut sisi BA.

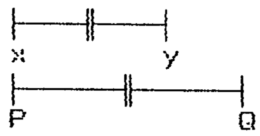
Theorama 3 : Jika didalam Geometri Netral ada persegi panjang maka ada persegi panjang yang panjang sisi-sisinya sama dengan panjang ruas-ruas garis yang diketahui.

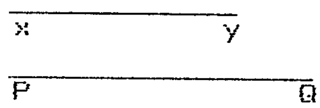
Bukti :

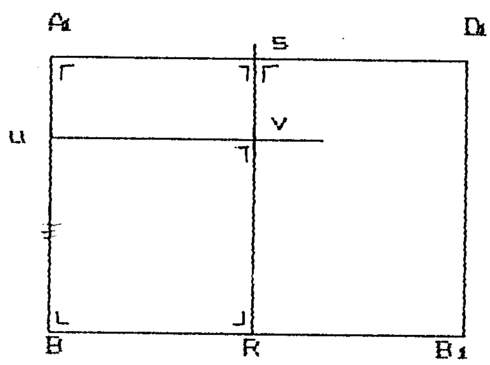


Diketahui persegi panjang ABCD dan ruas-ruas $\overline{xy}$ dan $\overline{PQ}$. Maka dapat dilukis persegi panjang lain yang sisi-sisinya yang bersisian panjangnya sama. Dengan $\overline{xy}$ dan $\overline{PQ}$. Buat terlebih dahulu suatu persegi panjang dengan sisi $\overline{BB_1}$ >

xy dan $\overline{BA_1} > PQ$







Ukur $\overline{BR} = \overline{xy}$

Tarik $RS \perp A_1D_1$

Akan dibuktikan $\angle BRS = 90^\circ$

$\angle A_1 + \angle B + \angle S_1 + \angle LBR < 90^\circ$

Andaikan $\angle BRS < 90^\circ$

$\therefore \angle SRB_1 > 90^\circ \rightarrow \angle S + \angle D_1 + \angle B_1 + \angle SRB_1 > 360^\circ$

$\longrightarrow$ Ini tak mungkin.

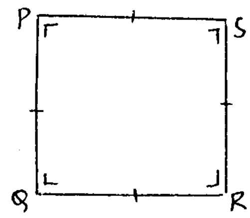
$\therefore \angle BRS = 90^\circ \rightarrow A_1BRS$ persegi panjang dengan $BR = \overline{xy}$.

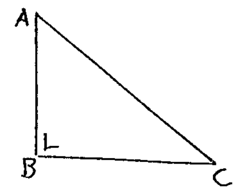
Ukurkan $BU = PQ$, tarik $UV \perp SR$ dengan jalan yang sama $UBRV$ adalah persegi panjang dengan $BR = xy$ dan $BU = PQ$.

Theorema 4. : Kalau dalam geometri netral ada sebuah persegi panjang maka jumlah besar sudut-sudut dalam tiap segi tiga siku-siku sama dengan

180°.

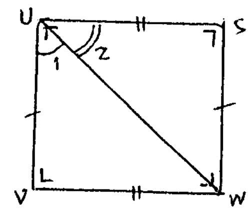
Bukti :





Ambil segitiga siku-siku sembarang yaitu Δ ABC yang siku-siku di B. Diketahui adanya persegi panjang yaitu PQRS, harus dibuktikan

$\angle A + \angle B + \angle C = 180^{\circ}$



Menurut teorama 3 dapat dilukis persegi panjang UVWS sehingga UV = AB dan VW = BC, tarik UW

$\Delta ABC \cong \Delta\ UVW$

$\angle U_1 + \angle V + \angle W_1 = \angle A + \angle B + \angle C$

$\Delta UVW \cong \Delta\ UWS \rightarrow \angle U_1 + \angle V + \angle W_1 = \angle U_2 + \angle S + \angle W_2$

tetapi $\angle U_1 + \angle U_2 + \angle V + \angle W_1 + W_2 + \angle S = 360^{\circ}$

$\angle U_1 + \angle V + \angle W_1 = 1/2\ 360^{\circ} = 180^{\circ}$

$\angle U_1 + \angle V + \angle W_1 = 180^{\circ}$

juga dapat menggunakan kekongruen ΔUVW & Δ UWS.

Sebab andaikan $\angle U_1 + \angle V + \angle W_1 > 180^{\circ}$ tak mungkin

andaikan $\angle U_1 + \angle V + \angle W_1 < 180^{\circ}$, ini berarti bahwa $\angle U_2 + \angle W_2 + \angle S > 180^{\circ}$.

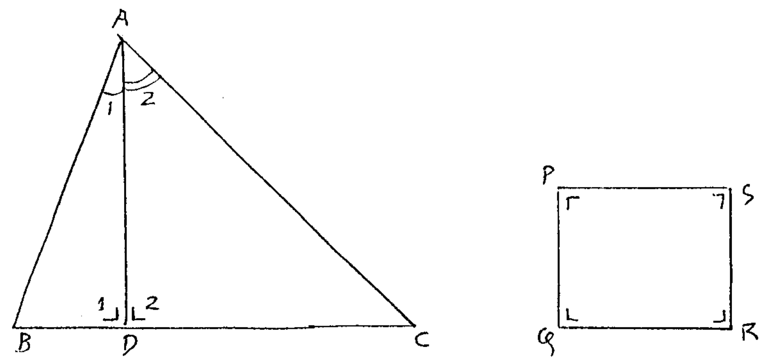
sebab $(\angle U_1 + \angle U_2) + \angle V + (\angle W_1 + \angle W_2) + \angle S = 360^{\circ}$.

$\therefore$ tak mungkin $\angle U_1 + \angle V + \angle W_1 < 180^{\circ}$

$\therefore \angle U_1 + \angle V + \angle W_1 = 180^{\circ}$.

<u>Theorama 5</u> : Jika dalam Geometri Netral ada persegi panjang, maka jumlah besar sudut-sudut dalam tiap segi-tiga sama dengan 180°.

<u>Bukti</u> :



Andaikan diketahui ΔABC dan persegi panjang PQRS. Tarik $AD \perp BC$. Karena ΔBDA segitiga siku-siku.

Maka : $\angle B + \angle D_1 + \angle A_1 = 180^\circ$

$$\underline{\angle C + \angle D_2 + \angle A_2 = 180^\circ}$$

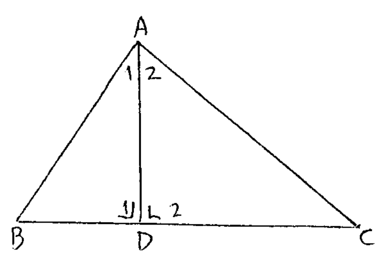
$$\angle B + \angle D_1 + \angle A_1 + \angle C + \angle D_2 + \angle A_2 = 360^\circ$$

$$\angle D_1 + \angle D_2 = 180^\circ$$

$$\angle B + \angle A_1 + \angle C + \angle A_2 + \angle D_1 + \angle D_2 = 180^\circ$$

<u>Theorama</u> 6 : Jika dalam suatu Geometri Netral ada segitiga yang jumlah sudut-sudutnya sama dengan 180° maka ada persegi panjang.

<u>Bukti</u> :



Andaikan ΔABC bersifat bahwa $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$

Tarik $AD \perp BC$.

$$\underbrace{(\angle A_1 + \angle D_1 + \angle B)}_{p} + \underbrace{(\angle A_2 + \angle D_2 + \angle C)}_{q} =$$

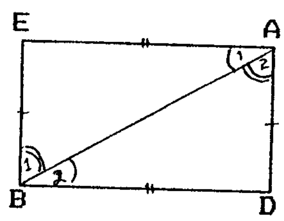
$$\underbrace{(\angle A_1 + \angle A_2 + \angle B)}_{180^\circ} + \underbrace{(\angle D_1 + \angle D_1)}_{180^\circ} = 360^\circ$$

$\therefore p + q = 360^\circ$

Andaikan $p < 180^\circ \rightarrow q > 180^\circ$ tak mungkin

$p > 180^\circ \rightarrow q < 180^\circ$ tak mungkin

$\therefore p = 180^\circ$ begitu pula $q \Rightarrow 180^\circ$.



Buat $BE = DA$, $AE = DB$

$\Delta EBA \cong \Delta ABD$

$\angle E + \angle B_1 + \angle B_2 + \angle D + \angle A_1 + \angle A_2 = 360^\circ$

$\angle E + \angle D = 90^\circ$

$\rightarrow \angle B_1 + \angle B_2 + \angle A_1 + \angle A_2 = 180^\circ$

Tetapi

$\angle A_1 = \angle B_2$

$\angle A_2 + \angle B_1$

$\angle A_1 + \angle A_2 = \angle B_1 + \angle B_2 = 1/2 \times 180^\circ = 90^\circ$

$\rightarrow$ EDBA suatu persegi panjang.

Dalam Geometri Netral kalau ada suatu persegi panjang

Maka : 1. Ada tak hingga banyak persegi panjang

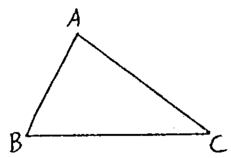
2. Jumlah besar sudut-sudut dalam setiap segitiga siku-siku adalah 180°

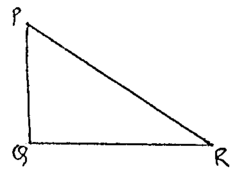
3. Jumlah besar sudut-sudut dalam tiap segitiga adalah 180°.

Kalau ada suatu segitiga yang jumlah besar sudut-sudutnya 180° maka ada persegi panjang.

Akibat : 1. Jika dalam Suatu Geometri Netral ada satu se-

gitiga yang jumlah besar suatu-sudut 180°, maka dalam tiap segitiga jumlah besar sudut-sudutnya 180°.





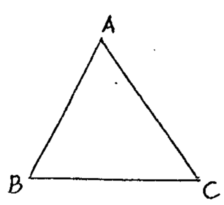
Diketahui $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$

Buktian $\angle P + \angle Q + \angle R = 180^\circ$

<u>Bukti</u> : Δ ABC yang jumlah besar sudut-sudutnya 180° maka menurut theorama terdahulu ada persegipanjang, karena ada persegi panjang maka jumlah besar sudut-sudut $\Delta PQR = 180^\circ$, juga karena suatu persegi panjang jumlah besar sudut-sudutnya = 360°.

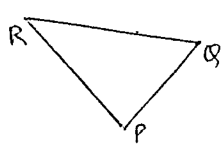
2. Kalau di dalam suatu Geometri Netral ada satu segitiga yang jumlah besar sudut-sudutnya kurang dari 180° maka dalam tiap segitiga jumlah besar sudut-sudutnya juga kurang dari 180°.

Diketehui :



$\angle A + \angle B + \angle C < 180^\circ$

Buktikan !



$\angle P + \angle Q + \angle R < 180^\circ$

Bukti : Andaikan $\angle P + \angle Q + \angle R < 180^\circ$

Menurut Theorema jumlah besar sudut-sudut dalam tiap segi-3 juga $180^\circ \longrightarrow \angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$

(ini berlawanan dengan yang diketahui bahwa

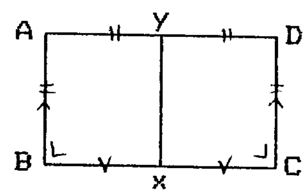
$\angle A + \angle B + \angle C < 180^o$

Segi-4 (sudut-4 / Saccheri) (abad 18)

Deff : ABCD disebut suatu segi-4 Saccheri bila :

1) $\angle B = \angle C = 90^o$

2) AB = DC

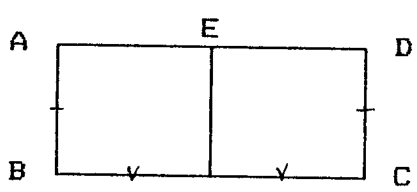


Sifat-sifat segi-4 Saccheri :

1) Dalam geometri euclides suatu segi-4 Saccheri menjadi suatu persatuan panjang.

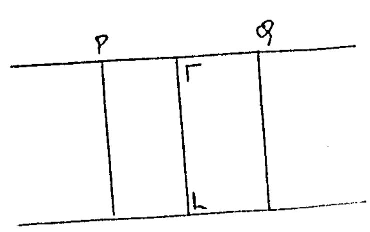
2) Sudut-sudut atas suatu segi-4 Saccheri sama besar dan tidak tumpul $\angle A = \angle B < 90^o$

3) Garis hubung titik tengah BC dan titik tengah AD tegak lurus PD BC dan AD

4) 

ABCD segi-4 Saccheri
P tengah-tengah BC
Apabila g sumbu BC
maka g juga sumbu AD

5) Apabila dua garis memiliki garis tegak lurus sekutu, maka PD salah satu garis itu ada 2 titik yang berjarak sama terhadap garis yang lain dan sebaliknya.



6) Ada segi-4 ABCD

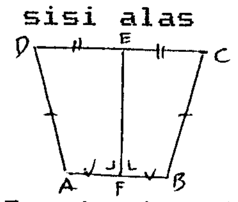
Diketahui $\angle B = \angle C = 90^o$

Apabila $\overline{AB} > \overline{DC}$ maka $\angle D > \angle A$

7) Dalam segi-4 ABCD diketahui $\angle B = \angle C = 90^o$

Apabila $\angle A = \angle D$ maka $\overline{AB} = \overline{CD}$

8) Di dalam segi-4 Saccheri sisi atas lebih panjang atau sama dengan sisi alas



9) Dalam segi-4 Saccheri, ditarik garis hubung tengah-tengah sisi atas dan sisi alas; maka panjangnya ruas garis ini lebih pendek atau sama dengan suatu kaki.

10) Diketahui segi-4 ABCD dengan $\angle A = \angle B = 90^o$

ABCD adalah suatu segi-4 Sachheri bila salah satu syarat dibawah ini dipenuhi :

(i) Sumbu $\overline{AB} \perp CD$

(ii) Sumbu $\overline{CD} \perp AB$

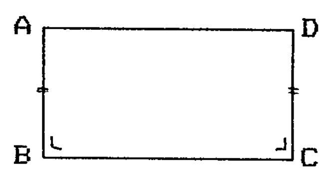
(iii) Sumbu $\overline{CD}$ membagi sama panjang ruas $\overline{AB}$

Membuktikan sifat-sifat dari segi-4 Saccheri :

1. Diketahui : Segi-4 Saccheri

$AB = DC$

$\angle B = \angle C = 90^o$



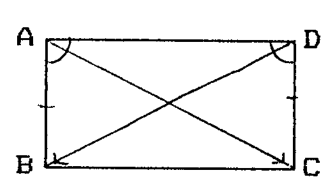
Buktikan : $\angle A = \angle D$

$\angle A \leq 90^o$

Bukti : Tarik AC dan BD

$\Delta\ ABC \cong \Delta\ DCB$ (s sd s)

$\therefore AC = BD$



$\therefore \Delta\ ABD \cong \Delta\ ACD$

$\therefore \angle\ BAD = \angle\ CDA$

$\angle ABC + \angle BCD + \angle CDA + \angle DAB \leq 360^\circ$

$90^\circ + 90^\circ + \angle CDA + \angle DAB \leq 360^\circ$

$\angle CDA + \angle DAB \leq 180^\circ$

$2\ \angle DAB \leq 180^\circ$

$\angle DAB \leq 90^\circ$ (terbukti)

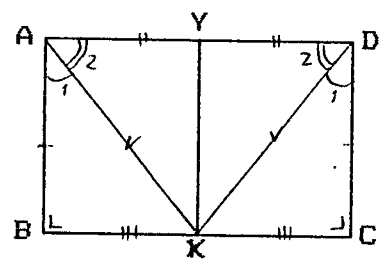
2. Cara lain tapi lebih rumit.

