MAKALAH

# GEOMETRI RUANG



Oleh :

Dra. Media Rosha, M.Si

Staf Pengajar Jurusan Pendidikan Matematika
Fakultas Pendidikan Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Institut Keguruan dan Ilmu Pendidikan Padang

---

Disampaikan pada Penataran Guru Matematika Tsanawiyah Negeri/Filial se-Sumbar, Riau, dan Jambi tanggal 15 September s.d 6 Oktober 1996

# G E O M E T R I  R U A N G

Geometri merupakan cabang matematika yang mempelajari titik, garis, bidang dan benda-benda ruang serta sifat-sifatnya, ukuran-ukurannya dan hubungannya satu sama lain. Geometri dapat dipandang sebagai pengetahuan yang mempelajari ruang, dan dikatakan bersifat spatial.

Makalah ini membahas tentang bangun ruang yang meliputi: balok, kubus, limas, prisma, tabung, kerucut, bola, dan bidang banyak beraturan. Pembahasannya hanya dibatasi pada luas, volume dan jaring-jaring bangun ruang tersebut.

## I. B A L O K

Definisi:

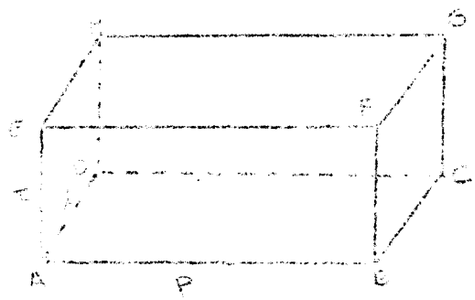
Balok adalah bangun ruang yang dibatasi oleh enam daerah persegi panjang, dimana sisi persegipanjang yang sehadap kongruen.

Balok terdiri dari 12 rusuk yang digolongkan dalam tiga kelompok. Setiap kelompok terdiri dari 4 rusuk yang sejajar dan sama panjang, ketiga kelompok tersebut mewakili ukuran balok yang sering dikatakan dengan panjang lebar dan tinggi. Jika panjang rusuk-rusuk yang bertemu pada satu titik sudut berturut-turut adalah p,l dan t satuan panjang, maka panjang diagonal ruangnya d satuan panjang.

$$d = \sqrt{p^2 + l^2 + t^2}$$

## A. Luas Balok

Sebuah balok dibatasi oleh enam daerah persegi panjang yang sepasang-sepasang kongruen. Berarti juga bahwa sebuah balok memiliki enam sisi yang sepasang - sepasang sama luasnya.




Gambar 1.1

Sisi-sisi berhadapan ABCD dan EFGH kongruen luasnya masing-masing (pxl) satuan luas = pl satuan luas.
Sisi-sisi berhadapan ABFE dan CDHG kongruen luasnya masing-masing (pxt) satuan luas = pt satuan luas.
Sisi-sisi berhadapan ADHE dan BCGF kongruen luasnya masing-masing (lxt) satuan luas = lt satuan luas.
Sehingga diperoleh:

Jumlah luas bidang alas dan bidang atas = 2pl

Jumlah luas semua bidang sisi tegak = 2pt + 2lt

Luas seluruh bidang sisi balok = (2pl + 2pt + 2lt) satuan luas

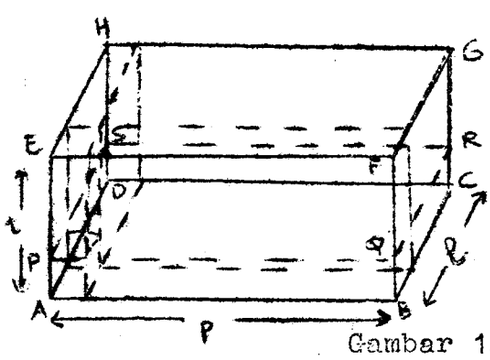
| Luas sisi balok seluruhnya = 2pt+2pl+2lt |
|---|

B. Volume Balok

Volume suatu bangun adalah banyaknya satuan volume yang dapat ditempati mengisi bagian ruang dari bangunnya.

Akan dihitung volume balok dengan panjang p, lebar l dan tinggi t, dengan langkah berikut:

1. Bagi rusuk AB menjadi p bagian yang masing-masing panjangnya 1 satuan. Kemudian melalui titik pembagi itu dibuat bidang-bidang yang sejajar dengan bidang sisi ADHE sehingga satu sama lain berjarak 1 satuan.
2. Bagi rusuk AD menjadi l bagian yang masing-masing panjangnya 1 satuan. Kemudian melalui titik pembagi itu dibuat bidang-bidang yang sejajar dengan bidang sisi ABFE, sehingga satu sama lainnya berjarak 1 satuan.
3. Bagi rusuk AE menjadi t bagian yang masing-masing panjangnya 1 satuan. Kemudian melalui titik-titik pembagi itu dibuat bidang-bidang yang sejajar dengan ABCD sehingga satu sama lain jaraknya 1 satuan.



Gambar 1.2

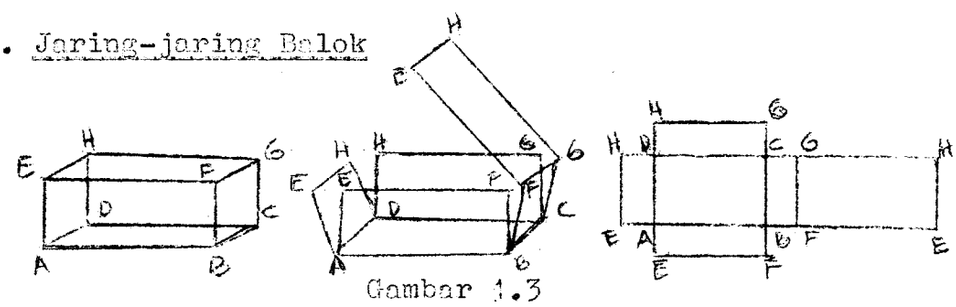
Dengan langkah-langkah tersebut diperoleh:

1. Bidang alas ABCD yang merupakan daerah persegi panjang terbagi menjadi (pxl) buah daerah bujursangkar satuan luas yang sisinya 1 satuan
2. Balok ABCD.PQRS yang tingginya 1 satuan terbagi menjadi (pxl) buah kubus satuan volume, atau dengan perkataan lain balok ABCD.PQRS memuat (pxl) buah satuan volume.
3. Balok ABCD.EFGH terbagi menjadi t buah balok kecil yang masing-masing kongruen dengan balok ABCD.PQRS. Dengan demikian balok ABCD.EFGH memuat sebanyak tx(pxl) buah kubus satuan volume atau sama dengan (pxlxt) buah satuan volume.

Volume balok ABCD.EFGH = p x l x t satuan volume

$$\boxed{\text{Volume balok} = pxlxt}$$

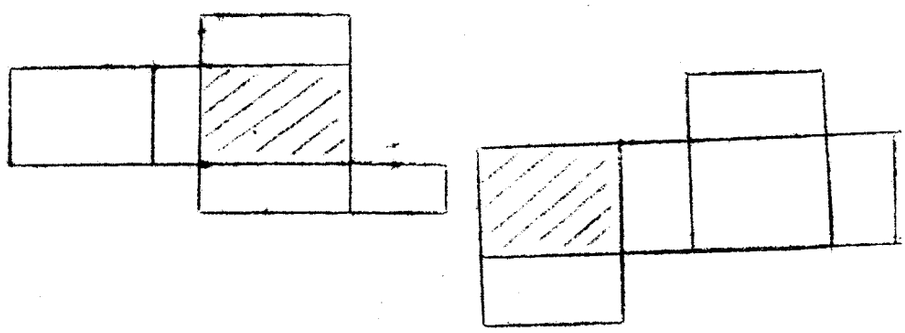
C. <u>Jaring-jaring Balok</u>



Gambar 1.3

Jaring-jaring balok merupakan bangun datar yang diperoleh dengan membuka sisi-sisi balok menjadi sebidang dengan sisi alas.

Jaring-jaring balok yang berbeda

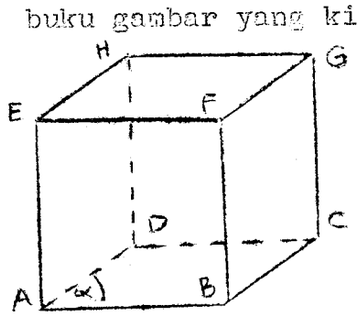


Gambar 1.4

D. Cara Menggambar Balok

Sebelumnya akan diberikan beberapa keterangan tentang menggambar bangun ruang.

Bidang tempat gambar adalah permukaan papan tulis atau buku gambar yang kita pergunakan untuk menggambar.




