# TRIGONOMETRI II

D
i
s
u
s
u
n

Oleh :

DRA. MURTIANA RAMLI
Dosen FPMIPA IKIP Padang

Diperbanyak Oleh:
BADAN PENERBIT FAKULTAN PENDIDIKAN MATEMATIKA DAN
ILMU PENGETAHUAN ALAM
(FPMIPA) IKIP PADANG

---

INSTITUT KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN
P A D A N G

1991

## KATA PENGANTAR

Berkat rahmat Tuhan Yang Maha Esa dan sesuai dengan kemampuan yang ada, buku dengan judul **"Trigonometri II"** telah dapat disusun sebagaimana mestinya.

Buku Trigonometri II ini, merupakan lanjutan dari buku Trigonometri I. Buku ini penulis susun guna melengkapi bahan bacaan para pembaca yang berminat terhadap mata kuliah Trigonometri II khususnya dan bidang studi Matematika umumnya.

Penulis menyadari bahwa buku ini mungkin ada kekurangan-kekurangan. Oleh sebab itu kritik yang sehat dan membangun dari para pembaca diterima dengan senang hati.

Akhirnya penulis mengucapkan terima kasih pada Jurusan Pendidikan Matematika FPMIPA IKIP Padang, yang telah bersedia membantu dalam pengetikan buku Trigonometri II ini.

Padang, Januari 1991

Penulis.

## DAFTAR ISI

## PERSAMAAN TRIGONOMETRI DARI JUMLAH 2 BUAH SUDUT
## (lanjutan)

**Uraian:**

Menurut P.Wijdenes hal.112 persamaan bentuk:

1. $p \sin(x + a) = q \sin(x + b)$ dapat diselesaikan dengan rumus sinus.

   Penyelesaiannya adalah sebagai berikut:

   $p \sin(x + a) = q \sin(x + b)$

   $p(\sin x \cos a + \cos x \sin a) = q(\sin x \cos b + \cos x \sin b)$

   $p(\sin x \cos x + p \cos x \sin a = q \sin x \cos b + q \cos x \sin b$

   $(p \cos a - q \cos b)\sin x = (q \sin b - p \sin a) \cos x$

   $$\operatorname{tg} x = \frac{q \sin b - p \sin a}{p \cos a - q \cos b}$$

   $$= -\frac{p \sin a - q \sin b}{p \cos a - q \cos b}$$

   jika a, b, p dan q diketahui, maka harga x dapat dicari, untuk jelasnya perhatikan contoh 1 : pada hal.4.

   Persamaan bentuk $p \cos(x + a) = q(x + b)$ dan

   $p \operatorname{tg}(x + a) = q \operatorname{tg}(x + b)$

   juga dapat diselesaikan menurut prinsip-prinsip penyelesaian di atas.

2. **Persamaan kuadrat perbandingan trigonometri.**

   Persamaan kuadrat perbandingan trigonometri, suku-sukunya terdiri dari fungsi trigonometri. Menurut Wijdenes (1953), persamaan ini berasal dari bentuk-bentuk:

   a). $a \cos 2x + b \sin x + c = 0$

   b). $a \cos 2x + b \cos x + c = 0$

   c). $a \operatorname{tg} x + b \operatorname{cotg} x + c = 0$.

   Dengan mempergunakan rumus sudut rangkap, maka persamaan a) berubah menjadi bentuk:
   $A \sin^2 x + B \sin x + C = 0$, persamaan b) berubah menjadi bentuk: $A \cos^2 x + B \cos x + C = 0$, dan persamaan c) dapat dirubah menjadi bentuk: $A \operatorname{tg}^2 x + B \operatorname{tg} x + C = 0$.

Cara penyelesaian selanjutnya adalah dengan mempergunakan rumus abc atau pemfajtoran menurut aljabar.
Harga $B^2 - 4\,AC \geq 0$, dan perlu diingat bahwa $-1 \leq \sin x \leq 1$ dan $-1 \leq \cos x \leq 1$ untuk sembarang nilai x.
Untuk jelasnya dapat dilihat pada contoh 2 dan 3 pada halaman 4 dan 5.

3. **Persamaan-persamaan yang dapat diselesaikan dengan bentuk** $a \cos x + b \sin x = c$.

a). $a \operatorname{tg} x + b \operatorname{cotg} x + c = 0$.

Menurut Pwydenes (1953. hal.120) bentuk persamaan:

$$a \operatorname{tg} x + b \operatorname{cotg} x + c = 0$$

disamping dapat diselesaikan dengan membawa ke persamaan kuadrat, juga dapat diselesaikan kebentuk:

$$a \cos x + b \sin x = c$$

caranya adalah sebagai berikut:

$$a \operatorname{tg} x + b \operatorname{cotg} x + c = 0 (a \neq 0 \ , \ b \neq 0)$$

$$\frac{a \sin x}{\cos x} + \frac{b \cos x}{\sin x} + c = 0$$

$$\frac{a \sin^2 x + b \cos^2 x}{\sin x \cos x} = -c$$

$$a \sin^2 x + b \cos^2 x = -c \sin x \cos x$$

$$\frac{a(1 - \cos 2x)}{2} + \frac{b(1 + \cos 2x)}{2} = -c \sin x \cos x$$

$$a - a \cos 2x + b + b \cos 2x = -c \sin 2x$$

$$(-a + b)\cos 2x + c \sin 2x = -(a + b)$$

$$(a - b)\cos 2x - c \sin 2x = a + b$$

jika a, b dan c diketahui, maka harga x dapat dicari.

