KMN 203

M A K A L A H

TEOREMA SACCHERI-LEGENDRE DALAM GEOMETRI NETRAL

Disusun oleh
Drs. N U R L I U S

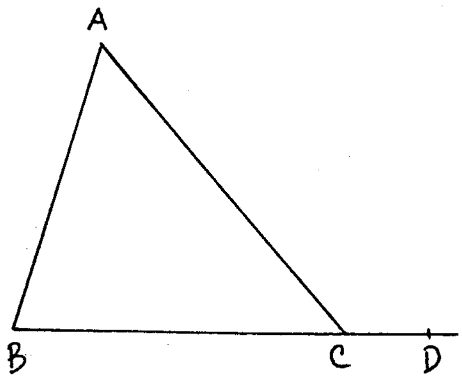
JURUSAN PENDIDIKAN MATEMATIKA
FAKULTAS PENDIDIKAN MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
INSTITUT KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN PADANG

1 9 9 5

Disampaikan pada Seminar Mingguan Jurusan Pendidikan Matematika FPMIPA IKIP Padang tanggal 22 Maret 1995.

Lemma 1 : Jumlah ukuran sebarang dua sudut suatu segitiga adalah lebih kecil dari 180^o.

Bukti :



Misalkan segitiga ABC, dan titik D pada $\overrightarrow{BC}$ sedemikian sehingga B – C – D

$\angle 4$ adalah sudut luar Δ ABC.

Menurut definisi, $m\angle 4 > m\angle 1$, sedangkan $m\angle 4 + m\angle 2 = 180^o$, maka $m\angle 4 = 180 - m\angle 2$

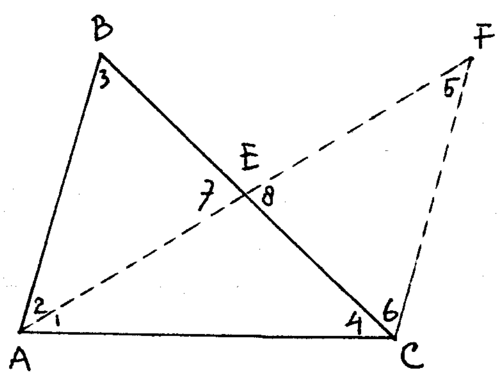
Dengan substitusi maka $m\angle 1 < 180^o - m\angle 2$ dan $m\angle 1 + m\angle 2 < 180^o$.

Dengan cara yang sama akan dapat ditunjukkan bahwa $m\angle 2 + m\angle 3 < 180^o$ dan $m\angle 1 + m\angle 3 < 180^o$.

Jadi lemma 1 terbukti.

Lemma 2 : Untuk sebarang Δ ABC terdapat Δ $A_1B_1C_1$ yang mempunyai jumlah besar sudut sama dengan jumlah besar sudut Δ ABC, tetapi $m\angle A_1 \leq \frac{1}{2}(m\angle A)$.

Bukti :



Misal Δ ABC dengan E titik tengah $\overline{BC}$.

Lukis F pada $\overline{AE}$ sedemikian sehingga A – E – F dan $\overline{AE} \cong \overline{EF}$.

Sekarang jika F dan C dihubungkan, maka terbentuk Δ CEF.

Perhatikan Δ BEA dan Δ CEF.

$\overline{BE} \cong \overline{CE}$

$\angle 7 \cong \angle 8$

$\overline{AE} \simeq \overline{FE}$

Dari tiga syarat di atas maka Δ BEA $\cong$ Δ CEF, akibatnya $\angle 2 \cong \angle 5$ dan $\angle 3 \cong \angle 6$.