Gambar 1.5

Bidang frontal adalah bidang tempat gambar atau bidang dari sebuah bangun ruang yang sejajar dengan bidang tempat gambar

Garis frontal adalah garis yang terletak pada bidang frontal yaitu:

1. garis frontal horizontal
   contoh: AB,DC,EF dan HG
2. garis frontal vertikal
   contoh: AD,BC,FG dan EH

Bidang ortogonal adalah bidang yang tegak lurus dengan bidang frontal.

1. bidang ortogonal vertikal: bidang BCGF dan ADHE
2. bidang ortogonal horizontal: bidang ABCD dan EFGH

Garis ortogonal adalah garis yang tegak lurus bidang frontal, contoh: AD,BC,FG dan EH.

Perbandingan proyeksi adalah perbandingan panjang garis ortogonal dalam gambar dengan panjang garis ortogonal sesungguhnya.

$$\text{Perbandingan proyeksi} = \frac{\text{panjang AD pada gambar}}{\text{panjang AD sesungguhnya}}$$

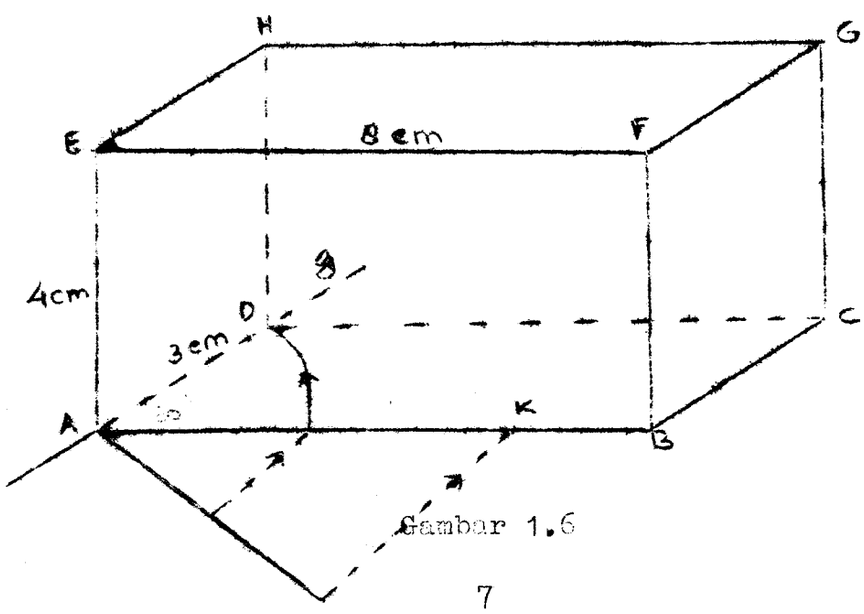
Sudut surut (sudut menyisi) adalah sudut dalam gambar yang dibentuk oleh garis ortogonal arah kebelakang dengan garis mendatar. Pada gambar 1.4 , $\angle$ BAD sebenarnya $90^{\circ}$, tetapi dalam gambar kalau kita ukur dengan busur derajat besar $\angle$ BAD $= \alpha$, maka dikatakan sudut surutnya $= \alpha$.

CONTOH:

Lukislah balok ABCD.EFGH dengan rusuk AB = 8 cm, AD = 6 cm dan AE = 4 cm dengan bidang ABFE frontal, sudut surut $30^{\circ}$ dan perbandingan proyeksi $\frac{1}{2}$.

Untuk melukis balok tersebut dilakukan langkah-langkah sebagai berikut:

1. Gambar terlebih dahulu bidang frontal ABFE dengan ukuran sebenarnya, ABFE persegi panjang AB = 8 cm dan AE = 4 cm.
2. Melalui titik A lukislah garis g ke arah belakang sedemikian hingga besar sudut antara garis g dan AB = besar sudut surut = $30^{o}$
3. Tentukan titik D pada garis g, panjang AD pada gambar = $\frac{1}{2}$ AD sesungguhnya. Buat AK = 6 cm dan AD digambar $\frac{1}{2}$ AK
4. Gambar bidang ABCD, diselesaikan dengan membuat garis melalui B yaitu BC sama sejajar AD, kemudian titik C dihubungkan dengan titik D.
5. Gambar bidang frontal DCHG, hubungkan titik F dengan G, E dengan H dan E dengan F, sehingga balok ABCD.EFGH terlukis.

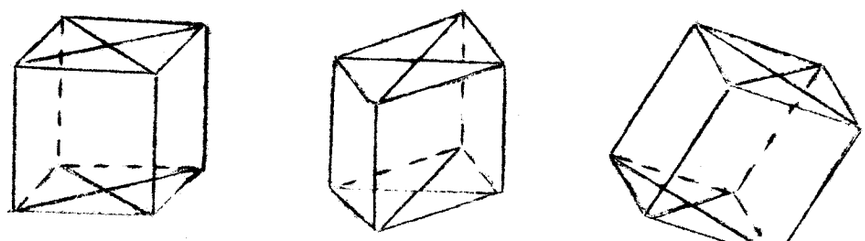



Gambar 1.6

## II. K U B U S

Definisi:

Kubus adalah bangun ruang yang dibatasi oleh enam daerah persegi yang kongruen.



Gambar 2.1

Unsur-unsur yang ada dalam sebuah kubus adalah: titik sudut, rusuk, sisi, diagonal sisi, diagonal ruang dan bidang diagonal. Masing-masingnya secara berurutan banyaknya 8, 12, 6, 12, 4 dan 6 buah.

Titik sudut kubus merupakan titik persekutuan antara tiga rusuk atau tiga bidang sisi. Rusuk adalah ruas garis persekutuan antara dua bidang. Bidang sisi adalah daerah persegi pada permukaan kubus. Diagonal sisi adalah ruas garis yang menghubungkan dua titik sudut yang berhadapan pada sebuah sisi. Diagonal ruang merupakan ruas garis yang menghubungkan dua titik sudut yang berhadapan dalam ruang kubus. Sedangkan bidang diagonal adalah bidang dalam kubus yang melalui 2 rusuk yang berhadapan.

Jika panjang rusuk kubus = a, maka: panjang diagonal sisi = $aV2$ dan panjang diagonal ruang = $aV3$.

A. Luas Kubus

Kubus memiliki enam buah sisi berupa persegi yang kongruen. Luas setiap sisi sama dengan luas sebuah persegi dengan rusuk a yang sama dengan $a^2$. Jadi luas seluruh bidang sisi kubus = $6 \times a^2 = 6a^2$.

$$\boxed{\text{Luas kubus seluruhnya} = 6a^2}$$

B. Volume Kubus

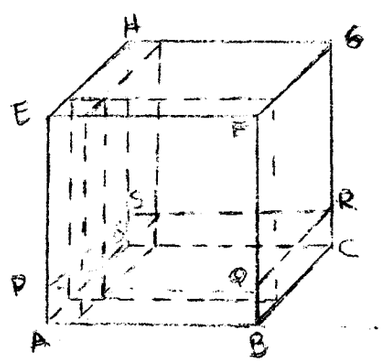
Akan dihitung volume kubus dengan rusuk a, dengan langkah-langkah sebagai berikut:

1. Bagi rusuk AB menjadi a bagian, yang masing-masingnya mempunyai panjang satu satuan. Melalui titik-titik pembagi itu buat bidang yang sejajar bidang ADHE, sehingga satu sama lain berjarak 1 satuan.
2. Bagi rusuk AD menjadi a bagian yang masing-masing panjangnya 1 satuan. Kemudian melalui titik-titik pembagi itu buat bidang yang sejajar ABFE dengan jarak satu sama lain 1 satuan.
3. Bagi rusuk AE menjadi a bagian yang masing-masing panjangnya 1 satuan. Kemudian melalui titik pembagi buat bidang sejajar ABCD, sehingga jarak satu dengan lainnya 1 satuan.

Maka diperoleh:

1. Bidang alas ABCD yang merupakan persegi terbagi menjadi (axa) buah daerah persegi satuan yang pan jang sisinya 1 cm.
2. Balok ABCD.PQRS yang tingginya 1 satuan memuat (axa) buah kubus satuan volume.
3. Kubus ABCD.EFGH terbagi menjadi a buah balok yang masing-masingnya kongruen dengan balok ABCD.PQRS. Dengan demikian kubus ABCD.EFGH memuat sebanyak a x (axa) buah kubus satuan volume.