Diketahui : $AY = YD$

$BX = XC$

Tarik XY

Tarik XA, XD



$\longrightarrow \Delta\ BAX \cong \Delta\ DXC$

Jadi $XA = XD$ dan $\angle A_1 = \angle D_1$

$\therefore \Delta\ XAY \cong \Delta\ XYD$ (sss)

$\therefore \angle A_2 = \angle D_2$

$\angle A_1 + \angle A_2 = \angle D_1 + \angle D_2$

$\therefore \angle A = \angle D$

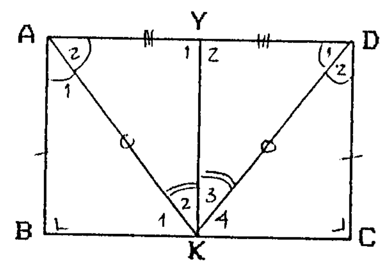
$\angle A + \underbrace{\angle B + \angle C}_{180^\circ} + \angle D \leq 360^\circ$

$\angle A + \angle D \leq 180^\circ$

$2\ \angle A \leq 180^\circ$

$\angle A \leq 90^\circ$

2. Cara lain lagi



Diketahui : AY = YD

BX = XC

Tarik XY

Buktikan : YX $\perp$ BC

YX $\perp$ AD

Bukti : Tarik AX dan DX

$\therefore$ Δ ABX $\cong$ Δ DCX (s sci s)

$\therefore$ XA = XD, $\angle X_1 = \angle X_4$ ...... 1, $\angle A_1 = \angle D_2$

Δ XAY $\cong$ Δ XYD (sss)

$\longrightarrow$ akibat $\angle X_2 = \angle X_3$ 2

$\therefore$ $\angle Y_1 + \angle Y_2 = 180^o$

$\angle Y_1 = \angle Y_2 = 90^o \longrightarrow$ XY $\perp$ AD (terbukti)

1 + 2 $\quad \angle X_1 = \angle X_4$

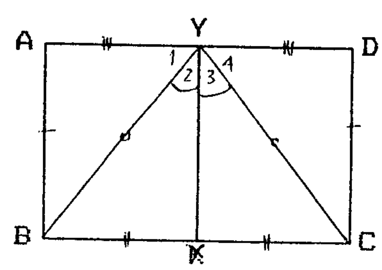
$\angle X_2 = \angle X_3$

$\angle X_1 + \angle X_2 = \angle X_4 + \angle X_3$

$= 1/2.180^o$ (sudut pelurus) $= 90^o$

Jadi YX $\perp$ BC (terbukti)

2. Cara yang lain lagi



Diketahui : Segi-4 Saccheri

BX = XC

Buktikan : YX $\perp$ BC

Bukti : $\angle$BAY = $\angle$CDY (telah diketahui)

$\therefore$ Δ BAY $\cong$ Δ CDY

$\therefore$ $\angle B_1 = \angle C_2$, BY = CY, $\angle Y1 = \angle Y_4$

$\downarrow$

$\angle B_2 = \angle C_1 \longrightarrow \Delta$ BYX $\cong$ Δ CYX (s sd s)

$\therefore$ $\angle Y_2 = \angle Y_3$

$YX = YK$

$\angle X_1 = \angle X_2$

$\angle X_1 + \angle X_2 = 180^o$ (sudut pelurus)

$2\ \angle X_1 = 180^o \longrightarrow \angle X_1 = \angle X_2 - 90^o$

Maka $YX \perp BC$

Dalam tiap segi-4 S, sumbu alas juga sumbu garis atas.

3. Diketahui : $AB = DC$

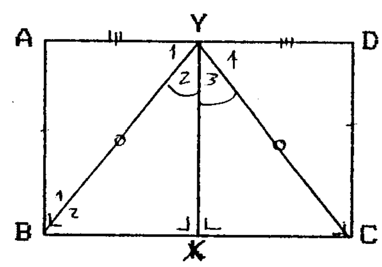
$\angle B = \angle C = 90^o$

$BX = XC$

$g \perp BC$

Jika g memotong AD di Y harus dibuktikan $AY = YD$, $g \perp DA$

Bukti :



Tarik BY, YC

$\Delta\ BYX \cong \Delta CYX$ (s sd s)

$\therefore\ BY = YC$

$\angle B_2 = \angle C_2 \longrightarrow \angle B = \angle C = 90^o$

$\longrightarrow \angle B_1 = \angle C_1$

$\angle Y_2 = \angle Y_3$ 1

$\Delta\ ABY \cong \Delta\ DCY$ (s sd s)

$\therefore\ AY = YD$

$\therefore\ \angle B_1 = \angle C_1$

$\angle A = \angle D$

$\angle Y_1 = \angle Y_4$ 2

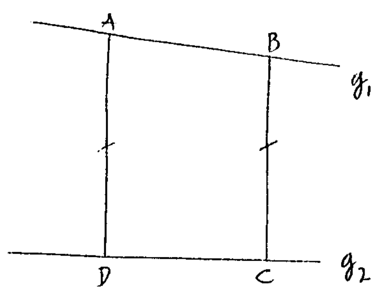
$\therefore\ \angle Y_1 + \angle Y_2 + \angle Y_3 + \angle Y_4 = 180^o$ (pelurus)

$2\ \angle Y_1 + 2\ \angle Y_2 = 180^o \longrightarrow 2\ (\angle Y_1 + \angle Y_2) = 180^o$

$\longrightarrow \angle Y_1 + \angle Y_2 = 90^o$

$\angle Y_4 + \angle Y_3 = 90^{o}$

Jadi g $\perp$ AD terbukti



Diketahui :

Pada g_1 ada dua titik A dan B sehingga berjarak sama terhadap g_2,

AD $\perp$ g_2

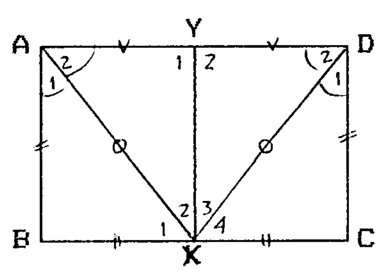
BC $\perp$ g_2

AD $\perp$ BC

Buktikan :

Ada garis tegak lurus sekutu.

Bukti : ABCD segi-4 S



Menurut teorema terdahulu.

Ambil Y tengah-tengah AB

X tengah-tengah DC

XY garis tegak lurus sekutu yang dicari.

Bukti :

Δ ADX $\cong$ Δ BCX (s ds s)

$\therefore$ AX = BX, $\angle A_1 = \angle B_1$,

$\angle X_1 = \angle X_4$ 1

Δ AYX $\cong$ Δ BYX (sss)

$\therefore$ $\angle A_2 = \angle C_2$, $\angle Y_1 = \angle Y_2$

$= 1/2\ 180^{o} = 90^{o} \longrightarrow$ XY $\perp$ AB

$\therefore$ XY garis tegak lurus sekutu

$\angle X_2 = \angle X_3$ 2

$\angle X_1 = \angle X_4$

$\underline{\angle X_2 = \angle X_3}$

$\angle X_1 + \angle X_2 = \angle X_3 + \angle X_4$

$= 1/2\ BD = 90^0 \longrightarrow XY \perp DC$

5. Sebaliknya :

   Diketahui $XY \perp g_1$, $XY \perp g_2$

   Buktikan : Adanya dua titik pada salah satu garis g yang berjarak sama terhadap garis yang lain.

Bukti :

Ambil YA = YB

Tarik di A, $PA \perp g_2$

Tarik di B, $QB \perp g_2$

Tarik AX dan BX

Δ BYX $\cong$ Δ AYX (s sd s)

$\therefore$ BX = AX

$\angle X_2 = \angle X_3$

$\therefore$ Δ PAX $\cong$ Δ QBX (s sd s)

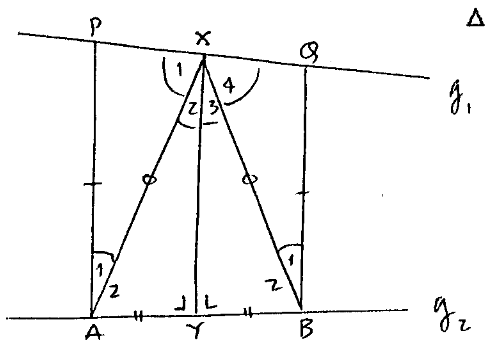
PX = QX

PA = QB

$\angle A_1 = \angle B_1$

$\angle X_1 = \angle X_4$

Terbukti ada dua titik yang berjarak sama.



6. Diketahui: ada segi-4 ABCD

$\angle B = \angle C = 90^\circ$

Buktikan bahwa :

1) $\overline{AB} > \overline{DC}$ mengakibatkan $\angle D > \angle A$ dan sebaliknya 2)

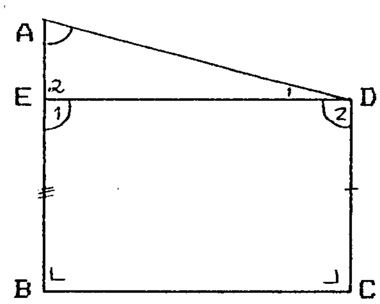
Bukti :

1) Diketahui : Segi-4 ABCD, $\angle B = \angle C = 90^\circ$

$\overline{AB} > \overline{DC}$

Buktikan $\angle D > \angle A$

Bukti :



Ukur BE = DC

Tari ED ⟶ EBCD segi-4

Saccheri telah dibuktikan :

$\angle E_1 = \angle E_2$ juga $\angle D_2 \leq 90^\circ$

Menurut teorema yang dulu dikatakan :

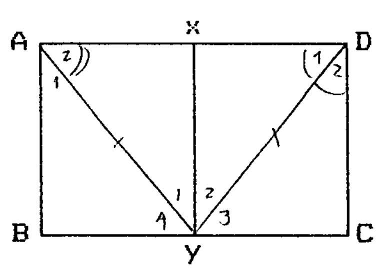
Sudut luar dari segi-3 > sudut-sudut yang terjauh dalam segi-3 itu maka :

$\angle E_1 > \angle A \longrightarrow \angle D_2 > \angle A$

$\therefore \angle D_2 + \angle D_1 > \angle A$

$\therefore \angle ADC > \angle A$

7.



Diketahui: segi-4 $\angle B = \angle C = 90^\circ$

Bila $\angle A = \angle D$ maka

Buktikan AB = DC

Bukti :

Δ AXY $\cong$ Δ BXY (s sd s)

$\therefore$ AY = DY

$\angle Y_1 = \angle Y_2$

$\therefore \angle A_2 = \angle D_1$

Δ ADY $\cong$ BCY (sd sd sd)

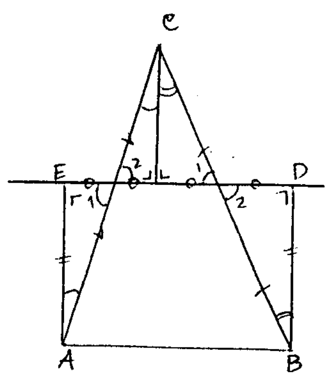
$\therefore$ AB = DC (terbukti)

BY = YC

Dari $\angle A = \angle D \longrightarrow \angle A_1 = \angle D_2$

dan $\angle A_2 = \angle D_1$

8.



Ukur AP = PC

BQ = QC

Tarik AE $\perp$ PQ

BD $\perp$ PQ

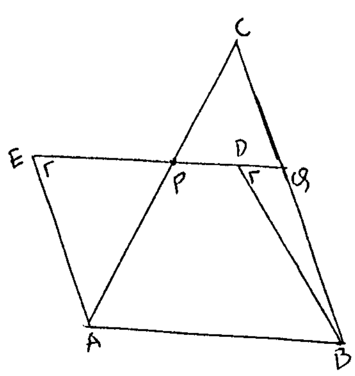
Maka ABDE segi-4 S

Bukti :

Perpanjang PQ dengan PE = PF

FQ = QD

Tarik CF $\perp$ PQ



Pandang Δ EAP $\cong$ Δ FCP ($\angle P_1 = \angle P_2$)

(bertolak belakang) PA = PC

EP = PF

Akibat CF = EA 1

Pandang Δ CFQ dan BDQ

(FQ = DQ, $LQ_2 = LQ_1$, CQ =

maka Δ CFQ $\cong$ Δ BDQ

Akibatnya CF = BD 2

Dari 1 dan 2 maka diperoleh

EA = CF = BD $\longrightarrow$ EA = DB

$\therefore$ ABDE Saccheri dengan $\angle E = \angle D = 90^{\circ}$

EA = DB

EP = PF = FQ = QD

PQ = 1/2 ED $\leq$ AB

PQ $\leq$ AB

10. Ada segi-4 ABCD dengan $\angle A = \angle B = 90^{\circ}$

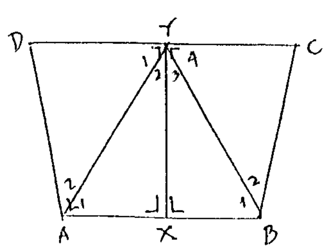
Buktikan : ABCD adalah segi-4 S apabila salah satu syarat dibawah ini terpenuhi :

1) Sumbu $\overline{AB} \perp CD$

2) Sumbu $\overline{CD} \perp AB$

3) Sumbu $\overline{CD}$ membagi sama panjang AB

Bukti :



Pandang Δ BXY dan Δ AXY (AX = BX, $\angle X = \angle X = 90^{\circ}$, XY = YX)

$\therefore \Delta BXY \cong \Delta AXY$

Akibat AY = BY, $\angle A_1 = \angle B_1$, $\angle Y_2 = \angle Y_3$

Karena $\angle A = \angle B = 90^{\circ}$

dan $\angle A_1 = \angle B_1 \longrightarrow \angle A_2 = \angle B_2$

Dari $\angle Y_2 = \angle Y_3$

$\angle Y_1 = 90^{\circ} - \angle Y_2$

$\longrightarrow \angle Y_2 = \angle Y_3 \longrightarrow \angle Y_1 = \angle Y_4 = 90^{\circ} - \angle Y_2$

$\angle Y_4 = 90^{\circ} - \angle Y_3$

$\Delta ADY \cong \Delta BCY$ ($\angle A_2 = \angle B_2$, AY = BY $\angle Y_1 = \angle Y_4$)

Akibat AD = BC, $\angle D = \angle C$

Terbukti ABCD Saccheri dengan

$$\angle A = \angle B = 90^{\circ}$$

$$AD = BC$$

Tambahan

11. Sisi-sisi hadap dalam suatu persegi panjang sama panjang, buktikan !
12. Diagonal-diagonal suatu persegi panjang saling membagi sama panjang.
13. Apabila dalam suatu segi-4 S, diagonal-diagonalnya saling membagi sama panjang maka segi-4 itu adalah persegi panjang.
14. Segi-4 ABCD, $\angle B = \angle C = 90^{\circ}$

    Buktikan : Apabila $\angle A = \angle D$ maka $\overline{AB} = DC$
15. Garis alas suatu segi-4 S lebih pendek dari garis atas.
16. Segi-4 S, AX = XD, BY = YC

    Buktikan : $\overline{XY} \leq \overline{AB}$
17. Diketahui : Segi-4 S, lantas garis hubung titik-titik tengah garis alas dan garis atas melalui titik potong diagonal-diagonalnya.
18. Segi-4 S. Buktikan bahwa garis hubung titik-titik tengah kaki-kaki dibagi sama panjang dan tegak lurus oleh garis hubung titik-titik tengah garis alas dan garis atas.

