FUNGSI
(lanjutan)

OLEH :
DRS. MULIYARDI

**JURUSAN PENDIDIKAN MATEMATIKA
FAKULTAS PENDIDIKAN MATEMATIKA DAN
ILMU PENGETAHUAN ALAM**

**INSTITUT KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN
PADANG**

1995

KATA PENGANTAR

Awal dari segalanya penulis panjatkan puji dan syukur pada Allah SWT, karena izinNya jualah penulis dapat menyelesaikan buku ini. Buku ini berjudul Fungsi (lanjutan), yang isinya merupakan kelanjutan dari materi Analisis Real I. Penulis menyusun buku ini dengan harapan dapat membantu mahasiswa untuk memahami materi Analisis Real II dan Topologi.

Dalam menyusun buku ini, penulis banyak mendapat masukan dari Bapak-bapak dan Ibu-ibu dosen Jurusan Pendidikan Matematika FPMIPA IKIP Padang. Oleh karena itu pada kesempatan ini penulis mengucapkan terima kasih yang tidak terhingga, semoga Tuhan membalas semua jerih payah Bapak-bapak dan Ibu-ibu tersebut. Di samping itu penulis juga mengucapkan terima kasih kepada semua pihak yang telah terlibat dalam menyusun buku ini, semoga kerja sama ini selalu terbina.

Penulis menyadari bahwa buku ini jauh dari sempurna, Oleh karena itu penulis sangat mengharapkan masukan dari pembaca yang sifatnya dapat untuk melengkapi buku ini. Akhirnya penulis aturkan ribuan terima kasih.

Padang

Penulis

DAFTAR ISI

FUNGSI DENGAN VARIASI TERBATAS DAN VARIASI TOTAL

Pada Bab ini akan dibahas fungsi-fungsi dengan variasi terbatas (functions of bounded variation) dan variasi totalnya (total variation) pada sebuah interval-kompak. Fungsi jenis ini berkaitan erat dengan fungsi monoton, sebab sifat yang dimiliki oleh fungsi monoton juga dimiliki oleh fungsi dengan variasi terbatas.

Untuk mempelajari fungsi dengan variasi terbatas ini perlu dipahami pengertian himpunan-kompak. Sebuah himpunan K dikatakan kompak jika K termuat dalam gabungan koleksi himpunan-himpunan buka $\mathcal{G}=\{G_\alpha\}$, dan K juga termuat dalam gabung-an berhingga himpunan-himpunan dalam $\mathcal{G}$ (Bartle, 1976: 73).

Biasanya tidak mudah menunjukkan himpunan-kompak dengan definisi ini. Untuk itu diberikan sebuah teorema tentang karakteristik himpunan-kompak yang disebut *Teorema Heine-Borel:* Sebuah subset A dari R adalah kompak jika dan hanya jika A tutup dan terbatas (Bartle, 1976: 73).

Untuk keperluan pembuktian teorema-teorema pada Bab ini diperlukan beberapa teorema pendukung, di antaranya disajikan di bawah ini.

A. Teorema Pendukung

1. Teorema nilai rata-rata

Jika f kontinu pada selang tertutup $[a,b]$ dan terdifferensial pada titik-titik dalam dari (a,b), maka terdapat paling sedikit satu bilangan c dalam (a,b) dengan

$f(b)-f(a) = f'(c)\ (b-a)$ (Purcell, 1994: 233).

2. Teorema sifat aditif
(sifat dasar dari supremum)

Diberikan subset A dan B dari R. Misalkan C dinotasikan dengan himpunan $C = \{x+y \mid x\in A,\ y\in B\}$

Jika A dan B mempunyai supremum, maka C juga punya supremum dan $\sup C = \sup A + \sup B$ (Apostol, 1982: 10).

Di samping yang telah dikemukakan di atas, untuk memahami isi makalah ini diperlukan juga pengetahuan tentang fungsi-fungsi kontinu, fungsi-fungsi terbatas, fungsi-fungsi monoton, dan differensial. Karena semua ini telah dipelajari, maka buktinya tidak disajikan dalam buku ini.

A. Fungsi-fungsi Dengan Variasi Terbatas

Definisi 1

Jika $[a,b]$ adalah sebuah interval-kompak, maka sebuah himpunan $P = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ yang memenuhi pertidaksamaan : $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$ dinamakan partisi dari $[a,b]$.

Selanjutnya interval $[x_{k-1}, x_k]$ dinamakan sub-interval ke k dari P, dan ditulis $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ sehingga $\sum_{k=1}^{n} \Delta x_k = b-a$.

Koleksi semua partisi yang mungkin dari $[a,b]$ dinotasikan dengan $\mathcal{P}[a,b]$.

Contoh:

Misalkan $A = [1,13]$ dan $P = \{1, 2, 4, 5, 6, 9, 13\}$ partisi dari A.

Subinterval ke-1 dari P adalah $[1,2]$ dengan $\Delta x_1 = 1$,

Subinterval ke-2 dari P adalah $[2,4]$ dengan $\Delta x_2 = 2$,

dan seterusnya, sehingga diperoleh $\sum_{k=1}^{n} \Delta x_k = 12$

Definisi 2

Misalkan f terdefinisi pada $[a,b]$.

Sehingga $\sum|\Delta f_k| = 4 + 4 = 8$ untuk setiap P partisi dari $[-2,2]$ dengan $P = P_1 \cup P_2$.

Dari uraian di atas diperoleh batas atas dari himpunan nilai-nilai $\sum|\Delta f_k|$ untuk setiap partisi P dari $[-2,2]$ adalah 8, sehingga $\sum|\Delta f_k| \le 8$ untuk setiap P partisi dari $[-2,2]$.

Ini menunjukkan bahwa f merupakan fungsi dengan variasi terbatas pada $[-2,2]$.

<u>Contoh 2</u>.

$$f(x) = \begin{cases} x\cos(\pi/2x), & \text{jika } x \neq 0 \\ 0, & \text{jika } x = 0 \end{cases}$$

f kontinu pada $[0,1]$, tetapi jika diperhatikan partisi

$$P = \{0, \frac{1}{2n}, \frac{1}{2n-1}, \frac{1}{2n-2}, \ldots, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1\}$$

dapat diperoleh:

$$\sum_{k=1}^{n}|\Delta f_k| = \sum_{k=1}^{n}|f_k(x) - f_{k-1}(x)|$$

$$= \left|f\left(\frac{1}{2n}\right) - f(0)\right| + \left|f\left(\frac{1}{2n-1}\right) - f\left(\frac{1}{2n}\right)\right| + \cdots$$

$$+ \left|f\left(\frac{1}{2}\right) - f\left(\frac{1}{3}\right)\right| + \left|f(1) - f\left(\frac{1}{2}\right)\right|$$

$= \left|1/(2n)\ \cos(n\pi) - 0\right| + \left|1/(2n-1)\ \cos\ [(2n-1)\pi/2]\right.$

$\left. - 1/(2n)\ \cos(n\pi)\right| + \ \ldots\ + \left|1/2\ \ \cos(\pi)\right. -$

$\left. 1/3\ \cos(3\pi/2)\right| + \left|\cos(\pi/2) - 1/2\ \cos(\pi)\right|$

$$= \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n-2} + \frac{1}{2n-2} + \ldots \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} \qquad \ldots\ldots \quad ■$$

Ini tidak terbatas untuk setiap n dibuktikan sebagai berikut:

Perhatikan ■

Misalkan $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Jelas S_n merupakan jumlah parsial dari deret harmonis.

Jika $n_1 = 2$ maka $S_{n_1} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2}$

Jika $n_2 = 2$ maka $S_{n_2} = S_{n_1} + \frac{\ }{3} + \frac{\ }{4}$

$$> Sn_1 + 2(\ /4)$$

$$= S_n + \frac{2}{2}$$

Jika $n_r = 2$ maka

$$S_{n_r} = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{2^{n-1}+1} + \ldots + \frac{1}{2^n}\right).$$

$$>1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{2^n}+\ldots+\frac{1}{2^n}\right)$$

$$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2}$$

$$=1+\frac{r}{2}$$

Oleh karena itu, barisan (S_n) tidak terbatas. Berdasarkan definisi 1.2, f bukan fungsi dengan variasi terbatas.

Untuk membantu menyelidiki apakah sebuah fungsi dengan variasi terbatas atau tidak, diberikan beberapa teorema sebagai berikut:

Teorema 1.3

Jika f monoton pada [a,b], maka f dengan variasi terbatas pada [a,b].

<u>Bukti:</u>

Akan dibuktikan di sini untuk kasus f yang monoton naik, se-dangkan untuk f yang monoton turun analog dengan proses ini.

Ambil sebarang $P \in \mathcal{P}[a,b]$.

Karena f naik maka $\Delta f_k \geq 0$, sehingga

$$\sum_{k=1}^{n} |\Delta f_k| = \sum_{k=1}^{n} \Delta f_k$$

$$= \sum_{k=1}^{n} [\ f(x_k) - f(x_{k-1})\ ]$$

$$= f(b) - f(a)$$

karena f monoton

Pilih $M = f(b) - f(a) + 1$

Karena $P \in \mathcal{P}[a,b]$ sebarang maka dapat disimpulkan

$\sum_{k=1}^{n} |\Delta f| \leq M$ untuk setiap $P \in \mathcal{P}[a,b]$.

Berdasarkan definisi 1.2 terbukti bahwa f dengan variasi terbatas pada [a,b].

<u>Contoh 3</u>

Misalkan $f(x) = x^2$ didefinisikan pada [0,2]. Jelas f monoton naik pada [0,2], sehingga f merupakan fungsi dengan variasi terbatas pada [0,2].

Teorema 1.4

Jika f kontinu pada [a,b] dan jika f' ada dan terbatas dalam (a,b) katakan $|f'(x)| \leq A$ untuk setiap $x \in (a,b)$, maka f dengan variasi terbatas pada [a,b].

f kontinu pada [0,1]

$$f'(x) = \begin{cases} \cos^2(1/x) + \sin 2(1/x), & \text{jika } x \neq 0 \\ 0 & \text{, jika } x = 0 \end{cases}$$

$f'(x) \leq 2$ untuk setiap $x \in [0,1]$

Ini menunjukkan bahwa f' terbatas pada [0,1], sehingga berdasarkan teorema 1.4 f dengan variasi terbatas pada [0,1].

Teorema 1.5

Jika f dengan variasi terbatas pada [a,b], maka f terbatas pada [a,b].

<u>Bukti</u>:

Diketahui f dengan variasi terbatas pada [a,b], berarti

$$\forall P \in \mathcal{P}[a,b] \quad \exists M > 0 \quad \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} |\Delta f_k| \leq M$$

Klaim: $|f(x)| \leq |f(a)| + M \quad \forall x \in [a,b]$

bukti:

i) Ambil $x \in (a,b)$ sebarang.

Pilih partisi $P = \{a, x, b\}$

Karena f dengan variasi terbatas, maka

$|f(x)-f(a)| + |f(b)-f(x)| \leq M$ untuk suatu $M > 0$

sehingga $|f(x)-f(a)| \leq M$

atau $|f(x)| \leq |f(a)| + M$

ii) Untuk $x = a$ jelas $|f(a)| \leq |f(a)| + M$

iii) Untuk $x = b$

Pilih $P = (a,b)$. Karena f dengan variasi terbatas maka

$|f(a) - f(b)| \leq M$ sehingga

$|f(b)| \leq |f(a)| + M$

Dengan demikian bukti teorema lengkap.

Untuk lebih memahami definisi dan teorema di atas, di bawah ini disajikan beberapa contoh.

<u>Contoh 5</u>

Perhatikan contoh 3 di atas. $f(x) = x^2$ adalah bervariasi terbatas pada $[0,2]$. Karena $f(x) \leq 4$ $\forall x \in [0,2]$, maka f terbatas pada $[0,2]$.

<u>Contoh 6</u>

Keterbatasan f' tidak perlu untuk f yang terbatas bervariasi. Sebagai contoh, misalkan $f(x) = x^{1/3}$. Fungsi ini monoton (jelas dengan variasi terbatas) pada setiap inter-val finit. Tetapi $f'(x) \longrightarrow +\infty$ bila $x \longrightarrow 0$

C. Variasi Total

Definisi 2.1

Misalkan f dengan variasi terbatas pada $[a,b]$, dan misalkan $\Sigma(P)$ menotasikan $\sum_{k=1}^{n}|\Delta f_k|$ yang berkorespondensi dengan partisi $P=\{x_0,x_1,x_2,\ldots,x_n\}$ dari $[a,b]$.

Bilangan $V_f(a,b) = \sup\ \{\ \Sigma(P)\ |\ P \in \mathcal{P}[a,b]\ \}$ dinamakan variasi total dari f pada $[a,b]$ (*total variation of f on* $[a,b]$).

Selanjutnya $V_f(a,b)$ ditulis dengan V_f.

Contoh 7

Perhatikan contoh 1 di atas. $f(x) = x^2$ bervariasi terbatas pada $[-2,2]$. $\sup\ \{\ \Sigma(P)\ |\ P \in \mathcal{P}[-2,2]\ \} = 8$, sehingga

$V_f(-2,2) = 8$.

Catatan:

Untuk f dengan variasi terbatas pada $[a,b]$, bilangan V_f finit. Juga $V_f \geq 0$ karena untuk setiap

$P \in \mathcal{P}[a,b]$ berlaku $\Sigma(P) \geq 0$.

Selanjutnya $V_f = 0$ jika dan hanya jika f konstan pada $[a,b]$.

Untuk menentukan variasi total suatu fungsi dengan variasi terbatas dapat digunakan teorema berikut.