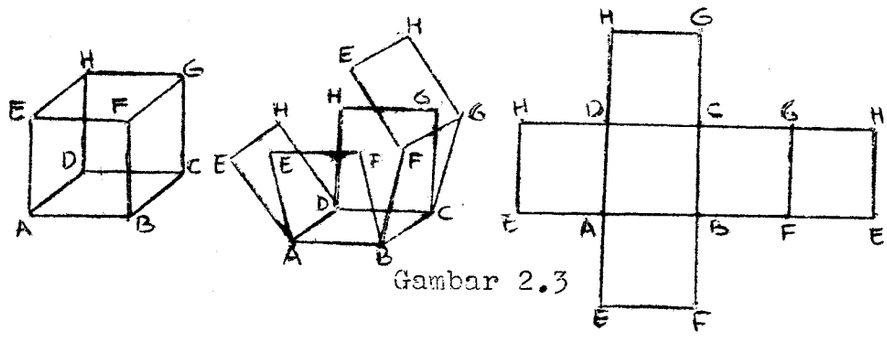
Volume Kubus = $a^3$




Gambar 2.2

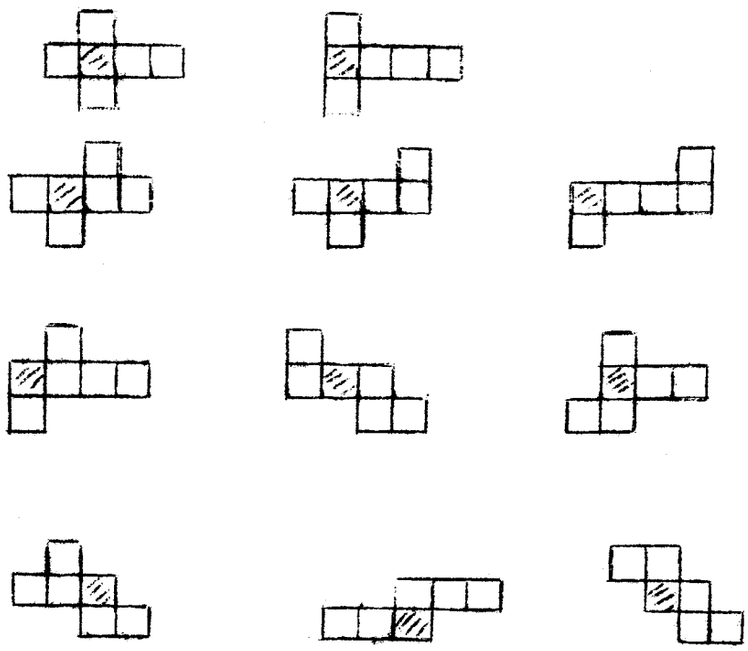
C. Jaring-jaring Kubus

Apabila sisi-sisi kubus kita buka menjadi sebuah bidang datar, maka akan diperoleh jaring-jaring kubus.




Gambar 2.3

Sebelas macam jaring-jaring kubus.



Gambar 2.4

D. Cara Menggambar Kubus

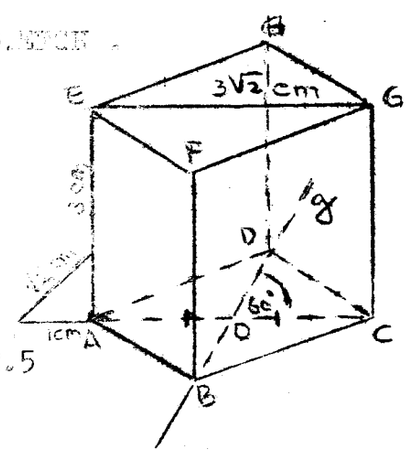
Dalam menggambarkan kubus kita menggunakan cara-cara yang sama dengan balok.

CONTOH:

Gambarlah kubus ABCD.EFGH dengan panjang rusuk 3 cm, bidang diagonal ACGE frontal dan AC horizontal, sudut surut $60^{o}$ dan perbandingan proyeksi $\frac{1}{2}$.

Tahap-tahap yang diperlukan sebagai berikut:

1. Gambarkan bidang diagonal ACGE frontal dan AC horizontal, gambarnya berbentuk persegipanjang dengan AE = 3 cm dan AC = 3V2 cm.
2. Gambarkan bidang alas ABCD yang terletak pada bidang horizontal.
   - Melalui titik O, gambarkan garis g sehingga sudut yang dibentuk oleh garis g arah kebelakang dengan garis OC sama dengan $60^{o}$.
   - Tetapkan titik B dan D pada garis g. Panjang garis BD dalam gambar = $\frac{1}{2}$ BD sesungguhnya = $\frac{1}{2}$ x 3V2 cm= 1,5 V2 cm.
   - Hubungkan titik-titik A dan B, B dan C, C dan D serta A dan D sehingga diperoleh gambar bidang alas ABCD.
3. Gambarkan garis-garis BF dan DH yang sama dan sejajar dengan garis AE . Kemudian hubungkan titik-titik E dan F, F dan G, G dan H, serta E dan H. Sehingga diperoleh gambar kubus ABCD.EFGH .



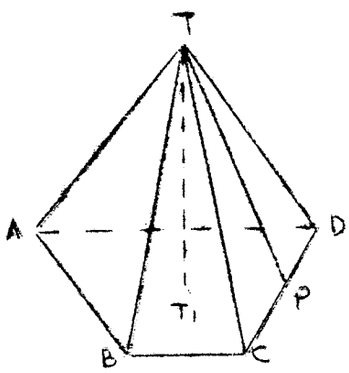

Gambar 2.5

## III. L I M A S

Definisi:

Limas adalah sebuah bangun ruang dengan pembatas-pembatas:

1. Bidang alas berbentuk segi-n ($n \geqslant 3$, n bulat)
2. Bidang sisi tegaknya berbentuk segitiga sebanyak n buah. Alas dari segitiga-segitiga tersebut adalah rusuk-rusuk alas limas tersebut, dan segitiga-segitiga tadi bertemu pada sebuah titik.




Gambar 3.1

Perhatikan gambar limas T.ABCD.
Segitiga TAB,TBC,TCD dan TAD disebut sisi tegak.
Titik T disebut titik puncak limas.
Segiempat ABCD disebut bidang alas.

Rusuk-rusuk yang melalui puncak disebut rususk tegak sedangkan yang lainnya disebut rusuk alas. Garis $TT_1$ adalah garis yang ditarik dari T ke proyeksi T pada alas. Garis tinggi pada tiap-tiap bidang sisi tegak disebut apothema, PQ adalah salah satu dari apothema.

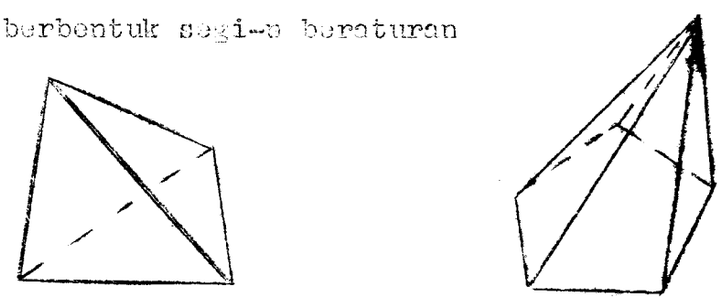
Ditinjau dari bentuk bidang alasnya, suatu limas disebut sebagai limas segi-n kalau bidang alasnya berbentuk segi-n. Sehubungan dengan itu kita

mengenal:

- limas segitiga, bidang alasnya berbentuk segitiga
- limas segi empat, bidang alasnya berbentuk segi - empat
- limas segilima, bidang alasnya berbentuk segilima; demikian seterusnya.

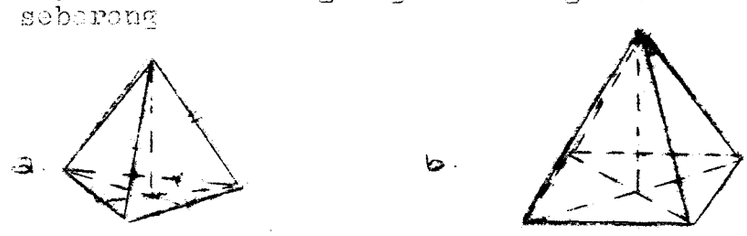
Ditinjau dari teratur atau tidaknya bidang alas dan kedudukan titik puncak terhadap bidang alas, suatu limas dapat dibedakan menjadi:

1. Limas sebarang, kalau bidang alasnya berbentuk segi-n sebarang dan titik puncaknya sebarang.
2. Limas tegak, adalah limas yang proyeksi dari titik puncak jatuh tepat pada titik pusat simetri bidang alas.
3. Limas beraturan, adalah limas tegak yang alasnya berbentuk segi-n beraturan



a b

Gambar 3.2 a.limas segitiga sebarang b.limas segilima sebarang




Gambar 3.3 a.limas segi tiga beraturan b.limas segiempat beraturan

Pada limas segi-n beraturan terdapat:

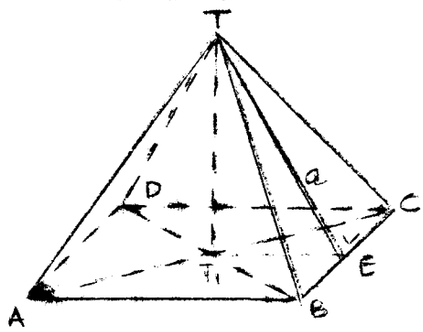
1. semua rusuk tegaknya sama panjang
2. semua sisi tegaknya kongruen
3. semua apotemanya sama panjang

Untuk pembicaraan selanjutnya hanya dikhususkan pada limas tegak.