BAB III

GEOMETRI LOBACHEVSKY DAN GEOMETRI RIEMANN

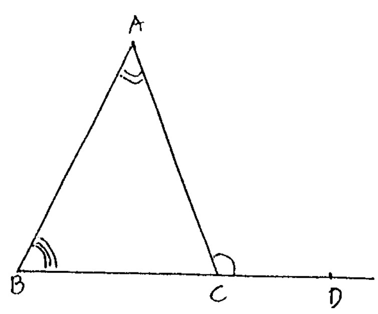
SUSUT-SUDUT DALAM GEOMETRI LOBACHEVSKY

Jumlah Besar Sudut-sudut dalam Geometri Lobachevsky.

LEMMA 1

Jumlah besar dua sudut di dalam tiap segi-3 kurang atau sama dengan sudut luar yang berjauhan.

Bukti :



Akan dibuktikan $\angle A + \angle B \leq \angle ACD$

Dengan menggunakan teorema Saccheri Legendre :

$\angle A + \angle B + \angle C \leq 180^{o}$

$\therefore\ \angle A + \angle B \leq 180^{o} - \angle C$

$\therefore\ \angle A + \angle B \leq \angle ACD$

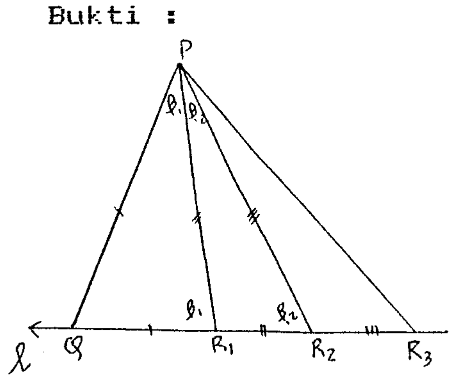
Terbukti.

LEMMA 2

Diketahui garis l dan sebuah titik $p \notin l$

Andaikan $Q \in l$, maka ada sebuah titik $R \in l$ sehingga $\angle$ PRQ dapat dibuat sekecil mungkin

Bukti :



Andaikan diketahui sembarang sudut α, akan dibuktikan adanya titik R pada l sehingga $\angle PLQ < \alpha$.

Lukis R_1 pada l sehingga : $QR_1 = QP$

Tarik PR_1, jadi Δ PQR_1 sama kaki.

Menurut Lemma 1 : Maka $\angle QPR_1 + \angle QR_1P \leq \beta$

$$2\beta_1 \leq \beta$$

$$\beta_1 \leq 1/2\,\beta$$

Kemudian lukis R_2 sehingga $R_1 R_2 = R_1 P$; tarik PR_2

Δ PR_1R_2 sama kaki $\longrightarrow$ $\angle R_1PR_2 = \angle R_1R_2P = \beta_2$

Lagi : $\angle QR_1P \geq \angle R_1PR_2 + \angle R_1R_2P = 2\beta_2$

$$\beta_1 \geq 2\beta_2$$

$$\beta_2 \leq 1/2\,\beta_1$$

$$\beta_2 \leq 1/2\,\beta$$

Proses demikian dapat dilanjutkan, maka akan diperoleh sebuah titik Rn pada l sehingga $\beta_n \leq 1/2^n\,\beta$

Ambil n cukup besar sehingga $1/2^n\beta < \alpha$

Jadi untuk n_o ini berlakulah :

$$\beta n_o \leq 1/2^{no}\beta < \alpha$$

$$\longrightarrow \beta_{no} < \alpha$$

Untuk n = no ada titik R_{no} yang dapat dinamakan R

Jadi untuk R ini berlakulah :

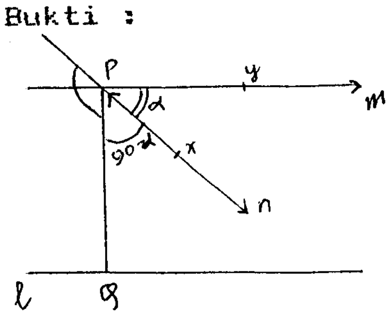
$$\angle QRP = \angle QR_{no}P = \beta_{no} < \alpha$$

<u>Jadi $\angle QRP < \alpha$</u>

<u>Teorema</u> :

<u>Di dalam Geometri Lobachevsky ada suatu segi tiga yang jumlah besar sudutnya kurang dari 180^o</u>

Bukti :



Ambil garis l dan titik $P \notin l$

Kita lukis melalui P sebuah garis yang sejajar l

Tarik $PQ \perp l$

Tarik di P garis $m \perp PQ$ maka M sejajar l

Oleh karena geometri Lobachevsky, melalui P ada garis kedua yang sejajar l misalnya n Jelas $n \not\equiv M$ (n tidak berimpit m)

Sehingga salah satu sudut yang dibuat oleh n dengan PQ adalah lancip, misalnya $\angle XPQ$

Ambil Y pada m yang letaknya sepihak dengan X terhadap PQ

Andaikan $\angle XPY = \alpha$

Jadi $\angle QPX = 90^{\circ} - \alpha$

Menurut Lemma 2, pada l ada titik R sehingga $\angle PRQ < \alpha$

Perhatikan : Δ PRQ

Kita peroleh : $LQ = 90^{\circ}$

$\angle QPR < 90 - \alpha$

$\angle QRP < \alpha$

$\angle Q + \angle QPR + \angle QRP < 180^{\circ}$

Latihan :

Tunjukkanlah segi-3 kedua yang jumlah besar sudutnya juga kurang dari 180° tetapi yang jumlah besar sudut-sudutnya berbeda.

Teorema : Dalam tiap segi-3 di geo Lobachevsky, jumlah besar sudut-sudut kurang dari 180°.

Bukti :

Andaikan ada Δ ABC dengan $\angle A + \angle B + \angle C = 180^{\circ}$

Oleh karena geo Lobachevsky adalah suatu geo

netral, maka dalam geo netral ini ada PP sehingga jumlah besar sudut dalam tiap-tiap segi-3 adalah 180^o.

Segi-3 yang jumlah besar sudut kurang dari 180^o.

Jadi pengandaian bahwa ada Δ ABC sehingga $\angle A + \angle B + \angle c = 180^o$ berlawanan dengan sifat ini.

Jadi $\angle A + \angle B + \angle C < 180^o$

Akibat :

1) Jumlah besar sudut-sudut dalam tiap segi-4 kurang 360^o.

2) Tidak ada PP dalam Geo Lobachevsky.

Dalam Geometri Netral Δ ABC $\cong$ Δ A'B'C'

Apabila $\angle A = \angle A'$, $\angle B = \angle B'$, $\angle C = \angle C'$

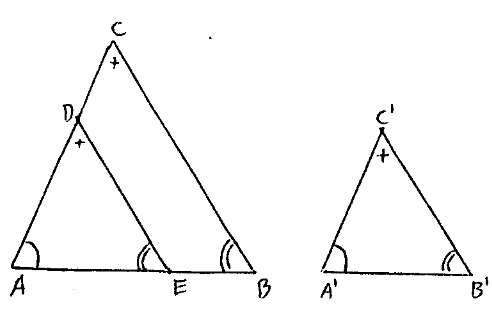
Teorema :

Dalam Geometri Lobachevsky, apabila dua segi-3 Δ ABC dan Δ A'B'C' dengan $\angle A = \angle A'$, $\angle B = \angle B'$, $\angle C = \angle C'$ Maka Δ ABC $\cong$ Δ A'B'C'

Bukti :

Andaikan Δ ABC tidak kongruen dengan Δ A'B'C'

Maka AB $\neq$ A'B', BC $\neq$ B'C', CA $\neq$ C'A'



Andaikan AC > A'C'

Ukur AD = A'C'

Ukur AE = A'B'

$\therefore$ Δ AED $\cong$ A'B'C' (s sd s)

$\therefore$ Δ AED = $\angle$ A'B'C'

$\angle$ADE = $\angle$A'C'B'

$\angle C + \angle B + \angle BED + \angle CDE =$

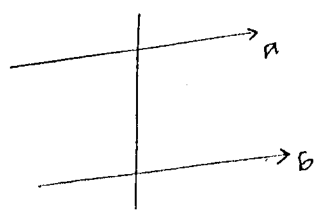
$\angle C + \angle B + (180^{o} - \angle AED)+(180^{o} - \angle ADE)$

$\angle C + \angle B + \angle BED + \angle CDE = 360^{o}$

Jadi terdapatlah segi-4 yang jumlah besar sudut-sudut sama dengan 360^{o}. dalam Lobachevsky, hal ini tak mungkin ini berarti pengandaian kita tidak benar, jadi haruslah $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$.

Euklides

1)

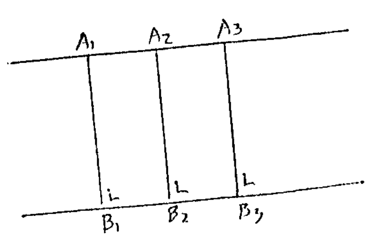


a // b :

2) Kalau a // b, b // c $\longrightarrow$ a // c

Dalam geometri Labochevsky sifat ketransitifan relasi kesejahteraan tidak perlu berlaku.

3)



Kala a // b maka tiap titik pada a misalnya, berjarak sama terhadap garis b.

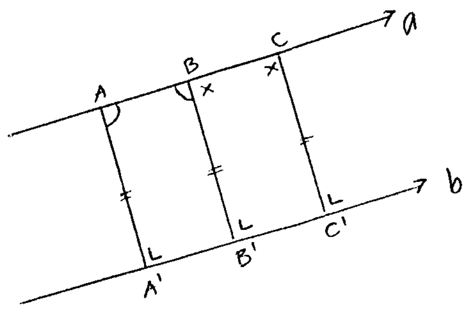
$A_1 B_1 = A_2 B_2 = \ldots\ldots = A_n B_n =$

Dalam geometri Lobachevsky sifat tersebut tidak berlaku.

TEOREMA : Kalau a // b dalam Geometri Lobachevsky, maka a dan b tidak berjarak sama di mana-mana.

Ternyata : Tidak ada 3 titik pada salah satu garis yang berjarak sama terhadap garis yang lain.

<u>Bukti</u> :



$a \,//\, b$

Andaikan ada 3 titik A,B,C yangberjarak sama terhadap garis b, jadi apabila $AA' \perp b$, $BB' \perp b$, $CC' \perp b$ maka kita andaikan $AA' = BB' = CC'$

$AA'\ BB'$ segi-4 Saccheri

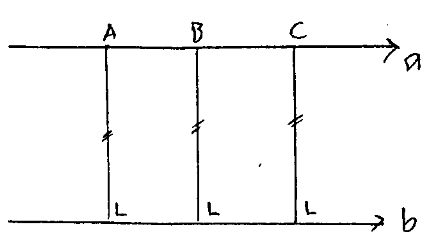
$B'C'\ CB$ segi-4 Saccheri

Perhatikan segi-4 $A'C'\ CA$

maka $\angle A'AB + \angle C'CB = \angle B'BA + B'BC = 180^0$

oleh karena $\angle AA'C' + \angle A'C'C = 90^0 + 90^0 = 180^0$

maka dalam segi-4 $A'C'\ CA$ berlaku jumlah besar sudut-sudut $= 360^0 \longrightarrow$ ini tak mungkin dalam Geo Lobachevsky.

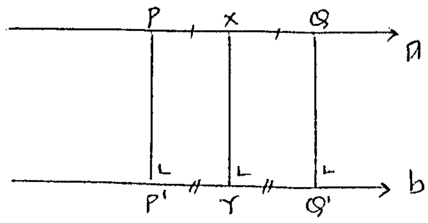


Kalau $a \,//\, b$ telah terbukti, tidak mungkin ada 3 titik A,B,C pada a yang berjarak sama terhadap garis b

Jadi yang mungkin ialah :

1. Ada dua titik P dan Q yang sama jaraknya terhadap b

andaikan hal ini terjadi maka jika PP' ⊥ b, QQ' ⊥ b



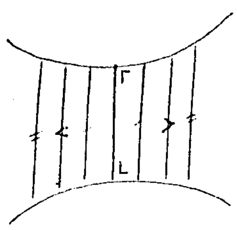
Kita peroleh PP' Q'Q suatu segi-4 S. Apabila X tengah-tengah PQ, Y tengah-tengah P'Q', maka XY ⊥ a, dan XY ⊥ b. Jadi a dan b memiliki garis tegak lurus sekutu.

"<u>Sebaliknya</u>" : Kalau a dan b memiliki garis tegak lurus sekutu (misalnya XY) maka a // b.

Ukuran kiri kanan X, titik-titik A dan B sehingga XA = XB

Tarik AP ⊥ b, BQ ⊥ b; maka AP = BQ

Kalau XC = XD, maka jika CR ⊥ b, DS ⊥ b kita peroleh CR = DS

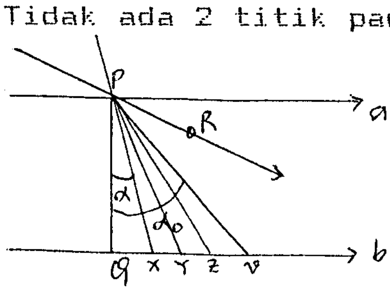


Jadi ukuran tersebut mengenai dua garis (a dan b) yang memiliki sifat bahwa ada dua titik A, B ∈ a yang berjarak sama terhadap garis b.

"Kesimpulan"

a dan b memiliki garis tegak lurus sekutu misalnya XY, yang mengakibatkan lagi bahwa pasangan-pasangan titik-titik kiri kanan X yang sama jaraknya terhadap X mempunyai jarak yang sama terhadap b.

2). Tidak ada 2 titik pada a yang berjarak sama thd b.



Andaikan P ∉ b tari PQ ⊥ b dan tarik di P garis a ⊥ PQ maka a // b

Maka melalui P ada paling sedikit dua garis yang // b, andaikan PR // b, dan andaikan $\angle QPR < 90^{o}$ ambil X $\in$ b. Tarik XP sehingga $\angle QPX = \alpha < 90^{o}$.

Kalau X bergerak ke kanan pada b, maka $\angle QPX$ naik (bertambah besar) tetapi selalu tidak dapat melebihi $\angle QPR \longrightarrow \alpha < \angle QPR$.

Jadi himpunan sudut-sudut α sedemikian yaitu $\{ \alpha \}$ tak hingga dan terbatas, sebab tiap $\alpha \in \{ \alpha \}$ memenuhi $0 \leq \alpha <$, $\angle QPR$ maka ada supremum (batas atas paling kecil). Misalkan supremum $\{ \alpha \} = \alpha o$ dan $\alpha o = \angle QP5$.

maka P5 // b

<u>Bukti</u> :

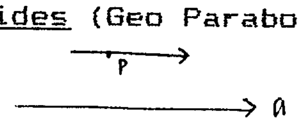
Andaikan P5 // b $\longrightarrow$ P5 memotong b misalnya di V, ini akan berarti bahwa sudut αo termasuk himpunan sudut-sudut α. Jadi tidak dapat merupakan batas atas yang paling kecil.

Jadi garis P5 // b demikian disebut garis asimtotik.

