LAPORAN PENELITIAN

ESTIMASI INTERVAL PADA DISTRIBUSI EKSPONENSIAL DI BAWAH SENSOR "MULTIPLE TYPE-II"

OLEH :

DRA. NONONG AMALITA, M.Si, dkk.

340007

PROYEK PENGEMBANGAN DIRI
HEDS-PROYEK

MILIK PERPUSTAKAAN UNIV. NEGERI PADANG
DITERIMA TGL. : 30-1-2001
SUMBER/HARGA : H8 /
KOLEKSI : K1
NO. INVENTARIS : 104/K/2001-E(2)
KLASIFIKASI : 519.5 Ama

FAKULTAS MATEMATIKA DAN IPA
UNIVERSITAS NEGERI PADANG
2000

PERSONALIA PENELITI :

KETUA : DRA. NONONG AMALITA,M.Si

ANGGOTA : DRA. HELMA, M.Si

INTISARI

Tulisan ini membicarakan tentang estimasi interval pada distribusi eksponensial di bawah sensor "Multiple type-II ". Misal n item dilakukan pada percobaan uji hidup, hanya kegagalan ke r_i ,r_2,...,r_k yang diobservasi , kegagalan yang lain tidak diobservasi karena berbagai alasan. Untuk beberapa item tidak diketahui waktu kegagalannya tetapi untuk setiap item yang terobservasi kita punya waktu kegagalan $Y_{r_{i-1}}$ dan Y_{r_i} . Inilah yang disebut dengan sensor "Multiple type-II ".

Estimasi interval yang dibicarakan di sini hanya mengkonstruksi batas bawah saja. Tiga metode akan digunakan untuk memberikan batas bawah konidensi untuk parameter-parameter pada distribusi eksponensial dengan data sensor "Multiple type-II". Untuk sertiap parameter tiga perbedaan batas bawah akan diberikan, dua diantaranya secara pendekatan dan satu secara eksak. Contoh numerik dari percobaan uji hidup juga akan diberikan.

KATA PENGANTAR

Puji syukur penulis panjatkan kehadirat Allah SWT, karena berkat rahmat dan kurniaNya jualah penulis telah dapat menyelesaikan penelitian dengan judul " Estimasi Interval Pada Distribusi Eksponensial di bawah sensor Multiple type-II ".

Dalam penyelesaian penelitian ini, peneliti banyak mendapatkan bantuan dari berbagai pihak, baik bantuan moril maupun bantuan materil. Untuk itu pada kesempatan ini penulis mengucapkan terima kasih kepada :

1. Pimpinan Heds project, yang telah memberikan bantuan dana sehubungan dengan pelaksanaan penelitian ini.
2. Dekan FMIPA UNP Padang, yang telah memberikan arahan demi suksesnya kegiatan penelitian ini.
3. Ketua Jurusan Matematika UNP Padang yang telah banyak memberikan dorongan, kesempatan dan motivasi, sehingga terselesainya penelitian ini.

Dan berbagai pihak yang turut membantu dalam penyelesaiaan penelitian ini. Semoga jasa baik beliau dibalasi oleh Allah SWT, Amin.

Akhirnya penulis berharap agar penelitian ini dapat bermanfaat bagi semua pihak .

Padang Desember 2000

Peneliti,

DAFTAR ISI

	Halaman
INTISARI	i
KATA PENGANTAR	ii
DAFTAR ISI	iii
I. PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang Masalah	1
1.2 Masalah Yang Dihadapi	2
1.3 Tujuan Penelitian	2
II. LANDASAN TEORITIS	3
2.1 Estimasi Interval	3
2.2 Sensor Multiple Type-II	4
2.3 Teori Distribusi	5
2.4 Order Statistik	8
III. HASIL DAN PEMBAHASAN	13
IV. Contoh Numerik Pada Uji Hidup	21
V. KESIMPULAN	26
DAFTAR KEPUSTAKAAN	27

I. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Masalah dalam statistika inferensi dibedakan atas dua macam, yaitu estimasi dan uji hipotesa. Terutama pada estimasi kita dapt menggunakannya terhadap populasi yang tidak diketahui.

Pada pengestimasian parameter populasi yang tidak diketahui dikenal pula dua macam yang biasa digunakan dalam statistik yaitu :

1. Estimasi titik, yaitu suatu nilai tunggal yang digunakan untuk menyatakan estimator parameter.
2. Estimasi interval yaitu suatu interval yang diharapkan memuat parameter populasi yang diestimasi.

Distribusi eksponensial ini merupakan fungsi distribusi yang sering digunakan dalam model uji hidup dan distribusi eksponennsial mempunyai peranan penting dalam model uji hidup (Balakrishnan). Jika dilihat sejarah distribusi eksponensial, maka distribusi eksponensial merupakan model distribusi uji hidup yang pertama sekali digunakan dalam metode statistik.

Banyak para ahli yang telah mengkontribusikan pemikirannya dalam bentuk-bentuk penelitian-penelitian yang berkaitan dengan distribusi eksponensial ini, diantaranya adalah Balabsubramanian dan Balarishnan (1992) yang menulis tentang Estimasi titik pada distribusi eksponensial di bawah sensor "Multiple Type-II".