Teorema 2.2

Jika f suatu fungsi monoton pada $[a,b]$, maka

$V_f = |f(b)-f(a)|$

<u>Bukti</u>:

Jika f naik monoton pada $[a,b]$, maka untuk setiap partisi $P = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ pada $[a,b]$ berlaku

$$\sum_{k=1}^{n} |\Delta f_k| = f(x_1)-f(x_0) + f(x_2)-f(x_1) + \ldots + f(x_{n-1}) - f(x_{n-2}) + f(x_n)-f(x_{n-1})$$

$$= f(x_n) - f(x_0)$$

$$= f(b) - f(a)$$

Berdasarkan definisi 2.1 $V_f = \sup \{f(b) - f(a)\} = f(b)-f(a)$

Untuk f yang turun monoton caranya analog, sehingga bukti lengkap.

Teorema 2.3

(Sifat aditif dari variasi total)

Jika fungsi f dengan variasi terbatas pada [a,b] dan $a<c<b$,

maka f dengan variasi terbatas pada [a,c] dan [c,b],

selanjutnya $V_f(a,b) = V_f(a,c) + V_f(c,b)$.

<u>Bukti</u>:

(i) Akan dibuktikan f dengan variasi terbatas pada [a,c] dan [c,b].

Ambil P_1 sebarang partisi dari [a,c], dan P_2 sebarang partisi dari [c,b]. Maka $P_0 = P_1 \cup P_2$ adalah partisi dari [a,b], sehingga dapat ditulis

$$\Sigma(P_1) + \Sigma(P_2) = \Sigma(P_0) \leq V_f(a,b) \qquad \square$$

Ini menunjukkan bahwa setiap $\Sigma(P_1)$ dan $\Sigma(P_2)$ terbatasi oleh $V_f(a,b)$. Berdasarkan definisi 1.2 terbukti bahwa f dengan variasi terbatas pada [a,c] dan [c,b].

(ii) Akan dibuktikan $V_f(a,b) = V_f(a,c) + V_f(c,b)$

Dari $\square$ dan dengan memanfaatkan teorema sifat aditif dari supremum diperoleh

$V_f(a,b) \geq \sup\{\Sigma(P_1)\} + \sup\{\Sigma(P_2)\} = \sup\{\Sigma(P_o)\}$

$V_f(a,b) \geq V_f(a,c) + V_f(c,b)$ ∎

Sekarang misalkan $P = \{x_o, x_1, x_2, \ldots, x_n\} \in \mathcal{P}[a,b]$ sebarang dan $P_o = P \cup \{c\}$ adalah sebuah partisi yang memuat c.

Jika $c \in [x_{k-1}, x_k]$, maka

$|f(x_k)-f(x_{k-1})| \leq |f(x_k)-f(c)| + |f(c)-f(x_{k-1})|$,

sehingga $\Sigma(P) \leq \Sigma(P_o)$.

Sekarang P_o dibagi dalam dua himpunan bagian, yaitu P_1 partisi dari $[a,c]$ dan P_2 partisi dari $[c,b]$. Dari bentuk ini dapat diperoleh

$\Sigma(P) \leq \Sigma(P_o) = \Sigma(P_1) + \Sigma(P_2) \leq V_f(a,c) + V_f(c,b)$

Karena $V_f(a,c) + V_f(c,b)$ batas atas dari $\Sigma(P)$ maka diperoleh $V_f(a,b) \leq V_f(a,c) + V_f(c,b)$ ∎∎

Dari ∎ dan ∎∎ bukti lengkap.

Contoh 8

Diketahui fungsi $f(x) = \sin(x)$ pada interval $[0,2\pi]$. f kontinu pada $[0,2\pi]$ serta f' ada, dan terbatas pada $[0,2\pi]$ sehingga berdasarkan teorema 1.4 maka f fungsi dengan variasi terbatas pada $[0,2\pi]$.

Berdasarkan teorema 2.3, f adalah fungsi dengan variasi terbatas pada sub-sub interval $[0,\pi/2]$, $[\pi/2,3\pi/2]$, dan $[3\pi/2,2\pi]$, serta

$$V_f(0,2\pi) = V_f(0,\pi/2) + V_f(\pi/2,3\pi/2) + V_f(3\pi/2,2\pi)$$

Dalam interval $[0,2\pi]$ diperoleh hal berikut:

f naik monoton pada $[0,\pi/2]$ dan $[3\pi/2,2\pi]$

f turun monoton pada $[\pi/2,3\pi/2]$,

sehingga dengan menggunakan teorema 2.2 diperoleh

$$V_f(0,2\pi) = |\sin(\pi/2) - \sin(0)| + |\sin(3\pi/2) - \sin(\pi/2)| + |\sin(2\pi) - \sin(3\pi/2)|$$

$$= 4$$

Suatu fungsi yang didefinisikan pada $[a,b]$ disebut dengan variasi terbatas apabila $\sum_{k=1}^{n} |\Delta f_k|$ terbatas untuk setiap partisi dari $[a,b]$. Selanjutnya nilai supremum yang dinotasikan dengan V_f dinamakan variasi total dari fungsi tersebut pada $[a,b]$ yang ditentukan.

Setiap fungsi monoton pada $[a,b]$ merupakan fungsi dengan variasi terbatas pada $[a,b]$, dan fungsi itu terbatas pada $[a,b]$. Tetapi fungsi terbatas belum tentu merupakan fungsi dengan variasi terbatas.

Begitu juga dengan fungsi kontinu pada $[a,b]$, belum tentu dengan variasi terbatas pada [a,b]. Jika f kontinu, dan f' ada dan terbatas pada [a,b], maka f dengan variasi terbatas pada [a,b].

Di samping sifat-sifat di atas untuk fungsi dengan variasi terbatas, variasi f merupakan selang terjumlah; yakni untuk $c \in [a,b]$ berlaku $V_f(a,b) = V_f(a,c) + V_f(c,b)$.

Sifat ini membantu kita dalam menentukan variasi total dari sebuah fungsi dengan variasi terbatas.

Soal-soal untuk latihan.

Tunjukanlah apakah fungsi berikut merupakan vaiasi terbatas atau tidak.

1. $$f(x) = \begin{cases} x \cos(2\pi / x), & x \text{ selain } 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

2. $$f(x) = \begin{cases} \sin(2\Pi x), & x \text{ selain } 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

3. Buatlah contoh fungsi dengan variasi total

KETERKAITAN FUNGSI DENGAN HIMPUNAN TERHUBUNG

A. Materi Prasyarat.

Ada bermacam-macam sifat topologi himpunan pada $\mathbb{R}$, antara lain himpunan buka, himpunan tutup, himpunan terhubung, dan himpunan kompak. Dalam bab ini akan dibahas tentang himpunan terhubung di $\mathbb{R}$, kaitannya dengan suatu fungsi. Terlebih dahulu akan disajikan definisi dan teorema sebagai prasyarat untuk membahas himpunan terhubung di $\mathbb{R}$, kemudian dilanjutkan dengan pembahasan tentang definisi dan teorema yang berkaitan dengan himpunan terhubung di $\mathbb{R}$.

Berikut disajikan materi prasyarat untuk membahas tentang keterkaitan fungsi dengan himpunan terhubung di $\mathbb{R}$.

Definisi

Misal $p\in\mathbb{R}$ dan $\mathbb{E}\subseteq\mathbb{R}$.

a. Sebuah **neighborhood** dari **p** adalah $N_{\varepsilon}(p)=\{x\in\mathbb{R}: |x-p|<\varepsilon\}$ untuk suatu $\varepsilon>0$.

b. Jika untuk setiap $\varepsilon>0$ berlaku $N_{\varepsilon}(p)\cap\mathbb{E}-\{p\}\neq\emptyset$ maka **p titik limit** $\mathbb{E}$.

c. $\mathbb{E}$ **tutup** jika setiap titik limit $\mathbb{E}$ adalah titik di $\mathbb{E}$.

d. Jika ada $\varepsilon_{o}>0$ dan $N_{\varepsilon_{o}}(p)\subset\mathbb{E}$ maka **p titik interior** $\mathbb{E}$

e. $\mathbb{E}$ **buka** jika setiap titik di $\mathbb{E}$ adalah titik interior $\mathbb{E}$.

f. Jika $\mathbb{E}'$ himpunan titik limit $\mathbb{E}$ maka **closure** $\mathbb{E}$ adalah $\overline{\mathbb{E}}=\mathbb{E}\cup\mathbb{E}'$.

g. $\mathbb{E}$ **selang** jika $\mathbb{E}$ memuat paling sedikit dua titik yang berbeda, dan jika $a,b\in\mathbb{E}$ dan $x\in\mathbb{E}$ dengan $a<x<b$ maka $x\in\mathbb{E}$.

h. $f:\mathbb{E}\longrightarrow\mathbb{R}$, $p\in\mathbb{E}$. f **kontinu** di p jika untuk setiap $\varepsilon>0$ ada $\delta>0$ sedemikian sehingga jika $x\in N_\delta(p)\cap\mathbb{E}$ maka $f(x)\in N_\varepsilon(f(p))$.

Teorema 1

$\mathbb{E}\subseteq\mathbb{R}$, $p\in\mathbb{R}$. Jika p titik limit $\mathbb{E}$ maka untuk setiap $\varepsilon>0$, $N_\varepsilon(p)$ memuat sejumlah tak hingga titik di $\mathbb{E}$.

Bukti:

Andaikan ada $N_\varepsilon(p)$ yang hanya memuat sejumlah hingga titik di $\mathbb{E}$, yaitu x_1, x_2, ..., x_n, dengan $x_i\neq p$. Misal $\varepsilon_o=\min\{|p-x_i|:x_i\neq p$ dan $i=1,2,\ldots,n\}$, berarti untuk $p\notin\mathbb{E}$ berlaku $N_{\varepsilon_o}(p)\cap\mathbb{E}=\emptyset$ atau jika $p\in\mathbb{E}$ maka $N_{\varepsilon_o}(p)\cap\mathbb{E}$ mempunyai unsur tunggal yaitu p sendiri. Kontradiksi dengan p titik limit $\mathbb{E}$.

Teorema 2

$\mathbb{E}\subseteq\mathbb{R}$, $\mathbb{E}$ buka jika dan hanya jika $\mathbb{E}^c$ tutup.

Bukti:

($\Leftarrow$) Andaikan $\mathbb{E}$ tidak buka, berarti ada $x_o\in\mathbb{E}$ dan x_o bukan titik interior $\mathbb{E}$, oleh karena itu untuk setiap $\varepsilon>0$, $N_\varepsilon(x_o)\not\subset\mathbb{E}$. Jadi $N_\varepsilon(x_o)\cap\mathbb{E}^c-\{x_o\}\neq\emptyset$. Disimpulkan x_o titik limit $\mathbb{E}^c$. Karena $\mathbb{E}^c$ tutup maka $x_o\in\mathbb{E}^c$. Kontradiksi dengan $x_o\in\mathbb{E}$. Pengandaian salah, haruslah $\mathbb{E}$

buka.

$(\Longleftarrow)$ Andaikan $\mathbb{E}^c$ tidak tutup, berarti ada x_o titik limit $\mathbb{E}^c$ dan $x_o \notin \mathbb{E}^c$. Karena $\mathbb{E}$ buka dan $x_o \in \mathbb{E}$ berarti x_o titik interior $\mathbb{E}$. Jadi ada $\varepsilon_o > 0$ dan $N_{\varepsilon_o}(x_o) \subseteq \mathbb{E}$. Dapat Disimpulkan $N_{\varepsilon_o}(x_o) \cap \mathbb{E}^c - \{x_o\} = \emptyset$. Kontradiksi dengan x_o titik limit $\mathbb{E}^c$. Pengandaian salah, haruslah $\mathbb{E}^c$ tutup.

Teorema 3

$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ kontinu. $\mathbb{E} \subseteq \mathbb{R}$. Jika $\mathbb{E}$ buka maka $f^{-1}(\mathbb{E})$ buka.

Bukti:

Jika $f^{-1}(\mathbb{E}) = \emptyset$ maka $f^{-1}(\mathbb{E})$ adalah buka, karena $\emptyset$ buka. Jika $f^{-1}(\mathbb{E}) \neq \emptyset$, akan dibuktikan untuk setiap $x \in f^{-1}(\mathbb{E})$, x adalah titik interior $f^{-1}(\mathbb{E})$. Ambil $x \in f^{-1}(\mathbb{E})$ sebarang berarti $f(x) \in \mathbb{E}$, $\mathbb{E}$ buka berarti ada $\varepsilon_o > 0$ dan $N_{\varepsilon_o}(f(x)) \subset \mathbb{E}$. $x \in \mathbb{R}$ maka f kontinu di x, artinya untuk setiap $\varepsilon > 0$ ada $\delta > 0$ sedemikian sehingga jika $x \in N_\delta(x)$ maka $f(x) \in N_\varepsilon(f(x))$. Jadi untuk $\varepsilon_o > 0$ ada $\delta_o > 0$ sedemikian sehingga jika $y \in N_{\delta_o}(x)$ maka $f(y) \in N_{\varepsilon_o}(f(x))$. Karena $N_{\varepsilon_o}(f(x)) \subset \mathbb{E}$ maka $f(y) \in \mathbb{E}$ karenanya $y \in f^{-1}(\mathbb{E})$. Diperoleh jika $y \in N_{\delta_o}(x)$ maka $y \in f^{-1}(\mathbb{E})$ dengan kata lain $N_{\delta_o}(x) \subset f^{-1}(\mathbb{E})$. Karena untuk setiap $x \in f^{-1}(\mathbb{E})$ ada

$\delta_o > 0$ dan $N_{\delta_o}(x) \subset f^{-1}(\mathbb{E})$. Disimpulkan x titik interior $f^{-1}(\mathbb{E})$.

Teorema 4

$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ kontinu. $\mathbb{E} \subseteq \mathbb{R}$. Jika $\mathbb{E}$ tutup maka $f^{-1}(\mathbb{E})$ tutup.

Bukti:

Misal $\mathbb{F} = \mathbb{E}^c$, $\mathbb{E}$ tutup maka $\mathbb{F}$ buka. Karena f kontinu dan $\mathbb{F}$ buka maka $f^{-1}(\mathbb{F})$ buka. Padahal $f^{-1}(\mathbb{F}) = (f^{-1}(\mathbb{E}))^c$. Berarti $f^{-1}(\mathbb{E})$ tutup.