<u>Kesimpulan</u> :

Geometri Netral

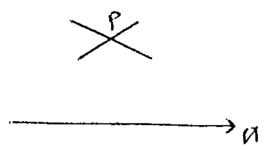
<u>Geo</u> <u>Euklides</u> (Geo Parabolik)



Jumlah besar sudut tiap segi-3 180^{o}

Geo Lobachevsky (Geo Hiperbolik)

Jumlah besar sudut segi-3 kurang dari 180^{0}



Geo Rismann (Geo Eliptik)

Mungkin ada geometri-geometri netral di luar geometri euklidean dan geometri Lobachevsky ?

Mungkin ada suatu geometri netral yang sebagian Euklidean dan sebagaian Lobachevsky ?

Jawabnya adalah sebagai berikut :

Suatu geometri netral kalau tidak Euklidean maka ia Lobachevsky dan sebaliknya.

Untuk menjelaskan jawaban tersebut kita memerlukan konsep sebagai berikut :

Andaikan ada a dan $P \notin a$, pasangan (a,P) memliki sifat Euklidean , apabila melalui P ada tepat satu garis yang // a.

Pasang (a,P) memiliki sifat Lobachevsky apabila melalui P ada lebih dari satu garis yang // a.

TEOREMA

Andaikan di suatu geometri netral ada pasangan (a,P) yang memiliki sifat Euklidean maka ada PP.

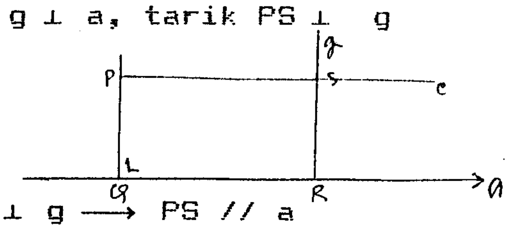
Bukti :

Andaikan (a,P) memiliki sifat Euclides

Tarik PQ $\perp$ a, ambil R $\in$ a, Ø = R

Tarik g di R, dan g $\perp$ a, tarik PS $\perp$ g

maka PQRS PP.



Sebab : PS $\perp$ g, a $\perp$ g $\longrightarrow$ PS // a

tarik di P garis C $\perp$ PQ

Maka C // a

Jadi haruslah C $\equiv$ PS

$\therefore$ $\angle$ QPS = 90^o $\longrightarrow$ PQRS PP

<u>Akibat</u> :

Andaikan dalam suatu geometri netral ada pasangan (a,P) yang memiliki sifat paralel Euclides. Maka dalam geometri netral itu jumlah besar sudut-sudut dalam tiap segi-3 adalah 180^o.

<u>TEOREMA</u>

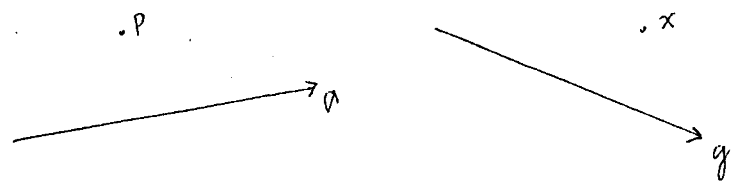
Andaikan dalam suatu geometri netral ada pasangan (a,P) yang memiliki sifat parlel Lobachevsky, maka ada segi-3 yang jumlah besar sudut-sudut kurang dari 180^o.

Akibat : <u>Andaikan dalam suatu geometri netral ada pasangan (a,P) yang memiliki sifat paralel Lobachevsky maka jumlah besar sudut dalam tiap segi-3 kurang dari 180^o</u>.

<u>TEOREMA</u> :

Andaikan dalam suatu geometri netral ada pasangan (a,P) yang memiliki sifat paralel Euclides maka tiap pasang (garis, titik | titik $\not\in$ garis) memiliki sifat Euclides (jad geometri netral itu adalah geometri Euclides).

Bukti :

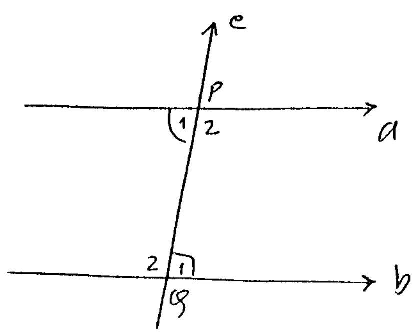


Andaikan (a,P) memiliki sifat paralel Euclides, andaikan (g, x) pasangan lain. Akan dibuktikan pasangan (g, x) juga memiliki sifat paralel Euclides.

Andaikan ada pasangan (k, y) y $\not\in$ k yang tidak memiliki sifat paralel Euclides. Ini benar pasangan itu memiliki sifat paralel Lobachevsky, maka jumlah besar sudut-sudut dalam tiap segi-3kurang dari 180°. Akan tetapi oleh karena pasangan (a,P) memilikki sifat paralel Euclides maka jumlah besar sudut dalam tiap segi-3 sama dengan 180° tak mungkin. Jadi pasangan (k,y) memiliki sifat paralel Euclides, jadi juga pasangan (g,x).

Akibat 1 : Suatu geometri netral dapat berbentuk geometri Euclides atau geometri Lobachevsky.

Geometri Euclidean :



a // b dipotonggdi P dan Q

<u>Buktikan</u> : $\angle P_1 = \angle Q_1$

<u>Bukti</u> :

Andaikan $\angle P_1 1 = Q$, misal $\angle P_1 < \angle Q_1$ maka $\angle P_1 + \angle Q_2 < \angle Q_1 + \angle Q_2 = 180^o$.

$\therefore$ berdasarkan ke-ekivalennan aksioma paralel play fair dan aksioma paralel Euclides, maka a dan bberpotongan di bagian bidang yang memuat $\angle P_1$ dan $\angle Q_2$ itu ini berlawanan dengan yang diketahui bahwa a // b.

Akibat 2 : Suatu geometri netral adalah Euclidean atau Lobachevsky apabila masing-masing geometri memuat segi-3 yang jumlah besar sudut-sudut sama atau kurang dari 180^o.

<u>Bukti</u> : Andaikan dalam suatu geometri netrall ada segi-3 yang jumlah besar sudut-sudut sama dengan 180^o. Andaikan geometri kita Lobachevsky maka dalam geometri ini jumlah besar sudut-sudut dalam tiap segi-3 kurang dari 180^o. Berlawanan.

Akibat 3 : Apabila dalam geometri netral ada PP, maka geometri itu adalah Euclidean.

Ada geometri yang di dalamnya berlaku aksioma paralel

Riemann : "Tidak ada garis-garis sejajar"

Contoh : Suatu geometriyang tidak mengenal konsep kesejajaran ialah .

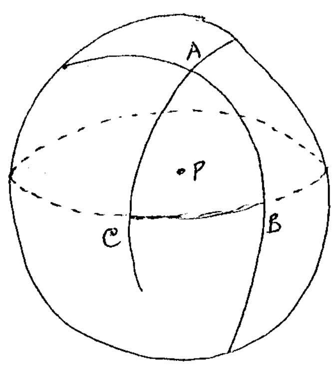
Ambil permukaan bola : disini

1. Titik adalah titik pada bola

2. Garis = lingkaran besar.

Lingkaran besar adalah :

Lingkaran yang berbentuk karena terjadinya perpotongan bola dengan bidang yang melalui titik pusat bola tersebut.



Didalam geometri ini dipenuhi sifat bahwa : Melalui tiap dua titik ada tepat satu garis disini jelas :

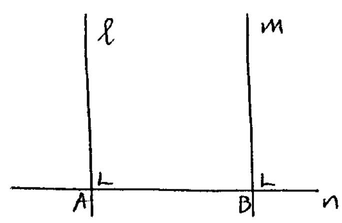
1. Tiap 2 garis selalu berpotongan

2. Tiap 2 garis berpotongan pada 2 titik.

Kalau ada segitiga ABC, maka didapat suatu segi-3 bola. Kita ketahui bahwa $\angle A + \angle B + \angle C > 180^{o}$.

Suatu geometri Riemann bukan sejenis geometri netral, sebab dalam geometri netral ada pengertian kesejajaran. Jadi kalau pengertian kesejajaran harus dibuang, sifat-sifat mana lagi yang juga harus tidak diberlakukan. Untuk menyelidiki sifat-sifat mana lainnya harus dibuang, kita perhatikan kembali pembuktian sifat berikut dalam geometri netral yaitu sifat berikut :

Apabila $l \perp n$, $m \perp n$ maka $l \mathbin{//} m$

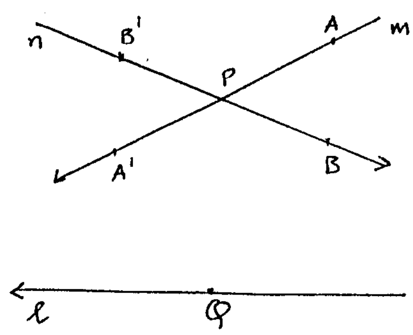


Bagaimana buktinya sifat ini ?

Dalam geometri Riemann l dan m dapat berpotongan, akan kita temukan sifat-sifat dalam pembuktian yang tidak menjurus kesuatu kontradiksi.

TEOREMA 1 : <u>Tiap garis terletak seluruhnya di dalam sesuatu sudut</u>

<u>Bukti</u> :



Andaikan l garis yang diketahui. Ambil sebuah titik P di luar garis itu. Maka melalui P ada paling sedikit 2 garis (Mis m dan n) yang sejajar dengan l.

Garis-garis m dan n ini membagi bidang menjadi empat bagian yang merupakan daerah dalam sudut-sudut yaitu dari sudut-sudut <u>APB, BPA', A'PB', B'PA.</u>

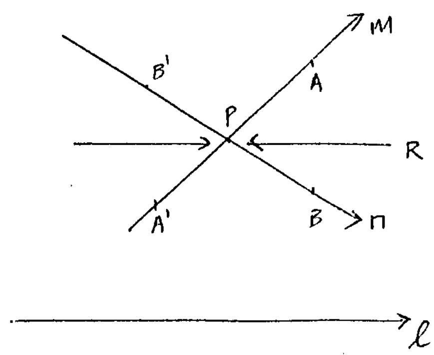
<u>Akan dibuktikan bahwa l terletak seluruhnya di dalam salah satu daerah dalam tersebut</u>. Untuk ini kita ambil sembarang titik Q $\in$ l, maka Q terletak didalam salah satu bagian dalam itu.

Oleh karena l tidak memotong m maupun n, maka Q tidak terletak pada m atau n. <u>Andaikan Q terletak dalam daerah</u> $\angle$<u>A'PB,</u> maka oleh karena Q sebarang pada l, <u>seluruh l akan termasuk dalam daerah dalam</u> $\angle$<u>A'PB.</u>

<u>Akibat</u> :

<u>Melalui sebuah titik di luar suatu garis ada tak hingga banyaknya garis-garis yang sejajar dengan garis itu.</u>

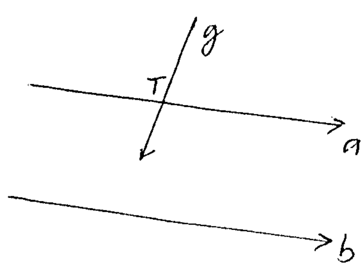
<u>Bukti</u> :



Ambil l dan P diluar garis itu. Maka melalui P ada garis misal m dan n yang sejajar l.

Andaikan R sebuah titik di dalam ∠APB dan ∠A'PB' dan tidak akan dapat memotong l yang terletak seluruhnya di dalam ∠A'PB.

Ini berarti PR // l. Oleh karena R sebarang di dalam ∠APB, maka ada tak hingga banyaknya garis-garis melalui P yang sejajar dengan garis l.



Diketahui a // b, g memotong a di T maka g memotong b.

<u>Bukti</u> :

Andaikan g tidak memotong b pada g // b melalui T ada dua garis yang sejajar b yaitu :

$\left.\begin{matrix} g \,//\, b \\ a \,//\, b \end{matrix}\right\}$ ini tak mungkin menurut "Aksioma paralel Euclides" tapi didalam "Geo Lobachevsky" ini masih mungkin.

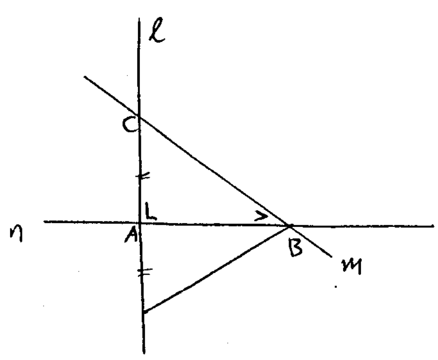
GEOMETRI RIEMANN

Aksioma : Tidak ada garis-garis sejajar

Dalam geometri netral, kalau $l \perp n$, $m \perp n$, maka dapat dibuktikan bahwa l // n dalam geometri Riemann, walaupun $l \perp n$ dan $m \perp n$, kita tidak dapat menarik kesimpulan bahwa l // m.

Bukti bahwa dalam geometri netral l // m adalah sebagai berikut :

Andaikan l memotong m di C



1. Perpanjang CA dengan AC' sehingga CA = AC'
2. Tarik C'B
3. Δ ABC $\cong$ Δ ABC'
4. $\angle ABC = \angle ABC' = 90^0$
5. Jadi $BC \perp n$, $BC' \perp n$
6. BC berimpit dengan BC'
7. CA dan BC (BC') bersekutu pada 2 titik yaitu :

$\therefore$ BC dan CA berimpit ini berlawanan dengan pengandaian bahwa l dan m dua garis yang berbeda.

$\therefore$ Tak mungkin m memotong l

$\therefore$ l // m

<u>RINGKASAN</u>

Diandaikan l berlainan m

Jika diambil l memotong m, maka diperoleh sifat yang berlawanan yaitu bahwa l berimpit m.

Jadi l // m.

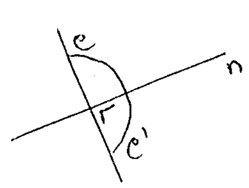
Sehingga apabila Aksioma Riemann diberlakukan, teorema yang baru dibuktikan harus kita buang. Sifat-sifat yang akan kita berlakukan terus adalah tentunya "Sifat Kongruenan" 2 segi tiga yang akan dibuang adalah sifat-sifat yang dasarnya tidak kuat.

Sifat in agaknya adalah sebagai berikut : l dan m berimpit oleh karena l dan m bersekutu pada 2 titik yang berbeda yaitu di C dan C'.

Langkah yang menjurus ke sifat berlawanan bahwa l berimpit m adan gagal, apabila C berimpit dengan C'.

Konklusi bahwa C dan C' berbeda, oleh karena digunakan suatu kaidah bahwa tiap garis membelah bidang menjadi dua bagian yang saling lepas. Artinya kalau ada 2 titik masing-masing disalah satu bagian bidang, garis yang menghubungkan dua titik itu memotong garis pemisah. Jadi tanpa kaidah pemisah setiap garis ini, kita tidak dapat mengatakan bahwa C berbeda dengan C'. Dan bukti l // m akan gagal.

Berdasarkan uraian di atas kita dapat membangun suatu geometri riemann sebagai berikut :



1. Apabila sifat pemisah, bahwa setiap garis membagi bidang menjadi dua bagian yang terpisah, tetap diberlaku-

kan akan tetapi diperbolehkan bahwa dua garis berlainan berpotongan pada 2 titik (Geometri eliptika ganda).