Berdasarkan buku-buku dan jurnal-jurnal yang penulis baca , maka penulis tertarik juga untuk menulis tentang distribusi eksponensial yaitu dengan judul : Estimasi interval pada distribusi eksponensial di bawah sensor "Multiple Type-II".

1.2 Masalah Yang dihadapi

Pada estimasi interval kita berhadapan dengan batas atas dan batas bawah . Pada tulisan ini penulis hanya menulis tentang bagaimana mengkonstruksi estimasi interval pada batas bawah konfidensi pada distribusi eksponensial di bawah sensor "Multiple Type-II".

1.3 Tujuan Penelitian

Adapun tujuan penelitian ini adalah untuk memperoleh suatu batas bawah konfidensi pada distribusi eksponensial di bawah sensor "Multiple Type-II".

II. LANDASAN TEORITIS

Dalam bab ini disajikan pengertian-pengertian dasar, definisi-definisi dan teorema-teorema pendukung yang akan digunakan sebagai landasan dalam pembahasan pada bab selanjutnya.

2.1. Estimasi Interval

Definisi 2.1.

Estimasi interval parameter θ adalah pasangan fungsi $L(x_1,\ldots,x_n)$ dan $U(x_1,\ldots,x_n)$ dari sampel yang memenuhi $L(x) \leq U(x)$ untuk semua $x \in N$. Jika dari x terobservasi dapat dibuat inferensi $L(x) \leq \theta \leq U(x)$ maka interval random $[L(x),U(x)]$ disebut estimator interval.

Definisi 2.2.

Jika L(x) dan L(x) adalah dua statistik yang memenuhi persamaan $P([L(x) \leq \theta \leq U(x)]) = \gamma$ dengan γ adalah suatu bilangan yang ditetapkan sebelumnya antara 0 dan 1 dan jika nilai-nilai yang diobseravsi dari dua statistik tersebut adalah L(x) = a dan U(x) = b maka [a,b] disebut interval konfidensi untuk θ dengan koefisien kepercayaan γ dengan L(x) = a disebut batas bawah dan U(x) = b disebut batas atas.

2.2. Sensor Multiple Type II

Untuk mendapatkan data uji hidup biasanya orang melakukan ekperimen. Dalam eksperimen ada beberapa metode yang dapat dilakukan sehingga macam data yang dihasilkan juga berbeda dari satu metode ke metode lain. Yang membedakan analisa uji hidup dari bidang-bidang statistik lainnya adalah penyensoran.

Ada beberapa tipe penyensoran dalam analisa uji hidup.

1. Sampel lengkap;

   Dalam uji sampel lengkap ini eksperimen akan dihentikan. Jika semua komponen yang diuji telah mati atau gagal, cara seperti ini mempunyai satu keuntungan yaitu dapat dihasilkan observasi terurut dari semua komponen yang diuji.

2. Sensor tipe I;

   Dalam sensor tipe I, eksperimen akan dihentikan jika telah dicapai waktu tertentu (waktu penyensoran).

3. Sensor tipe II;

   Suatu sampel dikatakan tersensor type II, apabila eksperimen dihentikan setelah kegagalan ke r telah diperoleh.

Selanjutnya sampel sensor multiply tipe II menurut Balabsubramanian (1992) merupakan generalisasi dari sensor tipe II. Misalkan n item ditempatkan pada sebuah percobaan uji hidup, tetapi hanya kegagalan r_1, r_2, ..., r_k yang diobservasi, sisanya tidak diobservasi dengan waktu kegagalannya masing-masing $Y_{r_1,n} \leq \ldots \leq Y_{r_k,n}$

dimana $1 \leq r_1 \leq \ldots \leq r_k \leq n$. Beberapa waktu kegagalan diantaranya tidak diketahui, artinya tidak dicatat waktu kegagalannya. Hal ini disebabkan oleh bermacam-macam kendala, misalnya jika pada percobaan yang sulit, ini sering terjadi pada bidang epidemiologi, sosiologi, reliabitas dan lain-lain. Masalah yang lain adalah kekurangan waktu dan tenaga untuk mencatat waktu kegagalan dari setiap subjek dan hanya beberapa waktu kegagalan diantaranya yang dicatat.

Hal seperti yang di atas itulah yang disebut sampel tersensor multiple type II ganda.

2.3. Teori Distribusi

2.3.1. Distribusi Eksponensial

Definisi 2.3

Variabel random $x \sim$ eks(θ , η) adalah variabel random dengan fungsi kepadatan

$$f(x \mid \eta , \theta) = \frac{1}{\theta} e^{-(x-\eta)/\theta} \qquad (2.1)$$

dengan $x \geq \eta, \theta > 0, \eta > 0$

Ini merupakan distribusi eksponensial untuk dua parameter (θ,η), dengan fungsi distribusi komulatif adalah :

$$F(x, \theta,\eta) = 1 - e^{-(x-\eta)/\theta} \qquad (2.2)$$

Selanjutnya jika η = 0 berarti fungsi distribusi eksponensial mempunyai satu parameter (θ) dengan fungsi densitas

$$f(x, \theta) = \frac{1}{\theta} e^{-(x)/\theta} \qquad (2.3)$$

dengan $x \geq 0$, $\theta > 0$.