Teorema 5

Jika $\mathbb{E} \subseteq \mathbb{R}$, $\mathbb{E} \neq \emptyset$ dan terbatas maka sup $\mathbb{E} \in \bar{\mathbb{E}}$.

Bukti:

Karena $\mathbb{E} \neq \emptyset$ dan terbatas maka $\mathbb{E}$ mempunyai supremum, misal $a = \sup \mathbb{E}$. Jika $a \in \mathbb{E}$ jelas $a \in \bar{\mathbb{E}}$. Jika $a \notin \mathbb{E}$, karena $a = \sup \mathbb{E}$ berarti untuk setiap $\varepsilon > 0$, $N_\varepsilon(a)$ pasti memuat titik di $\mathbb{E}$. Jadi a titik limit $\mathbb{E}$, dengan kata lain $a \in \mathbb{E}'$. Jadi $a \in \bar{\mathbb{E}}$.

Teorema 6

Jika $\mathbb{E} \subseteq \mathbb{R}$ maka a. $\bar{\mathbb{E}}$ tutup

b. $\mathbb{E} = \bar{\mathbb{E}}$ jhj $\mathbb{E}$ tutup.

c. jika $\mathbb{E} \subseteq \mathbb{F}$, F tutup maka $\bar{\mathbb{E}} \subseteq \mathbb{F}$

Bukti:

a. Akan dibuktikan $\overline{\mathbb{E}}^c$ buka. Misal $p\in\overline{\mathbb{E}}^c$ berarti $p\notin\overline{\mathbb{E}}$ ($p\notin\mathbb{E}$ dan $p\notin\mathbb{E}'$). Jika $p\notin\mathbb{E}'$, maka ada $\varepsilon_o>0$ dan $N_{\varepsilon_o}(p)\cap\mathbb{E}-\{p\}=\emptyset$. Karena $p\notin\mathbb{E}$ maka $N_{\varepsilon_o}(p)\cap\mathbb{E}=\emptyset$. $N_{\varepsilon_o}(p)$ tidak memuat titik limit $\mathbb{E}$, karena jika $N_{\varepsilon_o}(p)$ memuat titik limit $\mathbb{E}$ maka $N_{\varepsilon_o}(p)$ memuat tak berhingga banyak titik di $\mathbb{E}$ (teo I1). Jadi $N_{\varepsilon_o}(p)\cap\mathbb{E}'=\emptyset$. Karena $N_{\varepsilon_o}(p)\cap\mathbb{E}=\emptyset$ dan $N_{\varepsilon_o}(p)\cap\mathbb{E}'=\emptyset$ maka $N_{\varepsilon_o}(p)\cap\overline{\mathbb{E}}=\emptyset$ atau $N_{\varepsilon_o}(p)\subset\overline{\mathbb{E}}^c$, Karena jika $p\in(\overline{\mathbb{E}})^c$ maka ada $\varepsilon_o>0$ dan $N_{\varepsilon_o}(p)\subset\overline{\mathbb{E}}^c$, dapat disimpulkan $\overline{\mathbb{E}}^c$ buka, artinya $\overline{\mathbb{E}}$ tutup (teo I2)

b. ($\Longrightarrow$) $\mathbb{E}=\overline{\mathbb{E}}$ menurut a. $\mathbb{E}$ tutup.

($\Longleftarrow$) Jika $\mathbb{E}$ tutup maka $\mathbb{E}'\subset\mathbb{E}$, berarti $\overline{\mathbb{E}}=\mathbb{E}\cup\mathbb{E}'=\mathbb{E}$.

c. Jika p titik limit $\mathbb{E}$ maka p titik limit $\mathbb{F}$. Jadi $\mathbb{E}'\subseteq\mathbb{F}'$. Karena $\mathbb{F}$ tutup maka $\mathbb{F}'\subseteq\mathbb{F}$ berarti $\mathbb{E}'\subseteq\mathbb{F}$. Karena $\mathbb{E}',\mathbb{E}\subseteq\mathbb{F}$ maka $\overline{\mathbb{E}}\subseteq\mathbb{F}$.

B. KETERKAITAN FUNGSI DENGAN HIMPUNAN TERHUBUNG

Definisi 1

$\mathbb{A},\mathbb{B}\subseteq\mathbb{R}$. $\mathbb{A}$ dan $\mathbb{B}$ **terpisah** jika $\overline{\mathbb{A}}\cap\mathbb{B}=\emptyset$ dan $\mathbb{A}\cap\overline{\mathbb{B}}=\emptyset$. Selanjutnya $\mathbb{E}\subseteq\mathbb{R}$, $\mathbb{E}$ **terhubung** jika $\mathbb{E}\neq\mathbb{A}\cup\mathbb{B}$, untuk setiap $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$ terpisah dan $\mathbb{A},\mathbb{B}\neq\emptyset$.

Perhatikan, jika dua himpunan terpisah maka dua himpunan tersebut saling asing, karena: misal $\mathbb{A}$ dan $\mathbb{B}$ dua himpunan terpisah, berarti $\overline{\mathbb{A}}\cap\mathbb{B}=\emptyset$ dan $\mathbb{A}\cap\overline{\mathbb{B}}=\emptyset$. Jadi $(\mathbb{A}\cup\mathbb{A}')\cap\mathbb{B}=\emptyset$, akibatnya $\mathbb{A}\cap\mathbb{B}=\emptyset$, disimpulkan $\mathbb{A}$ dan $\mathbb{B}$ saling asing. Tetapi tidak berlaku sebaliknya, yaitu dua himpunan saling asing belum tentu terpisah.

Perhatikan contoh berikut:

a. $\mathbb{A} = (0,1)$ dan $\mathbb{B} = (1,2)$. $\overline{\mathbb{A}}=[0,1]$; $\overline{\mathbb{B}}=[1,2]$

Karena $\overline{\mathbb{A}}\cap\mathbb{B}=\emptyset$ dan $\mathbb{A}\cap\overline{\mathbb{B}}=\emptyset$ maka $\mathbb{A}$ dan $\mathbb{B}$ terpisah. Dan $\mathbb{A}\cap\mathbb{B}=\emptyset$, karenanya $\mathbb{A}$ dan $\mathbb{B}$ saling asing.

b. $\mathbb{A} = (0,1)$ dan $\mathbb{B} = [1,2)$. $\overline{\mathbb{A}}=[0,1]$; $\overline{\mathbb{B}}=[1,2]$

Karena $\mathbb{A}\cap\mathbb{B}=\emptyset$ maka $\mathbb{A}$ dan $\mathbb{B}$ saling asing, tetapi tidak terpisah karena $\overline{\mathbb{A}}\cap\mathbb{B}=\{1\}\neq\emptyset$.

Contoh: (terhubung dan tidak terhubung)

a. $\emptyset$ himpunan terhubung, sebab; Andaikan $\emptyset$ tidak terhubung, berarti $\emptyset=\mathbb{A}\cup\mathbb{B}$ untuk suatu $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$ terpisah dan $\mathbb{A},\mathbb{B}\neq\emptyset$. Karena $\mathbb{A},\mathbb{B}\neq\emptyset$ berarti ada $a\in\mathbb{A}$ dan $b\in\mathbb{B}$. Disimpulkan $\emptyset=\mathbb{A}\cup\mathbb{B}$ memuat paling sedikit dua unsur. Jadi $\emptyset$ mempunyai suatu unsur, kontradiksi dengan $\emptyset$ tidak mempunyai unsur. Pengandaian salah, haruslah $\emptyset$ terhubung.

b. Himpunan dengan unsur tunggal adalah himpunan terhubung, sebab; Misal $\mathbb{T}=\{p\}$ untuk suatu $p\in\mathbb{R}$. Andaikan $\mathbb{T}$ tidak terhubung berarti $\mathbb{T}=\mathbb{A}\cup\mathbb{B}$ untuk suatu $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$ terpisah dan $\mathbb{A},\mathbb{B}\neq\emptyset$. $\mathbb{A},\mathbb{B}\neq\emptyset$ berarti ada $a\in\mathbb{A}$ dan $b\in\mathbb{B}$. Karena $\mathbb{A}\cap\mathbb{B}=\emptyset$ maka

$a\neq b$. Jadi $\mathbb{T}=\mathbb{A}\cup\mathbb{B}$ memuat paling sedikit dua unsur yang berbeda. Kontradiksi dengan $\mathbb{T}$ hanya terdiri dari satu unsur.

c. $\mathbb{E}=(-\ ,\frac{3}{2})\cup(\frac{3}{2},\ )$ tidak terhubung. Karena $\mathbb{E}=\mathbb{A}\cup\mathbb{B}$, $\mathbb{A}=(-\ ,\frac{3}{2})$ dan $\mathbb{B}=(\frac{3}{2},\ )$ dua himpunan terpisah.

d. $\mathbb{N}=\{n \mid n$ bilangan asli$\}$ tidak terhubung. Karena $\mathbb{N}=\mathbb{A}\cup\mathbb{B}$, $A=\{1\}$ dan $\mathbb{B}=\mathbb{N}-\{1\}$ dua himpunan terpisah.

Sebuah himpunan terhubung di $\mathbb{R}$ selain himpunan kosong dan himpunan dengan unsur tunggal mempunyai bentuk sederhana yang khusus yaitu berupa selang seperti dinyatakan dalam teorema berikut.

Teorema 1

$\mathbb{E}\subseteq\mathbb{R}$, $\mathbb{E}\neq\emptyset$, $\mathbb{E}$ bukan himpunan tunggal; $\mathbb{E}$ terhubung jika dan hanya jika $\mathbb{E}$ selang

Bukti:

$(\Longrightarrow)$ Ingat pada suatu selang $\mathbb{E}$, jika $x,y\in\mathbb{E}$; $x<y$ dan untuk setiap z dengan $x<z<y$ maka $z\in\mathbb{E}$. Jika $\mathbb{E}$ bukan selang berarti ada $x,y\in\mathbb{E}$ dan z, $x<z<y$ dan $z\notin\mathbb{E}$. Jadi $\mathbb{E}=\mathbb{A}_z\cup\mathbb{B}_z$,

$\mathbb{A}_z=\mathbb{E}\cap(-\ ,z)$

$\mathbb{B}_z=\mathbb{E}\cap(z,\ )$.

Karena $x\in\mathbb{A}_z$ dan $y\in\mathbb{B}_z$ maka $\mathbb{A}_z\neq\emptyset$, $\mathbb{B}_z\neq\emptyset$; Karena $\mathbb{A}_z\subset(-\ ,z)$, $\mathbb{B}_z\subset(z,\ )$ dan $(-\ ,z)$ & $(z,\ )$ terpisah maka $\mathbb{A}_z$ dan $\mathbb{B}_z$ terpisah. Karena ada $\mathbb{A}_z\neq\emptyset$, $\mathbb{B}_z\neq\emptyset$ yang terpisah dan $\mathbb{E}=\mathbb{A}_z\cup\mathbb{B}_z$ berarti $\mathbb{E}$ tidak terhubung.

($\Leftarrow$) Jika $\mathbb{E}$ tidak terhubung, $\mathbb{E}=\mathbb{A}\cup\mathbb{B}$ dengan $\mathbb{A}\neq\emptyset$, $\mathbb{B}\neq\emptyset$ dan terpisah. Ambil $x\in\mathbb{A}$, $y\in\mathbb{B}$ maka $x<y$ atau $y<x$. Asumsikan $x<y$, selanjutnya definisikan $z=\sup(\mathbb{A}\cap[x,y])$ berarti $z\in\overline{\mathbb{A}\cap[x,y]}$ (teo 15) sehingga $z\in\overline{\mathbb{A}}$. Karena $\overline{\mathbb{A}}\cap\mathbb{B}=\emptyset$ disimpulkan $z\notin\mathbb{B}$. Karena $y\in\mathbb{B}$ disimpulkan $x\leq z<y$. Jadi $z\notin\mathbb{B}$ dan $x\leq z<y$. Jika $z\notin\mathbb{A}$, karena $x\in\mathbb{A}$ maka $x<z<y$ dan $z\notin\mathbb{E}$ (sebab $z\notin\mathbb{A}$ dan $z\notin\mathbb{B}$). Jika $z\in\mathbb{A}$, karena $\mathbb{A}\cap\overline{\mathbb{B}}=\emptyset$ maka $z\notin\overline{\mathbb{B}}$. Berarti z bukan titik limit $\mathbb{B}$ dan $z\notin\mathbb{B}$. Karena $z\notin\overline{\mathbb{B}}$ maka ada $z_1\notin\mathbb{B}$ dan $z<z_1<y$. Karena $z=\sup(\mathbb{A}\cap[x,y])$ dan $z<z_1$, $z_1\in[x,y]$ maka $z_1\notin\mathbb{A}$. Dengan demikian $z_1\notin\mathbb{E}$ dan $x<z_1<y$. Jadi $\mathbb{E}$ bukan selang. Karena jika $\mathbb{E}$ tidak terhubung maka $\mathbb{E}$ bukan selang, dapat disimpulkan jika $\mathbb{E}$ selang maka $\mathbb{E}$ terhubung.

Contoh:

a. $\mathbb{A}=(1,3)$, $\mathbb{B}=(3,4)$; $\mathbb{C}=\mathbb{A}\cup\mathbb{B}$ bukan selang, jadi $\mathbb{C}$ tidak terhubung.

b. $\mathbb{A}=(2,3]$ adalah selang, jadi $\mathbb{A}$ terhubung.

Teorema 2

$\mathbb{E}\subseteq\mathbb{R}$. Jika $\mathbb{E}$ terhubung maka $\overline{\mathbb{E}}$ terhubung.