## A. Luas limas

Misalkan diberikan limas teratur T.ABCD.

Panjang apothema = a




Gambar 3.4

Luas $\Delta$ TAB = AB x $\frac{1}{2}$ a

Luas $\Delta$ TBC = BC x $\frac{1}{2}$ a

Luas $\Delta$ TCD = CD x $\frac{1}{2}$ a

Luas $\Delta$ TAD = AD x $\frac{1}{2}$ a

Luas sisi tegak limas T.ABCD = (AB+BC+CD+AD) x $\frac{1}{2}$ a = keliling alas x $\frac{1}{2}$ apothema

| |
|---|
| Luas sisi tegak limas = keliling alas x $\frac{1}{2}$ apothema |

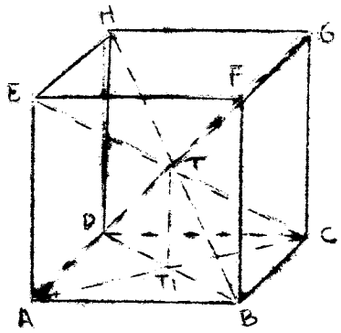
Luas limas seluruhnya = Luas sisi tegak + luas alas

= (keliling alas x $\frac{1}{2}$ apothema) + luas alas.

## B. Volume Limas

Kubus ABCD.EFGH mempunyai rusuk a.

Akan dihitung volume limas teratur T.ABCD.




Gambar 3.5

Volume kubus ABCD.EFGH = 6 volume limas T.ABCD

Sehingga $a^3$ = volume T.ABCD

Volume limas T.ABCD = $\frac{1}{3}\,\frac{1}{2}a\ a^2$

$= \frac{1}{3}\ t\ A$

dimana: t = tinggi limas T.ABCD

A = luas alas ABCD

$$\boxed{\text{Volume limas} = \tfrac{1}{3}(\text{luas alas})(\text{tinggi})}$$

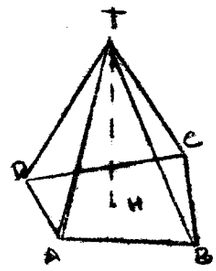
## C. Jaring-jaring Limas

Untuk menggambarkan jaring-jaring limas dengan baik, kita harus mengenal sifat-sifat yang dimiliki oleh limas tersebut. Pada limas tegak, sebelum melukis rebahan bidang tegak kebidang alas perlu diketahui:

1. bentuk alas limas
2. proyeksi puncak pada bidang alas
3. salah satu rusuk tegak limas atau tinggi limas atau sudut salah satu bidang sisi tegak dengan bidang alas limas.

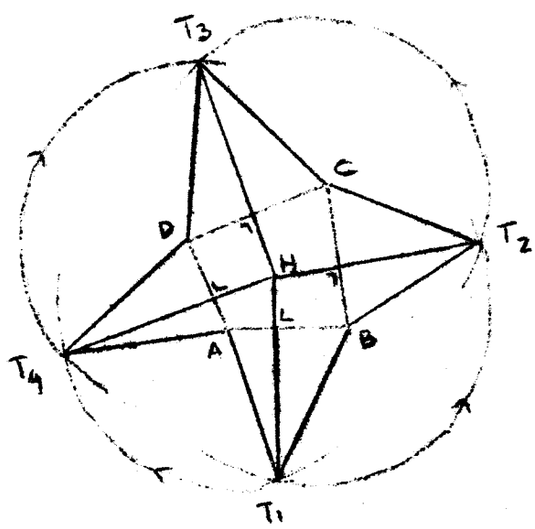
contoh:

Gambarkanlah jaring-jaring limas T.ABCD dibawah ini , dimana H merupakan proyeksi T pada bidang alas.




Gambar 3.6

Jaring-jaring limas:




Gambar 3.7

## IV. P R I S M A

Definisi:

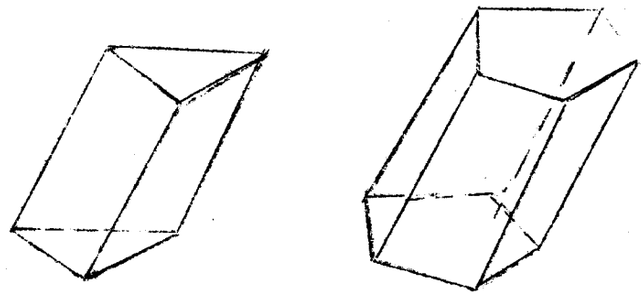
Bangun ruang yang dibatasi oleh dua bidang yang sejajar (bidang alas dan bidang atas) dan oleh bidang lain (bidang tegak) yang saling berpotongan menurut rusuk-rusuk sejajar.

Berdasarkan bentuk bidang alasnya, sebuah prisma dapat disebut sebagai prisma segi-n , jika bidang alas berbentuk segi-n. Sehubungan dengan itu kita mengenal:

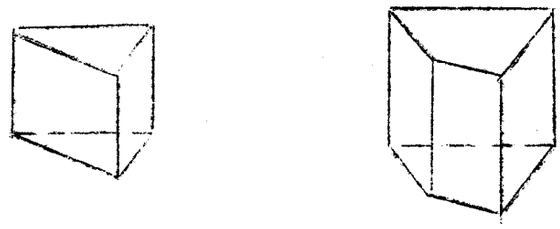
- prisma segitiga, bidang alasnya berbentuk segitiga
- prisma segiempat, bidang alas berbentuk segi empat
- prisma segilima, bidang alas berbentuk segilima; demikian seterusnya.

Ditinjau dari kedudukan rusuk tegaknya terhadap bidang alas, suatu prisma disebut prisma tegak, jika rusuk-rusuk tegaknya tegak lurus terhadap bidang alas. Apabila rusuk-rusuk tegaknya tidak tegak lurus (condong atau miring) terhadap bidang alas, prisma itu disebut prisma miring (condong) atau prisma sebarang.

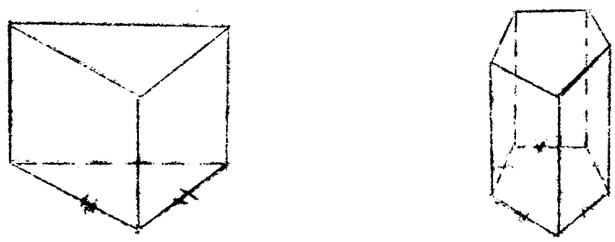
Prisma yang bersifat khusus adalah prisma segi-n beraturan, yang memenuhi syarat berikut: (1) bidang alasnya berbentuk segi-n beraturan, (2) prisma itu merupakan prisma tegak.



Gambar 4.1 Prisma segi-n miring



Gambar 4.2 Prisma segi-n tegak



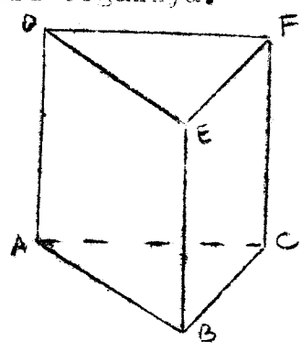
Gambar 4.3 Prisma segi-n beraturan

Setiap prisma memiliki sifat-sifat sebagai berikut:

1. Bidang alas dan bidang atasnya sejajar serta bentuknya kongruen
2. Bidang sisi tegak berbentuk jajargenjang
3. Semua rusuk tegaknya sejajar dan sama panjang
4. Semua bidang diagonalnya berbentuk jajargenjang. Banyaknya bidang diagonal adalah $\frac{n}{2}(n-3)$
4. Banyak diagonal ruang ada $n(n-3)$ buah

A. Luas Prisma

Luas sisi prisma itu terdiri atas luas bidang alas, luas selubung, dan luas bidang atas. Luas bidang alas dan bidang atas dalam hal ini mudah ditentukan, yaitu dengan memakai rumus luas segi-n. Luas selubung prisma merupakan jumlah luas semua bidang sisi tegaknya.