b). $\sin x \sin(x - a) = p \cos^2 x$

$$2 \sin x \sin(x - a) = 2p \cos^2 x$$

$$\cos a - \cos(2x - a) = p(1 + \cos 2x)$$

$$\cos a - \cos 2x \cos a - \sin 2x \sin a = p + p \cos 2x$$

$(p + \cos a)\cos 2x + \sin a \sin 2x = \cos a - p$

atau

$$A \cos 2x + B \sin 2x = C$$

persamaan dapat diselesaikan dengan syarat:

$$A^2 + B^2 \geq C^2$$

atau

$$(p + \cos a)^2 + \sin^2 a \geq (\cos a - p)^2$$
$$\sin^2 a + 4p \cos a \geq 0.$$

c). $a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x = d$

$2a \sin^2 x + 2b \sin x \cos x + 2c \cos^2 x = 2d$

$a(1 - \cos 2x) + b \sin 2x + c(1 + \cos 2x) = 2d$

$(c - a)\cos 2x + b \sin 2x = 2d - a - c$

dan seterusnya.

Persamaan ini dapat diselesaikan dengan syarat:

$$(c - a)^2 + b^2 \geq (2d - a - c)^2$$

Untuk menyelesaikan soal persamaan trigonometri bentuk

$$a \sin x \cos x + b(\cos x \pm \sin x) + c = 0$$

terlebih dahulu diumpamakan:

$$\cos x \pm \sin x = y$$
$$\cos^2 x + 2 \sin x \cos x + \sin^2 x = y^2$$
$$2 \sin x \cos x = y^2 - 1$$

sehingga bentuk persamaan di atas menjadi:

$$ay^2 - 2by - (2c + a) = 0.$$

**Jika** a, b, c dan d tertentu, maka penyelesaian selanjutnya dapat dicari.

<u>Contoh-contoh</u>:

1. Hitunglah x dari persamaan:

   $17 \sin(x + 25^\circ) = 15 \sin(x + 36^\circ)$.

   Penyelesaiannya:

   $17 \sin(x + 25^\circ) = 15 \sin(x + 36^\circ)$

   $17(\sin x \cos 25 + \cos x \sin 25^\circ) = 15(\sin x \cos 36 + \cos x \sin 36^\circ)$

$17 \sin x \cos 25 + 17 \cos x \sin 25 = 15 \sin x \cos 36 +$
$15 \cos x \sin 36$

$\sin x(17 \cos 25 - 15 \cos 36) = \cos x(15 \sin 36 -$
$17 \sin 25)$

$$\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{15 \sin 36^o - 17 \sin 25^o}{17 \cos 25^o - 15 \cos 36^o}$$

$$\text{tg } x = \frac{15 \ . \ 0,58779 - 17 \ . \ 0,42262}{17 \ . \ 0,90631 - 15 \ . \ 0,80902}$$

$$= \frac{8,81685 - 7,18454}{15,40727 - 12,1353}$$

$$= \frac{1,63231}{3,27197} = 0,49888 \longrightarrow$$

$x = 26^o30'50'' + k.180^o$

(dengan menggunakan tabel logaritma).

2. Hitunglah x dari persamaan $3 + \cos 2x = 8 \cos x$.

Penyelesaian:

$3 + \cos 2x = 8 \cos x$

$3 + 2 \cos^2 x - 1 = 8 \cos x$

$2 \cos^2 x - 8 \cos x + 2 = 0$

$\cos^2 x - 4 \cos x + 1 = 0$

$$(\cos x)_{1.2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4}}{2}$$

$$= \frac{4 \pm 2\sqrt{3}}{2}$$

$(\cos x)_1 = \frac{4 + 2\sqrt{3}}{2} = 2 + \sqrt{3}$ (tidak memenuhi)

$(\cos x)_2 = \frac{4 - 2\sqrt{3}}{2} = 2 - \sqrt{3} = 0,26790$

dengan mempergunakan daftar logaritma hal.89, untuk $\cos x = 0,26790$, maka:

$x_1 = 74^o27'39'' + k.360^o$

$x_2 = 285^o32'21'' + k.360^o$.

3. Hitunglah x dari persamaan: $\text{tg } x + 4 \text{ cotg } x = 5$.

Penyelesaian:

$$\text{tg } x + 4 \text{ cotg } x = 5$$

$$\text{tg } x + \frac{4}{\text{tg } x} = 5$$

$$\text{tg}^2 x + 4 = 5 \text{ tg } x$$

$$\text{tg}^2 x - 5 \text{ tg } x + 4 = 0$$

$$(\text{tg } x)_{1.2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{2}$$

$$= \frac{5 \pm 3}{2}$$

dengan mempergunakan daftar logaritma hal.88, untuk

$\text{tg } x = \frac{5 + 3}{2} = 4$, maka:

harga $x = 75^o57'49" + k.180^o$

dan untuk $\text{tg } x = \frac{5 - 3}{2} = 1$

hagra $x = 45^o + k.180^o$.

4. Tentukanlah x dari persamaan $2 \cos x + \cos 2x = 1$ dalam interval $0^o \leq x \leq 360^o$.

Penyelesaian:

$$2 \cos x + \cos 2x = 1$$

$$2 \cos x + 2 \cos^2 x - 1 = 1$$

$$2 \cos^2 x + 2 \cos x - 2 = 0$$

$$\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$$

$$\cos x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4}}{2}$$

$$= \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} = 0,61803$$

$x_1 = 51^o49'38" + k.360^o$

$x_2 = 308^o10'22" + k.360^o$

$\cos x = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} = -1,081$ (tidak memenuhi).