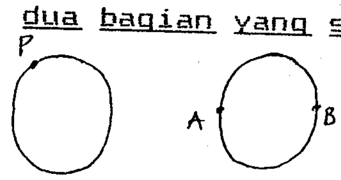
2. Dua garis berbeda berpotongan pada tepat satu titik, maka harus diberlakukan bahwa prinsip pemisah suatu garis harus dibuang (Geometri eliptika tunggal).

Didalam kedua geometri Riemann ini, prinip penting lainnya yang lazim kita kenal dalam geometri Euclides, juga tidak berlaku yaitu : "Dalam geometri Euclides, suatu garis terpisah oleh sebuah titik padanya menjadi dua bagian yang saling lepas".

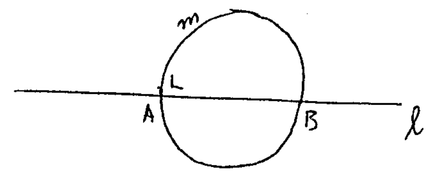
Perhatikan terlebih dahulu geometri "Eliptika Tunggal". Apabila kita perhatikan bukti di atas, maka apabila CA diperpanjang dengan AC', kita harus sampai pada titik yang sama ini, berarti bahwa setiap garis adalah suatu kurva yang tertutup.

Ini berarti bahwa panjang tiap garis dalam geometri Riemann "Berhingga".

Jadi sebuah titik pada suatu garis Riemann tidak membaginya menjadi dua bagian yang saling lepas. Tetapi kalau ada 2 titk A dan B yang berbeda, maka garis Riemann terpisah menjadi dua bagian yang saling lepas.



Dalam geometri "Eliptika Ganda", andaikan l sebuah garis dan A sebuah titik pada l.



Andaikan m garis melalui A yang tegak lurus pada l. Oleh karena l dan m berpotongan pada dua titik maka m akan memotong l untuk kedua kalinya di B misalnya. Oleh karena l membagi bidang menjadi 2 bagian terpisah, maka bagian m di atas l dapat dicerminkan ke bawah garis l. Dengan demikian tampak lagi bahwa suatu garis dalam geometri eliptika ganda ini adalah suatu kurva yang tertutup.

Model terkenal geometri Riemann adalah sebagai beikut :

Perhatikan bola :

1. Titik adalah titik pada bola
2. Garis adalah lingkaran besar pada bola.

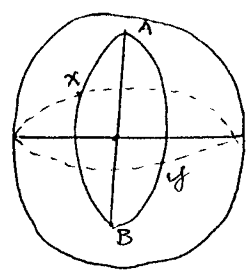
Dalam hal ini jelaslah bahwa kita memperoleh suatu model geometri eliptika ganda sebab :

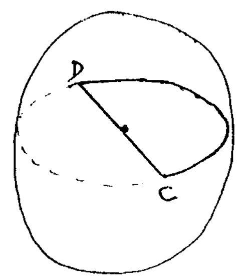
1. Tiap garis membagi bidang menjadi dua bagian yang terpisah.
2. Tiap dua garis yang berbeda berpotongan pada dua titik.
3. Tetapi melalui dua titik adakalanya dapat dibuat tepat satu garis, adakalanya dapat dibuat banyak garis. Misalnya melalui A,B ada tepat satu garis dan melalui x dan y ada banyak garis.

Model suatu geometri eliptika tunggal dapat juga kita peroleh pada permukaan bola.

1. Garis disini juga kita ambil lingkaran besar, akan tetapi tidak seluruhnya, oleh karena dua lingkaran besar <u>berpotongan pada dua titik bola yang letaknya di diametral</u> (pada bola)

   Titik T pada bidang Riemann dalam model ini disajikan <u>sebagai (A,B) = T</u> dengan pembaharuan ini, tiap dua garis <u>berpotongan pada satu titik Riemann.</u>





Tiap garis cukup digambarkan sebagai setengah lingkaran.

Tiap garis juga merupakan kurva yang tertutup.

Tiap garis jelas tidak membagi bola menjadi dua bagian yang terpisah.

BAB IV

GEOMETRI INSIDENSI

A. MENENTUKAN GEOMETRI INSIDENSI

Membentuk geometri secara formal didasrkan pada suatu sistem aksioma-aksioma :

Kelompok Aksioma Insidensi

1. Suatu garis adalah himpunan titik-titk yang mengandung paling sedikit dua titik.
2. Dua titik yang berlainan termuat dalam tepat satu garis.
3. Suatu bidang adalah himpunan titik-titik yang mengandung paling sedikit tiga titik yang tidak "segaris" (kolinear).
4. Tiga titik yang berlainan dan tidak kolinear termuat dalam tepat satu bidang.
5. Apabila suatu bidang memua dua titik, sebuah garis, maka bidang itu memuat seluruh garis.
6. Apabila ada 2 bidang yang bersekutu pada sebuah titik, maka kedua bidang itu bersekutu pada titik yang kedua.

TEOREMA 1 :

Dua titik yang berlainan bersekutu pada paling banyak satu titik.

TEOREMA 2 :

Kalau titik A tidak pada garis BC (A ∉ BC) maka A,B,C berlainan dan tidak kolinear.

Bukti : Menurut ketentuan B = C. Andaikan A = B oleh karena B ∈ BC (B pada garis BC), maka A ∈ BC berlawanan dengan yang diketahui sehingga pengumpamaan A = B adalah tidak benar. Maka haruslah A = B. Begitu pula dengan jalan yangserupa A = C. Jadi A,B,C berlainan.

Andaikan A,B,C segaris sehingga ada garis g yang memuat A,B,C dan C. Oleh karena memuat B dan C dan B = C maka g = BC. Jadi A ∈ BC yang berlawanan dengan yang diketahui sehingga perumpamaan bahwa A,B,C tidak kolinier.

TEOREMA 3 :

Sebuah garis dan sebuah titik yang tidak pada garis itu termuat dalam tepat satu bidang.

Bukti :

Andaikan g garis tersebut dan A sebuah titik dengan A ∉ g.

Kita buktikan terlebih dahulu ada paling sedikit satu bidang.

Menurut I_1, g memuat paling sedikit 2 titik, misalnya B dan C oleh karena A ∉ g, maka A ∉ BC ⟶ ABC tidak segaris (tidak kolinear). Jadi menurut I_4, A,B,C termasuk dalam satu bidang V. Oleh karena ada 2 titik $\in g$, yaitu B dan C yang terletak pada V, maka menurut I_5, seluruh g termuat didalam V. Jadi ada bidang V yang memuat A dan g.

Andaikan ada bidang lain, misalnya V' yang memuat A dan g juga oleh karena V' memuat g

$\longrightarrow$ V' memuat B dan C] V' memuat tiga titik A, B,C yang berbeda dan tidak kolinear
V' memuat A

Menurut I_4 hanya ada tepat 1 bidang yang melalui 3 titik A,B,C itu.

$\therefore V = V'$

Note : "Ingat" **Suatu sistem aksioma harus bersifat konsisten artinya tidak boleh saling berlawanan.**

DEFENISI 1. :

Dua garis g dan m disebut sejajar, ditulis g // m apabila :

1. Sebidang dan
2. Tidak memiliki titik sekutu

Akibat :

Apabila g // m, ada bidang tunggal yang memuat g dan m

Bukti : Menurut definisi, ada sebuah bidang V yang memuat l dan m. Andaikan V' juga memuat l dan m, andaikan $A \in m$, maka V' dan V memuat l dan A.

Menurut teorema 3, $V' = V$.

TEOREMA 4 :

Apabila dua garis yang berbeda yang berpotongan, maka karena termuat di dalam tepat satu bidang.

Bukti :

Andaikan l dan m garis berbeda yang berpotongan tersebut, andaikan $A \in l$ dan $A, \in m$ (sebab l dan m berpotongan). Menurut aksioma 1 ada $B \in m$ dan $B = A$, $B = l$, maka ada sebuah bidang V yang memuat l dan B. Oleh karena V memuat l maka V memuat A sehingga memuat m. Jadi V memuat l dan m.

TEOREMA 5 :

Apabila ada 2 bidang yang berbeda dan yang berpotongan maka himpunan titk-titk potongnya (titik-titik sekutunya) adalah sebuah garis.

Bukti :

Andaikan bidang-bidang itu adalah V dan W yang berbeda dan yang berpotongan artinya ada paling sedikit satu titik A dengan $A \in V$ dan $A \in W$. Menurut I_6 , V dan W bersekutu pada titik kedua, misal B.

$\therefore B \in V, B \in W$.

Perhatikan garis AB, maka karena $A \in V$, $B \in V$ $\longrightarrow AB \in V$ dan juga $A \in W$, $B \in W \longrightarrow AB \in W$.

Jadi tiap garis AB adalah titik sekutu V dan W. Dengan demikian terbukti bahwa garis AB adalah himpunan titik-titik sekutu V dan W. Tinggal membuktikan bahwa hanya garis AB lah yang merupakan himpunan titik-titik sekutu dari V dan W.

Untuk membuktikan ini kita harus membuktikan bahwa :

1. Tiap titik pada AB adalah titik sekutu dari V dan W.
2. Tiap titik sekutu antara V dan W terletak pada AB.

Untuk butir (1) telah terbukti di atas. Sedang butir (2) akan kita buktikan :

Andaikan C titik sekutu V dan W tidak pada AB.

Ini akan berarti V memuat A,B,C
W memuat A,B,C] A,B,C berbeda dan tak kolinear.

Oleh karena melalui tiga titik berbeda dan tak kolinear, maka hanya ada satu bidang. Maka ≡ W. Ini berlawanan dengan yang diketahui bahwa V berbeda W. Jadi tiap titik potong lainnya harus di AB.

∴ Himpunan titik-titik potong V dan W adalah garis AB.

DEFENISI 2 :

V dan W dua bidang disebut sejajar, ditulis V // W apabila V dan W tidak memiliki titik sekutu.

TEOREMA 6 :

Apabila bidang-bidang V dan W sejajar, dan bidang U memotong V dan W maka (U,V) // (U,W)

Bukti :

Akan dibuktikan bahwa $P \cap R$ dan $Q \cap R$ adalah garis-garis. Untuk ini kita buktikan bahwa P da R berlainan dan Q dan R juga berlainan. Andaikan P = R. Oleh karena R memotong Q maka ini berarti bahwa P memotong Q, ini tak mungkin. Jadi haruslah P = R. Berati $P \cap R$ adalah sebuah garis l. Begitu pula $Q \cap R$ adalah sebuah garis m, andaikan l dan m berpotongan, misalnya $l \cap m = A$ maka $A \in P$ dan $A \in Q$.

Jadi P dan Q bertemu di A, ini tak mungkin. Jadi l dan m terletak pada satu bidang dan tidak memiliki titik temu. Ini berarti l // m.

Definisi 3 :

Sebuah garis dinamakan sejajar bidang apabila garis dan bidang itu tidak memiliki titik sekutu.

SOAL-SOAL.

1. Apabila sebuah garis sejajar sebuah bidang, maka garis itu sejajar dengan perpotongan antara bidang itu dan tiap bidang yang memuat garis tersebut.
2. Sebuah garis g termuat dalam bidang V, andaikan garis a // g maka a termuat dalam V atau a // V.
3. Apabila sebuah bidang memuat dua garis yang sejajar, maka V memuat paling sedikit empat titik.
4. Sebuah bidang memuat tepat tiga titik.

   Buktikan a) Tiap garis bidang itu memuat tepat 2 titik.

   b) Tidak ada garis-garis sejajar.
5. Apabila tiap garis memuat paling sedikit tiga titik.

   Buktikan a) Tiap titik pada suatu bidang termuat dalam paling sedikit 3 garis bidang itu.

   b) Tiap bidang memiliki paling sedikit tujuh titik.

   c) Tiap bidang memiliki paling sedikit tujuh garis.

Andaikan ada 3 macam himpunan, yaitu :

S_1 : Titik

S_2 : Garis (himpunan titik)

S_3 : Bidang (himpunan titik)

Yang memenuhi sitem aksioma-aksioma I_1 sampai dengan I_6, dikatakan S_1, S_2, S_3 membentuk suatu geometri insidensi.

Suatu geometri insidensi disebut <u>geometri insindensi</u>

bidang (planar) apabila hanya ada 1 bidang (atau geometri insidensi berdimensi dua).
Suatu geometri insidensi disebut berdimensi tiga, apabila di dalamnya ada lebih dari satu bidang.

MODEL-MODEL GEOMETRI INSIDENSI

Model geometri insidensi adalah sebuah sistem (S_1,S_2,S_3) yang terdiri atas tiga himpunan tertentu S_1,S_2,S_3 yang unsurnya masing-masing dinamakan titik, garis dan bidang yang memenuhi aksioma-aksioma 1 sampai 6

Sebuah geometri insidensi disebut planar atau berdimensi dua apabila S_3 terdiri hanya atas satu bidang. Apabila satu model telah memenuhi aksioma 1 sampai 6, dengan sendirinya semua teorema-teorema yang telah dibahas akan berbakti dalam model tersebut.

Berikut akan disajikan model-model yang tersendiri atas S_1,S_2,S_3.

1. Geometri insidensi yang terdiri atas hanya 3 titik.

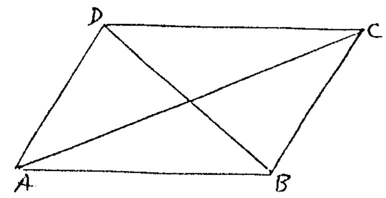
   Misal A,B,C tiga titik

   Maka ada 3 garis : (A,B), (B,C), (C,A) ⟶ tidak ada garis sejajar ⟶ ini memenuhi aksioma I_1 s/d I_6.
2. Bagaimana kalau geometri insidensi kita terdiri dari atas 4 titik. Buatlah diagram, ada berapa garis.

   Titik A,B,C,D

   Bidang : 1 bidang yaitu yang memuat A,B,C,D

   Garis : (A,B), (A,C), (A,D), (B,C), (C,D).



(A,C) // (B,D)

(A,B) // (D,C)

(A,D) // (B,C)

Apabila suatu geometri memuat hanya terhingga banyaknya unsur-unsur geometri tersebut dinamakan <u>Geometri Hingga</u> (finite geometri). Tampak geometri ini memenuhi aksioma-aksioma geometri insidensi.

Titik : A,B,C,D

Bidang : Apabila A,B,C,D tidak sebidang

1 bidang yaitu yang memuat A,B,C ⟶ (A,B,C)

Andaikan D tidak pada bidang yang memuat A,B,C.

Apabila D $\not\in$ (A,B,C) ⟶ (A,B,D), (D,B,C), (A,D,C)

Garis-garis : (A,B), (A,C), (B,C)

Pada bidang (A,B,C) ⟶ (A,B) $\subset$ (A,B,C)

(A,C) $\subset$ (A,B,C)

(B,C) $\subset$ (A,B,C)

Pada bidang (A,B,D) ⟶ (A,B) $\subset$ (A,B,D)

(A,D) $\subset$ (A,B,D)

(B,D) $\subset$ (A,B,D)

Pada bidang (D,B,C) ⟶ (D,B), (D,C), (B,C)

Pada bidang (A,B,C) ⟶ (A,D), (A,C), (D,C)

Catatan : (B,D) tidak sejajar (A,C), karena (B,D) dan (A,C) tidak sebidang dalam hal ini (A,B,D) dan (A,D,C) tidak identik sebab B dan C tidak berimpit.

3. Titik : Titik di dalam suatu lingkaran Euclides

   Garis : Tali busur didalam lingkaran itu

   Bidang : Daerah lingkaran itu.

   a // b karena dia baru berpotongan diluar geometri kita, sedang dalam geometri kita a tidak berpotongan dengan b.