Gambar 4.4

Perhatikan prisma segitiga beraturan ABC.DEF pada gambar 4.4. Karena prisma ABC.DEF merupakan prisma beraturan maka bidang-bidang sisi tegaknya berbentuk persegi panjang.

Misalkan panjang rusuk tegak prisma itu adalah h , maka luas masing-masing bidang sisi tegaknya:

Luas ABED = AB x h

Luas BCFE = BC x h

Luas ACFD = AC x h

\+

Luas selubung prisma ABC.DEF = (AB+BC+AC) x h

= keliling alas x panjang rusuk tegak

Hasil tersebut dapat diperluas untuk prisma segi-n beraturan, menjadi

> Luas selubung prisma segi-n beraturan = keliling bidang alas segi-n x panjang rusuk tegak

Karena prisma segi-n beraturan merupakan prisma segi-n tegak, maka

> Luas sisi prisma segi-n beraturan atau tegak = luas bidang alas + (keliling segi-n x panjang rusuk tegak) + luas bidang atas.

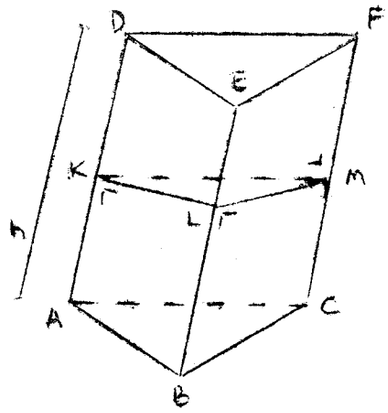
Perhatikan prisma segitiga miring ABC.DEF pada gambar 4.5. Panjang rusuk tegak prisma itu adalah h. Luas sisi prisma segitiga miring itu terdiri dari luas bidang alas, luas selubung, dan luas bidang atas. Rusuk rusuk tegaknya tidak tegak lurus terhadap bidang alas. Oleh karena itu, bidang-bidang sisi tegaknya berbentuk jajargenjang. Karena luas jajargenjang sama dengan perkalian sisi sejajar dengan jarak antara dua sisi sejajar itu, maka luas dari bagian-bagian selubung prisma adalah:

Luas ABED = KL x AD = KL x h

Luas BCFE = LM x BE = LM x h

Luas ACFD = KM x CF = KM x h +

Luas selubung prisma miring ABC.DEF = (KL+LM+KM)xh




Gambar 4.5

Karena KL tegak lurus terhadap AD dan BE, LM tegak lurus BE dan CF, KM tegak lurus terhadap CF dan AD, maka $\Delta$ KLM disebut sebagai penampang tegak atau irisan siku-siku pada prisma ABC.DEF. Sehingga bentuk (KL+LM+KM) disebut sebagai keliling irisan siku-siku. Sehingga diperoleh:

Luas selubung prisma segitiga miring ABC.DEF = keliling irisan siku KLM x panjang rusuk tegak.

Hal ini dapat diperluas untuk prisma segi-n miring,

| |
|---|
| Luas selubung prisma segi-n miring = keliling irisan siku-siku x panjang rusuk tegak |

Dengan demikian diperoleh:

| |
|---|
| Luas sisi prisma segi-n miring = luas bidang alas + (keliling irisan siku-siku x panjang rusuk tegak) + luas bidang atas |

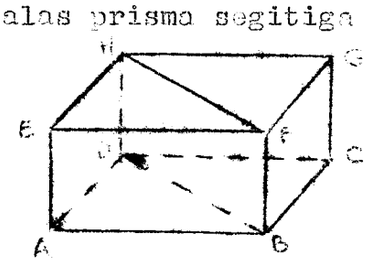
## B. Volume Prisma

Perhatikan gambar 4.6, sebuah balok ABCD.EFGH dipotong menjadi dua prisma segitiga tegak ABD.EFH dan BCD.FGH yang volumenya sama, yaitu:

$= \frac{1}{2}$ x volume balok ABCD.EFGH

$= \frac{1}{2}$ x luas alas balok x tinggi

= luas alas prisma segitiga x rusuk tegak

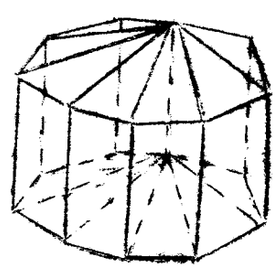



Gambar 4.6

Perhatikan gamabar4.7. Prisma segi-n tegak dapat dipotong-potong menjadi n-2 buah prisma segitiga tegak.

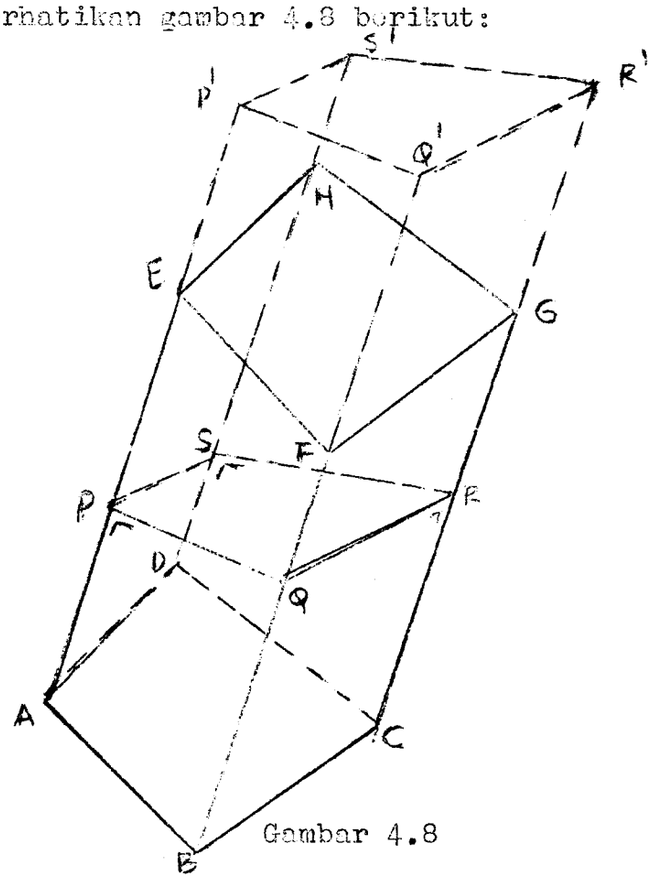
Volume prisma segi-n tegak = Jumlah volume (n-2) buah alas prisma segitiga tegak x tinggi =(Luas 1 + luas 2 + ... + luas (n-2) ) x tinggi = Luas alas prisma x rusuk tegak

| Volume prisma tegak = luas alas x tinggi |
|---|



Gambar 4.7

Perhatikan gambar 4.8 berikut:




Gambar 4.8

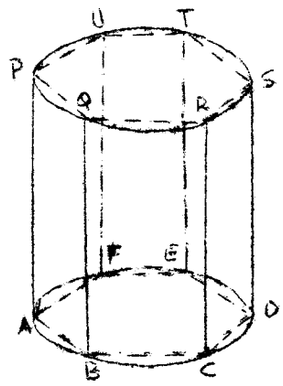
ABCD.EFGH adalah sebuah prisma segiempat miring, dipotong oleh bidang PQRS yang merupakan irisan siku-siku sehingga menjadi dua buah prisma terpancung: ABCD.PQRS dan PQRS.EFGH. Kemudian kedua prisma terpancung tersebut ditautkan kembali sehingga alas ABCD berimpit dengan EFGH (seperti gambar).
Dengan demikian terjadilah prisma tegak PQRS.P'Q'R'S'.
Volume prisma miring ABCD.EFGH = volume prisma tegak PQRS.P'Q'R'S' = luas segi empat PQRS x tinggi = luas irisan siku-siku x rusuk tegak.

| |
|---|
| Volume prisma miring = luas irisan siku-siku x rusuk tegak |

B. Volume Tabung

Tabung dapat dipandang sebagai suatu prisma beraturan bersisi-n, dimana n menuju tak hingga.

Perhatikan gambar 5.4 berikut:



Gambar 5.4

Tentukan n buah titik pada lingkaran alas, namakan A,B,C,D,E,F, ...

Dari titik tersebut ditarik garis tegak lurus pada lingkaran atas.

Maka terbentuklah prisma beraturan bersisi-n.