5. Hitunglah x dari persamaan:

$89425 \cos x + 25616 \sin x = 92800$.

$$89425(\cos x + \frac{25616}{89425} \sin x) = 92800$$

umpama $\mathrm{tg}\,\varphi = \dfrac{25616}{89425}$

$$\varphi = 15^\circ 59' 4''$$

$$\cos x + \mathrm{tg}\,\varphi \sin x = \frac{92800}{89425}$$

$$\cos x + \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} \sin x = \frac{92800}{89425}$$

$$\cos x \cos \varphi + \sin x \sin \varphi = \frac{92800}{89425} \cos \varphi$$

$$\cos(x - \varphi) = \frac{92800}{89425} \cos 15^\circ 59' 4''$$

$$\cos(x - \varphi) = 1{,}03774 \cos 15^\circ 59' 4''$$

$$x - \varphi = \pm\, 3^\circ 57' + k.360^\circ$$

$$x_1 = \varphi + 3^\circ 57' + k.360^\circ = 19^\circ 56' 4'' + k.360^\circ$$

$$x_2 = \varphi - 3^\circ 57' + k.360^\circ = 12^\circ 2' 4'' + k.360^\circ.$$

6. Hitunglah x dari persamaan $5 \sin x + \mathrm{tg}\, x = 1$.

Penyelesaian:.........

$$5 \sin x + \mathrm{tg}\, x = 1$$

$$5 \sin x + \frac{\sin x}{\cos x} = 1$$

$$5 \sin x \cos x + \sin x = \cos x$$

$$5 \sin x \cos x + \sin x - \cos x = 0 \text{.........}(*)$$

Umpama $\sin x - \cos x = y$

$$\sin^2 x - 2 \sin x \cos x + \cos^2 x = y^2$$

$$1 - 2 \sin x \cos x = y^2$$

$$2 \sin x \cos x = 1 - y^2$$

$$\sin x \cos x = \frac{1 - y^2}{2}$$

persamaan (*) menjadi:

$$\frac{5(1 - y)^2}{2} + y = 0$$

$$5 - 5y^2 + 2y = 0$$

$$5y^2 - 2y - 5 = 0$$

$$y_{1.2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 100}}{10}$$

$$= \frac{2 \pm \sqrt{104}}{10}$$

$$= \frac{2 \pm 10{,}19804}{10}$$

$y_1 = 1{,}21980$

$y_2 = -0{,}81980$

$(\sin 2x)_1 = 1 - y^2 = -048791$

$(\sin 2x)_2 = 1 - y^2 = 0{,}32793.$

dengan mempergunakan daftar logaritma,

untuk $\sin 2x = -0{,}48791$: $(2x)_1 = -150^\circ 47'48'' + k.360^\circ$ kw II

$x_1 = -75^\circ 23'54'' + k.180^\circ$

$(2x)_2 = 389^\circ 12'12'' + k\ 360^\circ$ kw IV

$x_2 = 194^\circ 36'6'' + k.180^\circ$

untuk $\sin 2x = 0{,}32793$: $(2x)_3 = 19^\circ 8'36'' + k.360^\circ$ kw I

$x_3 = 9^\circ 34'18'' + k.180^\circ$

$(2x)_4 = 170^\circ 25'42'' + k.360^\circ$ ?

$x_4 = 85^\circ 12'51'' + k.180^\circ$

7. Htunglah x dari persamaan $2 \sin 2x + 6 \cos^2 x = 5$.

Penyelesaian:

$2 \sin 2x + 6 \cos^2 x = 5$

$2 \sin 2x + 6 \cdot \frac{1 + \cos 2x}{2} = 5$

$2 \sin 2x + 3 + 3 \cos 2x = 5$

$3 \cos 2x + 2 \sin 2x = 2$

$3(\cos 2x + \frac{2}{3} \sin 2x) = 2$

$3(\cos 2x + \operatorname{tg}\varphi \sin 2x) = 2 \qquad \begin{cases} \operatorname{tg} \varphi = \frac{2}{3} \\ \varphi = 33^\circ 41'24''. \end{cases}$

$3(\cos 2x + \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} \sin 2x) = 2$

$3 \cos(2x - \varphi) = 2 \cos\varphi$

$\cos(2x - \varphi) = \frac{2 \cos\varphi}{3}$

$\cos(2x - \varphi) = \frac{2 \ .\ 0{,}83205}{3} = 0{,}5547$

$$2x - \varphi = 56^o18'35" + k.360^o$$
$$2x_1 = 89^o59'59" + k.360^o$$
$$x_1 = 45^o + k.180^o$$
$$2x - \varphi = 303^o41'25" + k.360^o$$
$$2x_2 = 336^o82'49" + k.360^o$$
$$x_2 = 168^o41'25" + k.180^o$$

8. Tentukan batas-batas p agar $p \sin x - (p - 1)\cos x = \sqrt{5}$ mempunyai penyelesaian.

   Jawab:

   Syarat: $p \sin x - (p - 1)\cos x = \sqrt{5}$, mempunyai penyelesaian:

   $c^2 \leq a^2 + b^2$.

   $(\sqrt{5})^2 < p^2 + (p - 1)^2$

   $5 < p^2 + p^2 - 2p + 1$

   $2p^2 - 2p - 4 \geq 0$

   $p^2 - p - 2 \geq 0$

   $(p + 1)(p - 2) \geq 0$

   Jadi $p < -1$ dan $p > 2$

   | | | |
   |---|---|---|
   | + + | - - | + + |
   | | -1 | 2 |

9. Tentukan batas-batas p agar $\sin(x - 30^o)\cos x = p \sin^2 x$ dapat diselesaikan.

   Jawab:

   $\sin(x - 30^o)\cos x = p \sin^2 x$

   $2 \sin(x - 30^o)\cos x = 2p \sin^2 x$

   $\sin(2x - 30^o) - \sin 30^o = p(1 - \cos 2x)$

   $\sin 2x \cos 30^o - \cos 2x \sin 30^o - \sin 30^o = p(1 - \cos 2x)$

   $\frac{1}{2}\sqrt{3} \sin 2x - \frac{1}{2} \cos 2x - \frac{1}{2} + p \cos 2x = p$

   $\frac{1}{2}\sqrt{3} \sin 2x + (p - \frac{1}{2})\cos 2x = p + \frac{1}{2}$

   $\sqrt{3} \sin 2x + (2p - 1)\cos 2x = 2p + 1$

   $(2p + 1)^2 \leq (\sqrt{3})^2 + (2p - 1)^2$

   $4p^2 + 4p + 1 \leq 3 + 4p^2 - 4p + 1$

   $8p \leq 3 \longrightarrow p < \frac{3}{8}$.