Bukti:

Jika $\mathbb{E}$ tutup maka $\mathbb{E}=\overline{\mathbb{E}}$ (teo 6.b.), karena $\mathbb{E}$ terhubung maka $\overline{\mathbb{E}}$ terhubung. Jika $\mathbb{E}$ tidak tutup, berarti ada p titik limit $\mathbb{E}$ dan $p\notin\mathbb{E}$. Akan dibuktikan $\overline{\mathbb{E}}$ terhubung yaitu jika $\overline{\mathbb{E}}=\mathbb{A}\cup\mathbb{B}$; $\mathbb{A}\neq\emptyset$, $\mathbb{B}\neq\emptyset$ maka $\overline{\mathbb{A}}\cap\mathbb{B}\neq\emptyset$ atau $\mathbb{A}\cap\overline{\mathbb{B}}\neq\emptyset$. Misal $\mathbb{H}=\mathbb{E}'-\mathbb{E}$, karena

$\overline{E}=E'\cup E$ maka $E=\overline{E}-H$. Karena $\overline{E}=A\cup B$ maka $E=(A\cup B)-H$ = $(A-H)\cup(B-H)$ = $A_1\cup B_1$, $A_1=A-H$

$B_1=B-H$

Jika $A_1=A-H=\emptyset$ berarti A hanya terdiri dari titik limit E yang tidak di dalam E, sehingga $A\subset\overline{B}$ atau $A\cap\overline{B}=\emptyset$. Analog, jika $B_1=\emptyset$ maka $\overline{A}\cap B=\emptyset$. Disimpulkan jika $\overline{E}=A\cup B=A_1\cup B_1$; $A,B\neq\emptyset$, $A_1=A-H$, $B_1=B-H$ dan $A_1=\emptyset$, $B_1=\emptyset$ maka $A\cap\overline{B}=\emptyset$ atau $\overline{A}\cap B=\emptyset$.

Jika $A_1\neq\emptyset$, $B_1\neq\emptyset$ maka $\overline{A}_1\cap B_1\neq\emptyset$ atau $A_1\cap\overline{B}_1\neq\emptyset$, karena $E=A_1\cup B_1$ dan E terhubung. $A_1\subset A$ dan $B_1\subset B$ berarti $\overline{A}_1\subset\overline{A}$ dan $\overline{B}_1\subset\overline{B}$. Akibatnya $\overline{A}\cap B\neq\emptyset$ atau $A\cap\overline{B}\neq\emptyset$. Disimpulkan jika $\overline{E}=A\cup B=A_1\cup B_1$; $A,B\neq\emptyset$, $A_1=A-H$, $B_1=B-H$ dan $A_1\neq\emptyset$, $B_1\neq\emptyset$ maka $A\cap\overline{B}=\emptyset$ atau $\overline{A}\cap B=\emptyset$.

Telah ditunjukkan, jika $\overline{E}=A\cup B$; $A\neq\emptyset$, $B\neq\emptyset$ maka $\overline{A}\cap B\neq\emptyset$ atau $A\cap\overline{B}\neq\emptyset$. Dengan kata lain jika $\overline{E}$ dapat dinyatakan sebagai gabungan dua himpunan yang tidak kosong maka dua himpunan tersebut pasti tidak terpisah.

Contoh:

a. $E=(-1,3]$ terhubung berarti $\overline{E}=[-1,3]$ terhubung

Teorema 3

$f: E \longrightarrow \mathbb{R}$ fungsi kontinu, $E\subseteq\mathbb{R}$. Jika E terhubung maka $f(E)$ terhubung.

Bukti:

Andaikan $f(E)$ tidak terhubung, berarti $f(E)=A\cup B$ dengan $A\neq\emptyset$, $B\neq\emptyset$ dan $\overline{A}\cap B=\emptyset$, $A\cap\overline{B}=\emptyset$. Pandang himpunan $G=E\cap f^{-1}(A)$ dan

$\mathbb{H}=\mathbb{E}\cap f^{-1}(\mathbb{B})$. Maka $\mathbb{E}=\mathbb{G}\cup\mathbb{H}$ dengan $\mathbb{G}\neq\emptyset$, $\mathbb{H}\neq\emptyset$. Karena $\mathbb{A}\subset\overline{\mathbb{A}}$ maka $f^{-1}(\mathbb{A})\subset f^{-1}(\overline{\mathbb{A}})$. Karena $\mathbb{G}\subset f^{-1}(\mathbb{A})$ dan $f^{-1}(\mathbb{A})\subset f^{-1}(\overline{\mathbb{A}})$ maka $\mathbb{G}\subset f^{-1}(\overline{\mathbb{A}})$. Karena f kontinu dan $\overline{\mathbb{A}}$ tutup maka $f^{-1}(\overline{\mathbb{A}})$ tutup (teo I4). $\overline{\mathbb{G}}$ adalah himpunan terkecil yang memuat $\mathbb{G}$ (teo 18c), dan $f^{-1}(\overline{\mathbb{A}})$ himpunan tutup yang memuat $\mathbb{G}$, maka $\overline{\mathbb{G}}\subset f^{-1}(\overline{\mathbb{A}})$ atau $f(\overline{\mathbb{G}})\subset\overline{\mathbb{A}}$. Karena $\overline{\mathbb{A}}\cap\mathbb{B}=\emptyset$ maka $f(\overline{\mathbb{G}})\cap\mathbb{B}=\emptyset$. $f(\mathbb{H})=\mathbb{B}$ berarti $f(\overline{\mathbb{G}})\cap f(\mathbb{H})=\emptyset$ sehingga $\overline{\mathbb{G}}\cap\mathbb{H}=\emptyset$. Analog diperoleh $\mathbb{G}\cap\overline{\mathbb{H}}=\emptyset$. Jadi $\mathbb{G}$ dan $\mathbb{H}$ terpisah dan tidak kosong. Hal ini tidak mungkin terjadi karena $\mathbb{E}=\mathbb{G}\cup\mathbb{H}$ dan $\mathbb{E}$ terhubung. Pengandaian salah. Jadi haruslah $f(\mathbb{E})$ terhubung.

Contoh:

a. $f:\mathbb{E}\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=x+2$

   $\mathbb{E}=[0,4)$ terhubung maka $f(\mathbb{E})=[2,6)$ terhubung.

b. Jika f tidak kontinu dan $\mathbb{E}$ terhubung maka belum tentu $f(\mathbb{E})$ terhubung, misal $f:\mathbb{E}\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} x+2, & x\neq 3 \\ x & , x=3\end{cases}$

   $\mathbb{E}=[0,4)$ adalah terhubung, tetapi $f(\mathbb{E}) = [2,5)\cup\{3\}\cup(5,6]$ tidak terhubung.

c. f kontinu di $\mathbb{E}$, $f(\mathbb{E})$ terhubung apakah $\mathbb{E}$ terhubung?

Teorema 4

$f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ fungsi kontinu. Jika $f(a)<f(b)$, dan c suatu bilangan sehingga $f(a)<c<f(b)$ maka ada $p\in(a,b)$ sehingga $f(p)=c$.

Bukti:

$[a.b]$ terhubung, sehingga $f([a,b])$ terhubung (teo II.3) akibatnya $f([a,b])$ adalah selang (teoII.1). Karena $f(a)<c<f(b)$ dan $f([a,b])$ selang maka $c\in f([a,b])$; berarti terdapat $p\in(a,b)$ dengan $f(p)=c$.

Teorema 5

Jika $a\in\mathbb{R}^{+}$, $n\in\mathbb{N}$ maka ada $x\in\mathbb{R}$ dan $x^{n}=a$

Bukti:

Pandang $f(x)=x^{n}$ dengan $n\in N$. f adalah fungsi kontinu, $f(0)=0<a$, dan ada $b\in\mathbb{R}$ sedemikian sehingga $f(b)=b^{n}>a$. Karena f kontinu, f terdefinisi di $\mathbb{R}$, dan $\mathbb{R}$ terhubung maka $f(\mathbb{R})$ terhubung. Akibatnya $f(\mathbb{R})$ adalah selang. Karena $0,b^{n}\in f(\mathbb{R})$; $0<a<b^{n}$ dan $f(\mathbb{R})$ selang maka $a\in f(\mathbb{R})$, berarti ada $x\in\mathbb{R}$ dan $f(x)=x^{n}=a$.

Contoh: $3\in\mathbb{R}^{+}$, $2\in\mathbb{N}$ maka ada $x=\sqrt{3}\in\mathbb{R}$ dan $(\sqrt{3})^{2}=3$

Pada $\mathbb{R}$, yang merupakan himpunan terhubung adalah himpunan yang berupa selang, himpunan kosong, dan himpunan dengan unsur tunggal. Dan fungsi kontinu mengawetkan keterhubungan suatu himpunan artinya jika $f\colon \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{R}$ fungsi kontinu, $\mathbb{E}$ terhubung maka $f(E)$ juga terhubung. Teorema nilai antara adalah salah satu penerapan dari keterkaitan antara fungsi kontinu dan himpunan terhubung yang berupa selang tutup.

A. Pengertian

Pada perkuliahan Analisis Real I telah dibahas tentang barisan bilangan real. Di samping itu dibahas pula tentang cara untuk menguji kekonvergenan suatu barisan bilangan real, baik dengan menggunakan definisi maupun dengan menggunakan beberapa teorema. Bab ini akan membahas tentang *Barisan Fungsi* yang erat hubungannya dengan pemahaman tentang barisan bilangan real.

Barisan fungsi merupakan barisan yang suku-sukunya adalah fungsi bilangan real. Dalam membahas barisan fungsi, terkait juga dengan kekonvergenan dari suatu barisan fungsi, yakni konvergen titik demi titik (pointwise convergence) dan konvergen seragam (uniform convergence).

Definisi Barisan Fungsi

Jika untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ ada fungsi $f_n : A \longrightarrow \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$; maka (f_n) dikatakan *barisan fungsi* dari A ke $\mathbb{R}$.

Jadi, untuk setiap $x \in A$ dapat dibentuk barisan $(f_n(x))$ yang suku-sukunya berkorespondensi dengan nilai-nilai fungsi.

Untuk nilai $x \in A$ tertentu barisan $(f_n(x))$ mungkin konver-gen dan untuk nilai $x \in A$ yang lain barisan ini mungkin diver-gen. Untuk setiap $x \in A$ yang menyebabkan barisan $(f_n(x))$ kon- vergen, ada tunggal bilangan real yang ditunjukkan, yaitu $\lim (f_n(x))$. Secara umum nilai ini (jika ada) bergantung pada pemilihan titik $x \in A$.

B. Materi Pendukung

Untuk pembahasan materi ini, diperlukan beberapa teorema tentang barisan bilangan real sebagai pendukung, yaitu:

Teorema Kekonvergenan Barisan Bilangan Real

Misalkan $X = (x_n)$ barisan bilangan real, $x \in \mathbb{R}$

X konvergen ke $x \longleftrightarrow$

$(\forall\varepsilon>0)(\exists\ K(\varepsilon)\in\mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})\ n\geq K(\varepsilon) \longrightarrow |x_n - x| < \varepsilon$

Teorema Kekontinuan Fungsi

Misalkan $A \subseteq \mathbb{R}$, $f: A \longrightarrow \mathbb{R}$, $c \in A$

f kontinu pada c $\longleftrightarrow$

$(\forall\ \varepsilon > 0)(\exists\ \delta_\varepsilon>0)(\forall x\in A)\ |x-c| < \delta_\varepsilon \longrightarrow |f(x) - f(c)| < \varepsilon$

Teorema (Kriteria Kekonvergenan Barisan Cauchy)

Barisan bilangan real adalah konvergen jika dan hanya jika barisan tersebut barisan Cauchy

Teorema Limit

Jika $X = (x_n)$ barisan konvergen dan $a \leq x_n \leq b\ \forall n\in \mathbb{N}$, maka $a \leq \lim (x_n) \leq b$

C. Konvergen Titik-titik demi Titik

Definisi

Misalkan (f_n) barisan fungsi

$f_n : A \longrightarrow \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$, $f : A_o \longrightarrow \mathbb{R}$, $A_o \subseteq A$

Jika untuk setiap $x \in A_o$, barisan $(f_n(x))$ konvergen ke $f(x)$ di $\mathbb{R}$, maka dikatakan **barisan (f_n) konvergen ke f di A_o**.

Dalam kasus ini, f disebut limit dari barisan (f_n) di A_o. Jika fungsi f ada, maka dikatakan bahwa **barisan (f_n) konvergen di A_o**, atau (f_n) **konvergen titik demi titik di A_o**.

Simbol yang lazim untuk barisan (f_n) yang konvergen ke f di A_o adalah

$f = \lim (f_n)$ di A_o atau $f_n \longrightarrow f$ di A_o

Dapat juga ditulis seperti,

$f(x) = \lim (f_n(x))$ untuk $x \in A_o$ atau $f_n(x) \longrightarrow f(x)$ untuk $x \in A_o$

Ambil $x_1 \in A_o$ sebarang.

Barisan $(f_n(x_1))$ konvergen ke $f(x_1)$ di x_1

Contoh

(a) Tunjukkan bahwa $\lim (\frac{x}{n}) = 0$, untuk $x \in \mathbb{R}$

Jawab:

Misalkan $f_n(x) = \frac{x}{n}$ dan $f(x) = 0$, untuk $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$

$\lim (f_n(x)) = \lim (\frac{x}{n}) = x \lim (\frac{1}{n}) = 0$

(b) Hitung $\lim (x^n)$, untuk $x \in [0,1]$

Jawab:

Misalkan $g_n(x) = x^n$, untuk $x \in [0,1]$ dan $n \in \mathbb{N}$

* untuk $x=1$, maka $g_n(1) = 1$

Jadi, $g_n(1) \longrightarrow 1$

** untuk $x = 0$, maka $g_n(0) = 0$

Jadi, $g_n(0) \longrightarrow 0$

*** untuk $0 < x < 1$, $\lim (x^n) = 0$

Jadi, $g_n(x) \longrightarrow 0$

Dari *, ** dan *** disimpulkan bahwa

$$g(x) = \begin{cases} 0 & , 0 \le x < 1 \\ 1 & , x = 1 \end{cases}$$

Jadi, $g_n \longrightarrow g$ di $[0,1]$

(c) Tunjukkan bahwa $\lim \left(\frac{x^2 + nx}{n}\right) = x$ untuk $x \in \mathbb{R}$

Jawab:

Misalkan $h_n(x) = \frac{x^2 + nx}{n}$ dan $h(x) = x$, untuk $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$

$$h_n(x) = \frac{x^2 + nx}{n} = \frac{x^2}{n} + x$$

$$\lim (h_n(x)) = \lim \left(\frac{x^2}{n} + x\right) = \lim \left(\frac{x^2}{n}\right) + \lim x = 0+x = x$$

(d) Tunjukkan bahwa barisan $(f_n(x)) = (nx)$ untuk $x \in \mathbb{R}$ divergen.