Volume prisma ABCDEF.PQRSTU $= \frac{1}{3}$ (tinggi) (luas alas)

$= \frac{1}{3}$ t (luas ABCDEF)

Apabila dibuat n menuju tak hingga maka:

1. Luas ABCDEF = luas lingkaran berjari-jari R

$= \pi R^2$

2. Prisma ABCDEF.PQRSTU merupakan sebuah tabung.

Sehingga Volume tabung $= \frac{1}{3}\, t \pi R^2$

$= \frac{1}{3} \pi R^2 t$

$$\boxed{\text{Volume tabung} = \frac{1}{3}\pi R^2 t}$$

Dalil 5.2

Volume tabung = Luas alas x tinggi

C. Jaring-jaring Tabung

Jika sebuah tabung, baik daerah lingkaran alas dan atas, serta selimutnya dibabarkan pada pada suatu bidang datar, maka diperoleh suatu jaring-jaring tabung. Jadi jaring-jaring tabung terdiri dari 2 buah lingkaran yang kongruen dan 1 persegi panjang.

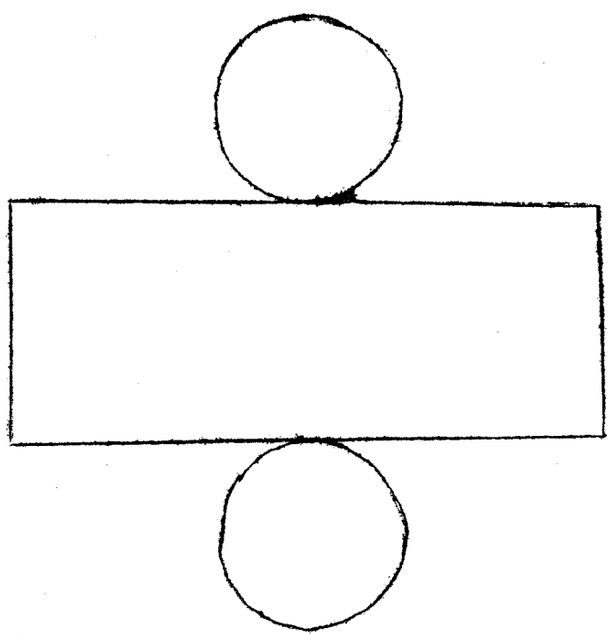
contoh:

Lukislah sebuah jaring-jaring tabung dengan jari-jari 1,5 dan tinggi 3,5

Selimut tabung mempunyai: panjang = $2\pi r$ = 9,4

lebar = t = 3,5

Jaring-jaring tabung yang diminta sebagai berikut:



Gambar 5.5

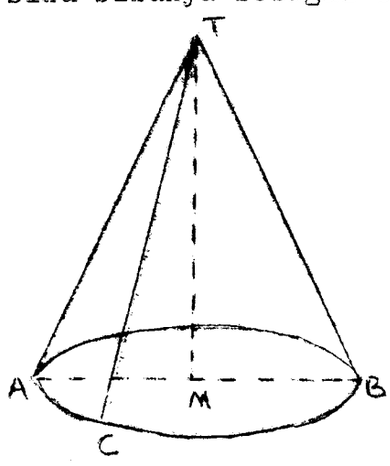
## VI. K E R U C U T

### A. K E R U C U T

Kerucut yang dibahas di SLTP adalah kerucut khusus, dimana alasnya berupa daerah lingkaran.

Definisi:

Kerucut adalah benda putar yang terjadi karena suatu segitiga siku-siku diputar dengan salah satu sisi siku-sikunya sebagai sumbu.




Gambar 6.1

T : titik puncak

TA,TB dan TC garis-garis pelukis (apothema)

TA=TB=TC= panjang apotema = A

M : proyeksi T pada bidang alas

TM: sumbu kerucut

MA=MB= jari-jari lingkaran alas = R

$\angle$ MTB dinamakan setengah sudut puncak

Tinggi kerucut = t = $\sqrt{A^2 - R^2}$

### I. Luas Selimut Kerucut

Bidang permukaan kerucut terdiri dari 2 bagian, yaitu bidang lengkung kerucut atau bidang selimut kerucut dan bidang alas berupa lingkaran.

Dari sebuah kerucut dengan jari-jari lingkaran=R dan panjang apothema=A. Jika selimut kerucut kita iris menurut sebuah apothema, kemudian dibuka dan dibentangkan pada bidang datar. Maka akan diperoleh gambar 6.2 (berupa su-

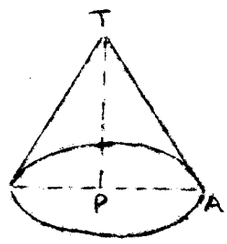
## III. Jaring-jaring Kerucut

Jaring-jaring kerucut terdiri atas juring lingkaran dan lingkaran alas.

contoh:

Lukislah jaring-jaring kerucut dengan tinggi = 4 dan jari-jari lingkaran alas = 3

Perhatikan gambar dibawah ini:




Gambar 6.4

TP = 4

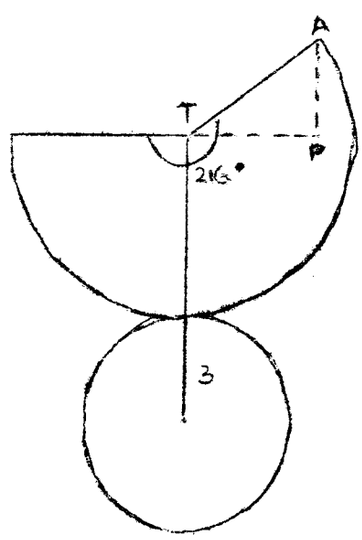
PA = 3

sehingga TA = 5

Sudut pusat juring lingkaran $= \frac{R}{A} \times 360^{o}$

$= \frac{3}{5} \times 360^{o} = 216^{o}$

Maka jaring-jaring kerucut yang diminta:

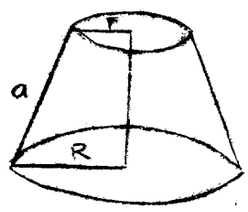



Gambar 6.5

## B. KERUCUT TERPANCUNG

Definisi:

Kerucut terpancung adalah benda putar yang terjadi karena trapesium siku-siku diputar mengelilingi sisi siku-siku.




Gambar 6.6

Kedua sisi sejajar trapesium membentuk lingkaran alas dan lingkaran atas kerucut terpancung.

Sisi miring trapesium menjadi apothema kerucut terpancung.

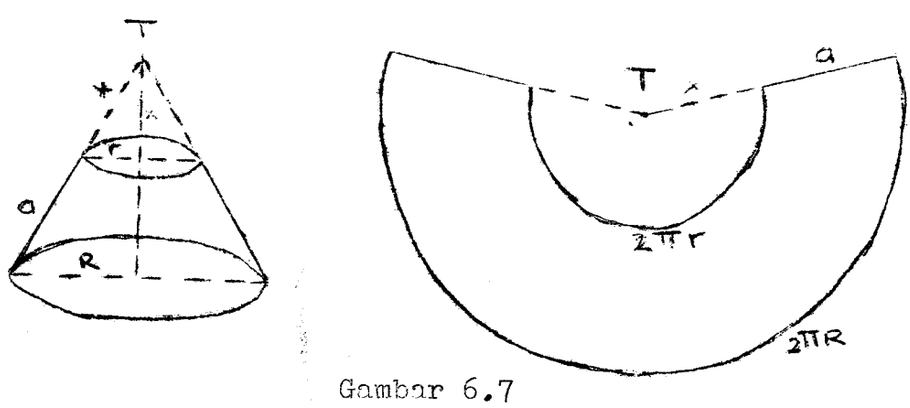
Jari-jari lingkaran atas = r

alas = R

Panjang apothema = a

### I. Luas Selimut Kerucut Terpancung

Jika selimut kerucut terpancung diiris menurut salah satu apotemanya, kemudian dibuka dan diletakkan pada bidang datar, akan diperoleh gambar 6.7 berikut:




Gambar 6.7

Luas selimut kerucut terpancung = Luas juring TQQ' - luas juring TSS'

$= \pi R(a+x) - \pi rx$

Perhatikan gambar 6.7

$\Delta$ TBM dan $\Delta$ TAP sebangun, sehingga $x : x+a = r : R$

diperoleh $x = \frac{ra}{R - r}$

Luas selimut kerucut terpancung =

$$\pi R \left( a + \frac{ra}{R - r} \right) - \pi r \frac{ra}{R - r}$$

$$= \pi a ( R + r )$$

$$\boxed{\text{Luas selimut kerucut terpancung} = \pi a(R+r)}$$

Dalil 6.3

Luas selimut kerucut terpancung = $\frac{1}{2}$ apothema x jumlah keliling lingkaran alas dan lingkaran atas