Misalkan jumlah besar sudut Δ ABC = S(Δ ABC), maka

$$\begin{aligned} S(\Delta\ ABC) &= m\angle A + m\angle B + m\angle C \\ &= m\angle 1 + m\angle 2 + m\angle 3 + m\angle 4 \\ &= m\angle 1 + m\angle 5 + m\angle 6 + m\angle 4 \\ &= m\angle CAF + m\angle AFC + m\angle FCA \\ &= \text{Jumlah besar sudut } \Delta\ AFC. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m\angle A &= m\angle 1 + m\angle 2 \\ &= m\angle 1 + m\angle 5. \end{aligned}$$

Sekarang kita akan memilih $m\angle 1$ atau $m\angle 5$ sebagai $\angle A_1$

Jika $m\angle 1 \le \frac{1}{2}$ ($m\angle A$), maka $A = A_1$, $F = B_1$ dan $C = C_1$.

Jika $m\angle 5 \le 1/2$ ($m\angle A$), maka $F = A_1$, $C = C_1$, $A = B_1$

Jadi S(Δ ABC) = S(Δ $A_1B_1C_1$).

Sekarang berdasarkan **Lemma 1** dan **Lemma 2**, kita akan membuktikan Teorema Saccheri-Legendre, yaitu :

Jumlah ukuran besar sudut sebarang segitiga adalah lebih kecil atau sama dengan 180^o.

Bukti :

Misalkan segitiga itu Δ ABC.

Andaikan jumlah ukuran besar sudut Δ ABC besar dari 180^o atau

$$m\angle A + m\angle B + m\angle C > 180^o$$

Bentuk ini dapat ditulis sebagai berikut :

$$m\angle A + m\angle B + m\angle C = 180^o + p,\ p > 0,\ p \in \mathbb{R}.$$

Berdasarkan lemma 2, maka terdapat Δ $A_1B_1C_1$ yang bersifat

$m\angle A_1 + m\angle B_1 + m\angle C_1 = 180^o + p$ dan $m\angle A_1 \le 1/2$ ($m\angle A$).

Dari Δ $A_1B_1C_1$ juga terdapat Δ $A_2B_2C_2$ yang bersifat

$m\angle A_2 + m\angle B_2 + m\angle C_2 - 180^o + p$ dan $m\angle A_2 \le 1/2$ ($m\angle A_1$) $\le \frac{1}{2}$ ($m\angle A$)

dan seterusnya, maka akan terdapat $\Delta A_nB_nC_n$ yang bersifat :

$m\angle A_n + m\angle B_n + m\angle C_n = 180^\circ + p$ dan $m\angle A_n \leq 1/2^n\ (m\angle A)$.

Menurut sifat Archimedian, ada $n_o \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $1/2^{n_o}\ (m\angle A) < p$.

Akibatnya kita memperoleh $m\angle B_{n_o} + m\angle C_{n_o} > 180^\circ$.

Ini bertentangan dengan lemma 1.

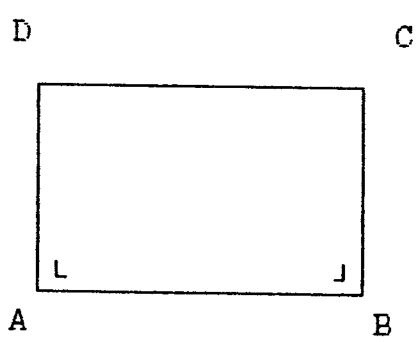
Jadi haruslah

$$m\angle A + m\angle B + m\angle C \leq 180^\circ$$

Akibat dari teorema ini maka dapat dibuktikan bahwa jumlah ukuran sudut sebarang segi-empat adalah lebih kecil atau sama dengan 360°.

SEGIEMPAT SACCHERI

Saccheri juga memperkenalkan sebuah segiempat yang disebut segiempat Saccheri.



$\angle A \cong \angle B = 90^\circ$

$\overline{AD} \cong \overline{DC}$

$\overline{DC} // \overline{AB}$

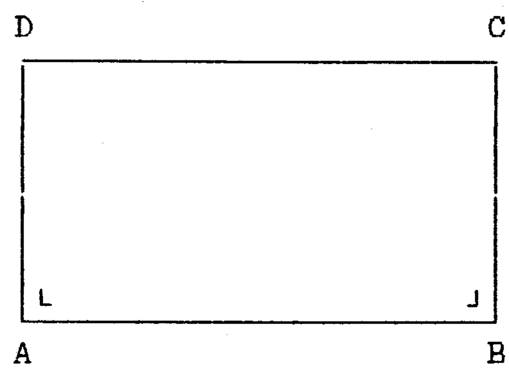
Teorema 1 : Diagonal Segi-empat Saccheri adalah kongruen.