10. Tentukan himpunan penyelesaian:

$$3 \sin 2x + 4 \sin^2 x = 5 \text{ tg } x$$

untuk interval $0^\circ \leq x \leq 360^\circ$.

Penyelesaian:

$3 \sin 2x + 4 \sin^2 x = 5 \text{ tg } x$

$6 \sin x \cos x + 4 \sin^2 x = \dfrac{5 \sin x}{\cos x}$

$\sin x(6 \cos x + 4 \sin x - \dfrac{5}{\cos x}) = 0$

$\sin x = 0 \longrightarrow x_1 = 0^\circ + k.360^\circ$

$6 \cos x + 4 \sin x - \dfrac{5}{\cos x} = 0$

$6 \cos^2 x + 4 \sin x \cos x - 5 = 0$

$3(1 + \cos 2x) + 2 \sin 2x = 5$

$3 \cos 2x + 2 \sin 2x = 2$

$3 \cos 2x = 2 - 2 \sin 2x$

$(\cos^2 x - \sin^2 x) = 2(1 - \sin 2x)$

$3(\cos^2 x - \sin^2 x) = 2(\cos x - \sin x)^2$

$3(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x) = 2(\cos x - \sin x)^2$

$\longrightarrow \cos x - \sin x = 0$

$\text{tg } x = 1$

$x = 45^\circ + k.180^\circ$

$3(\cos x + \sin x) = 2(\cos x - \sin x)$

$3 \cos x + 3 \sin x = 2 \cos x - 2 \sin x$

$5 \sin x = -\cos x$

$5 \text{ tg } x = -1$

$\text{tg } x = -0,2$

$\text{tg}(-x) = 0,2 \longrightarrow -x = 11^\circ 19' + k.180^\circ$

$x = 168^\circ 41' + k.180^\circ$

$\therefore$ Himpunan penyelesaian:

$\{0^\circ, 45^\circ, 168^\circ 41', 180^\circ, 225^\circ, 248^\circ 41', 360^\circ\}$.

<u>Soal-Soal</u>:

Hitunglah x dari persamaan di bawah ini:

1. $3 \text{ tg}^2 x + 4 \sin^2 x = 2$ dalam $0^\circ \leq x \leq 360^\circ$.
2. $3 + \cos 4x = 0 \cos 2x$.

3. $\sin x \sin(x - 36^{o}) = 1.1 \cos^2 x$
4. $\sin^2 x + 4 \sin x \cos x - 7 \cos^2 x$.
5. $5 \sin x + \mathrm{tg}\, x = 1$.
6. $\cos 3x - 2 \cos^2 x = 0$.
7. $\mathrm{tg}\, x + \mathrm{tg}(x - 45^{o}) = 2$.
8. Tentukanlah batas-batas p agar
   $4 \sin^3 x - p \sin x \cos x = 1 - 2 \cos^2 x$.
9. Hitunglah p agar persamaan $\sin(x - 30^{o})\cos x = p \sin^2 x$ dapat diselesaikan.
10. Tentukanlah batas-batas p agar
    $p \cos^2 x + (p - 1)\sin 2x = 2 \cos x$.
11. $3 \cos x + 7 \sin x = 6$.
12. $\cos 4x + (\alpha_3)\sin 4x = 2$.
13. $10001 \cos x + 30145 \sin x = 9999$.
14. $\cos x \cos 19^{o}47'58'' + \sin x \,\mathrm{tg}\, 19^{o}47'58'' = 1$.
15. $2 \sin 2x + 6 \cos^2 x = 5$.
16. $\sin x \sin(x - 36^{o}) = 1.1 \cos^2 x$.
17. $7 \,\mathrm{tg}\, x - 6 \,\mathrm{cotg}\, x = 1,45$.
18. $2 \sin^2 x + 5 \sin x \cos x + 10 \cos^2 x = 7,92$.
19. $(1 - \sqrt{3})\sin x + (1 + \sqrt{3})\cos x = \sec x$.
20. $\mathrm{cotg}\, x - \mathrm{tg}\, x = \sin x + \cos x$.
21. $\sin x + 5 \sin x \cos x + \cos x = \pm 1$.
22. $2 \cos 3x + 2 \cos 2x = 1$.
23. $2 \cos 4x + 2\sin 4x + 2 \sin 2x + \mathrm{tg}\, x \sin^2 2x = 2 \cos^2 x$.
24. $\sin x + \mathrm{cotg}\, x + \mathrm{cosec}\, x = 0$.
25. $\cos x + \cos 3x + \sin 5x + \sin 3x = \cos(45^{o} - 4x)$.

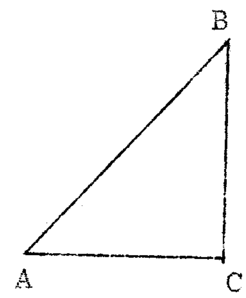
# SEGITIGA

<u>Uraian</u>

Menurut bentuknya segitiga ada 3 macam:

1. Segitiga siku-siku.
2. Segitiga lancip : - segitiga sama kaki
   - segitiga sama sisi.
3. Segitiga tumpul.

Segitiga siku-siku ABC.