dan fungsi distribusi komulatif

$$F(x, \theta) = 1 - e^{-(x)/\theta} \qquad (2.4)$$

dengan $x \geq 0$, $\theta > 0$

Teorema 2.4 (Dudewicz & Mishra,1988,h.261)

Jika $x \sim eks(\theta)$ maka

$E(x) = \theta$ & $var(x) = \theta^2$

Teorema 2.5

Jika $x \sim eks(\theta,\eta)$, $Y = \dfrac{X-\eta}{\theta}$

maka $Y \sim eks\ (1,0)$

Bukti :

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y \leq y) \\ &= P\left[\frac{X-\eta}{\theta} \leq y\right] \\ &= P[X - \eta \leq y\,\theta] \end{aligned}$$

$= P[X \le y\theta + \eta]$

$$= \int_{-\infty}^{y\theta+\eta} \frac{1}{\theta} e^{-(x-\eta)/\theta} dx, \qquad x > \eta$$

dengan mengambil : $w = \dfrac{(x-\eta)}{\theta}$

atau $\qquad \theta w = (x - \eta)$

diperoleh $\qquad \theta dw = dx$

dan

$$F_Y(y) = \int_{-\infty}^{y} \frac{1}{\theta} e^{w} \theta dw$$

$$= \int_{-\infty}^{y} e^{w} dw$$

Dengan menggunakan pendiferensialan diperoleh

$$f_Y(y) = F_Y'(y) = e^{y}$$

ini merupakan distribusi eks (1,0). ◊

2.3.2. Distribusi Khi-kuadrat

Definisi 2.5

Variabel random $\chi^2(v)$ adalah variabel random dengan fungsi kepadatan

$$f_X(x) = \frac{1}{2^{v/2}\Gamma(v/2)} x^{(v/2)^{-1}} e^{-x/2} \qquad (2.5)$$

dengan $0 \leq x < \sim$

n merupakan derajat kebebasan dan Γ merupakan fungsi gamma yaitu

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx \qquad \alpha > 0$$

2.4. Order Statistik

Definisi 2.6

Misalkan $x_1, x_2, \ldots, x_n$ suatu sampel acak (suatu himpunan peubah acak bebas yang distribusinya identik) berukuran n dari suatu populasi dengan fungsi distribusi $F_X(x)$ statistik urutan ke r dari $x_1, x_2, \ldots, x_n$ yang dinotasikan dengan X(r) atau Y(r) didefinisikan bebagai berikut : Y_r nilai terkecil ke r dari $x_1, \ldots, x_n$

$Y_1 \leq Y_2 \leq \ldots \leq Y_{r-1} \leq Y_r \leq \ldots \leq Y_n$ disebut statistik urutan.

Teorema 2.7 (Deduwick dan Mishra, 1988.h.332)

Misalkan $x_1, \ldots, x_n$ sampel acak berukuran n, masing-masing dengan fungsi komulatif F(x) dan fungsi densitas f(x) dan misalkan $Y_1 \leq Y_2 \leq \ldots \leq Y_n$ menyatakan statistik urutan maka

$f_{Y_1,Y_2,\ldots,Y_n}(y_1, y_2, \ldots, y_n) = n!\ \pi\ f(y_i)$

dengan $-\sim < y_1 < y_2 < \ldots < y_n < \sim$

Teorema 2.8

Misal $Y \sim \exp(1,0)$ dan $Y_{(1)}, \ldots, Y_{(n)}$ adalah order statistik dari sampel yang berukuran n. Didefinisikan $W_1 = Y_{(1)}$, $W_2 = Y_{(2)} - Y_{(1)}, \ldots$

$$W_n = Y_{(n)} - Y_{(n-1)} \text{ maka :}$$

a. $W_1, \ldots, W_n$ adalah independen dan $W_i \sim \exp\left(\frac{1}{n-i+1}, 0\right)$ $i = 1, \ldots, n$

b. $Y_{(i)}$ mempunyai bentuk

$$Y_{(i)} = \sum_{j=1}^{i} \frac{Z_j}{n-j+1} \quad , \quad i = 1, \ldots, n \tag{2.7}$$

dengan $Z_1, \ldots, Z_n$ adalah iid exp (1,0)

Bukti :

a. Berdasarkan Teorema (2,8) maka fungsi densitas dari $Y_{(1)}, \ldots, Y_{(n)}$ adalah

$$f(y_{(1)}, y_{(2)}, \ldots, y_{(n)}) = n!\ \exp\left[-\sum_{i=1}^{n} y_{(i)}\right]$$

$$= n!\ \exp\left[-\sum_{i=1}^{n} (n-i+1)\left(y_{(i)} - y_{(i-1)}\right)\right]$$

dengan $y_{(o)} = 0$

$$W_1 = Y_{(1)} \ , \ W_2 = Y_{(2)} - Y_{(1)}, \ \ldots \ , W_n = Y_{(n)} - Y_{(n-1)}$$

$$W_i = Y_{(i)} - Y_{(i-1)}$$

berarti

$$Y_{(1)} = W_1 \ , \ Y_{(2)} = W_1 + W_2 \ , \ Y_{(n)} = W_1 + \ldots + W_n$$

dengan jacobian $J = 1$

$$f(w_1, w_2, \ldots, w_n) = n! \exp\left[-\sum_{i=1}^{n}(n-i+1)w_i\right]$$

$$= \prod_{i=j}^{n}(n-i+1)\, e^{-(n-i+1)w_i}$$

dengan $0 < w_i < \sim$.