4. Titik : Tiap titik dalam bola Euclides

   Garis : Tali busur didalam bola itu

   Bidang : Bagian dalam daerah lingkaran pada bola itu.

   Selidiki : Apakah (4) suatu model geometri insidensi ?

5. Titik : Pasangan terurut bilangan-bilangan real (x,y)

   Garis : $\{(x,y) \mid ax + by + c = 0\}$ dengan a,b tidak boleh dua-duanya nol.

   Bidang : Himpunan semua pasangan (X,Y), X,Y Real.

   Apakah model 5 suatu model geometri insidensi ?

   Bukti : Ambil g, $\{(x,y) \mid ax+ by + c = 0\}$, a,b tidak berdua nol.

   I_1 : Ada paling sedikit dua titik yang termuat dalam g

   $x = 0 \longrightarrow by + c = 0 \longrightarrow y = -c/b$, kalau $b \neq 0$ $(0,-c/b) \in g$

   $y = 0 \longrightarrow ax + c = 0 \longrightarrow x = -c/b$, kalau $a \neq 0$ $(-c/b, 0) \in g$

Andaikan $b = 0$

$g\ \{(x,y) \mid ax + c = o\}$, $ax + c = 0 \longrightarrow x = -c/a$, y sebarang $(-c/a, y_1)$, $(-c/a, y_2)$ $\longrightarrow \in g$

Andaikan $a = 0$

$g\ \{(x,y) \mid by + c = o\}$, $by + c = 0 \longrightarrow y = -c/b$, x sebarang $(x_1, -c/a)$, $(x_2, -c/a)$ $\longrightarrow \in g$

Ambil $A\ (a_1, a_2)$, $B\ (b_1, b_2)$

Buktikan melalui A dan B satu dan tidak lebih dari satu garis

6. <u>Titik</u> : <u>(x,y,z), dengan $(0,0,0)$ bukan titik</u>

Dengan ketentuan bahwa : $(x,y,z) \equiv (kx,ky,kz)$ $\longrightarrow k \# 0$ (dianggap satu titik).

Mis : $(1,2,3) \equiv (2,4,6)$

$(3,0,0) \equiv (1,0,0)$

<u>Garis</u> : <u>$\{(x,y,z) \mid ax \pm by \pm cz = 0\}$</u>

<u>Bidang</u> : <u>Himpunan semua (x,y,z)</u>

Apakah 6 suatu model geometri insidensi

3. <u>KEISOMORFAN GEOMETRI INSIDENSI</u>

<u>Ada dua geometri insidensi planar G dan G'</u>

Unsur-unsur tak terdefinisi G adalah titk-titik A dan garis-garis g.

Unsur-unsur tak terdefinisi G' adalah titik-titik A' dan garis-garis g'

Geometri G disebut "Isomorf" dengan G' apabila :

1. Tiap titik $A \in g$ "Sepadan" dengan tepat satu titik $A' \in G'$, dan sebaliknya.
2. Tiap garis $g \in G$ "Sepadan" dengan tepat satu garis $g' \in G'$, dan sebaliknya (jdi antara unsur-unsur primitif geometri G dan geometri G' ada padanan (korespondensi) satu-satu).
3. Apabila $A \in g \Leftrightarrow A' \in g''$

TEOREMA :

Dua geometri insidensi planar G dan G' adalah isomorfik jika dan hanya jika ada padanan (korespondensi) satu-satu.

Antara titik-titik G dan titik-titik G' sehingga mengawetkan (mempertahankan) sifat keklinearan (kesegarisan)

Bukti :

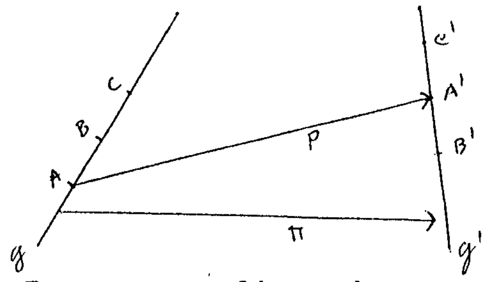
1. Andaikan G dan G' (tanda $\cong$ artinya disini "Isomorf". Harus dibuktikan 3 titik kolinear $\longrightarrow$ peta-petanya juga kolinear.

   $G \cong G'$, jadi ada :

   1. $\rho : A \longrightarrow A' = \rho\ (A)$
   2. $\pi : g \longrightarrow g' = \square\ (g)$
   3. Kalau $A \in g \longrightarrow A' \in g'$

   Akan dibuktikan :

Kalau A,B,C $\in$ g, harus dibuktikan ρ (A) = A', ρ (B) = B', ρ (C) = C' terletak pada π (g) = g'



$$\left.\begin{array}{l} A,B,C, \in g \longrightarrow A' \in g' \\ \qquad\qquad\qquad\;\; B' \in g' \\ \qquad\qquad\qquad\;\; C' \in g' \end{array}\right] \longrightarrow \begin{array}{l} A',B',C' \text{ segaris} \\ \text{(kolinear)} \end{array}$$

Jadi kalau G $\cong$ G' maka tiap tiga titik G yang kolinear, peta-petanya tetap kolinear.

2. Diketahui : Ada tiga titik A,B,C yang kolinear Andaikan ρ padanan antar titik G dan G' sehingga A' = ρ (A), B' = ρ (B), C' = ρ (C) tetap kolinear. Harus dibuktikan G $\cong$ G'.

Definisikanlah padanan π antar garis-garis G dan G' sebagai berikut :

Kalau A $\in$ g, B $\in$ g

$\downarrow$ $\downarrow$

ρ (A) = A' ρ (B) = B'

Kita definisikan π itu padanan yang memetakan g yang melalui A dan B pada garis g' yang melalui ρ (A) = A' dan ρ (B) = B'.

Jelas bahwa C' = ρ (C) $\in$ g'

Tinggal membuktikan kalau <u>sebarang</u> $\underline{X} \in \underline{g}$ <u>maka</u> ρ $\underline{(x)} = \underline{x'}$ $\in \underline{g'}$

Oleh karena $A, B, X \in g \longrightarrow A, B, X$ kolinear

Jadi $\rho(A) = A'$, $\rho(B) = B'$, $\rho(x) = X'$, juga kolinear.

Oleh karena $A', B \in g'$ maka $x' \in g' \longrightarrow A', B', x'$ kolinear juga.

Contoh :

G : Titik-titik	Garis-garis	Bidang
1,2,3,4,5,6,7	1 2 3 4 5 6 7	(1,2,3,4,5,6,7)
	2 3 4 5 6 7 1	
	4 5 6 7 1 2 3	

G′: Titik-titik	Garis-garis	Bidang
a,b,c,d,e,f,g	(a,b,d),(b,c,e),(c,d,f)	(a,b,c,d,e,f,g)
	(d,e,g),(e,f,a),(f,g,b)	
	(g,a,c)	

Mudah dicek bahwa G dan G′ adalah geometri insidensi

ρ	1	2	3	4	5	6	7
	a	b	c	d	e	f	g

$g_1 = (1,2,4)$

$(a,b,d) = g_1'$

$g_2 = (2,3,5)$

$(b,c,e) = g_2$

$g_3 = (3,4,6)$

$(c,d,f) = g_3'$

$g_4 = (4,5,7)$

$(d,e,g) = g_4'$

$g_5 = (5,6,1)$

$(e,f,a) = g_5'$

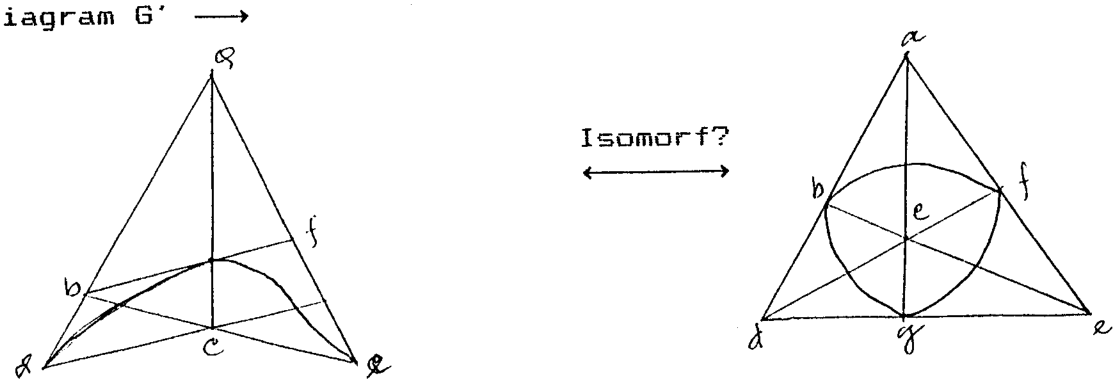
$g_6 = (6,7,2)$

$(f,g,b) = g_6'$

$g_7 = (7,1,3)$

$(g,a,c) = g_7'$

Diagram G' $\longrightarrow$



Titik	Garis	Bidang
(x,y)	{(x,y)| ax + by + c = 0 a,b tidak keduanya nol	Himpunan semua pasang an (x,y)

x,y Bilangan-bilangan bulat Modulo 3 yaitu {0,1,2}

+	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

x	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

4. SIFAT GEOMETRI AFFIN

Contoh suatu geometri Insidensi terdiri dari :

1. Geometri Euclidean
2. Geometri Affin

Geometri Affin adalah :

Suatu geometri insidensi dengan tambahan aksioma melalui sebuah titik diluar sebuah garis, ada satu dan tidak lebih dari satu garis yang sejajar garis.

Contoh Geometri Affin : Geometri Euclidean

Geometri Lobachevsky bukan geometri Affin.

Geometri Riemann ganda-2 bukan geometri insidensi.

TEOREMA 1 :

Apabila $A \notin g$, $A \in b$, dan $g \subset V$, A titik, g garis V bidang G. Ada tepat satu garis m dengan $A \in m$, $m \parallel g$, $m \subset V$.

TEOREMA 2 :

Kalau $a \parallel b$, $c \parallel b$ dan $a \neq c$, $m \parallel g$ maka $a \parallel c$

DEFF :

Apabila g dan v tidak mempunyai titik potong, maka dikatakan g sejajar v, ditulis $g \parallel v$.

Bidang $v \parallel$ bidang w, apabila v dan w tidak memiliki titik sekutu.

TEOREMA 2 :

Apabila $v \parallel w$, $u \parallel w$ dan u,v,w berlainan maka $u \parallel v$.

TEOREMA 3 :

Diketahui $v \parallel w$, $u \parallel w$, u,v,w berlainan.

Kalau garis g memotong v dan w maka g memotong u.

TEOREMA 4 :

Andaikan $u \parallel v$, u,v,w berbeda apabila w memotong u, dan w memotong v maka $(u,w) \parallel (v,w)$.

"<u>INGAT</u>" Isomofis : G dan G' berbeda

Otomorfi : G = G'

<u>SOAL</u> :

Titik	Garis	Bidang
(x,y)	$\{(x,y) \mid ax + by + c = 0$	(x,y)
	a,b tidak berdua nol	

(x,y) terbatas pada $x^2 + y^2 < 1$

<u>GEOMETRI INSIDENSI</u> :

Titik T (x,y) Garis $\{(x + y) \mid ax + by + c = 0$

$x^2 + y^2 < 1$ a,b tidak berdua nol.

$\rho : (x,y) \longrightarrow (x',y') \longrightarrow x' = 1/2\ \sqrt{2}\ (x - y)$

$B : \{(x,y) \mid x^2 - y^2 < 1 \}\ y' = 1/2\ \sqrt{2}\ (x + y)$

Selidiki apakah pemetaan ρ suatu otomorfisme ($\equiv$ Isomorfis pada bidang)

1. $x'^2 + y'^2 < 1 \longrightarrow$ harus dibuktikan

   Ambil titik T $(x,y) \in B \longrightarrow x^2 + y^2 < 1$

$$x' = 1/2\ \sqrt{2}\ (x - y) \longrightarrow x - y = x'\ \sqrt{2}$$

$$y = 1/2\ \sqrt{2}\ (x + y) \longrightarrow \underline{x + y = y'\ \sqrt{2}}\ -$$

$$-2y = x'\ \sqrt{2} - y'\ \sqrt{2}$$

$$y = 1/2\ \sqrt{2}\ (-x' + y')$$

$$x = 1/2\ \sqrt{2}\ (x' + y')$$

Harus dibuktikan dulu.

$x'^2 + y'^2 < 1$

$\longrightarrow 1/2\ (x' + y')^2 + 1/2\ (y' - x')^2 < 1$

$x'^2 + y'^2 < 1$

Cara lain :

$x'^2 + y'^2 = 1/2\ (x - y)^2 + 1/2\ (x + y)^2$

$= x^2 + y^2$

$x^2 + y^2 < 1 \longrightarrow x'^2 + y'^2 < 1$

Contoh :

T (1/2, − 1/3) ,

$x' = 1/2\ \sqrt{2}\ (1/2 + 1/3)$

$= (5/12\ \sqrt{2})$

$y' = 1/2\ \sqrt{2}\ (1/2 - 1/3)$

$= 1/12\ \sqrt{2}$

$T' = (x', y') = (5/12\ \sqrt{2}, 1/12\ \sqrt{2}$

P^{-1} (invers) $\begin{cases} x = 1/2\ \sqrt{2}\ (x' + y') \\ y = 1/2\ \sqrt{2}\ (-x' + y') \end{cases}$

$(\rho^{-1} \cdot \rho)(T) = T$, untuk v + ∈ B

$\rho^{-1} \cdot \rho = I$

$\rho \cdot \rho^{-1} = I$

Harus dibuktikan :

Kalau P,Q,R ∈ B yang kolinear ⟶ P',Q',R' juga kolinear.