Luas kerucut terpancung seluruhnya

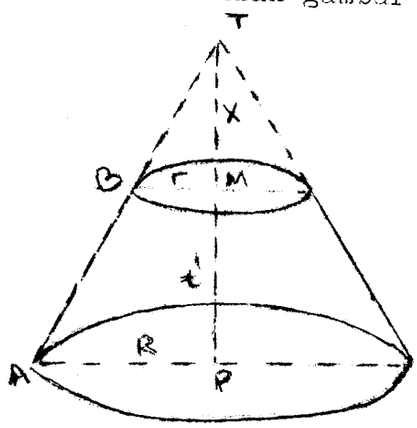
= luas selimut kerucut terpancung + luas lingkaran alas + luas lingkaran atas

$= \pi a (R+r) + \pi R^2 + \pi r^2$

$$\boxed{\text{Luas kerucut terpancung seluruhnya} = \pi \left( a(R+r) + R^2 + r^2 \right)}$$

## II. Volume Kerucut Terpancung

Perhatikan gambar 6.8 berikut ini




M : titik pusat lingkaran atas

r : jari-jari lingkaran atas

P : titik pusat lingkaran alas

R : jari-jari lingkaran alas

t': tinggi kerucut terpancung

Gambar 6.8

Volume kerucut terpancung = volume kerucut seluruhnya - volume kerucut atas

$$= \frac{1}{3}\pi R^2(t'+x) - \frac{1}{3}\pi r^2 x$$

Perhatikan gambar 6.8

$\Delta$ TBM dan $\Delta$ TAP sebangun, sehingga $x : (t'+x) = r : R$

diperoleh $x = \dfrac{rt'}{R - r}$

$$\text{Volume kerucut terpancung} = \frac{1}{3}\pi R^2\left(t'+\frac{rt'}{R-r}\right) - \frac{1}{3}\pi r^2 \frac{rt'}{R-r}$$

$$= \frac{1}{3}\pi t' \ (R^2+Rr+r^2)$$

$$\boxed{\text{Volume kerucut terpancung} = \frac{1}{3}\pi t'(R^2+Rr+r^2)}$$

Dalil 6.4

Volume kerucut terpancung = $\frac{1}{3}$ x tinggi x jumlah luas bidang alas, bidang atas dan pembanding tengah kedua bidang-bidang itu

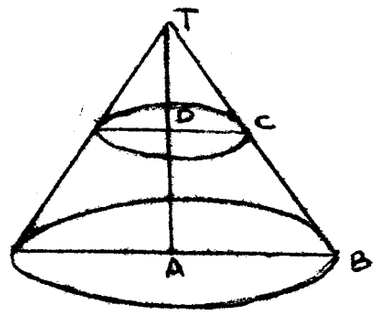
## III. Jaring-jaring Kerucut Terpancung

Jaring-jaring kerucut terpancung dilukis dengan melukis kerucut keseluruhan kemudian dikurangi dengan jaring-jaring kerucut kecil di atas bidang alas.

contoh:

Lukis kerucut terpancung yang tingginya 4, jari-jari lingkaran atas 3 dan jari-jari lingkaran alas 6.

Perhatikan gambar di bawah ini:




Gambar 6.9

AB = 6

DC = 3

AD = 4

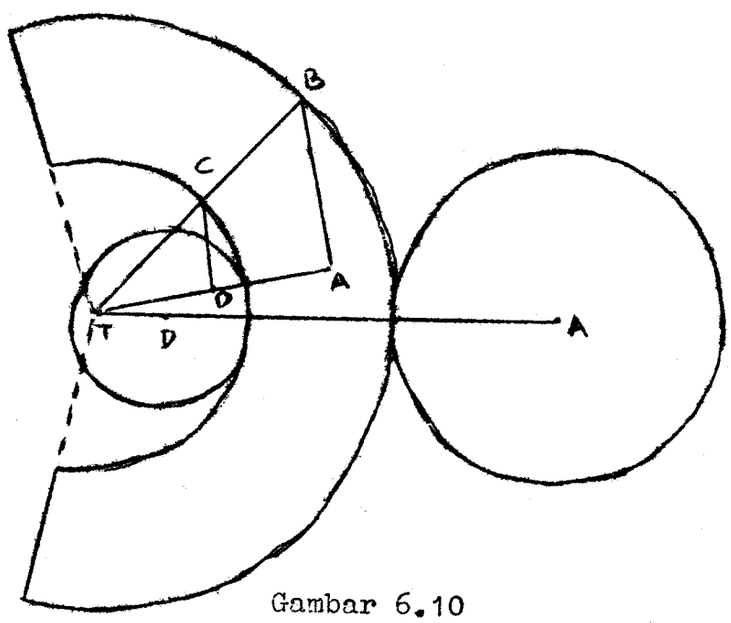
AD dan BC berpotongan di T

diperoleh TD=4 , TC=5

Besar sudut pusat juring lingkaran $= \frac{R}{A} \times 360^o$

$= \frac{3}{5} \times 360^o = 216^o$

Maka jaring-jaring kerucut yang diminta:




Gambar 6.10

## VII. BOLA

Bola merupakan suatu benda yang terjadi bila suatu daerah setengah lingkaran diputar dengan garis tengah sebagai sumbu putar. Jadi bidang bola adalah tempat kedudukan titik-titik yang berjarak sama (=R) dari sebuah titik tertentu (titik pusat M).

Bagian-bagian dari bola:

1. Tembereng bola
2. Juring bola
3. Keratan bola
4. Cincin bola

Jika suatu bola dipotong oleh suatu bidang, maka bola tersebut terbagi atas 2 bagian yang masing-masing disebut tembereng bola. Tembereng bola dapat juga terjadi dengan memutar suatu busur lingkaran mengelilingi garis tengah yang melalui titik pangkal atau titik ujung busur tersebut. Jadi tembereng bola merupakan benda yang dibatasi oleh bidang bola dan bidang datar.

Juring bola adalah benda yang terdiri dari suatu tembereng bola dan suatu selimut kerucut yang lingkaran alasnya bersekutu, sedang titik puncak kerucut berimpit dengan titik pusat bola. Juring bola juga dapat diperoleh dengan cara memutar suatu juring lingkaran dengan salah satu jari-jarinya sebagai sumbu putar.

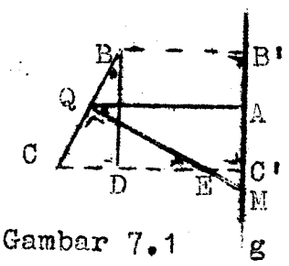
Bila bola dipotong oleh dua bidang yang sejajar atas tiga bagian, bagian yang terletak diantara kedua bidang sejajar dinamakan keratan bola.

Cincin bola terjadi apabila suatu keratan bola dikurangi kerucut terpancung yang terdapat pada keratan bola tersebut.

## A. Luas Bola dan Bagian-bagian Bola

Jika garis BC diputar mengelilingi garis g maka diperoleh suatu kerucut terpancung.

Perhatikan gambar 7.1




Gambar 7.1

Q titik tengah BC

B' dan C' proyeksi B dan C pada garis g.

QM ⊥ BC

Luas selimut kerucut terpancung adalah:

$$L\ (BC) = \pi\ BC\ (\ BB' + CC'\ )$$
$$= \pi\ BC\ .\ 2QA$$
$$= 2\ \pi\ BC.QA.$$

Perhatikan ▲QAM dan ▲CDB.

$\angle$ CEQ = $\angle$ MQA , akibatnya $\angle$ MQA = $\angle$ CBD

Sehingga BC : QM = BD : QA

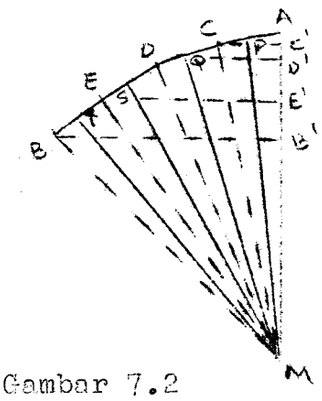
$$BC.QA = QM.BD$$

Maka diperoleh :

$$L\ (BC) = 2\pi\ QM.BD$$
$$= 2\pi\ (B'C').(QM) \qquad \ldots (7.1)$$

Bila busur AB diputar dengan sumbu AM, diperoleh suatu tembereng bola.

Bagi busur AB menjadi beberapa bagian yang sama , dengan panjang 2a.




Gambar 7.2

Misal busur AC,CD,DE dan EB

Ambil P titik tengah AC

Q CD

S DE

T EB

Misalkan C',D',E' dan B' adalah proyeksi C,D,E dan B pada MA.

Jika garis patah ACDEB diputar mengelilingi AM , maka terb entuk kerucut-kerucut terpancung dengan tinggi AC' ,C'D',D'E',E'B'.