Berarti W_i adalah independen dan $W_i \sim \exp\left(\frac{1}{n-i+1}, 0\right)$. $\subset$

b. Dari bentuk di atas diperoleh $Y_{(i)} = W_1 + \ldots + W_i$, dengan w_i variabel eksponensial yang independen dan $W_i \sim \exp(1 / (n - i + 1))$.

Karena $Z_i \sim \exp(1,0)$ maka $Z_i/(n-i+1) \sim \exp\left(\frac{1}{n-i+1}\right)$.

berarti $$Y_{(i)} = \sum_{j=1}^{i}\frac{Z_j}{n-j+1} \quad , \quad i = 1, \ldots, n \qquad \blacksquare$$

Teorema 2.9

Jika Y ~ eks $(1,\eta)$ dan $Y_{1,n}, \ldots, Y_{r,n}$ adalah r pertama order statistik dari sampel yang berukuran n maka

$V_1 = Y_{2,n} - Y_{1,n}$, $V_2 = Y_{3,n} - Y_{1,n}, \ldots, V_{r-1} = Y_{r,n} - Y_{1,n}$ adalah r - 1 pertama order statistik dari sampel yang berukuran n - 1 dari bentuk populasi eks (1,0).

Bukti :

Menurut Teorema 2.8(b)

$$Y_{k,n} - \eta = \sum_{j=1}^{k} \frac{Z_j}{n-j+1} \quad \text{untuk } k = 1, \ldots, r$$

selanjutnya

$$V_k = Y_{k+1,n} - Y_{1,n} = \sum_{j=1}^{k+1} \frac{Z_j}{n-j+1} - \frac{Z_1}{n}$$

$$= \sum_{j=2}^{k+1} \frac{Z_j}{n-j+1}$$

Misal $j = i + 1$

Jadi, $$V_k = Y_{k+1,n} - Y_{1,n} = \sum_{i=1}^{k} \frac{Z_{i+1}}{n-1-i+1}$$

untuk $k = 1, \ldots, r - 1$ dengan $Z_{i+1} \sim$ eks (1,0) dan Z_{i+1} adalah independen. Berarti ini adalah karakterisasi dari r - 1 order statistik dari sampel yang berukuran n - 1 dari bentuk eks (1,0). ■

2.5 Kuantil Dari Distribusi

Defenisi 2.10

Untuk sebarang fungsi distribusi univariat F, dan untuk $0 < p < 1$,

$$F^{-1}(p) = \inf\{x : F(x) \geq p\}$$

Disebut kuantil ke p, yang dilambangkan dengan ξ_p. Jika $\xi_{1/2} .= F^{-1}(1/2)$ disebut dengan median.

III. HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada bab ini akan dibahas tentang interval konfidensi distribusi eksponensial satu parameter dengan sampel tersensor "multiple type II" Tiga metode akan digunakan untuk mengkonstruksi interval konfidensi, 2 metode merupakan pendekatan dan satu metode secara eksak.

Misalkan $0 \leq \; Y_{r_1,n} < \ldots < \; Y_{r_k,n} < \sim$ adalah sampel "multiple type II" dari distribusi eks $(\theta,0)$ dan misalkan waktu hidup mempunyai distribusi eksponensial ekp$(\theta,0)$, tujuan kita adalah mengkonstruksi batas bawah konfidensi untuk θ. Berdasarkan Teorema 2.8 kita mempunyai

$$\frac{Y_{r_i,n}}{\theta} = \sum_{j=1}^{r_i} \frac{Z_j}{n-j+1}$$

dengan $Z_1,\ldots,Z_{r_i}$ adalah iid $\exp(1,0)$

Definisikan :

$$Q_k = 2\sum_{i=1}^{k} \frac{Y_{r_i,n}}{\theta} \tag{3.1}$$

$$Q_k = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=r_{i-1}+1}^{r_i} \frac{2Z_j}{n-j+1}$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=r_{i-1}+1}^{r_i} \frac{k+1-i}{n-j+1} 2Z_j \tag{3.2}$$

dengan $r_o = 0$. Q_k merupakan bentuk distribusi yang bebas dari θ. Karena $Z_j \sim \exp(1,0)$ maka $2Z_j$ mempunyai bentuk distribusi $\chi^2(2)$ yaitu distribusi chi-kuadrat dengan derajat kebebasan dua. Variabel random $\chi^2(2)$ dapat ditulis sebagai jumlah berbobot dari 2 variabel random $\chi^2(1)$ yang independen. Oleh karena itu Q_k mempunyai bentuk jumlah berbobot dari $2r_k$ variabel random $\chi^2(1)$ yang independen. Berdasarkan observasi ini akan didapatkan distribusi Q_k yang menghasilkan batas bawah konfidensi untuk θ.