Jawab:

$\lim (f_n(x)) = \lim (nx) = x \lim (n)$

Karena barisan (n) divergen, maka $\lim (n)$ tidak ada. Oleh karena itu $\lim (f_n(x))$ tidak ada.

Jadi, barisan $(f_n(x)) = (nx)$ untuk $x \in \mathbb{R}$ divergen.

Lemma

Misalkan (f_n) barisan fungsi

$f_n : A \longrightarrow \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$, $f : A_o \longrightarrow \mathbb{R}$, $A_o \subseteq A$

(f_n) konvergen ke f di A_o jika dan hanya jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ dan untuk setiap $x \in A_o$ ada bilangan asli $K(\varepsilon, x)$ sedemikian hingga untuk setiap $n \geq K(\varepsilon, x)$ maka $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

Perlu dicatat bahwa $K(\varepsilon, x)$ maksudnya adalah nilai $K(\varepsilon, x)$ bergantung kepada $\varepsilon > 0$ dan $x \in A_o$

Bukti:

Dari definisi diketahui bahwa (f_n) konvergen ke f di A_o jika dan hanya jika $\forall x \in A_o$ barisan $(f_n(x))$ konvergen ke $f(x)$ di $\mathbb{R}$.

Ambil $x \in A_o$ sebarang.

Barisan $(f_n(x))$ konvergen ke $f(x) \longleftrightarrow$

$(\forall \varepsilon > 0)(\exists K(\varepsilon, x) \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})\ n \geq K(\varepsilon, x) \longrightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

(Teorema I.2)

Berarti untuk sebarang $x \in A_o$ berlaku $(f_n(x))$ konvergen ke $f(x)$

$\longleftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists K(\varepsilon, x) \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})\ n \geq K(\varepsilon, x) \longrightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

Dengan demikian $(f_n(x))$ konvergen ke $f(x) \longleftrightarrow$

$(\forall \varepsilon > 0)(\forall x \in A_o)(\exists K(\varepsilon, x) \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})\ n \geq K(\varepsilon, x) \longrightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

Terbukti ∎

Contoh di atas, dapat dibuktikan dengan menggunakan Lemma ini, sebagai berikut:

(a) $\lim \left(\frac{x}{n}\right) = 0$, untuk $x \in \mathbb{R}$

Bukti:

Misalkan $f_n(x) = \frac{x}{n}$ dan $f(x) = 0$ untuk $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$.

Ambil $x \in \mathbb{R}$ sebarang.

Jika diberikan $\varepsilon > 0$ sebarang, pandang

$$|f_n(x) - f(x)| = \left|\frac{x}{n} - 0\right| < \left|\frac{x}{n}\right| = \frac{1}{n}|x| < \varepsilon$$

$$n > \frac{|x|}{\varepsilon}$$

Pilih $K(\varepsilon, x) = \left[\!\left[\frac{|x|}{\varepsilon} \right]\!\right] + 1$

Dengan demikian, untuk sebarang $\varepsilon > 0$ dan sebarang $x \in \mathbb{R}$

$(\exists\ K(\varepsilon,x)\in \mathbb{N})(\forall n\in\mathbb{N})\ n\geq K(\varepsilon,x)\ \longrightarrow\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

Oleh karena itu,

$(\forall\varepsilon>0)(\forall x\in\mathbb{R})(\exists\ K(\varepsilon,x)\in \mathbb{N})(\forall n\in\mathbb{N})n\geq K(\varepsilon,x)\longrightarrow|f_n(x)-f(x)| < \varepsilon$

Terbukti bahwa $\lim (\frac{x}{n}) = 0$, untuk $x \in \mathbb{R}$

(b) Tunjukkan bahwa

$$\lim (x^n) = \begin{cases} 0 & , 0 \leq x < 1 \\ 1 & , x = 1 \end{cases}$$

Bukti:

Untuk $x \in [0,1]$ dan $n \in \mathbb{N}$, misalkan $g_n(x) = x^n$ dan

$$g(x) = \begin{cases} 0 & , 0 \leq x < 1 \\ 1 & , x = 1 \end{cases}$$

Jika diberikan $\varepsilon > 0$ sebarang, tinjau tiga kasus:

(i) untuk $x = 0$

Pandang $|g_n(x) - g(x)| = |x^n - 0| < |0 - 0| < \varepsilon$

$0 < \varepsilon$

Pilih $K(\varepsilon,x) = 1$

Dengan demikian, untuk sebarang $\varepsilon>0$ dan $x = 0$,

$(\exists\ K(\varepsilon,x)\in \mathbb{N})(\forall n\in\mathbb{N})\ n\geq K(\varepsilon,x)\ \longrightarrow\ |g_n(x) - g(x)| < \varepsilon$

(ii) untuk $x = 1$

Pandang $|g_n(x) - g(x)| = |x^n - 1| = |1^n - 1| = 0 < \varepsilon$

Pilih $K(\varepsilon,x) = 1$

Dengan demikian, untuk sebarang $\varepsilon>0$ dan $x = 1$,

$(\exists\ K(\varepsilon,x)\in \mathbb{N})(\forall n\in\mathbb{N})\ n\geq K(\varepsilon,x) \longrightarrow |g_n(x) - g(x)| < \varepsilon$

(iii) untuk $0 < x < 1$

Ambil $x \in (0,1)$ sebarang.

Pandang $|g_n(x) - g(x)| = |x^n - 0| < |x^n| = x^n < \varepsilon$

$$n > \frac{\log \varepsilon}{\log x}$$

(karena $0<x<1$)

Pilih $K(\varepsilon,x) = \left[\!\left[\frac{\log \varepsilon}{\log x} \right]\!\right] + 1$

Dengan demikian, untuk sebarang $\varepsilon>0$ dan sebarang $x \in (0,1)$

$(\exists\ K(\varepsilon,x)\in \mathbb{N})(\forall n\in\mathbb{N})\ n\geq K(\varepsilon,x) \longrightarrow |g_n(x) - g(x)| < \varepsilon$

Dari (i) - (iii) terbukti bahwa

$$\lim (x^n) = \begin{cases} 0 & , 0 \leq x < 1 \\ 1 & , x = 1 \end{cases}$$

(c) $\lim \left(\frac{x^2 + nx}{n}\right) = x$, untuk $x \in \mathbb{R}$

Bukti:

Misalkan $h_n(x) = \frac{x^2 + nx}{n}$ dan $h(x) = x$, untuk $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Ambil $x \in \mathbb{R}$ sebarang

Jika diberikan $\varepsilon>0$ sebarang, pandang

$$|h_n(x) - h(x)| = \left|\frac{x^2 + nx}{n} - x\right| = \left|\frac{x^2}{n}\right| = \frac{x^2}{n} < \varepsilon$$

$$n > \frac{x^2}{}$$

ε

Pilih $K(\varepsilon,x) = \left[\!\left[\dfrac{x^2}{\varepsilon} \right]\!\right] + 1$

Dengan demikian, untuk sebarang $\varepsilon>0$ dan sebarang $x \in \mathbb{R}$

$(\exists\, K(\varepsilon,x) \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})\ n \geq K(\varepsilon,x) \longrightarrow |h_n(x) - h(x)| < \varepsilon$

Oleh karena itu,

$(\forall \varepsilon>0)(\forall x \in A_0)(\exists\, K(\varepsilon,x) \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})\ n \geq K(\varepsilon,x) \longrightarrow |h_n(x) - h(x)| < \varepsilon$

Terbukti bahwa $\lim \left(\dfrac{x^2 + nx}{n}\right) = x$, untuk $x \in \mathbb{R}$

D. Konvergen Seragam

- **Definisi**

Misalkan (f_n) barisan fungsi

$f_n : A \longrightarrow \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$, $f : A_0 \longrightarrow \mathbb{R}$, $A_0 \subseteq A$

(f_n) konvergen seragam ke f di A_0 jika untuk setiap $\varepsilon>0$ ada bilangan asli $K(\varepsilon)$ sedemikian hingga untuk setiap $n \geq K(\varepsilon)$ dan untuk setiap $x \in A_0$, maka $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

Perlu dicatat bahwa $K(\varepsilon)$ hanya bergantung pada ε.

Simbol (f_n) konvergen seragam ke f di A_0:

$f_n \rightrightarrows f$ di A_0 atau $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ untuk $x \in A_0$

Definisi di atas secara simbolik dapat ditulis sebagai berikut

$f_n \rightrightarrows f$ di $A_0 \longleftrightarrow$

$(\forall \varepsilon>0)(\exists\, K(\varepsilon) \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})\ n \geq K(\varepsilon) \longrightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon,\ \forall x \in A_0$

Secara geometri, jika (f_n) konvergen seragam ke f di A_o, maka setelah suku ke-$K(\varepsilon)$, grafik fungsi f_n terletak pada daerah yang dibatasi oleh grafik $f - \varepsilon$ dan $f + \varepsilon$.

Contoh

Diketahui $f_n(x) = \frac{x^n}{n}$ dan $f(x) = 0$ untuk $x \in [0,1]$, $n \in \mathbb{N}$.

Tunjukkan $f_n \rightrightarrows f$ di $[0,1]$

Bukti:

Diberikan $\varepsilon>0$ sebarang

Pandang $|f_n(x) - f(x)| = |\frac{x^n}{n} - 0| = |\frac{x^n}{n}| = \frac{x^n}{n}$

$$\leq \frac{1}{n}, \quad \forall x \in [0,1]$$

$$< \varepsilon$$

Jadi, $n > \frac{1}{\varepsilon}$

Pilih $K(\varepsilon) = \left[\!\left[\frac{1}{\varepsilon} \right]\!\right] + 1$

Dengan demikian, untuk sebarang $\varepsilon>0$,

$(\exists\, K(\varepsilon)\in\mathbb{N})(\forall n\in\mathbb{N})\ n\geq K(\varepsilon) \longrightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \quad \forall x \in [0,1]$

Oleh karena itu,

$(\forall \varepsilon>0)(\exists\, K(\varepsilon)\in\mathbb{N})(\forall n\in\mathbb{N})\ n\geq K(\varepsilon) \longrightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \quad \forall x \in [0,1]$

Jadi, $f_n \rightrightarrows f$ di $[0,1]$

Catatan:

Dari definisi dapat dipahami bahwa jika barisan (f_n) konvergen seragam ke f di A_o maka barisan ini juga konvergen titik demi titik ke f di A_o. Tetapi, sebaliknya tidak selalu berlaku. Sebelum membahas lemma berikut, akan didefinisikan sub barisan (f_{n_k}) dari (f_n).

Definisi Sub Barisan

Misalkan (f_n) barisan fungsi dan $n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots$ barisan bilangan asli naik kuat.

Barisan (f_{n_k}) di $\mathbb{R}$, yaitu $f_{n_1}, f_{n_2}, \ldots, f_{n_k}, \ldots$ disebut sub barisan dari (f_n).

Lemma

Misalkan (f_n) barisan fungsi

$f_n : A \longrightarrow \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$, $f : A_o \longrightarrow \mathbb{R}$, $A_o \subseteq A$

(f_n) tidak konvergen seragam ke f di A_o jika dan hanya jika ada $\varepsilon_o > 0$ dan ada sub barisan (f_{n_k}) dari (f_n) dan barisan (x_k) di A_o sedemikian hingga $|f_{n_k}(x_k) - f(x_k)| \geq \varepsilon_o$ untuk setiap $k \in \mathbb{N}$

Bukti

$(\longrightarrow)$ Menurut definisi, $f_n \rightrightarrows f$ di $A_o \longleftrightarrow$

$(\forall\varepsilon>0)(\exists\ K(\varepsilon) \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})\ n \geq K(\varepsilon) \longrightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon,\ \forall x \in A_o$

Berarati, (f_n) tidak konvergen seragam ke f di A_o $\longleftrightarrow$

$(\exists\ \varepsilon_o>0)(\forall\ K(\varepsilon) \in \mathbb{N})(\exists\ x_k \in A_o)\wedge(\exists\ n_k \in \mathbb{N})\ n_k \geq K(\varepsilon) \wedge$

$$|f_{n_k}(x_k) - f(x_k)| \geq \varepsilon_o,\ \forall k \in \mathbb{N}$$

Untuk $\varepsilon_o>0$, pilih $K(\varepsilon) = 1$

Misalkan $x_1 \in A_o$ dan $n_1 \in \mathbb{N} \ni n_1 \geq 1 \wedge |f_{n_1}(x_1) - f(x_1)| \geq \varepsilon_o$

$x_2 \in A_o$ dan $n_2 \in \mathbb{N} \ni n_2 \geq n_1+1>n_1 \wedge |f_{n_2}(x_2) - f(x_2)| \geq \varepsilon_o$

$x_3 \in A_o$ dan $n_3 \in \mathbb{N} \ni n_3 \geq n_2+1>n_2 \wedge |f_{n_3}(x_3) - f(x_3)| \geq \varepsilon_o$

$\vdots$

$x_k \in A_o$ dan $n_k \in \mathbb{N} \ni n_k \geq n_{k-1}+1>n_{k-1} \wedge |f_{n_k}(x_k) - f(x_k)| \geq \varepsilon_o$

Karena $n_1<n_2<n_3< \ldots <n_k< \ldots$ dan berlaku $\forall k \in \mathbb{N}$ maka terdapat barisan (x_k) di A_o dan sub barisan (f_{n_k}) dari (f_n) sedemikian hingga $|f_{n_k}(x_k) - f(x_k)| \geq \varepsilon_o$

$(\longleftarrow)$

Dari hipotesis diketahui bahwa ada $\varepsilon_o>0$ dan terdapat sub barisan (f_{n_k}) dari (f_n) dan barisan (x_k) di A_o sedemikian hingga $|f_{n_k}(x_k) - f(x_k)| \geq \varepsilon_o,\ \forall\ k \in \mathbb{N}$.