Teorema 2 : Sudut atas Segi-empat Saccheri adalah kongruen.

Teorema 3 : Sudut atas Segi-empat Saccheri adalah tidak tumpul, tetapi lancip atau siku-siku.

Bukti :

Misalkan ▫ ABCD adalah



segi-empat Saccheri.
Andaikan $\angle DCB$ tumpul, maka akan terjadi jumlah besar sudut segi-empat lebih besar dari 360°.

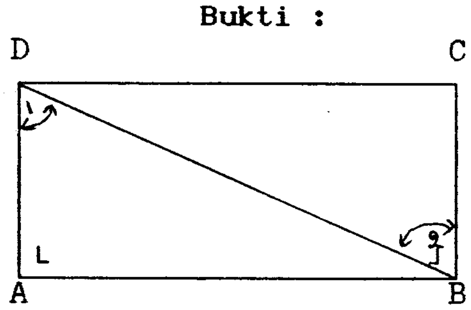
Ini bertentangan dengan teorema Saccheri-Legendre
Jadi haruslah $\angle D \cong \angle C \leq 90^{\circ}$.

Teorema 4 : Segmen yang menghubungkan titik tengah sisi atas dan titik tengah sisi alas segi-empat Saccheri adalah tegak lurus pada sisi atas dan sisi alas itu

Teorema 5 : Sisi atas dan sisi alas Segi-empat Saccheri adalah sejajar.

Teorema 6 : Dalam sebarang segi-empat Saccheri, sisi atas lebih panjang atau sama dengan sisi alasnya.

Bukti :



Misalkan □ ABCD adalah □ Saccheri.
$\overline{DA} \perp \overline{AB}$, $\overline{CB} \perp \overline{AB}$ dan $\overline{AD} \cong \overline{CB}$.
Akan dibuktikan bahwa $AB \leq CD$
Bentuk segmen $\overline{BD}$. Dari sini akan terdapat tiga kemungkinan untuk $\angle 1$ dan $\angle 2$, yaitu :

1. $\angle 1 \cong \angle 2$ atau
2. $m\angle 1 < m\angle 2$ atau
3. $m\angle 1 > m\angle 2$

Jika $\angle 1 \cong \angle 2$, maka $\triangle ADB \cong \triangle CBD$ dan $\overline{AB} \cong \overline{CD}$, akibatnya $AB = CD$.

Jika $m\angle 1 < m\angle 2$, maka menurut Teorema Hinge $AB < CD$.

Jika $m\angle 1 > m\angle 2$, sedangkan $m\angle 2 + m\angle 3 = 90^{\circ}$, maka akan terjadi $m\angle 1 + m\angle 3 > 90^{\circ}$. Ini akan mengakibatkan :

$m\angle 1 + m\angle 3 + m\angle A > 180^{\circ}$, ini bertentangan dengan teorema Saccheri-Legendre.

Dengan demikian yang berlaku adalah kemungkinan 1 dan 2, yaitu $AB \leq CD$.

DAFTAR PUSTAKA

Moise, Edwin E.(1970). *Elementary Geometry From an Advanced Standpoint*, Addison-Wesley Publihsing Company. Inc. Bombay.

Prenowitz, Waalter, and M. Jordan. (1969). *Basic Concepts of Geometry*, Ardsley House Publishing Co. New York.

Wylie. C. R. Jr. (1964). *Fondations of Geometry*. McGrow Hill Book Company. New York.

Wallace, Edwin C and West, Stephen F. (1992). *Roads to Geometry*, Prentice-Hall, Inc. New Jersey.