Metode I

Misalkan μ_k dan V_k adalah mean dan variansi dari Q_k berarti

$$\mu_k = E(Q_k) = 2\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=r_{i-1}+1}^{r_i}\frac{k+1-i}{n-j+1} \tag{3.3}$$

$$V_k = \mathrm{var}(Q_k) = 4\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=r_{i-1}+1}^{r_i}\frac{(k+1-i)^2}{(n-j+1)^2} \tag{3.4}$$

Menurut Patnaik (1949) secara pendekatan $\frac{2\mu_k Q_k}{V_k}$ adalah distribusi Chi kuadrat dengan derajat kebebasannya $\frac{2\mu^2{}_k}{V_k}$ dengan notasi

$$\frac{2\mu_k Q_k}{V_k} \sim \chi^2\left(\frac{2\mu^2{}_k}{V_k}\right). \tag{3.5}$$

Jika $\frac{2\mu^2{}_k}{V_k}$ adalah bilangan bulat maka nilai distribusi dan quantiles dari $\frac{2\mu_k Q_k}{V_k}$

dapat diketahui secara langsung dalam tabel χ^2. Misalkan $\chi^2_{1-\alpha}\left(\frac{2\mu^2{}_k}{V_k}\right)$ merupakan

quantile ke $(1 - \alpha)$ dari $\chi^2\left(\frac{2\mu^2{}_k}{V_k}\right)$ berarti

$$P\left\{\frac{2\mu_k Q_k}{V_k} < \chi^2_{1-2}\left(\frac{2\mu^2{}_k}{V_k}\right)\right\} = 1 - \alpha$$

berarti batas konfidensi $1 - \alpha$ untuk θ adalah

$$\hat{\theta}_L = \frac{2\mu_k Q_k}{V_k} = \frac{4\mu_k \sum_{i=1}^{k} Y_{r\,i,n}}{V_k \chi^2_{1-\alpha}\left(\frac{2\mu^2{}_k}{V_k}\right)} \tag{3.6}$$

Secara umum , $v = \frac{2\mu^2{}_k}{V_k}$ bukan bilangan bulat. Untuk nilai v yang kecil, quantile dari $\chi^2_\alpha(v)$ atau $\chi^2_{1-\alpha}(v)$ bisa diperoleh dengan interpolasi dalam tabel χ^2.

Untuk nilai v yang lebih besar dari 10, pendekatannya yang sangat akurat diperoleh dengan transformasi Wilson Hilferty yaitu jika $\chi^2(v)$ adalah variabel random χ^2 dengan v derajat kebebasan maka secara pendekatannya adalah

$$\left\{\left[\frac{\chi^2(v)}{v}\right]^{1/3} + \frac{2}{9v} - 1\right\}\left(\frac{9v}{2}\right)^{1/2} \sim N(0,1) \tag{3.7}$$

Jika $z_{1-\alpha}$ adalah quantile ke $(1 - \alpha)$ dari $N(0,1)$ maka

$$\left\{\left[\frac{\chi^2_{1-\alpha}(v)}{v}\right]^{1/3} + \frac{2}{9v} - 1\right\}\left(\frac{9v}{2}\right)^{1/2} = z_{1-\alpha}$$

$$\chi^2_{1-\alpha}(v) = v\left[1 - \frac{2}{9v} + \frac{1}{3}\left(\frac{2}{v}\right)^{1/2} z_{1-\alpha}\right]^3$$

untuk $v = \dfrac{2\mu^2{}_k}{V_k}$ berarti

$$\chi^2_{1-\alpha}\left(\frac{2\mu^2{}_k}{V_k}\right) = \frac{2\mu^2{}_k}{V_k}\left[1 - \frac{V_k}{(3\mu_k)^2} + \frac{V_k{}^{1/2}}{3\mu_k} z_{1-\alpha}\right]^3 \tag{3.8}$$

sehingga diperoleh :

$$\hat{\theta}_L = \frac{2\mu_k Q_k}{V_k}$$

$$= \frac{4\mu_k \sum_{i=1}^{k} Y_{r_{i,n}}}{V_k \chi^2_{1-\alpha}\left(\frac{2\mu^2{}_k}{V_k}\right)}$$

$$= \frac{4\mu_k \sum_{i=1}^{k} Y_{r_{i,n}}}{V_k \cdot \frac{2\mu^2 k}{V_k}\left[1 - \frac{V_k}{(3\mu_k)^2} + \frac{V_k{}^{1/2}}{3\mu_k} z_{1-\alpha}\right]^3}$$

dan ini merupakan batas bawah konfidensi untuk θ .