Akan ditunjukkan bahwa (f_n) tidak konvergen seragam ke f di A_o (dengan kontraposisi).

Andaikan (f_n) konvergen seragam ke f di A_o. Menurut definisi, untuk setiap $\varepsilon>0$ ada bilangan asli $K(\varepsilon)$ sedemikian hingga jika $n \geq K(\varepsilon)$ maka $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon,\ \forall x \in A_o$.

Artinya, setelah suku ke-K(ε), grafik fungsi f_n terletak pada daerah yang dibatasi oleh grafik $f - \varepsilon$ dan $f + \varepsilon$.

Hal ini bertentangan dengan hipotesis bahwa terdapat sub barisan (f_{n_k}) dari (f_n) dan barisan (x_k) di A_o sedemikian hingga $|f_{n_k}(x_k) - f(x_k)| \geq \varepsilon_o$, $\forall\ k \in \mathbb{N}$.

Jadi, haruslah (f_n) tidak konvergen seragam ke f di A_o

Terbukti ∎

Contoh

(a) Diketahui $\lim (\frac{x}{n}) = 0$, untuk $x \in \mathbb{R}$

Misalkan $f_n(x) = \frac{x}{n}$ dan $f(x) = 0$ untuk $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$.

Tunjukkan bahwa (f_n) tidak konvergen seragam ke 0, di $\mathbb{R}$

Jawab:

Jika $n_k = k$ dan $x_k = k$, maka $f_{n_k}(x_k) = 1$ dan $f(x_k) = 0$

Jadi, $|f_{n_k}(x_k) - f(x_k)| = |1 - 0| = 1$

Pilih $\varepsilon_o = 1$, ternyata ada sub barisan $(f_{n_k}(x_k)) = (1)$ dan barisan $(x_k) = (k)$ di $\mathbb{R}$ sedemikian hingga

$|f_{n_k}(x_k) - f(x_k)| \geq \varepsilon_o$, $\forall\ k \in \mathbb{N}$.

Dengan demikian barisan (f_n) tidak konvergen seragam ke f di $\mathbb{R}$.

(b) Diketahui $\lim (x^n) = \begin{cases} 0 & , 0 \leq x < 1 \\ 1 & , x = 1 \end{cases}$

Untuk $x \in [0,1]$ dan $n \in \mathbb{N}$, misalkan $g_n(x) = x^n$ dan

$$g(x) = \begin{cases} 0 & , 0 \le x < 1 \\ 1 & , x = 1 \end{cases}$$

Tunjukkan bahwa (g_n) tidak konvergen seragam ke g di $[0,1]$

Jawab:

Jika $n_k = k$ dan $x_k = (1/2)^{1/k}$, maka $g_{n_k}(x_k) = \frac{1}{2}$ dan

$$g(x_k) = \begin{cases} 0 & , 0 \le x < 1 \\ 1 & , x = 1 \end{cases}$$

Jadi, $|g_{n_k}(x_k) - g(x_k)| = |\frac{1}{2} - 0| = \frac{1}{2}$

Pilih $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}$, ternyata ada sub barisan $(g_{n_k}(x_k)) = (\frac{1}{2})$ dan barisan $(x_k) = ((1/2)^{1/k})$ di $[0,1]$ sedemikian hingga

$|g_{n_k}(x_k) - g(x_k)| \ge \varepsilon_0$, $\forall$ $k \in \mathbb{N}$.

Dengan demikian barisan (g_n) tidak konvergen seragam ke g di $[0,1]$

(c) $\lim \left(\frac{x^2 + nx}{n}\right) = x$, untuk $x \in \mathbb{R}$

Misalkan $h_n(x) = \frac{x^2 + nx}{n}$, dan $h(x) = x$, untuk $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$

Tunjukkan bahwa (h_n) tidak konvergen seragam ke h di $\mathbb{R}$

Jawab:

Jika $n_k = k$ dan $x_k = -k$, maka $h_{n_k}(x_k) = 0$ dan $h(x_k) = -k$

Jadi, $|h_{n_k}(x_k) - h(x_k)| = |0 - (-k)| = k$

Pilih $\varepsilon_0 = k$, ternyata ada sub barisan $(h_{n_k}(x_k)) = (0)$ dan barisan $(x_k) = (-k)$ di $\mathbb{R}$ sedemikian hingga

$|h_{n_k}(x_k) - h(x_k)| \geq \varepsilon_o, \forall\, k \in \mathbb{N}$.

Dengan demikian barisan (h_n) tidak konvergen seragam ke h di $\mathbb{R}$.

Teorema

Misalkan (f_n) barisan fungsi

$f_n : A \longrightarrow \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$, f_n fungsi kontinu di A_o, $A_o \subseteq A$ dan

$f : A_o \longrightarrow \mathbb{R}$,

Jika (f_n) konvergen seragam ke f di A_o, maka f fungsi kontinu di A_o.

Bukti:

Jika c bukan cluster point di A_o, maka f otomatis kontinu di c. Andaikan c cluster point di A_o.

* Ambil $c \in A_o$ sebarang.

Menurut teorema di atas, f_n kontinu di c $\longleftrightarrow$

$(\forall\varepsilon>0)(\exists\, \delta_\varepsilon>0)(\forall x\in A_o)\, |x-c|<\delta_\varepsilon \longrightarrow |f_n(x) - f_n(c)| < \frac{\varepsilon}{3} \ldots (1)$

Karena $c \in A_o$ sebarang, maka f_n kontinu di A_o.

* $f_n \rightrightarrows f$ di A_o $\longleftrightarrow$

$(\forall\varepsilon>0)(\exists\, K(\varepsilon)\in\mathbb{N})(\forall n\in\mathbb{N})\ n\geq K(\varepsilon) \longrightarrow |f_n(x)-f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}, \forall x\in A_o \ldots (2)$

Karena $c \in A_o$, berlaku juga

$(\forall\varepsilon>0)(\exists\, K(\varepsilon)\in\mathbb{N})(\forall n\in\mathbb{N})\ n\geq K(\varepsilon) \longrightarrow |f_n(c) - f(c)| < \frac{\varepsilon}{3}, c\in A_o \ldots (3)$

$\forall x\in A_o$ dengan $|x-c| < \delta_\varepsilon$, pandang

$$|f(x) - f(c)| = |f(x) - f_n(x) + f_n(x) - f_n(c) + f_n(c) - f(c)|$$
$$\le |f(x)-f_n(x)| + |f_n(x)-f_n(c)| + |f_n(c)-f(c)|$$
$$< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \qquad \text{(dari (1) - (3))}$$

Jadi, f kontinu pada c.

Karena $c \in A_o$ sebarang, maka f kontinu pada A_o.

Contoh

Pada contoh di atas telah ditunjukkan bahwa $(f_n(x)) = (\frac{x^n}{n})$ konvergen seragam ke $f(x) = 0$ di $[0,1]$

Jelas bahwa $f(x) = 0$ fungsi kontinu di $[0,1]$

Perlu digaris bawahi bahwa konvers teorema ini tidak selalu berlaku, perhatikan contoh yang telah ada.

. Teorema (Kriteria Cauchy untuk Konvergen Seragam)

Misalkan (f_n) barisan fungsi di $A \subseteq \mathbb{R}$

(f_n) konvergen seragam di A (ke suatu fungsi f) jika dan hanya jika untuk setiap $\varepsilon>0$, ada bilangan asli $H(\varepsilon)$ sedemikian hingga untuk setiap $m,n \ge H(\varepsilon)$ berlaku

$|f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon, \ \forall x \in A$ ....(1)

Dengan kata lain, jika barisan (f_n) konvergen seragam, maka (f_n) barisan Cauchy.

Bukti:

(i) ($\longrightarrow$)

$f_n \rightrightarrows f$ di A, artinya jika diberikan $\varepsilon > 0$ sebarang,

$(\exists\ H(\varepsilon) \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})\ n \geq H(\varepsilon) \longrightarrow |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2},\ \forall x \in A$

Jika $m \geq H(\varepsilon)$ maka dipenuhi juga $|f_m(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2},\ \forall x \in A$

Oleh karena itu, jika $m,n \geq H(\varepsilon)$ dan $x \in A$ sebarang,

$$\begin{aligned}\text{maka } |f_m(x) - f_n(x)| &= |f_m(x) - f(x) + f(x) - f_n(x)| \\ &\leq |f_m(x) - f(x)| + |f_n(x) - f(x)| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\end{aligned}$$

(ii) $(\longleftarrow)$

Misalkan (f_n) sebarang barisan fungsi di A.

Diketahui $(f_n(x))$ adalah barisan Cauchy, oleh karena itu, $(f_n(x))$ adalah barisan yang konvergen (Teorema I.4).

Definisikan $f: A \longrightarrow \mathbb{R}$ dengan

$$f(x) = \lim (f_n(x)),\ \forall x \in A \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Dari (1), untuk setiap $m,n \geq H(\varepsilon)$ dan $\forall x \in A$, berlaku

$|f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon$ yang dapat ditulis

$$\begin{aligned}|f_m(x) - f_n(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} &\longrightarrow f_m(x) - \frac{\varepsilon}{2} \leq f_n(x) \leq f_m(x) + \frac{\varepsilon}{2} \\ &\longrightarrow f_m(x) - \frac{\varepsilon}{2} \leq \lim(f_n(x)) \leq f_m(x) + \frac{\varepsilon}{2} \\ &\qquad\qquad \text{(Teorema I.5)} \\ &\longrightarrow f_m(x) - \frac{\varepsilon}{2} \leq f(x) \leq f_m(x) + \frac{\varepsilon}{2} \\ &\qquad\qquad \text{(dari (2))} \\ &\longrightarrow |f_m(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon\end{aligned}$$

Jadi, jika diberikan $\varepsilon > 0$ sebarang, $\exists\ H(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sedemikian hingga $(\forall m \in \mathbb{N})\ m \geq H(\varepsilon) \longrightarrow |f_m(x) - f(x)| < \varepsilon,\ \forall x \in A$.

Jika $n \geq m$, maka dipenuhi $(\forall n \in \mathbb{N}) n \geq H(\varepsilon) \longrightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \forall x \in A$.

Dengan demikian,

$(\forall \varepsilon > 0)(\exists\ H(\varepsilon) \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})\ n \geq H(\varepsilon) \longrightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon,\ \forall x \in A$

Terbukti (f_n) adalah barisan yang konvergen seragam di A (ke suatu fungsi f).

Dari (i) dan (ii) teorema terbukti.

Contoh

Buktikan bahwa $(f_n(x)) = (x + \frac{1}{n})$ konvergen seragam di $\mathbb{R}$ jika dan hanya jika (f_n) barisan Cauchy di $\mathbb{R}$

Bukti:

$(\longrightarrow)$ Diberikan $\varepsilon > 0$ sebarang

$$n \geq H(\varepsilon) \longrightarrow \frac{1}{n} \leq \frac{1}{H(\varepsilon)}$$

$$m \geq H(\varepsilon) \longrightarrow \frac{1}{m} \leq \frac{1}{H(\varepsilon)}$$

Ambil $x \in \mathbb{R}$ sebarang

Pandang
$$
\begin{aligned}
|f_n(x) - f_m(x)| &= |(x + \tfrac{1}{n}) - (x + \tfrac{1}{m})| \\
&= |\tfrac{1}{n} - \tfrac{1}{m}| \leq |\tfrac{1}{n}| + |\tfrac{1}{m}| \\
&= \tfrac{1}{n} + \tfrac{1}{m} \\
&\leq \frac{1}{H(\varepsilon)} + \frac{1}{H(\varepsilon)} \\
&= \frac{2}{H(\varepsilon)} < \varepsilon \\
H(\varepsilon) &> \frac{2}{\varepsilon}
\end{aligned}
$$

Pilih $H(\varepsilon) = \left[\!\left[\frac{2}{\varepsilon} \right]\!\right] + 1$

Dengan demikian, untuk sebarang $\varepsilon>0$, $\exists\ H(\varepsilon)\in\mathbb{N}$ sedemikian hingga $(\forall n,m\in\mathbb{N})\ n,m\geq H(\varepsilon) \longrightarrow |f_n(x)-f_m(x)| < \varepsilon,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Terbukti bahwa $(f_n(x))$ adalah barisan Cauchy

$(\longleftarrow)$

Diketahui $(f_n(x))$ barisan Cauchy, artinya jika diberikan $\varepsilon>0$ sebarang, ada $H(\varepsilon)\in\mathbb{N}$ sehingga untuk setiap $m,n \geq H(\varepsilon)$ berlaku $|f_m(x) - f_n(x)|<\varepsilon,\ \forall\ x\in\mathbb{R}$ ....(1)

Selanjutnya, karena $(f_n(x))$ adalah barisan Cauchy, maka $(f_n(x))$ adalah barisan yang konvergen.