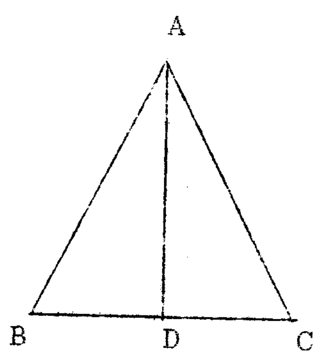
$$\angle C = \gamma = 90^\circ$$
$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$
$$\alpha + \beta = 90^\circ$$
$$a = c \sin\alpha$$
$$b = c \sin\beta$$

*Gambar 1. Segitiga siku-siku ABC.*

$$\left.\begin{array}{l} a = c \cos\beta \\ b = c \cos\alpha \\ a = b \operatorname{cotg}\alpha \\ b = a \operatorname{tg}\beta \\ a = b \operatorname{cotg}\beta \\ b = a \operatorname{cotg}\alpha \end{array}\right\} \text{(PWijdenes, 1953. hal.166)}$$

$a^2 + b^2 = c^2$ (dalil Pythagoras)

Segitiga sama kaki ABC.

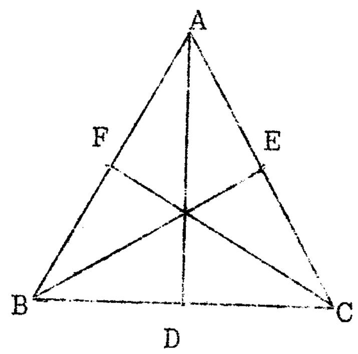


$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$
$$\beta = \gamma$$
$$b = c$$

AD merupakan garis tinggi, garis bagi dan garis berat dari titik sudut A.

*Gambar 2. Segitiga sama kaki.*

Segitiga sama sisi ABC.




$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$

$\alpha = \beta = \gamma = 60^\circ$

AD = BE = CE

merupakan garis tinggi, garis berat dan garis bagi dari titik-titik sudut A, B dan C.

*Gambar 3. Segitiga sama sisi.*

<u>Contoh-contoh</u>:

1. Dari $\triangle$ ABC siku-siku ( $\gamma = 90^\circ$), diketahui c = 13,57 dan $\beta = 37^\circ5'20''$. Hitunglah unsur-unsur yang lain.

   Jawab:

   $\triangle$ ABC siku-siku ( $\gamma = 90^\circ$)

   $\beta = 37^\circ5'20''$

   $\alpha = 90^\circ - 37^\circ5'20''$

   $= 52^\circ54'40''$.

   $a = c \sin\alpha$

   $a = 13,57 \sin 52^\circ54'40$

   $= 13,57$.

2. Dari $\triangle$ ABC, diketahui $\operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma = \sec\beta \sec\gamma$.

   Selidikilah bentuk $\triangle$ ABC itu.

   Jawab:

   $\operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma = \sec\beta \sec\gamma$.

   $$\frac{\sin\beta}{\cos\beta} + \frac{\sin\gamma}{\cos\gamma} = \frac{1}{\cos\beta} \cdot \frac{1}{\cos\gamma}$$

   $$\frac{\sin\beta\cos\gamma + \cos\beta\sin\gamma}{\cos\beta\cos\gamma} = \frac{1}{\cos\beta\cos\gamma}$$

   $\sin(\beta + \gamma)\cos\beta\cos\gamma = \cos\beta\cos\gamma$

   $\sin(\beta + \gamma) = 1$

$(\beta + \alpha) = 90^\circ$

$\gamma = 90^\circ$

$\therefore$ $\triangle$ ABC siku pada $\angle C$ ( $\gamma = 90^\circ$).

3. Dari $\triangle$ ABC, diketahui $\sin\alpha = \text{cotg}\,\alpha\,(1 + \cos\alpha)$.
   Selidikilah bentuk $\triangle$ ABC itu.
   Jawab:

$$\sin\alpha = \text{cotg}\,\gamma\,(1 + \cos\alpha)$$

$$\sin\alpha = \frac{\cos\gamma}{\sin\gamma}(1 + \cos\alpha)$$

$$\sin\alpha = \frac{\cos\gamma + \cos\gamma\cos\alpha}{\sin\gamma}$$

$$\cos\gamma + \cos\gamma\cos\alpha = \sin\gamma\sin\alpha$$

$$\cos\gamma + \cos\alpha\cos\gamma - \sin\alpha\sin\gamma = 0$$

$$\cos\gamma + \cos(\alpha + \gamma) = 0$$

$$-\cos\beta + \cos\gamma \text{ atau}$$

$$\cos\beta = \cos\gamma$$

$$\beta = \gamma$$

$\therefore$ Bentuk $\triangle$ ABC adalah sama kaki.

<u>Soal-Soal</u>:

1. Dari $\triangle$ ABC( $\gamma = 90^\circ$), diketahui:
   a). c = 18,73 dan $\alpha = 10^\circ 13'12''$, hitunglah a dan b.
   b). a = 31,4 dan c = 20,45, hitunglah $\alpha$.
   c). a = 25,37 dan $\alpha = 15^\circ 35'20''$, hitunglah b dan c.

2. Buktikanlah dalam $\triangle$ ABC ( $\gamma = 90^\circ$) berlaku:
   a). $\sin\frac{1}{2}\alpha = \sqrt{\dfrac{c - b}{2c}}$
   b). $\text{tg}\,\frac{1}{2}\alpha = \sqrt{\dfrac{c - b}{c + b}}$
   c). Hitunglah $\alpha$, jika b = 51,36 dan c = 51,6.