104/K/2001 − E2 (2)

519 . 5
Ama
e.2

Metode II

Berdasarkan yang ditulis oleh Gabler & Wolf (1987) yaitu misalkan $X = \sum_{i=1}^{n} d_i X_i^2$,

$X_1, \ldots, X_n$ iid variabel random dari N(0,1) dan $d_1, \ldots, d_n$ adalah bilangan positif dan

$\sum_{i=1}^{n} d_i = 1$. Y adalah variabel random positif dengan fungsi densitas.

$$g(y) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{y}{2d_i}\right)^{\frac{1}{2d_i}-1} e^{-y/2d_i} \bigg/ \Gamma\left(\frac{1}{2d_i}\right) \tag{3.9}$$

$y > 0$, untuk $m = 1,2,\ldots$

$$EY^m = 2^{m-1} \sum_{i=1}^{n} d_i^m \frac{\Gamma\left(m + \frac{1}{2d_i}\right)}{\Gamma\left(1 + \frac{1}{2d_i}\right)}$$

$$= \sum_{l=1}^{m-1} 2^{m-1-l} \sum_{i=1}^{n} d_i^{m-1} e_{m-1-l}^{(m-1)}$$

dengan

$$e_r^{(s)} = \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_r \le s} i_1, \ldots, i_r \quad , \; e_o(.) = 1$$

Bentuk (3.2), $2Z_j$ iid ~ $\chi^2(2)$, $j = 1, \ldots, r_1, \ldots, r_2, \ldots, r_k$ yang dapat diekspresikan sebagai jumlah berbobot dari 2 variabel random $\chi^2(1)$ yang independen. Untuk setiap j, ambil $X_{j,1}^2$, $X_{j,2}^2$ adalah dua variabel, dengan $2Z_j = X_{j,1}^2 + X_{j,2}^2$ maka bentuk (3.2) menjadi

$$Q_k = \frac{\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=r_{i-1}+1}^{r_i} (k+1-i)\left(X_{j,1}^2 + X_{j,2}^2\right)}{n-j+1} \tag{3.10}$$

Misalkan $M_k = \frac{\mu_k}{2}$, $\frac{Q_k}{2M_k}$ menjadi jumlah berbobot dari $2r_k$ iid $N(0,1)$.

Definisikan $d_{ij} = \frac{k+1-i}{2M_k(n-j+1)}$

untuk $i = 1, \ldots, k,\ j = r_{i-1} + 1, \ldots, r_i$.

Densitas dari $\frac{Q_k}{2M_k}$ secara pendekatan adalah

$$g_d(x) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=r_{i-1}+1}^{r_i} \left(\frac{x}{2d_{ij}}\right)^{1/2d_{ij}-1} e^{-x/2d_{ij}} \Big/ \Gamma\left(\frac{1}{2d_{ij}}\right) \tag{3.11}$$

ambil $u_{1-\alpha}$ adalah quantile ke $(1 - \alpha)$ dari $\frac{Q_k}{2M_k}$, maka batas bawah konfidensi $1 - \alpha$

untuk θ adalah

$$\hat{\theta}_L = \frac{\sum_{i=1}^{k} Y_{r_i,n}}{M_k u_{1-\alpha}} \tag{3.12}$$

Metode III

Kamps (1990) menyatakan bahwa :

Misal $Z_1, \ldots, Z_n$ iid exp $(\theta,0)$, $\theta > 0$ dan $a_1, \ldots, a_n$ adalah bilangan positif yang berbeda . Definisikan $T = \sum_{i=1}^{n} \frac{Z_i}{a_i}$ maka fungsi distribusi kumulatif dari T adalah :

$$G_n(t) = 1 - (-1)^{n-1} \prod_{i=1}^{n} a_i \sum_{k=1}^{n} a_k^{-1} \prod \left(a_k - a_j\right)^{-1} e^{-a_k t/\theta} \tag{3.13}$$

untuk $t > 0$

Definisikan Q_k dalam bentuk (3.1) dan (3.2)

Misalkan $Q_k^* = \frac{Q_k}{2} = \sum_{i=1}^{k} \frac{Y_{r_i,n}}{\theta}$

$$= \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=r_{i-1}+1}^{r_i} \frac{k+1-i}{n-j+1} Z_j \tag{3.14}$$

dengan Z_j iid $\sim$ exp $(1,0)$, $j = 1,\ldots, r_1, \ldots, r_2, \ldots, r_k$

Definisikan :

$$a_j = \begin{cases} (n-j+1)/k & j = 1,\ldots,r_1 \\ (n-j+1)/(k-1) & j = r_1+1,\ldots,r_2 \\ \vdots & \\ n-j+1 & j = r_{k-1}+1,\ldots,r_k \end{cases} \tag{3.15}$$

Berdasarkan teorema di atas, fungsi distribusi Q_k^* adalah :

$$G_{r_k}(t) = 1-(-1)^{r_k-1}\prod_{i=1}^{r_k} a_i \sum_{h=1}^{r_k} a_h^{-1} \prod_{j=1, j\neq n}^{r_k} \left(a_h - a_j\right)^{-1} e^{-a_h t}, t > 0 \qquad (3.16)$$

Misal $t_{1-\alpha}$ adalah kuantil ke $(1 - \alpha)$ dari $G_{r_k}(t)$ berarti kita punya batas bawah konfidensi $1 - \alpha$ untuk θ adalah :

$$\hat{\theta}_L = \frac{\sum_{i=1}^{k} Y_{r_{i,n}}}{t_{1-\alpha}} \qquad (3.17)$$

Tetapi harus diingat bahwa dalam teorema ini, bilangan $a_1, \ldots, a_n$ harus berbeda.