Klaim $(f_n(x))$ konvergen ke $f(x) = x$, $\forall x\in\mathbb{R}$

Ambil $x\in\mathbb{R}$ sebarang, berarti $x = \lim\ (x + \frac{1}{n})$ .... (2)

$$m,n \geq H(\varepsilon) \longrightarrow |f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon,\ \forall\ x\in\mathbb{R} \qquad \text{(dari (1)}$$

$$\longrightarrow |(x + \tfrac{1}{m}) - (x + \tfrac{1}{n})| < \varepsilon$$

$$\longrightarrow |(x + \tfrac{1}{m}) - (x + \tfrac{1}{n})| \leq \tfrac{\varepsilon}{2}$$

$$\longrightarrow (x + \tfrac{1}{m}) - \tfrac{\varepsilon}{2} \leq x + \tfrac{1}{n} \leq (x + \tfrac{1}{m}) + \tfrac{\varepsilon}{2}$$

$$\longrightarrow (x + \tfrac{1}{m}) - \tfrac{\varepsilon}{2} \leq \lim\ (x + \tfrac{1}{n}) \leq (x + \tfrac{1}{m}) + \tfrac{\varepsilon}{2}$$

$$\longrightarrow (x + \tfrac{1}{m}) - \tfrac{\varepsilon}{2} \leq x \leq (x + \tfrac{1}{m}) + \tfrac{\varepsilon}{2}$$

(dari (2))

$$\longrightarrow |x - (x + \tfrac{1}{m})| \leq \tfrac{\varepsilon}{2}$$

$$\longrightarrow |f_m(x) - x| \leq \tfrac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

Jadi, jika diberikan $\varepsilon>0$ sebarang, $\exists\ H(\varepsilon)\in\mathbb{N}$ sedemikian hingga $(\forall m\in\mathbb{N})\ m\geq H(\varepsilon) \longrightarrow |f_m(x) - f(x)| < \varepsilon$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

Jika $n\geq m$, maka dipenuhi

$(\forall n \in \mathbb{N})\ n \geq H(\varepsilon) \longrightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon,\ \forall x \in \mathbb{R}$

Dengan demikian,

$(\forall \varepsilon > 0)(\exists\ H(\varepsilon) \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})\ n \geq H(\varepsilon) \longrightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon,\ \forall x \in \mathbb{R}$

Terbukti (f_n) adalah barisan yang konvergen seragam di A

Soal-soal Untuk Latihan

1. Buktikanlah

   $(f_n(x)) = (x + \frac{1}{n})$ konvergen ke $f(x) = x$, di $\mathbb{R}$.

2. Tunjukkanlah

   $\lim \left(\frac{x}{x + n} \right) = 0\ \forall x \in \mathbb{R},\ x \geq 0$

3. Perlihatkan bahwa jika $a > 0$, maka konvergen barisan no.1 adalah seragam pada interval $[0, a]$, tetapi tidak seragam pada interval $[0, \infty)$.

4. Perlihatkanlah $\lim \left(\frac{1}{n} \sin (nx+n) \right) = 0\ \forall x \in \mathbb{R}$

5. Tunjukkan bahwa $\lim \left(\frac{x}{1 + nx} \right) = 0\quad \forall\ x \in [0, \infty)$

6. Buktikanlah $\lim \left(\frac{x}{1 + nx} \right) = 0$, untuk $x \in [0, \infty)$

-----00000----

KEKONVERGENAN DERET TAKBERHINGGA

A. Pengantar

Sebuah paradoks yang terkenal kira-kira 2400 tahun yang lalu telah dikemukakan oleh Zeno dari Elea. Paradoks tersebut berbunyi bahwa manakala seorang pelari bertanding, ia tak mungkin dapat mengakhiri pertandingan itu untuk selamanya sebab waktu yang tersedia bagi pelari tersebut berhingga, sementara ia harus berlari melewati ruas-ruas jarak yang banyaknya takberhingga, yaitu harus berlari melewati setengah jarak, kemudian setengah sisa jarak, kemudian setengah jarak yang masih tersisa, dan seterusnya (Purcell, 1990: 10). Walaupun demikian, kita mengetahui bahwa pelari-pelari selalu dapat mengakhiri suatu pertandingan. Paradoks Zeno tersebut sempat menjadi perbincangan dan membingungkan ahli-ahli matematika selama 20 abad lebih.

Misalkan jarak yang harus ditempuh pelari dalam suatu pertandingan adalah 1 km. Ruas jarak dalam pikiran Zeno tentang hal ini adalah $\frac{1}{2}$ km, $\frac{1}{4}$ km, $\frac{1}{8}$ km, $\frac{1}{16}$ km, dan seterusnya. Mengakhiri pertandingan, berarti harus menghitung

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \dots \qquad (*)$$

Dapatkah kita menemukan hasil penjumlahan yang mempunyai suku-suku sebanyak takberhingga ? Menurut Purcell (1990: 10) jumlah telah didefinisikan hanya untuk suku-suku yang berhingga banyaknya, sedangkan untuk suku-suku yang takberhingga banyaknya sampai saat ini belum ada definisinya. Namun demikian, dengan adanya pengertian kekonvergenan suatu deret takberhingga yang diambil dari limit barisan jumlah parsialnya, maka permasalahan pada (*) dapat teratasi. Dan sejak ditemukannya kekonvergenan deret takberhingga tersebut, paradoks Zeno tidak lagi menjadi permasalahan di kalangan ahli-ahli matematika. Untuk mengetahui pengertian dan kekonvergenan deret takberhingga, sebaiknya pembaca mencermati bagian pembahasan.

Pada perkuliahan Analisis Real I telah dibahas tentang barisan bilangan real. Di samping itu, dibahas pula tentang cara untuk menyelidiki kekonvergenan suatu barisan bilangan real, baik dengan menggunakan definisi maupun dengan menggunakan beberapa teorema. Dalam tulisan ini akan dibahas tentang deret takberhingga (disingkat deret) yang dikembangkan dari konsep barisan bilangan real.

Misalkan $(x_n) = (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots)$ adalah suatu barisan bilangan real. Dari barisan ini, kita dapat membentuk suatu barisan jumlah parsial, yaitu barisan (s_n) dengan $s_n = \sum_{k=1}^{n} x_k = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$. Barisan (s_n) yang dibangun dari barisan (x_n) tersebut merupakan suatu deret tak berhingga.

Dengan demikian, jika kita ingin berbicara tentang deret takberhingga maka terlebih dahulu harus memahami tentang barisan.

Pada pembuktian teorema dalam buku ini, kerap kali penulis menggunakan beberapa definisi dan teorema yang ada dalam *Introduction to Real Analysis* khususnya pada pembahasan tentang barisan bilangan real (Chapter Three). Meskipun demikian, penulis tidak mencantumkan teorema tersebut dalam tulisan ini, sebab penulis berasumsi bahwa para pembaca telah mendalaminya lewat perkuliahan Analisis Real I.

B. Deret Tak Berhingga

Deret tak berhingga kadang-kadang *didefinisikan* untuk menyatakan bentuk berikut ini.

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + \dots + x_n + \dots$$

Menurut Bartle (1982: 323), *definisi* tersebut kurang jelas. Alasannya, sebab tidak ada nilai khusus yang dapat diberikan pada bentuk penjumlahan tersebut berdasarkan teori. Hal ini sejalan dengan pernyataan Purcell (1990: 10) bahwa sampai saat ini belum ada definisi tentang penjumlahan yang suku-sukunya sebanyak tak berhingga.

Pendefinisian deret takberhingga dalam tulisan ini mengacu pada definisi yang dikemukakan oleh Bartle (1982:

323), yaitu deret takberhingga adalah barisan jumlah-jumlah parsial. Secara lengkap definisi tersebut adalah sebagai berikut.

Definisi 1:

Jika $X = (x_n)$ adalah suatu barisan bilangan real maka deret takberhingga (disingkat deret) adalah barisan $S = (s_n)$ yang dibangun dari X dan didefinisikan oleh

$$
\begin{aligned}
s_1 &= x_1, & & \\
s_2 &= s_1 + x_2 & &(= x_1 + x_2), \\
s_3 &= s_2 + x_3 & &(= x_1 + x_2 + x_3), \\
&\cdots\cdots & & \\
s_n &= s_{n-1} + x_n & &(= x_1 + x_2 + \ldots + x_n), \\
&\cdots\cdots & &
\end{aligned}
$$

Unsur-unsur x_n dinamakan *suku-suku* dari deret, dan unsur-unsur s_n dinamakan *jumlah parsial* dari deret.

Untuk menotasikan suatu deret yang dibangun dari barisan (x_n), biasanya disimbol $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$, yaitu

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n + \ldots$$

dan jumlah parsialnya disimbol $\sum_{k=1}^{n} x_k$, yaitu

$$\sum_{k=1}^{n} x_k = x_1 + x_2 + \ldots + x_n .$$

Simbol deret tersebut diambil dari kekonvergenan barisan (s_n). Apabila $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ mempunyai jumlah, maka dikatakan bahwa deret tersebut konvergen dan barisan (s_n) mempunyai limit, yaitu $\lim (s_n) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$, dan sebaliknya (lebih jelasnya lihat Definisi 2). Bartle (1982: 324) mengemukakan bahwa *in actual practice, the use of this notation does not lead to confusion, provided it is understood that the convergence of the series must be established.* Berdasarkan hal itu, diharapkan para pembaca tidak bingung menelaah antara pengertian deret (pada Definisi 1) dengan penotasian tersebut, sebab barisan (s_n) berbeda dengan $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$. Perbedaan tersebut dapat dilihat pada hal berikut ini.

Misalkan $(x_n) = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ adalah barisan bilangan real. Deret (sesuai Definisi 1) adalah barisan (s_n) yaitu

$$(s_n) = (s_1, s_2, s_3, \ldots, s_n, \ldots)$$
$$= (x_1, x_1+x_2, x_1+x_2+x_3, \ldots, x_1+x_2+\ldots+x_n, \ldots)$$

Sedangkan

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n + \ldots .$$

Berdasarkan uraian yang telah dikemuakan di atas, maka penulisan suatu deret yang dibangun dari barisan bilangan real (x_n), cukup ditulis dalam bentuk $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ atau dalam bentuk $x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n + \ldots$.

Dari **Definisi 1** dapat diperoleh rumus x_n, yaitu

$$x_n = s_n - s_{n-1}$$

Berikut ini merupakan contoh-contoh deret.

(a) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$

(b) $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+3}$

Definisi 2:

Jika $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ adalah suatu deret dengan jumlah parsial $s_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$ maka deret tersebut dikatakan *konvergen* bilamana $\lim(s_n) = S$ (dalam hal ini S dinamakan *jumlah deret*, ditulis $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = S$). Dalam kasus $\lim\ (s_n)$ tidak ada, maka deretnya dinamakan *divergen*, dan deret tersebut tidak mempunyai jumlah.

Berdasarkan Definisi 2, dapat dikatakan bahwa kekonvergenan suatu deret ditentukan oleh kekonvergenan dari barisan jumlah parsialnya. Jika suatu deret konvergen ke S, maka barisan jumlah parsialnya juga konvergen ke S, dan sebaliknya. Dengan demikian, jumlah suatu deret merupakan nilai limit dari barisan jumlah parsialnya. Perhatikan contoh illustrasi berikut ini.

(i) Misalkan deret $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \sum_{n=1}^{\infty} ((-1)^n+(-1)^{n+1})$ dengan jumlah

parsial $s_n = \sum_{k=1}^{n} x_k = \sum_{k=1}^{n} ((-1)^k + (-1)^{k+1})$.

Diperoleh

$s_1 = -1+1 = 0,$

$s_2 = (-1+1) + (-1+1) = 0+0 = 0,$

$s_3 = (-1+1) + (-1+1) + (-1+1) = 0+0+0 = 0,$

$s_4 = (-1+1) + (-1+1) + (-1+1) + (-1+1) = 0+0+0+0 = 0,$

. . . .

Dengan demikian barisan jumlah parsial dari deret tersebut adalah

$(s_n) = (s_1, s_2, s_3, s_4, \ldots) = (0, 0, 0, 0, 0, \ldots)$

Sebagaimana kita ketahui bahwa $\lim (s_n) = 0$. (*)

Selanjutnya, pandang

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} x_n &= \sum_{n=1}^{\infty} ((-1)^n + (-1)^{n+1}) \\ &= (-1+1) + (-1+1) + (-1+1) + \ldots \\ &= 0 + 0 + 0 + \ldots \\ &= 0 \qquad (**)\end{aligned}$$

Dari (*) dan (**) terlihat bahwa $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = 0 = \lim (s_n)$.

(ii) Misalkan deret $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots$

dengan jumlah parsial $s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}$.

Diperoleh

$$s_1 = \frac{1}{2},$$

$$s_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4},$$

$$s_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8},$$

$$s_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{15}{16},$$

. . . .

$$s_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^n} = \frac{2^n - 1}{2^n}$$

. . . .

Dengan demikian barisan jumlah parsial dari deret tersebut adalah

$$(s_n) = (s_1, s_2, s_3, s_4, \ldots, s_n, \ldots)$$

$$= \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \frac{15}{16}, \ldots, \frac{2^n - 1}{2^n}, \ldots\right)$$

Dapat disimak bahwa jika n semakin besar, maka s_n semakin mendekati 1, atau dengan menngunakan teorema limit diperoleh $\lim (s_n) = \lim \left(\frac{2^n - 1}{2^n}\right) = \lim \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) = 1$.

Nilai $\lim (s_n)$ inilah didefinisikan sebagai jumlah deret.

Jadi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots = 1$.

Contoh

Selidiki kekonvergenan deret berikut ini.

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}$

Jawab:

(a) Pandang $x_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{(n+1)}$

$$x_1 = 1 - \frac{1}{2}$$

$$x_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$$

$$x_3 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$x_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{(n+1)}$$

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} x_k = x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 1 - \frac{1}{(n+1)}$$

Karena $\lim (s_n) = \lim \left(1 - \frac{1}{(n+1)}\right) = 1$, berarti $\lim (s_n)$ ada. Dengan demikian deret $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ konvergen.

(b) Pandang $x_n = \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}$

$$x_1 = 1 - \frac{1}{4}$$

$$x_2 = \frac{1}{4} - \frac{1}{9}$$

$$x_3 = \frac{1}{9} - \frac{1}{16}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$x_n = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}$$

$$\overline{} +$$

$$s_n = \sum_{k=1}^{\infty} x_k = x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 1 - \frac{1}{(n+1)^2}$$

Karena $\lim (s_n) = \lim \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right) = 1$, berarti $\lim (s_n)$ ada. Dengan demikian deret $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$ konvergen.