3. Selidikilah bentuk $\triangle$ ABC, jika diketahui:

a). $\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma + 1 = 0$.

b). $\operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma = \sec\beta \ \sec\gamma$ .

c). $\sin\alpha - \cos\alpha = \cos\beta - \sin\beta$ .

d). $\operatorname{cotg} \frac{1}{2}\alpha + \operatorname{cotg} \frac{1}{2}\beta - \operatorname{cotg} \frac{1}{2}\alpha \cdot \operatorname{cotg} \frac{1}{2}\beta = -1$.

4. Buktikanlah dalam $\triangle$ ABC ( $\gamma = 90^\circ$) berlaku:

a). $\dfrac{a + b}{\cos \frac{1}{2} (\alpha - \beta)} = c\sqrt{2}$.

b). $\operatorname{tg} \frac{1}{2} (\alpha - \beta) = \dfrac{a - b}{a + b}$

5. Selidikilah bentuk $\triangle$ ABC, jika diketahui:

a). $\sin\alpha = \operatorname{cotg}\gamma (1 + \cos\alpha)$.

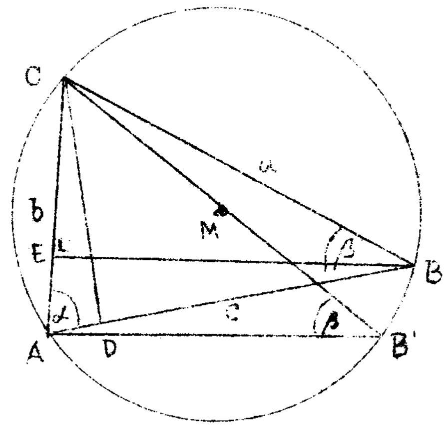
b). $\sin^2\gamma = \sin 2\alpha \sin 2\beta$ .

c). $\cos\alpha \cos\beta = \sin^2 \frac{1}{2}\gamma$ .

d). $\operatorname{tg} \frac{1}{2}\alpha = \dfrac{\sin\alpha - \sin\beta}{\cos\beta - \cos\alpha}$

e). $\cos 2(\beta - \gamma) - \cos 2\alpha = \cos 2 (\alpha - \gamma) - \cos 2\beta$ .

## DALIL SINUS DAN COSINUS PADA SEGITIGA




*Gambar 4. Segitiga ABC dan lingkaran luarnya.*

Perhatikan $\triangle$ ABC

CD = garis tinggi dari titik C.

BE = garis tinggi dari titik B.

$\triangle ACD \longrightarrow CD = b \sin\alpha$

$\triangle BCD \longrightarrow CD = a \sin\beta$

$b \sin\alpha = a \sin\beta$

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (*)$$

$\triangle ABE \longrightarrow BE = c \sin\alpha$

$\triangle BCE \longrightarrow BE = a \sin\gamma$

$c \sin\alpha = a \sin\gamma$

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin\gamma} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (**)$$

Dari (*) dan (**) didapat:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} \ldots\ldots\ldots\ldots (***)$$

$\angle CBA = \angle CB'A$

M = pusat ʘ luar $\triangle$ ABC.

Pada $\triangle$ BB'A $\longrightarrow \sin\beta = \frac{b}{2R}$

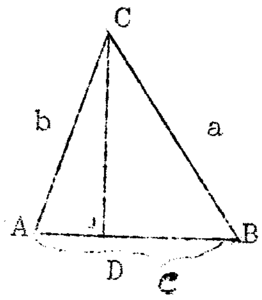
$$\frac{b}{\sin\beta} = 2R \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (****)$$

Dari (***) dan (****) didapat:

$$\boxed{\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R}$$ dalil sinus.

atau

$$\boxed{\begin{aligned} a &= 2R \sin\alpha \\ b &= 2R \sin\beta \\ c &= 2R \sin\gamma \end{aligned}}$$




*Gambar 5. Segitiga ABC dan garis tinggi CD.*

Perhatikan gambar 5.

$AD = b \cos\alpha$

$DB = c - b \cos\alpha$

$CD = b \sin\alpha$

Perhatikan $\triangle$ BCD

$BC^2 = CD^2 + BD^2$

$a^2 = (b \sin\alpha)^2 + (c - b\cos\alpha)^2$

$a^2 = b^2\sin^2\alpha + c^2 - 2bc\cos\alpha + b^2\cos^2\alpha$

$a^2 = b^2(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) + c^2 - 2bc\cos\alpha$

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha} \text{ dalil cosinus.}$$

Dengan cara yang sama didapat:

$$\boxed{\begin{aligned} b^2 &= c^2 + a^2 - 2ac\cos\beta \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma \end{aligned}}$$

<u>Dalil-dalil yang dapat diturunkan dari dalil sinus.</u>

1. Dalil tangens dari Napier.

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{2R\sin\alpha + 2R\sin\beta}{2R\sin\alpha - 2R\sin\beta}$$

$$= \frac{\sin\alpha + \sin\beta}{\sin\alpha - \sin\beta}$$

$$= \frac{2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}$$

$$= \operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}\operatorname{cotg}\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\boxed{\frac{a+b}{a-b} = \frac{\text{tg}\ \frac{1}{2}(\alpha+\beta)}{\text{tg}\ \frac{1}{2}(\alpha-\beta)}}$$

2. $$\frac{a+b}{c} = \frac{2R\ \sin\alpha + 2R\ \sin\beta}{2R\ \sin\gamma}$$

$$= \frac{\sin\alpha + \sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$$

$$= \frac{2\ \sin\frac{\alpha+\beta}{2}\ \cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{2\ \sin\frac{\alpha+\beta}{2}\ \cos\frac{\alpha-\beta}{2}}$$

$$= \frac{\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}$$

$$= \frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}$$

$$\boxed{\frac{a+b}{c} = \frac{\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\sin\frac{1}{2}\gamma}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(*)$$

$$\frac{a-b}{c} = \frac{2R\ \sin\alpha - 2R\ \sin\beta}{2R\ \sin\gamma}$$

$$= \frac{\sin\alpha - \sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$$

$$= \frac{2\ \cancel{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}\ \sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{2\ \sin\frac{\alpha+\beta}{2}\ \cancel{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}}$$

$$\boxed{\frac{a-b}{c} = \frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\cos\frac{1}{2}\gamma}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(**)$$

(*) dan (**) menurut Wijdenes (1953, hal.179) dinamakan dalil De Lambre.