IV. Contoh Numerik Pada Uji Hidup

Pada percobaan uji hidup 30 item dilakukan percobaan dengan waktu kegagalan (dalam jam) yang dicatat sebagai berikut :

0.961, 0.990, 1.565, 2.031 , 2.204, 2.340, 3.642, 6.008, 6.538, 7.145,
-- , -- , -- , 11. 937, 15.433, 18.234, 18.307, 22.096, -- , -- ,
-- , 28.799, 30.692, 30.737, 33.702, 34.245, -- , -- , -- , --.

Pada data yang ditengah tidak dicatat waktu kegagalannya karena percobaannya yang sulit, begitu juga untuk data kegagalan 4 yang terakhir. Percobaan berhenti segera setelah data waktu kegagalan yang ke 26.

Data diatas mempunyai distribusi eksponensial dengan satu parameter θ = 20, yang merupakan sampel "multiple type II"

Berikut akan dicari batas bawah konfidensi untuk θ dengan k = 20, n = 30, $\alpha = 0.95$.

Dari data diatas kita dapat menentukan harga $r_1,\ldots,r_k$ yaitu :

$r_1 = 1$, $r_2 = 2$, $r_3 = 3$, $r_4 = 4$, $r_5 = 5$, $r_6 = 6$, $r_7 = 7$, $r_8 = 8$, $r_9 = 9$, $r_{10} = 10$, $r_{11} = 14$, $r_{12} = 15$, $r_{13} = 16$, $r_{14} = 17$, $r_{15} = 18$, $r_{16} = 22$, $r_{17} = 23$, $r_{18} = 24$, $r_{19} = 25$, $r_{20} = 26$

Selanjutnya akan dihitung :

$$\sum_{i=1}^{20} Y_{r_i,30} = Y_{r_1,30} + Y_{r_2,30} + \ldots + Y_{r_{20},30}$$

$$= 0.961 + 0.990 + 1.565 + 2.031 + 2.204 + 2.340 + 3.642 + 6.008 + 6.538 + 7.145 + 11.937 + 15.433 + 18.234 + 18.307 + 22.096 + 28.799 + 30.692 + 30.737 + 33.702 + 34.245$$

$$= 277.6060.$$

$$\mu_{20} = 2\sum_{i=1}^{20} \sum_{j=r_{i-1}+1}^{r_{20}} \frac{20+1-i}{30-j+1}$$

$$= 2\ \{\ 0.667 + 0.655 + 0.643 + 0.630 + 0.615 + 0.600 + 0.583 + 0.565 + 0.545 + 0.524 + 0.500 + 0.526 + 0.556 + 0.588 + 0.563 + 0.533 + 0.500 + 0.462 + 0.417 + 0.455 + 0.500 + 0.556 + 0.500 + 0.429 + 0.333 + 0.200\ \}$$

$\mu_k = 27.2874$.

$V_k = 29.692$

Metode I

Batas bawah konfidensi untuk θ adalah :

$$\hat{\theta}_L = \frac{4\mu_{20}\sum_{i=1}^{20} Y_{r_i,n}}{V_{20}\chi^2_{1-\alpha}(\frac{2\mu_{20}^2}{V_{20}})}$$

dengan $\chi^2_{(1-\alpha)}(\frac{2\mu_{20}^2}{V_{20}}) = \chi^2_{(1-\alpha)}(\frac{2(27.287)^2}{29.692})$

$$= \chi^2_{(1-\alpha)}(50.199)$$

Dari tabel $\chi^2_{(1-\alpha)}(50)$ diperoleh kuantil ke (1- α) adalah 67.50.

$$\hat{\theta}_L = \frac{4\mu_{20}\sum_{i=1}^{20} Y_{r_i,n}}{V_{20}\chi^2_{1-\alpha}\left(\frac{2\mu^2_{20}}{V_{20}}\right)}$$

$$\hat{\theta}_L = \frac{4(27.2874)(277.6060)}{29.6917(67.50)}$$

$$\hat{\theta}_L = 15.12$$

Jadi diperoleh harga batas bawah konfidensi untuk θ adalah 15,12.

Metode II

Batas bawah konfidensi untuk θ adalah

$$\hat{\theta}_L = \frac{\sum_{i=1}^{20} Y_{r_i,30}}{M_{20}u_{1-\alpha}}$$

dengan

$$M_k = \frac{\mu_{20}}{2} = \frac{27.2874}{2} = 13.64$$

$$\sum_{i=1}^{20} Y_{r_i,30} = Y_{r_1,30} + Y_{r_2,30} + \dots + Y_{r_{20},30}$$

$$= 277.6060$$

$$u_{1-\alpha} = 1,3492$$

Sehingga diperoleh:

$$\hat{\theta}_L = \frac{\sum_{i=1}^{20} Y_{r_i,30}}{M_{20} u_{1-\alpha}}$$

$$\hat{\theta}_L = \frac{277,6060}{(13,64)(1,3492)}$$

$$= 15,08.$$

Jadi nilai batas konfidensi untuk θ adalah 15,08.