(c) Pandang deret $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}$.

Jumlah parsial dari deret tersebut adalah

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} x_k = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} = 1 + (-1) + 1 + \ldots + (-1)^{n+1}.$$

Sehingga

$$s_1 = 1,$$

$$s_2 = 1 + (-1) = 0,$$

$$s_3 = 1 + (-1) + 1 = 1,$$

$$s_4 = 1 + (-1) + 1 + (-1) = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Jadi barisan $(s_n) = (1, 0, 1, 0, 1, \ldots)$.

Dengan menggunakan Teorema 3.4.2 (Bartle, 1982: 96), dapat ditunjukkan bahwa barisan (s_n) tidak konvergen. Ini berarti barisan (s_n) tidak mempunyai limit.

Dengan demikian deret $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}$ divergen.

Untuk menyelidiki kekonvergenan suatu deret, tidak selalu kita dapat melakukan cara seperti pada jawaban **Contoh** sehingga kita harus mempunyai cara lain untuk keperluan tersebut. Beberapa di antaranya akan dibahas pada teorema-teorema berikut ini.

Teorema 1:

Jika deret $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ konvergen, maka $\lim (x_n) = 0$.

Bukti:

Diketahui deret $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ konvergen.

Misalkan $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = S$, dan misalkan $s_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$ menyatakan jumlah parsial dari deret, berarti $\lim (s_n) = S$ (Definisi 2).

Akan ditunjukkan bahwa $\lim (x_n) = 0$.

Karena $\lim (s_n) = S$, dengan menggunakan Teorema 3.1.9 (Bartle, 1982: 75) diperoleh $\lim (s_{n+1}) = S$.

•) $\lim (s_n) = S$ berarti

$(\forall \varepsilon > 0)(\exists K_1(\varepsilon) \in \mathbb{N})(\forall n)\ n \geq K_1(\varepsilon) \Longrightarrow |s_n - S| < \varepsilon/2$

•) $\lim (s_{n+1}) = S$ berarti

$(\forall \varepsilon > 0)(\exists K_2(\varepsilon) \in \mathbb{N})(\forall n)\ n \geq K_2(\varepsilon) \longrightarrow |s_{n+1} - S| < \varepsilon/2$

Pilih $K(\varepsilon) = \sup \left\{ K_1(\varepsilon),\ K_2(\varepsilon) \right\}$

Pandang

$$|x_{n+1}| = |s_{n+1} - s_n| = |S - s_n + s_{n+1} - S|$$
$$\le |S-s_n| + |s_{n+1} - S| = |s_n - S| + |s_{n+1} - S|$$
$$< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

bilamana $n \ge K(\varepsilon)$

Dengan demikian

$(\forall\ \varepsilon > 0)(\exists\ K(\varepsilon) \in \mathbb{N})(\forall n)\ n \ge K(\varepsilon) \Longrightarrow |x_{n+1} - 0| < \varepsilon$

Ini berarti $\lim\ (x_{n+1}) = 0$.

Karena $\lim\ (x_{n+1}) = 0$, dengan menggunakan Teorema 3.1.9 (Bartle, 1982: 75) diperoleh $\lim\ (x_n) = 0$. ■

Teorema 2:

(i) Jika $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = S$, dan $c \in \mathbb{R}$, maka $\sum_{n=1}^{\infty} cx_n = cS$, dan $\sum_{n=1}^{\infty} cx_n = c \sum_{n=1}^{\infty} x_n$.

(ii) Jika $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ divergen, dan $c \in \mathbb{R}$, $c \ne 0$, maka $\sum_{n=1}^{\infty} cx_n$ juga divergen.

Bukti:

(i) Diketahui $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = S$, dan $c \in \mathbb{R}$.

Akan ditunjukkan bahwa $\sum_{n=1}^{\infty} cx_n = cS$ dan $\sum_{n=1}^{\infty} cx_n = c \sum_{n=1}^{\infty} x_n$.

Misalkan jumlah parsial dari deret adalah $s_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$.

Karena $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = S$, maka $\lim (s_n) = S$.

Sehingga $\lim (cs_n) = c \lim (s_n) = cS$.

Akibatnya $\sum_{n=1}^{\infty} cx_n = c \sum_{n=1}^{\infty} x_n = cS$ (Definisi 2).

Dengan demikian $\sum_{n=1}^{\infty} cx_n = cS$ dan $\sum_{n=1}^{\infty} cx_n = c \sum_{n=1}^{\infty} x_n$. ■

(ii) Diketahui deret $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ divergen, dan $c \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$.

Akan ditunjukkan bahwa deret $\sum_{n=1}^{\infty} cx_n$ juga divergen.

Misalkan jumlah parsial dari deret adalah $s_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$.

Karena deret $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ divergen, maka $\lim (s_n)$ tidak ada.

Sehingga $\lim (cs_n)$ juga tidak ada, $c \neq 0$.

Ini berarti deret $\sum_{n=1}^{\infty} cx_n$ divergen. ■

Teorema 3:

(i) Jika $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = S$ dan $\sum_{n=1}^{\infty} y_n = T$, maka

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} (x_n + y_n) = S+T$ dan $\sum_{n=1}^{\infty} (x_n + y_n) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n + \sum_{n=1}^{\infty} y_n$,

dan

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} (x_n - y_n) = S-T$ dan $\sum_{n=1}^{\infty} (x_n - y_n) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n - \sum_{n=1}^{\infty} y_n$.

(ii) Jika $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = S$ dan $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ divergen, maka $\sum_{n=1}^{\infty} (x_n + y_n)$ divergen.

Bukti:

(i) Diketahui $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = S$ dan $\sum_{n=1}^{\infty} y_n = T$.

Akan ditunjukkan bahwa $\sum_{n=1}^{\infty} (x_n + y_n) = S + T$, dan

$$\sum_{n=1}^{\infty} (x_n + y_n) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n + \sum_{n=1}^{\infty} y_n .$$

Misalkan jumlah parsial dari deret $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ dan $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ berturut-turut adalah $s_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$ dan $t_n = \sum_{k=1}^{n} y_k$.

Karena $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = S$ dan $\sum_{n=1}^{\infty} y_n = T$, maka $\lim (s_n) = S$ dan $\lim (t_n) = T$.

Selanjutnya,

$$s_n + t_n = \sum_{k=1}^{n} x_k + \sum_{k=1}^{n} y_k$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (x_k + y_k)$$

hal ini menyatakan jumlah parsial dari deret $\sum_{n=1}^{\infty} (x_n+y_n)$.

Sehingga

$$\sum_{n=1}^{\infty} (x_n + y_n) = \lim (s_n + t_n)$$

$$= \lim (s_n) + \lim (t_n)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} x_n + \sum_{n=1}^{\infty} y_n$$

$$= S + T$$

Terbukti (a) ■

Bagian (b) dibuktikan dengan cara yang serupa. Hal ini diserahkan kepada pembaca.

(ii) Akan dibuktikan dengan kontradiksi.

Diketahui $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = S$, dan $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ divergen.

Andaikan deret $\sum_{n=1}^{\infty} (x_n + y_n)$ konvergen.

Misalkan $\sum_{n=1}^{\infty} (x_n + y_n) = T$.

Pandang $y_n = (x_n + y_n) - x_n$.

Dengan menggunakan Teorema 3(i) di atas, diperoleh

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} y_n &= \sum_{n=1}^{\infty} ((x_n + y_n) - x_n) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} ((x_n + y_n) - \sum_{n=1}^{\infty} x_n \\ &= T - S\end{aligned}$$

Hal ini menunjukkan bahwa deret $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ konvergen dengan jumlah T-S (kontradiksi dengan hipotesis).

Dengan demikian pengandaian salah.

Jadi haruslah deret $\sum_{n=1}^{\infty} (x_n + y_n)$ divergen. ■

Teorema 4:

Misalkan (x_n) adalah barisan bilangan real positif.

Maka Deret $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ konvergen jika dan hanya jika barisan $S = (s_n)$ dari jumlah parsial deret adalah terbatas. Dalam hal ini $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \lim (s_n) = \sup \{ s_n \}$.

Bukti:

Misalkan jumlah parsial dari deret adalah

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} x_k = x_1 + x_2 + \dots + x_n$$

Berarti

$$s_1 = x_1,$$
$$s_2 = x_1 + x_2,$$
$$s_3 = x_1 + x_2 + x_3,$$
$$\dots\dots\dots$$
$$s_n = x_1 + x_2 + \dots + x_n$$
$$\dots\dots\dots$$

Karena $x_n \geq 0$, maka

$$s_1 \leq s_2 \leq s_3 \leq \dots \leq s_n \leq \dots$$

Ini berarti barisan (s_n) monoton naik.

Karena deret $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ konvergen, maka $\lim (s_n)$ ada (Definisi 2), dan ini berarti barisan (s_n) konvergen.

Dengan menggunakan Monotone Convergence Theorem 3.3.2 (Bartle, 1982: 89), diperoleh bahwa barisan (s_n) konvergen jika dan hanya jika barisan (s_n) terbatas. Selanjutnya, karena (s_n) monoton naik, maka $\lim (s_n) = \sup \{ s_n \}$. (*)

Barisan (s_n) konvergen berarti deret $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ konvergen.

Dengan demikian, berdasarkan (*) diperoleh bahwa deret $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ konvergen jika dan hanya jika barisan (s_n) konvergen.

Selanjutnya berdasarkan Definisi 2 dan (*), diperoleh

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \lim (s_n) = \sup \left\{ s_n \right\}. \qquad \blacksquare$$

Teorema 5:

Misalkan deret $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ dan $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ masing-masing mempunyai suku-suku positif.

(i) Jika $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ konvergen dan terdapat $k \in \mathbb{R}$, $k > 0$ sedemikian hingga $x_n \le k y_n$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, maka $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ juga konvergen.

(ii) Jika $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ divergen dan terdapat $k \in \mathbb{R}$, $k > 0$ sedemikian hingga $x_n \ge k y_n$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, maka $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ juga divergen.

Bukti:

(i) Misalkan $s_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$ menyatakan jumlah parsial dari deret $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$, dan $t_n = \sum_{k=1}^{n} y_k$ menyatakan jumlah parsial dari deret $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$.

Karena deret $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ dan $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ masing-masing mempunyai suku-suku positif dan $x_n \le k y_n$ $\forall$ $n \in \mathbb{N}$, $k > 0$, maka berlaku

$$s_n \le k t_n \quad \forall n \in \mathbb{N},\ k > 0 \qquad (*)$$

Selanjutnya, karena deret $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ dan $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ masing-masing mempunyai suku-suku positif, maka barisan (s_n) dan (t_n) masing-masing monoton naik. (**)

Misalkan deret $\sum_{n=1}^{\infty} y_n = T$, berarti $\lim (t_n) = T$.

Karena barisan (t_n) konvergen ke T dan monoton naik, maka $T = \sup \left\{ t_n \right\}$.

Sehingga berdasarkan (*), diperoleh $s_n \le kT$ $\forall n \in \mathbb{N}$, $k>0$.

Hal ini menunjukkan bahwa barisan (s_n) terbatas. (***)

Dari (**) dan (***) disimpulkan bahwa barisan (s_n) konvergen, dan ini berarti bahwa deret $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ konvergen.

(ii) Misalkan $s_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$ menyatakan jumlah parsial dari deret $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$, dan $t_n = \sum_{k=1}^{n} y_k$ menyatakan jumlah parsial dari deret $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$.

Andaikan deret $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ konvergen, berarti barisan (s_n) konvergen.

Misalkan $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = S$, berarti $\lim (s_n) = S$.

Diketahui bahwa $x_n \ge k y_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$, $k > 0$.

$$\Longrightarrow \quad y_n \le \frac{1}{k} x_n \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ k > 0$$

$$\Longrightarrow \quad t_n \le \frac{1}{k}\, s_n \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ k > 0$$

$$\Longrightarrow \quad t_n \le \frac{1}{k}\, S \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ k > 0$$

Hal ini menunjukkan bahwa barisan (t_n) terbatas.

Menurut (**) pada (i), barisan (t_n) monoton naik.

Karena (t_n) barisan monoton naik dan terbatas, maka berdasarkan **Monoton Convergence Theorem** (Bartle, 1982: 89) disimpulkan bahwa barisan (t_n) konvergen. Ini berarti bahwa deret $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ konvergen. Hal ini kontradiksi dengan hipotesis bahwa deret $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ divergen.

Dengan demikian pengandaian salah.

Jadi haruslah deret $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ divergen. ■

Soal-soal Untuk Latihan.

Selidiki kekonvergenan dere[illegible] ini.

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n + 5}$

3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n + 15}$

4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{n}{4n + 3} + \frac{1}{n^2 + n} \right]$

5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

KEPUSTAKAAN

Apostol, Tom M. (1982). *Mathematical Analysis*. Second Edition. California: Addison-Wesley Publishing Company

Bartle, R.G. dan Sherbert, D.R. (1982). *Introduction to Real Analysis*. New York: John Wiley & Sons, Inc.

Goldberg, Richard R. (1976). *Methode of Real Analysis* Second Edition. Singapore : John Wiley & Sons.,

Giles, J.R. (1972). *Real Analysis, an Introductory Course*. Sydney: John Wiley & Sons Australasia Pty Ltd.

Martono, K. (1986). *Kalkulus dan Ilmu Ukur Analitik*. Jilid 2, Bandung: Angkasa.

Purcell, E.J. dan Varberg, D. (1990). *Kalkulus dan Geometri Analitis*. Jilid 2, Edisi IV, Jakarta : Erlangga.

Soedjadi, Yusuf Fuad. (1993). *Hand Out Analisis Real I*, Program Pascasarjana IKIP Surabaya.