$P = (x_1, y_1)$, $Q = (x_2, y_2)$, $R = (x_3, y_3)$, misal titik-titik tersebut terletak pada garis-garis ax + by + c

Jika kolinear maka dipenuhi :

$\left.\begin{cases} ax_1 + by_1 + c = 0 \\ ax_2 + by_2 + c = 0 \\ ax_3 + by_3 + c = 0 \end{cases}\right\}$ Terletak pada garis ax + by + C = 0

⟶ 3 garis homogen yang memiliki jawab a,b,c yang tidak tiga-tiganya nol

⟶ maka determinannya = 0

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$\rho \longrightarrow P'\ (x'_1,\ y'_1),\ Q \longrightarrow Q'\ (x_2',\ y_2'),\ R \longrightarrow R'\ (x_3',\ y_3')$

Berarti x_1', y_1', x_2', y_2', x_3', y_3' memenuhi determinan di atas.

$$\begin{vmatrix} x_1' & y_1' & 1 \\ x_2' & y_2' & 1 \\ x_3' & y_3' & 1 \end{vmatrix} = 0 = \begin{vmatrix} 1/2\sqrt{2}\ (x_1 - y_1) & 1/2\sqrt{2}\ (x_1 + y_1) & 1 \\ 1/2\sqrt{2}\ (x_2 - y_2) & 1/2\sqrt{2}\ (x_2 + y_2) & 1 \\ 1/2\sqrt{2}\ (x_3 - y_3) & 1/2\sqrt{2}\ (x_3 + y_3) & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 1/2\ \sqrt{2}\ .\ 1/2\ \sqrt{2} \begin{vmatrix} x_1 - y_1 & x_1 + y_1 & 1 \\ x_2 - y_2 & x_2 + y_2 & 1 \\ x_3 - y_3 & x_3 + y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 1/2 \left[\begin{vmatrix} x_1 & x_1 + y_1 & 1 \\ x_2 & x_2 + y_2 & 1 \\ x_3 & x_3 + y_3 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -y_1 & x_1 + y_1 & 1 \\ -y_2 & x_2 + y_2 & 1 \\ -y_3 & x_3 + y_3 & 1 \end{vmatrix} \right] =$$

$$\begin{vmatrix} y_1 & x_1 + y_1 & 1 \\ y_2 & x_2 + y_2 & 1 \\ y_3 & x_3 + y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 1/2 \left[\underbrace{\underbrace{\begin{vmatrix} x_1 & x_1 & 1 \\ x_2 & x_2 & 1 \\ x_3 & x_3 & 1 \end{vmatrix}}_{\text{sama}}}_{0} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} - \underbrace{\begin{vmatrix} y_1 & x_1 & 1 \\ y_2 & x_2 & 1 \\ y_3 & x_3 & 1 \end{vmatrix}}_{\downarrow} - \underbrace{\begin{vmatrix} y_1 & y_1 & 1 \\ y_2 & y_2 & 1 \\ y_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}}_{\text{sama} = 0} \right]$$

bisa ditukar menjadi

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 1/2 \left[\begin{vmatrix} x_1 & x_1 & 1 \\ x_2 & x_2 & 1 \\ x_3 & x_3 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \right] = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Jadi : $$\begin{vmatrix} x_1' & y_1' & 1 \\ x_2' & y_2' & 1 \\ x_3' & y_3' & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Maka P′, Q′, R′ Juga Kolinear

GEOMETRI INSIDENSI

1. Titik (x,y)

   Garis $\{(x,y) \mid ax + bx + c = 0\}$

   a,b tidak berdua nol

   Bidang $V \equiv \{(x,y) \mid x,y,$ real$\}$

   Buktikan : Bahwa Geometri insidensi tersebut adalah Afin

   Ada pemetaan $\rho : (x,y) \in V \longrightarrow (x',y')$

   $$\text{dengan} \begin{cases} x' = px + qy + r \\ y' = ux + vy + w \end{cases}$$

   $$\text{dengan} \begin{vmatrix} p & q \\ u & v \end{vmatrix} = \neq 0 \longrightarrow \text{supaya ada invers}$$

   Buktikan bahwa p suatu otomorfisme dari v ke v

2. Seperti soal 1 dengan $x^2 + y^2 < 1$

   $p : (x,y) \longrightarrow (x',y')$

   a) $x' = x + a, \quad y' = y + b$, a,b tetap

   b) $x' = ax, \quad y' = by$, a,b tetap tidak ada yang nol

   c) $x' = x + y, \quad y' = x - y$

   Apakah p suatu otomorfisme

3. Titik (x,y) dengan $X^2 + y^2 > 2$

   Garis $\{(x,y) \mid ax + bx + c = o\}$, a,b tidak berdua nol

   Bidang $\{(x,y) \mid x,y$ real$\}$

   a) Apakah geometri itu suatu geometri insidensi?

   b) Kalau geometri insidensi apakah pemetaan $(x,y) \longrightarrow (x, -y)$ suatu otomorfisme

5. URUTAN PADA GARIS DALAM GEOMETRI INSIDENSI

(ABC) dibaca "Titik B antara A dan C"

<u>Sifat-sifat keantaraan adalah</u> :

B_1 (ABC) $\longrightarrow$ (CBA) $\longrightarrow$ (sifat simetri)

B_2 (ABC) $\longrightarrow$ ~ (CBA) (~ artinya negasi) $\longrightarrow$ (sifat anti siklus)

B_3 Kalau ada 3 titik A,B,C yang kolinear dan berlainan maka : (ABC) atau (BCA) atau (CAB).

B_4 Kalau P segaris dan berlainan dengan tiga titik A,B,C yang berlainan maka apabila (APB) $\longrightarrow$ (APC) atau (CPB) tetapi tidak dua-duanya.

P A B C	atau	P A C B
disini (APB) dan (APC) tidak (BPC)		disini (APB) dan (CPB) tidak (APC)

(APC) $\longrightarrow$ (APB) atau (BPC) tetapi tidak dua-duanya

B_5 Kalau A # B maka X Y Z sehingga (XAB), (AYB), (ABZ)

Akibat : Didalam duatu geometri insidensi yang terhingga tak mungkin berlaku kelompok aksioma urutan.

Akibat : 1). Kalau (ABC) maka AB = BC = CA

2). Kalau (ABC) maka :

Garis AB memuat C

Garis BC memuat A

Garis AC memuat B

TEOREMA 1 :

(ABC) $\longrightarrow$ (CBA)

(ABC) $\longrightarrow$ ~ (BCA)

1. ~ (BCA)
2. ~ (BAC)
3. ~ (ACB)
4. ~ (CAB)

Bukti 1. Kalau (ABC) $\longrightarrow$ (CBA) $\longrightarrow$ ~ (BAC)

2. Kalau (ABC) $\longrightarrow$ ~ (BCA) $\longrightarrow$ ~ (ACB)

Juga berlaku :

Andaikaan (ABC) $\longrightarrow$ (BCA)

Tetapi kalau (ABC) $\longrightarrow$ ~ (ABC)

Maka pengandaian (ABC) tidak benar

Jadi ~ (ACB)

3. Harus dibuktikan (abc) $\longrightarrow$ ~ (CAB)

Andaikan (ABC) $\longrightarrow$ (CBA)

Jika (CBA) $\longrightarrow$ ~ (ABC)

Berlawanan dengan yang diketahui bahwa berlaku (ABC)

Pengandaian (ABC) $\longrightarrow$ (CBA) tidak benar

$\therefore$ (ABC) $\longrightarrow$ ~ (CAB).

RUANG GARIS

Definisi :

Ruas garis AB, ditulis $\overline{AB}$ adalah { Z | AXB } A dan B disebut ujung-ujung ruas garis.

Perhatikan bahwa A,B tidak termasuk himpunan itu, jadi A,B tidak temasuk ruas garis $\overline{AB}$

<u>TEOREMA 2</u> :

<u>Kalau A # B, maka</u> :

1. $\overline{AB} = \overline{BA}$
2. $\overline{AB} \subset AB$
3. A,B bukan unsur-unsur $\overline{AB}$
4. $\overline{AB}$ tak hampa

<u>Bukti</u> :

1. $AB = \{ X \mid (AXB) \}$

   Ambil $Xo \in \overline{AB}$, harus buktikan $Xo \in \overline{BA}$

   $BA = \{ Y \mid (BYA) \}$

   $Xo \in \overline{AB} \longrightarrow (AXoB) \longrightarrow (B\ Xo\ A) \longrightarrow Xo \in \overline{BA}$

2. $AB = \{ X \mid (AXB) \}$

   Ambil $Xo \in \overline{AB} \longrightarrow (AXoB) \longrightarrow$ A, Xo, B kolinear

   $\therefore$ Xo terletak pada garis yang menghubungkan A dan B $\longrightarrow (BXoA) \longrightarrow Xo \in AB$

   $\therefore Xo \in AB \longrightarrow \overline{AB} \subset AB$

3. Sebab kalau (AXB) maka A,X,B harus berlainan.
4. Menurut B_5, kalau A # B maka ada X sehingga (AXB)

   $\therefore \overline{AB} = \{ X \mid (AXB) \}$ mengandung paling sedikit satu X

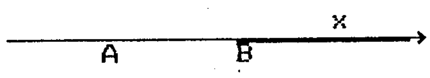
<u>S I N A R</u>

Apabila A # B, hingga titik-titik X :

$H = \{ X \mid (XAB) \}$ yang ditulis sebagai $H = A/B$

dinamakan sinar.

(H = A/B) (disini A sebagai pangkal sinar)



(H = B/A) (disini B sebagai pangkal sinar)

1. $B/A = \{ X \mid (XBA) \}$
2. $A/B = \{ Z \mid (BAZ) \}$
3. $\longrightarrow AB \cup \{B\} \cup B/A$
4. $A/Z = \{ Y \mid (YAZ) \}$

<u>TEOREMA 3</u>

Kalau $A \# B$ maka :

1. $A/B \subset AB$, $B/A \subset AB$
2. A,B bukan unsur-unsur A/B
3. A/B himpunan tak hampa

Bukti :

1. $A/B = \{ X \mid (AXB) \} \longrightarrow X \in AB \longrightarrow\!| \; A/B \subset AB$

   $B/A = \{ Y \mid (YBA) \} \longrightarrow Y \in BA \longrightarrow Y \in AB \longrightarrow B/A \subset A$
2. Andaikan $A \in A/B$, $A/B = \{ X \mid (XAB) \} \longrightarrow$

   Kalau $A \in A/B$, maka (AAB) tak mungkin

   Sebab kalau (ABC) maka A,B,C harus berbeda
3. Menurut B_5, ada X hingga (XAB) $\longrightarrow X \in A/B \longrightarrow$

   A/B tak hampa

<u>TEOREMA 4</u>

Kalau $A \# B$, maka

$AB = A/B \cup \{A\} \cup \{b\} \cup B/A$

Bukti :

Andaikan himpunan sebelah kanan kita sebut S

Akan dibuktikan S = AB. Untuk ini harus dibuktikan

$S \leq AB$ dan $AB \leq S$.

1. Akan dibuktikan $AB \leq S$

   Ambil $X \in AB$, kalau $X = A \longrightarrow X \in \{A\} \longrightarrow X \in S$

   kalau $X = B \longrightarrow X \in \{B\} \longrightarrow X \in S$

   Andai $X \# A$, $X \# B$; X,A,B kolinear

   $\longrightarrow$ (ABX), (BXA), (XAB)

   Jika (ABX) $\longrightarrow X \in B/A$ sebab $B/A = \{Y \mid (YBA)\}$

   $\therefore X \in S$

   Begitu pula kalau (BXA) $\longrightarrow X \in \overline{AB} \longrightarrow X \in S$

   kalau (XAB) $\longrightarrow Z \in A/B \longrightarrow X \in S$

2. $S \leq AB$

   Menurut teorema (2) : $AB \subset AB$ $\quad$ $\{A\} \subset AB$

   (3) : $A/B \subset AB$ $\quad$ $\{b\} \subset ab$

   $\therefore S \leq AB$

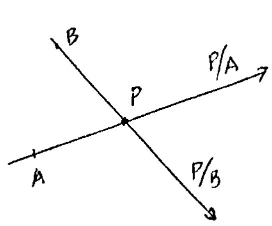
   $\therefore AB = S$

TEOREMA 5

Apabila P/A memotong P/B

Maka P/A = P/B

Bukti :



(APB) tidak mungkin

Andaikan $C \in P/A$ dan $C \in P/B$ (sebab P/A diandaikan memotong P/B)

$\therefore$ (CPA) dan (CPB)

Jadi C # P, C # A, C # B dan P kolinear dengan A,B,C.

Oleh karena (CPA) maka (CPB) atau (BPA) tetapi tidak dua-duanya, karena (CPB) $\longrightarrow$ ~ (BPA)

~ (APB)

Untuk membuktikan P/A = P/B harus dibuktikan :

P/A $\subseteq$ P/B dan P/B $\subseteq$ P/A

1. P/A $\subseteq$ P/B ?

   Ambil X $\in$ P/A $\longrightarrow$ (XPA)

   Ada 4 titik berbeda dan kolinear yaitu X,P,A,B karena

   (XPA) $\longrightarrow$ (BPA) atau (XPB) $\longrightarrow$ karena (BPA) tak mungkin maka haruslah (XPA).

   $\therefore$ X $\in$ P/B

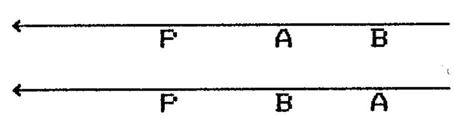
   $\therefore$ P/A $\subseteq$ P/B

2. P/B $\subseteq$ P/A.

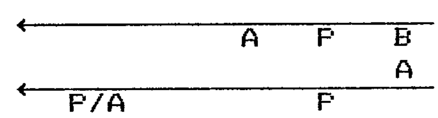
   P/A $\cap$ P/B = {C}

$$\left.\begin{array}{l} C \in P/A \longrightarrow (CPA) \longrightarrow A \in PC \\ C \in P/B \longrightarrow (CPB) \longrightarrow B \in PC \end{array}\right] \text{A,P,B segaris}$$

   Jadi gambar yang mungkin



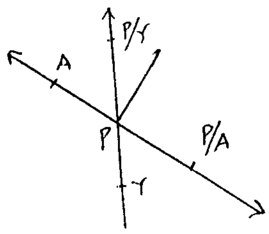
   gambar yang tak mungkin



TEOREMA AKIBAT 1

Apabila P # A, maka hanya ada satu sinar yang memuat A

Bukti :



Oleh karena P # A $\longrightarrow$ $\exists$ X sehingga (APX) $\longrightarrow$ X $\in$ P/A $\longrightarrow$ ada sinar yang berpangkal di P dan memuat X tetapi A $\in$ P/X $\longrightarrow$ ada sinar yang berpangkal di P dan memuat A.

Andaikan ada sinar lain yang berpangkal di P dan juga memuat A, misalkan ini P P/X dan P/Y memiliki titik sekutu,yaitu A

$\therefore$ P/X = P/Y

untuk melukiskan suatu sinar yang berpangkal di A ada dua jalan, yaitu :

1. $\longleftarrow$ B A $\qquad \overrightarrow{AB}$

$A/B = \{X \mid (XAB)\}$

2. B A $\longrightarrow$

Hubungan apakah ada antara "gambar (1)" dan "gambar (2)"

Definisi :

Apabila P # A, sinar tunggal dengan ujung P dan yang memuat A ditulis sebagai $\overrightarrow{PA}$

P A $\longrightarrow$

Akibat 2 :

Kalau R suatu sinar yang berpangkal di P dan A $\in$ R maka R = $\overrightarrow{PA}$.