Metode III

Dalam penggunaan metode III untuk data diatas kita tidak bisa dicari batas bawah konfidensinya untuk θ , karena tidak memenuhi teorema (3.1), dimana didalam teoremanya dikatakan bahwa $a_1,....,a_{20}$ harus berbeda.

Kalau dilihat dari data yang ada nilai a_j diperoleh sebagai berikut :

$a_1 = 1.50$, $a_2 = 1.52$, $a_3 = 1.55$, $a_4 = 1.59$, $a_5 = 1.63$, $a_6 = 1.67$,

$a_7 = 1.71$, $a_8 = 1.77$, $a_9 = 1.83$, $a_{10} = 1.91$, $a_{11} = 2.00$, $a_{12} = 1.90$,

$a_{13} = 1.80$, $a_{14} = 1.70$, $a_{15} = 1.78$, $a_{16} = 1.88$, $a_{17} = 2.00$, $a_{18} = 2.17$,

$a_{19} = 2.40$, $a_{20} = 2.20$, $a_{21} = 2.00$, $a_{22} = 1.80$, $a_{23} = 2.00$, $a_{24} = 2.33$,

$a_{25} = 3.00$, $a_{26} = 5.00$,

Untuk nilai $a_{11} = a_{17} = a_{23} = 2.00$, berarti tidak memenuhi teorema (3.1) karena ada nilai a_j yang sama Jadi metode III tidak bisa kita gunakan.

Dari pengolahan data di atas terlihat batas bawah konfidensi untuk paramater θ yang diperoleh dengan mengguanakan metode I adalah 15.12 dan dengan mengguanakan metode II adalah 15.08 . Terlihat nilai yang diperoleh hampir sama, jadi dalam penggunaan metode-metode ini kita bisa memilih menggunakan metode I, metode II atau metode III. Tetapi untuk metode III harus dilihat dulu apakah data-data itu bisa digunakan yaitu melihat nilai-nilai konstantanya yang harus berbeda.

Seperti pada contoh data di atas kita tidak bisa menggunakan metode III karena tidak memenuhi teorema (3.1) yaitu ada nilai-nilai konstanta a_j yang sama. Sementara antara metode I dan metode II dapat dipilih metode yang mana saja karena nilainya hampir sama.

MILIK PERPUSTAKAAN
UNIV. NEGERI PADANG

V. KESIMPULAN

Penelitian ini menulis interval konfidensi, yaitu parameter-parameter pada distribusi eksponensial dengan sampel tersensor "multiple type II". Ide dasar pada tiga metode-metode yang diberikan di atas adalah untuk mendapatkan distribusi dari jumlah berbobot dari variabel χ^2. Metode I, distribusi χ^2 sentral digunakan untuk distribusi pendekatan . batas bawah konfidensi akan mudah dihitung tetapi jika sampelnya kecil ini tidak memberikan hasil yang memuaskan.

Metode II memberikan distribusi pendekatan secara teori. Ini lebih akurat dari yang pertama. Untuk menghitung perhitungan beberapa bagian fungsi Γ dan pemecahan sebuah persamaan yang memuat hasil integral, perhitungan yang komplit sangat dibutuhkan.

Metode III memberikan solusi yang eksak, juga memuat pemecahan persamaan, tetapi lebih mudah metode ini dibatasi dimana masalahnya adalah konstantanya harus berbeda. Kita bisa memilih satu diantaranya sesuai dengan situasinya.

DAFTAR KEPUSTAKAAN

Bain, L. J (1978), Statical Analysis of Reability and Life-Testing Models, New York : Dekker.

Balakrishnan, N(1990), On the maximum likelihood estimationof the location and scala parameters of eksponensial distribution based on multiple Type-II censored samples, J.Appl.Statist. 17, 55-61

Balasubramanian, K and Balakrishnan, N. (1992), Estimation for one two parameter exponential distribution under multyple Type-II censoring, Statistical Papers. 33, 203-216.

Dudewicz, E.J and S.N. Mishra (1988), Modern Mathematical Statistics, John Wiley and Sons, New York.

Fei, H. and H.Fei (1996), Limit theorems for the maximum likelihood estimatorts under multiple type-II censoring. Ann. Inst. Statist. Math. 48, in press.

Gabler, S. and Wolff.C. (1987), A Quik and easy Approximation to the distribution of a sum of Weighted Chi-sguare Variable Statistical Papers. 28, 317-323.

Kambo, N.S. (1978), Maximum Likelihood Estimators of tehe Location and scale parameters of the eksponential distribution from censored sample. Commun Statist-Theory Math. A1 (12) 1120-1132.

Kamps, U. (1990), Characterizations of the eksponential distributions by weigted summ of iid random variables. Statistical Paper.31,233-237.

Patnaik (1949), the non central χ^2 and F distribution and their applications Biometrika, 36, 202-232.

Rohatgi, V.K. (1976), An. Induction to Probability theory and Mathematical Statistics, John Wiley, New York.

Roussas George (1973), Afirst course in Mathematical Statistics, Addison-Wesley, London.