Dalil-dalil yang diturunkan dari dalil cosinus

Dalil cosinus:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos\alpha$$

$$2bc \cos\alpha = b^2 + c^2 - a^2$$

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$1 + \cos\alpha = 1 + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$= \frac{2bc + b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$2\cos^2 \tfrac{1}{2}\alpha = \frac{(b + c)^2 - a^2}{2bc}$$

$$2\cos^2 \tfrac{1}{2}\alpha = \frac{(b + c + a)(b + c - a}{2bc}$$

$$= \frac{2.s.2(s - a)}{2bc}$$

$$\cos^2 \tfrac{1}{2}\alpha = \frac{s(s - a)}{bc}$$

$$\boxed{\cos^2 \tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{s(s - a)}{bc}}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(*)$$

Dengan cara yang sama didapat:

$$\boxed{\begin{gathered} \cos^2 \tfrac{1}{2}\beta = \sqrt{\frac{s(s - b)}{ac}} \\ \cos^2 \tfrac{1}{2}\gamma = \sqrt{\frac{s(s - c)}{ab}} \end{gathered}}$$

Dari dalil cosinus di atas didapat pula:

$$1 - \cos\alpha = 1 - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$1 - \cos\alpha = 1 - \frac{2bc - b^2 - c^2 + a^2}{2bc}$$

$$2 \sin^2 \tfrac{1}{2}\alpha = \frac{a^2 - (b - c)^2}{2bc}$$

$$= \frac{(a + b - c)(a - b + c)}{2bc}$$

$$2 \sin^2 \tfrac{1}{2}\alpha = \frac{2(s - c)\ 2(s - b)}{2bc}$$

$$\sin^2 \tfrac{1}{2}\alpha = \frac{(s - b)(s - c)}{bc}$$

$$\boxed{\sin^2 \tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{(s - b)(s - c)}{bc}}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (**)$$

Dengan cara yang sama didapat:

$$\sin^2 \tfrac{1}{2}\beta = \sqrt{\frac{(s - a)(s - c)}{ac}}$$

$$\sin^2 \tfrac{1}{2}\gamma = \sqrt{\frac{(s - a)(s - b)}{ab}}$$

$$\operatorname{tg}^2 \tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{(s - b)(s - c)}{s(s - a)}}$$

$$\operatorname{tg}^2 \tfrac{1}{2}\beta = \sqrt{\frac{(s - a)(s - c)}{s(s - b)}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (***)$$

$$\operatorname{tg}^2 \tfrac{1}{2}\gamma = \sqrt{\frac{(s - a)(s - b)}{s(s - c)}}$$

Menurut **Alders**, (1953, hal.87); (*), (**) dan (***) dinamakan dalil **Gauss**.

Contoh-Contoh:

1. Buktikanlah dalam segitiga berlaku:

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} (\alpha + 2\beta) = \frac{c + b}{c - b} \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\alpha$$

Bukti :

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} (\alpha + 2\beta) = \frac{c + b}{c - b} \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\alpha$$

$$= \frac{2R \sin\gamma + 2R \sin\beta}{2R \sin\gamma - 2R \sin\beta} \cdot \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\alpha$$

$$= \frac{\sin(\alpha + \beta) + \sin\beta}{\sin(\alpha + \beta) + \sin\beta} \cdot \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\alpha$$

$$= \frac{2 \sin \frac{\alpha + 2\beta}{2} \cancel{\cos \tfrac{1}{2}\alpha}}{2 \cos \frac{\alpha + 2\beta}{2} \cancel{\sin \tfrac{1}{2}\alpha}} \cdot \frac{\cancel{\sin \tfrac{1}{2}\alpha}}{\cancel{\cos \tfrac{1}{2}\alpha}}$$

$$= \frac{\sin \tfrac{1}{2} (\alpha + 2\beta)}{\cos \tfrac{1}{2} (\alpha + 2\beta)}$$

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} (\alpha + 2\beta) = \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} (\alpha + 2\beta) \longrightarrow \text{terbukti.}$$

2. Buktikanlah:

$$\frac{s - a}{b} = \frac{\cos \frac{1}{2}\alpha}{\cos \frac{1}{2}\beta} \sin \tfrac{1}{2}\gamma \qquad (s = \tfrac{1}{2} \text{ keliling } \triangle \text{ ABC})$$

$$\frac{b + c - a}{2b} = \frac{2R \sin\beta + 2R \sin\gamma - 2R \sin\alpha}{2 \cdot 2R \sin\beta}$$

$$= \frac{\sin\beta + \sin\gamma - \sin\alpha}{2 \sin\beta}$$

$$= \frac{2 \sin \frac{\beta + \gamma}{2} \cos \frac{\beta - \gamma}{2} - \sin(\beta + \gamma)}{2 \sin\beta}$$

$$= \frac{2 \sin \frac{\beta + \gamma}{2} \cos \frac{\beta - \gamma}{2} - 2 \sin \frac{\beta + \gamma}{2} \cos \frac{\beta + \gamma}{2}}{2 \sin\beta}$$