Menggunakan (7.1) maka: $L(AC) = 2\pi\,(AC')(PM)$

$L(CD) = 2\pi\,(C'D')(QM)$

$L(DE) = 2\pi\,(D'E')(SM)$

$L(EB) = 2\pi\,(E'B')(TM)$

dimana $PM = QM = SM = TM = \sqrt{R^2 - \frac{1}{4}a^2}$

Maka $L(ACDEB) = 2\pi\,(AC'+C'D'+D'E'+E'B')\sqrt{R^2-\frac{1}{4}a^2}$

$= 2\pi\,(AB')\sqrt{R^2 - \frac{1}{4}a^2}$

Jika busur AB dibagi atas n bagian sama, dimana $n \longrightarrow \infty$. Maka garis patah ACDEB mendekati busur AB. Sehingga L(ACDEB) menghampiri luas tembereng bola.

Karena diambil $n \to \infty$ maka $p \to 0$

Sehingga: $L(ACDEB) = 2\pi . AB' . R$

$L(\frown AB) = 2\pi R t$ , $AB' = t$

Maka diperoleh dalil 7.1

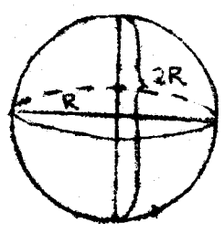
Luas tembereng bola berjari-jari R, dengan tinggi tembereng t adalah $2\pi Rt$.


Gambar 7.3

Dari dalil diatas, apabila setengah lingkaran diputar maka diapat tembereng bola dengan dengan tinggi 2R. Dengan perkataan lain yang diperoleh suatu bola.

Sehingga Luas bola $= 2\pi R . 2R$

$= 4\pi R^2$



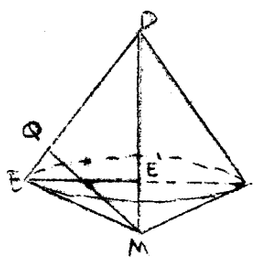

Gambar 7.4

Dengan menggunakan seperti cara sebelumnya, maka selalu diperoleh: luas bidang lengkung bagian-bagian bola selalu $2\pi Rt$, dimana t adalah tinggi dari bagian bola.

$$\boxed{\text{Luas bola} = 4\pi R^2}$$

B. Volume Bola dan Bagian-bagian Bola

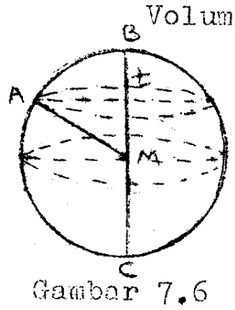
Jika $\Delta$ DEM diputar mengelilingi DM, maka diperoleh 2 kerucut yang masing-masing alasnya berimpit.




Gambar7.5

$$
\begin{aligned}
V(\Delta DEM) &= V(\Delta EE'D) + V(\Delta EE'M) \\
&= \tfrac{1}{3}\pi (EE')^2 (DE') + \\
&\quad \tfrac{1}{3}\pi (EE')^2 (E'M) \\
&= \tfrac{1}{3}\pi (EE')^2 (DM) \\
&= \tfrac{1}{3}\pi (EE')(ED)(QM) \\
&= \tfrac{1}{3}\, p\, \pi (EE')(ED) \quad , QM=p \\
&= \tfrac{1}{3}\, p.\ L(ED)
\end{aligned}
$$

Bila juring lingkaran MAB diputar mengelilingi MB, maka akan diperoleh suatu juring bola.




Gambar 7.6

$$
\begin{aligned}
\text{Volume juring bola} &= V(\text{juring lingkaran MAB}) \\
&= \tfrac{1}{3}.R.L(\frown AB) \\
&= \tfrac{1}{3}.R.2\pi Rt \\
&= \tfrac{2}{3}\pi R^2 t
\end{aligned}
$$

Apabila setengah lingkaran BAC diputar dengan sumbu BC akan diperoleh suatu bola.

Akibatnya:

$$
\begin{aligned}
\text{Volume bola} &= V(\text{setengah lingkaran BAC}) \\
&= \tfrac{1}{3} R.\ L(\frown BAC) \\
&= \tfrac{1}{3} R\ 4\pi R^2 \\
&= \tfrac{4}{3}\pi R^3
\end{aligned}
$$

$$\boxed{\text{Volume bola} = \tfrac{4}{3}\pi R^3}$$

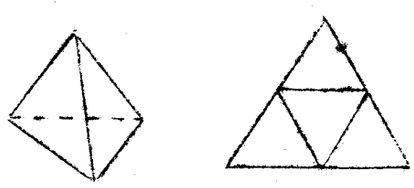
## VIII. BIDANG BANYAK BERATURAN

Bidang banyak beraturan adalah bidang banyak yang bidang sisinya berupa satu macam segi banyak beraturan yang kongruen.

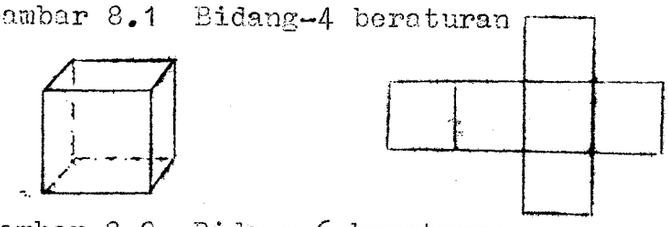
Bidang banyak beraturan yang dikenal:

1. Bidang-4 beraturan (tetraeder)
2. Bidang-6 beraturan (heksaeder)
3. Bidang-8 beraturan (oktaeder)
4. Bidang-12 beraturan (dodekaeder)
5. Bidang-20 beraturan (ikosaeder)

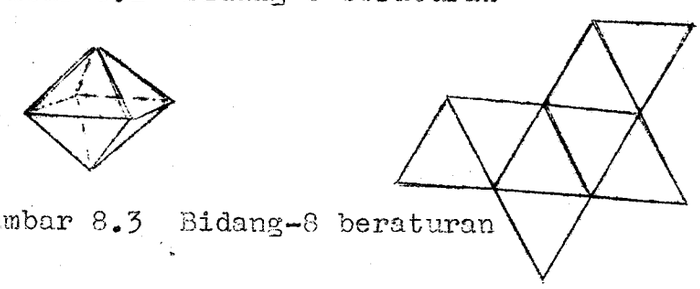
Berikut gambar masing-masing bidang banyak beraturan tersebut dan salah satu jaring-jaringnya.



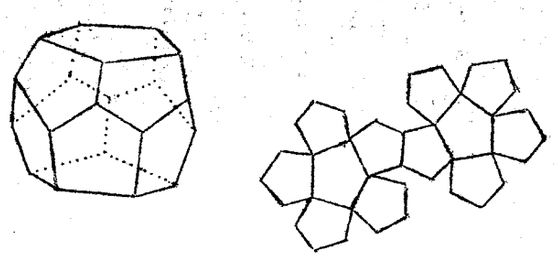
Gambar 8.1 Bidang-4 beraturan



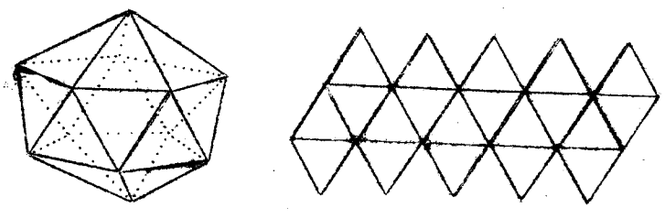
Gambar 8.2 Bidang-6 beraturan



Gambar 8.3 Bidang-8 beraturan



Gambar 8.4 Bidang-12 beraturan



Gambar 8.5 Bidang-20 beraturan

Banyak sisi, rusuk dan titik sudut dari bidang banyak beraturan sebagai berikut:

| Nama benda | sisi | rusuk | titik sudut |
|---|---|---|---|
| Tetraeder | 4 | 6 | 4 |
| Heksaeder | 6 | 12 | 8 |
| Oktaeder | 8 | 12 | 6 |
| Dodekaeder | 12 | 30 | 20 |
| Ikosaeder | 20 | 30 | 12 |

Rumus EULER:

Hubungan antara banyak sisi S, banyak rusuk R dan banyak titik sudut T dari suatu bangun ruang, dapat ditulis dengan persamaan: $S + T = R + 2$

DAFTAR PUSTAKA

1. M. Oetjoep Ilman dkk, 1967. Ilmu Ukur Ruang I, Widjaya Djakarta, Djakarta

2. _____, 1967. Ilmu Ukur Ruang II, Widjaya Djakarta, Djakarta

3. _____, 1967. Ilmu Ukur Ruang III, Widjaya Djakarta, Djakarta

4. Djoko Iswadji dkk, 1993. Geometri Ruang, Departemen Pendidikan dan Kebudayaan, Jakarta

5. Suharso dkk, 1994. Matematika SMU Ib, Pabelan, Surakarta