R sinar yang berpangkal di P dan memuat A

$\overrightarrow{PA}$ sinar berpangkal di P dan memuat A

Menurut teorema akibat di atas R = $\overrightarrow{PA}$ juga dapat ditulis sebagai sinar R, berpangkal di P $\longrightarrow$ R = P/X

$\therefore$ A $\in$ P/X $\longrightarrow$ P/X = $\overrightarrow{PA}$

Akibat 3 :

Kalau berlaku (APB) maka $\overrightarrow{PA}$ = P/B, $\overrightarrow{PB}$ = P/A

Bukti :

$$\overset{P/B}{\longleftarrow\!\!-\!\!-} \underset{A}{} \quad \underset{P}{} \quad \underset{B}{} \overset{P/A}{-\!\!-\!\!\longrightarrow}$$

Karena (APB) $\longrightarrow$ A $\in$ P/B

$\therefore$ P/B adalah sinar yang berpangkal di P dan memuat A sinar demikian dapat ditulis $\overrightarrow{PA}$

$\therefore$ $\overrightarrow{PA}$ = P/B

Dengan jalan yang sama $\overrightarrow{PB}$ = P/A

Akibat 4 :

$\overrightarrow{AB} \subset AB$, asal A $\#$ B

Bukti :

Karena A $\#$ B $\longrightarrow$ $\exists$ C sehingga (CAB)

Perhatikan sinar A/C $\longrightarrow$ $\{X \mid (XAC)\}$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Sinar } \overrightarrow{AB} \text{ sinar berpangkal di A dan memuat B} \\ \text{karena (CAB)} \longrightarrow \text{(BAC)} \longrightarrow B \in A/C.\ A/C \\ \text{sinar yang berpangkal di A dan memuat B} \end{array}\right] \longrightarrow$$

$\overrightarrow{AB}$ = A/C tetapi A/C $\subset$ AC = AB $\longrightarrow$ (CAB) $\longrightarrow$ C,A,B

$\therefore$ $\overrightarrow{AB} \subset AB$

Akibat 5 :

Apabila $\overrightarrow{PA}$ = P/B, maka $\overrightarrow{PB}$ = P/A

Bukti :

Diketahui $\overrightarrow{PA} = P/B$

$\therefore A \in P/B \longrightarrow (APB) \longrightarrow (BPA) \longrightarrow B \in P/A$

$\therefore$ P/ sinar pangkal P memuat B = $\overrightarrow{PB}$

$\therefore P/A = \overrightarrow{PB}$

<u>Akibat 6</u> :

$\overrightarrow{PA} = \overrightarrow{PB}$ jika dan hanya jika $P/A = P/B$

<u>Bukti</u> :

$\overrightarrow{PA}$ sinar berpangkal di P dan memuat A

Andaikan $\overrightarrow{PA} = \overrightarrow{PB} = P/X$

Jadi dari $\overrightarrow{PA} = P/X \longrightarrow \overrightarrow{PX} = P/A$

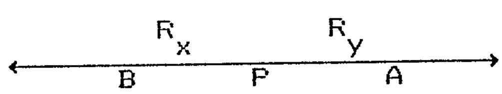
$\overrightarrow{PB} = P/X \longrightarrow \overrightarrow{PX} = P/B$

$\therefore P/A = P/B$

Sinar P/A kita tulis sebagai $\overrightarrow{PY}$

$$\left.\begin{array}{l} \therefore P/A = \overrightarrow{PY} \longrightarrow P/Y = \overrightarrow{PA} \\ \text{Karena } P/A = P/B \\ \therefore P/B = \overrightarrow{PY} \longrightarrow P/Y = \overrightarrow{PB} \end{array}\right| \; \overrightarrow{PA} = \overrightarrow{PB}$$

Sinar berlawanan (arah) dinyatakan dengan konsep antara.



Pada gambar tampak bahwa sinar $\overrightarrow{PA}$ berlawanan arah dengan sinar $\overrightarrow{PB}$, konsep ini didasarkan pada "Intuisi"

Bagaimana kita dapat mendefinisikan konsep arah ini dengan konsep "Antara"

<u>DEFF</u> :

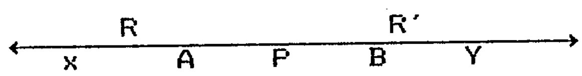
Dua sinar R dan R′ dinamakan berlawanan (arah) apabila dipenuhi dua syarat yaitu :

1. Titik pangkalnya sama.
2. Titik pangkal terletak antara tiap titik dalam sinar R dan tiap titik dalam sinar.

<u>TEOREMA</u> :

Andaikan R dan R′ dua sinar yang titik pangkalnya P

Andaikan $A \in R$ dan $B \in R'$ sehingga (APB) maka R dan R′ berlawanan arah.



<u>Bukti</u> :

Ambil $X \in R$ dan $Y \in R'$, akan dibuktikan (XPY) oleh karena itu $R = \overrightarrow{PX}$ dan $R' = \overrightarrow{PY}$ karena $A \in R \longrightarrow A \in \overrightarrow{PX}$ $\longrightarrow \overrightarrow{PX} = \overrightarrow{PA}$

Dan oleh karena (APB) $\longrightarrow B \in P/A$ dan $A \in P/B$

$\therefore \overrightarrow{PA} = P/B \longrightarrow \overrightarrow{PX} = P/B$

Menurut akibat : $\overrightarrow{PB} = P/X \longrightarrow \overrightarrow{PY} = P/X$

$Y \in P/X \longrightarrow$ (YPX) atau (XPY)

<u>Akibat 1</u> :

Sinar-sinar $\overrightarrow{PA}$ dan P/A adalah sinar-sinar yang berlawanan.

Ambil $X \in P/A \longrightarrow$ (XPA) $\longrightarrow \overrightarrow{PA}$ dan P/A berlawanan

$A \in \overrightarrow{PA}$

<u>Akibat 2</u> :

Kalau berlaku (APB) maka P/A dan P/B berlawanan arah dan P terletak antara tiap titik di P/A dan P/B.

<u>Bukti</u> :

(APB) $\longrightarrow$ A $\in$ P/B ; B $\in$ P/A

$\therefore$ P/A dan P/B berlawanan arah

<u>Akibat 3</u> :

Dua sinar yang berlawanan arah adalah disjoint (saling lepas).

<u>Bukti</u> :

Andaikan R dan R' dua sinar yang berlawanan.

Andaikan tidak disjoint $\exists$ X $\in$ R dan X $\in$ R' $\longrightarrow$ (XPX) ini tidak mungkin karena harus 3 titik yang berbeda.

<u>Akibat 4</u> :

Tidak ada sinar yang berlawanan dengan dirinya sendiri.

<u>Bukti</u> :

Andaikan R berlawanan dengan dirinya sendiri jadi R dan R berlawanan arah.

$\therefore$ R dan R' "Disjoint" $\longleftarrow$ tak mungkin

a. <u>KONSEP PEMISAH PADA GARIS</u>

<u>Ketentuan</u> : Sebuah titik P memisah sebuah himpunan titik-titik A (pada garis) menjadi dua himpunan S dan S' yang tak kosong apabila dipenuhi :

1. A = S $\cup$ S' $\cup$ {P}.
2. P terletak antara tiap titk di S dan tiap titik di S'.
3. S dan S' adalah "Disjoint".

4. P tidak terletak antara dua titik di S maupun dua titik dari S'.

<u>TEOREMA</u> :

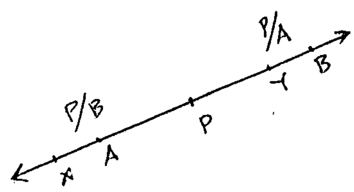
Pemisah garis

Kalau (APB) maka P memisah garis AB menjadi P/A dan P/B.

<u>Bukti</u> :

P/A dan P/B tidak hampa.

Harus dibuktikan :



1. $AB = P/A \cup \{P\} \cup P/B$
2. P terletak antara tiap titik di P/A dan tiap titik di P/B.
3. P tidak antara dua titik di P/A maupun di P/B.
4. P/A, P/B dan {P} saling lepas.

<u>Bukti</u> :

1. Andaikan $S = P/A \cup \{P\} \cup P/B$, akan dibuktikan $S = AB \longrightarrow S \subset AB$ dan $AB \subset S$.
2. Oleh karena (APB) $\longrightarrow AB = AP = BP$.

   $\longrightarrow P/A \subset PA,\ P/B \subset PB,\ \{P\} \subset AB$

   $\therefore S \subset AB$ ...(1)

   Ambil $X \in AB$

   Kalau $X = P \longrightarrow X \in S$

   Andaikan $X \neq P$, oleh karena (APB) dan X,A,P,B segaris maka berlaku (APX) atau (XPB) tetapi tidak dua-duanya.

Kalau (APX) $\longrightarrow X \in P/A \longrightarrow X \in S$.

Kalau (XPB) atau (BPX) $\longrightarrow X \in P/B \longrightarrow X \in S$.

$\therefore AB \subset S \ldots (2)$

Dari (1) dan (2) maka $AB = S$.

3. Andaikan $X \in P/A$ dan $Y \in P/A$ dan (XPY)

   Ini akan mengakibatkan bahwa P/A berlawanan dengan P/A yang tak mungkin.

4. Oleh karena $P \in P/A$ dan $P \notin P/B$

   Maka P/A dan P/B disjoint

Akibat :

P memisah garis AB

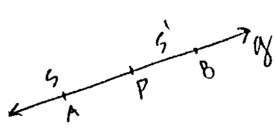
Kalau berlaku (APB) $\longrightarrow$ masing-masing $\overrightarrow{PA}$ dan $\overrightarrow{PB}$

Buktikan :

Akibat 2 :

Kalau $P \in g$, maka P memisah g menjadi dua bagian yang tunggal.

Bukti :



Andaikan P memisah g menjadi dua bagian S dan S' maka $g = S \cup S' \cup \{P\}$.

Dengan S, S', {P} saling lepas dan masing-masing tak kosong $\longrightarrow \exists\, A \in S$ dan $B \in S'$ dan berlaku (APB).

Dengan demikian maka P memisah g menjadi $\overrightarrow{PA}$ dan $\overrightarrow{PB}$

akan dibuktikan bahwa $S = \overrightarrow{PA}$ dan $S' = \overrightarrow{PB}$.

Ambil $X \in S$, oleh karena $B \in S'$ maka (XPB) jadi $X \in \overrightarrow{PB}$ Oleh karena $X \neq P$, kita dapat mengatakan bahwa $X \in \overrightarrow{PA}$, sebab $\overrightarrow{PA}$ adalah sinar yang memuat A dan karena juga (XPB) dan (APB) maka $X \in \overrightarrow{PA}$.

Ini berarti $S \subset \overrightarrow{PA}$.

$$\left.\begin{array}{l}\text{Dengan cara yang sama } \overrightarrow{PA} \subset S \\ \text{Dengan cara yang sama } \overrightarrow{PB} \subset S'\end{array}\right] \overrightarrow{PA} = S$$

Ini berarti bahwa titik P memisah garis g menjadi dua himpunan tak kosong yang tunggal.

$$\begin{array}{ccc} A/B & \{A\} & \overrightarrow{AB} \\ \hline & A & \quad B \end{array}$$

<u>Akibat 3</u> :

Jika $A \neq B$ maka $AB = A/B \cup \{P\} \cup \overrightarrow{AB}$

<u>Akibat 4</u> :

Jika $A \neq B$ maka $X \in \overrightarrow{PB} \Leftrightarrow X \in \overrightarrow{PB}$ atau $X = B$ atau $X \in B/A$

$X \in \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow (AXB)$ atau $X = B$ atau (XBA)

<u>TEOREMA</u> : Pemisahan Ruas Garis

Andaikan (APB) maka P memisah rua $\overrightarrow{AB}$ menjadi ruas-ruas $\overrightarrow{AP}$ dan $\overrightarrow{PB}$.

Bukti :

Harus dibuktikan :

1. $\overline{AB} = \overline{AP} \cup \{P\} \cup \overline{PB}$
2. P terletak antara tiap titik ruas $\overline{AP}$ dan tiap ruas $\overrightarrow{PB}$.
3. P tidak terletak antara dua titik di $\overline{AP}$ maupun di $\overline{PB}$

4. $\overline{AP}$, $\{P\}$, $\overline{PB}$ saling lepas.

Untuk membuktikan (1) kita gunakan

$AB = \overrightarrow{PA} \cup \{P\} \cup \overrightarrow{PB}$

$\overrightarrow{PA} = \overrightarrow{PA} \cup \{A\} \cup A/P$

$\overrightarrow{PB} = \overrightarrow{PB} \cup \{B\} \cup B/P$

Oleh karena $A/P = AB$ dan $B/P = B/A$

Maka : $\underline{AB = [\overline{PA} \cup \{P\} \cup A/B] \cup \{P\} \cup [\overline{PB} \cup \{B\} \cup B/A]}$

Atau : $\underline{AB = [\overline{AP} \cup \{P\} \cup \overline{PB}] \cup [\{A\} \cup A/B \cup \{B\} \cup B/A]}$..1

Juga : $AB = \overline{AB} \cup [\ A/B \cup \{A\} \cup \{B\} \cup B/A$ 2

Dari : (1) dan (2) kita peroleh :

$\overline{AB} = \overline{AP} \cup \{P\} \cup \overline{PB}$

(Himpunan-himpunan yang bersangkutan saling lepas)

Akibat :

1. Kalau $P \in \overline{AB}$ maka $\overline{AP} \subset \overline{AB}$, $\overline{PB} \subset \overline{AB}$
2. Suatu ruas adalah himpunan tak terhingga
3. Tiap garis dan tiap sinar adalah himpunan-himpunan tak hinga.

b. HIMPUNAN-HIMPUNAN KONVEKS

DEFF.

Himpunan titik-titik S disebut konveks apabila

$X \in S$, $Y \in S$.

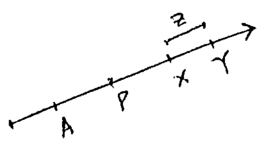
$X \neq Y \longrightarrow \overline{XY} \subset S$

$\overline{XY} \subset AB$

Konveks.

<u>TEOREMA</u> : Tiap sinar adalah konveks

Bukti :



– Perhatikan sinar P/A andaikan X # Y

Ambil Z ≡ $\overline{XY}$ akan dibuktikan Z ∈ P/A

Kita lihat (XPA), (YPA), (XZY)

Atau (APX), (APY)

Perhatikan 4 titik berlainan yang segaris yaitu A,P,X,Y karena (APX) maka berlaku (YPX) atau (APY) tetapi tidak dua-duanya.

Jadi tidak benar (YPX) atau (XPY)

– Perhatikan 4 titik berlainan dan segaris : P,A,X,Z

Jelas P # A, P # X

Andaikan P = Z maka berlakulah sekaligus : (XZY) dan

~ (YZX) ⟵

∴ P # Z

– Dari (APX) ⟶ (ZPX) atau (APZ) tetapi tidak dua-duanya.

Andaikan (XPZ) ⟶ P ∈ $\overline{XZ}$ ⊂ $\overline{XY}$

∴ P ∈ $\overline{XY}$ ⟶ (XPY) ⟵ ini tak berlaku

(APZ) ⟶ Z ∈ P/A

∴ $\overline{XY}$ ⊂ P/A

<u>TEOREMA</u> : Tiap garis adalah konveks

Contoh :

1) Titik ≡ Bilangan real

Garis ≡ Himpunan semua Bilangan real

2) Artikan lambang (ABC) sebagai berikut :

$A \neq C$ dan ada bilangan-bilangan real positif s,t

sehingga $B = sA + tC$, $s+t = 1$

Buktikan bahwa (ABC) memenuhi aksioma urutan

1) $(ABC) \longrightarrow (CBA)$

$\downarrow$

Ada s,t, $s+t = 1$, $s,t > 0$

$\ni B = sA + tC$

$= tC + sA \longrightarrow (CBA)$

2) $(ABC) \longrightarrow \sim (BCA)$

Andaikan berlaku $(BCA) \longrightarrow$ ada bilangan-bilangan real positif, $\lambda, \varkappa$, $\lambda + \varkappa = 1$

Sehingga $C = \lambda B + \varkappa A$

$$\lambda B = -\varkappa A + C$$

$$B = -\frac{\varkappa}{\lambda} A + \frac{1}{\lambda} C$$

Karena (ABC) maka ada s,t real positif, $s+t = 1$

Sehingga $B = sA + tC$

Jadi $B = -\frac{\varkappa}{\lambda} A + \frac{1}{\lambda} C$ tidak mungkin berlaku karena sudah berlaku.

$B = sA + tC$

DAFTAR PUSTAKA

1. Hilbert D (1971), Foundation of Geometeri, La Sile, IIlinosi Open Court Publishing.
2. Prenowita W and Jordan M (1965), Basic Concepts of Geometeri, Toronto Colleg Publiching Co.
3. Rawuh, Drs. Geometri, Karamika Jakarta Universitas Terbuka.