$$= \frac{\cancel{2} \sin \frac{\beta + \gamma}{2} \left[ \cos \frac{\beta - \gamma}{2} - \cos \frac{\beta + \gamma}{2} \right]}{\cancel{2} \sin\beta}$$

$$= \frac{\cos\frac{1}{2}\alpha \cdot \cancel{2\sin\frac{1}{2}\beta}\sin\frac{1}{2}\gamma}{\cancel{2\sin\frac{1}{2}\beta}\cos\frac{1}{2}\beta}$$

$$= \frac{\cos\frac{1}{2}\alpha\sin\frac{1}{2}\gamma}{\cos\frac{1}{2}\beta}$$

$$= \frac{\cos\frac{1}{2}\alpha}{\cos\frac{1}{2}\beta}\sin\frac{1}{2}\gamma = \frac{\cos\frac{1}{2}\alpha}{\cos\frac{1}{2}\beta}\sin\frac{1}{2}\gamma$$

terbukti.

3. Buktikanlah dalam $\triangle$ ABC berlaku $\sum \frac{b-c}{a}\cos^2\frac{1}{2}\alpha = 0.$

Bukti:

$$\sum \frac{b-c}{a}\cos^2\frac{1}{2}\alpha = 0$$

$$\sum \frac{\cancel{2R}\sin\beta - \cancel{2R}\sin\gamma}{\cancel{2R}\sin\alpha}\cos^2\frac{1}{2}\alpha =$$

$$\sum \frac{\sin\beta - \sin\gamma}{\sin\alpha}\cos^2\frac{1}{2}\alpha =$$

$$\sum \frac{2\cos\frac{\beta+\gamma}{2}\sin\frac{\beta-\gamma}{2}}{\sin(\beta+\gamma)}\cos^2\frac{1}{2}\alpha =$$

$$\sum \frac{\cancel{2}\cancel{\cos\frac{\beta+\gamma}{2}}\sin\frac{\beta-\gamma}{2}}{\cancel{2}\sin\frac{\beta+\gamma}{2}\cancel{\cos\frac{\beta+\gamma}{2}}}\cos^2\frac{1}{2}\alpha =$$

$$\sum \frac{\sin\frac{\beta-\gamma}{2}}{\cos\frac{1}{2}\alpha}\cos^2\frac{1}{2}\alpha =$$

$$\sum \sin\left(\frac{\beta-\gamma}{2}\right)\cos^{\cancel{2}}\frac{1}{2}\alpha =$$

$$\sum \sin\left(\frac{1}{2}\beta - \frac{1}{2}\gamma\right)\cos^{\cancel{2}}\frac{1}{2}\alpha =$$

$\sin(\frac{1}{2}\beta - \frac{1}{2}\gamma)\cos\frac{1}{2}\alpha + \sin(\frac{1}{2}\gamma - \frac{1}{2}\alpha)\cos\frac{1}{2}\beta + \sin(\frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{2}\beta)\cos\frac{1}{2}\gamma =$
$(\sin\frac{1}{2}\beta\cos\frac{1}{2}\gamma - \cos\frac{1}{2}\beta\sin\frac{1}{2}\gamma)\cos\frac{1}{2}\alpha + (\sin\frac{1}{2}\gamma\cos\frac{1}{2}\alpha - \cos\frac{1}{2}\gamma$
$\sin\frac{1}{2}\alpha)\cos\frac{1}{2}\beta + (\sin\frac{1}{2}\alpha\cos\frac{1}{2}\beta - \cos\frac{1}{2}\alpha\sin\frac{1}{2}\beta)\cos\frac{1}{2}\gamma = 0 = 0$

4. Dari $\triangle$ ABC, diketahui:

$$\frac{\cos^3 \frac{1}{2}\alpha \cos \frac{1}{2}(\beta - \gamma)}{\sin \beta} = \frac{b + c}{4b}$$

Selidikilah bentuk $\triangle$ ABC itu.

Penyelesaian:

$$\frac{\cos^3 \frac{1}{2}\alpha \cos \frac{1}{2}(\beta - \gamma)}{\sin \beta} = \frac{2R \sin \beta + \cancel{2R} \sin \gamma}{4 . \cancel{2R} \sin \beta}$$

$$\frac{\cos^3 \frac{1}{2}\alpha \cancel{\cos \frac{1}{2}(\beta - \gamma)}}{\cancel{\sin \beta}} = \frac{\cancel{2.}\sin \frac{1}{2}(\beta + \gamma) \cancel{\cos \frac{1}{2}(\beta - \gamma)}}{2.4\cancel{.\sin \beta}}$$

$$\cos^3 \frac{1}{2}\alpha = \frac{\sin \frac{1}{2}(\beta + \gamma)}{2}$$

$2 \cos^3 \frac{1}{2}\alpha = \cos \frac{1}{2}\alpha$

$2 \cos^3 \frac{1}{2}\alpha - \cos \frac{1}{2}\alpha = 0$

$\cos \frac{1}{2}\alpha (2\cos^2 \frac{1}{2}\alpha - 1) = 0$

$\cos \frac{1}{2}\alpha = 0 \longrightarrow \frac{1}{2}\alpha = 90^\circ$

$\alpha = 180^\circ$ (tidak mungkin).

$2 \cos^2 \frac{1}{2}\alpha - 1 = 0$

$2 \cos^2 \frac{1}{2} = 1$

$\cos^2 \frac{1}{2}\alpha = \frac{1}{2}$

$\cos^2 \frac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{1}{2}}$

$\cos^2 \frac{1}{2}\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

$\frac{1}{2}\alpha = 45^\circ \longrightarrow \alpha = 90^\circ$

$\therefore \triangle$ ABC siku di A.