TRIGONOMETRI

Oleh :

Dra. Marliani

JURUSAN PENDIDIKAN MATEMATIKA
FAKULTAS PENDIDIKAN MATEMATIKA DAN IPA
INSTITUT KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN
PADANG
1999

KATA PENGANTAR

Puji dan syukur penulis panjatkan kehadirat Allah yang Maha Kuasa, karena dengan izin-Nya jualah penulis dapat menyelesaikan penulisan buku ini dengan judul **Trigonometri**.

Tujuan penulisan buku ini adalah untuk memperkaya koleksi buku-buku ilmiah, dengan harapan dapat membantu siapa saja yang ingin memahami mengenai Trigonometri. Didalam buku ini diberikan definisi-definisi, teorema-teorema dan beberapa contoh soal untuk mempermudah pemahaman pembaca. Pada akhir setiap pasal diberikan beberapa soal sebagai latihan bagi pembaca.

Ucapan terima kasih penulis sampaikan kepada semua pihak yang telah ikut berperan serta, baik secara langsung maupun tidak langsung dalam menyelesaikan penulisan buku ini.

Menyadari segala keterbatasan penulis, maka segala kritik untuk perbaikan akan diterima dengan senang hati.

Padang, Februari 1999

Penulis

DAFTAR ISI

BAB I
PENGERTIAN DAN FUNGSI TRIGONOMETRI

Trigonometri dulu disebut dengan ilmu ukur segitiga, atau ilmu ukur sudut, atau goniometri. Trigonometri berasal dari bahasa Greek yang terdiri dari dua kata yaitu "trigonon" berarti segitiga dan "metron" berarti ukuran.

Menurut asalnya, trigonometri cabang dari ilmu matematika yang mencoba menyelidiki gerak benda-benda angkasa seperti matahari, bulan dan bintang-bintang dan menghitung serta memperkirakan posisi dimana benda angkasa itu berada.

Pada perkembangannya selama hampir 2000 tahun, trigonometri banyak digunakan dalam bidang-bidang astronomi, navigasi, dan penyelidikan-penyelidikan lainnya. Pada saat ini trigonometri bukan hanya studi tentang segitiga dan sudut-sudut, tetapi juga merupakan cabang matematika modern yang membahas tentang sirkulasi dan fungsinya.

1.1. Sudut

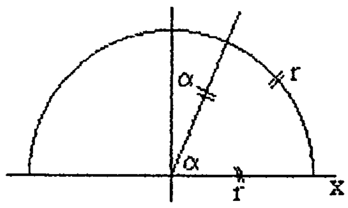
Suatu sudut dapat diukur dengan derajat atau dengan radian. Pengukuran sudut dengan derajat berdasarkan ketetapan bahwa lingkaran adalah 360°, suatu garis lurus memuat sudut 180° dan sudut siku-siku memuat sudut 90°.

Jadi ditetapkan besaran sudut diukur dengan derajat, yang disimbolkan dengan °, sama dengan $^1/_{360}$ dari sebuah perputaran rotasi secara penuh. Satu menit, dilambangkan dengan ′, sama dengan $^1/_{60}$ dari satu derajat. Satu detik, dilambangkan dengan simbol ″, sama dengan $^1/_{60}$ dari satu menit.

$1° = 60 \text{ menit} = 60'$

$1' = 60 \text{ detik} = 60''$

Pengukuran sudut dengan besaran lain ialah radian. Satu radian didefinisikan sebagai suatu sudut yang busurnya sepanjang jari-jari lingkaran (Gambar 1.1).



$\alpha = 1$ radian

Gambar 1.1

Hubungan antara dua besaran ini, antara derajat dan radian diuraikan sebagai berikut : Keliling sebuah lingkaran = 2 π r. Setiap 1 r adalah 1 radian (lihat gambar 1.1).

$$2 \pi r = 2 \pi \text{ radian} = 360°$$

$$1 \text{ radian} = \frac{360°}{2 \pi} = \frac{180°}{2 \pi}$$

$$\pi = \frac{22}{7}$$

$$1 \text{ radian} = \frac{180°}{\frac{22}{7}} = 57{,}273°$$

atau

$$1 \text{ radian} = 57°17'45''$$

$$1° = \frac{\pi}{180°}$$

$$\approx 0{,}01745$$

Dari penjelasan di atas didapat :

$90° = \dfrac{\pi}{2}$ radian $\qquad$ $45° = \dfrac{\pi}{4}$ radian

$30° = \dfrac{1}{6}\,\pi$ radian $\qquad 15° = \dfrac{1}{12}\,\pi$ radian

$67\tfrac{1}{2}° = \dfrac{3}{8}\,\pi$ radian

Contoh-contoh :

1. Carilah 58°41′17″ dalam radian.

Jawab : 58°41′17″

$$\begin{array}{l} 57°17'45'' \quad (= 1 \text{ radian}) \\ \hline 1°23'32'' = (60 + 23)' + 32'' = 5012'' \\ 57°17'45'' = (57 \,.\, 60 + 17)' + 45'' = 206265'' \end{array}$$

Jadi $58°41'17'' = 1\dfrac{5012}{206265}$ radian $= 1{,}02430$ radian.

2. Hitunglah 0,39636 radian dalam derajat, menit dan detik.

Jawab : $0{,}39636 \times 57°17'45''$

$= 0{,}39636 \times 206265''$

$= 81755$

$= 22°42'35''$

Jadi 0,39636 radian = 22°42′35″.

Hubungan antara derajat dan radius, pada sudut-sudut tertentu, dapat dilihat pada tabel 1 di bawah ini.

Tabel 1. Perbandingan Sudut dalam Derajat dan Radian

Derajat	Radian
0°	0
30°	$\frac{\pi}{6}$
45°	$\frac{\pi}{4}$
60°	$\frac{\pi}{3}$
90°	$\frac{\pi}{2}$
120°	$\frac{2\pi}{3}$
135°	$\frac{3\pi}{4}$
150°	$\frac{5\pi}{6}$
180°	π
210°	$\frac{7\pi}{6}$
225°	$\frac{5\pi}{4}$
240°	$\frac{4\pi}{3}$
270°	$\frac{3\pi}{2}$
300°	$\frac{5\pi}{3}$
315°	$\frac{7\pi}{4}$
330°	$\frac{11\pi}{6}$
360°	2π

Soal-soal :

1. Berapa derajat sudut-sudut di bawah ini.

   a. $^{3}/_{4}\,\pi$ b. $4\,\pi$ c. $2^{1}/_{2}\,\pi$ d. $^{5}/_{8}\,\pi$

2. Berapa radian sudut-sudut di bawah ini.

   a. 27° b. 33°20′ e. 132°49′ h. 317°42′16″

3. Hitunglah perbandingan trigonometri, pada sudut-sudut.

   a. $30°$ b. $45°$ c. $^1/_3\,\pi$

4. Lukislah sudut-sudut X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6, kalau diketahui :

   a. $\text{Sin } X_1 = {}^2/_3$ b. $\text{Cos } X_2 = 0{,}4$ c $\text{Tg } X_3 = {}^1/_2\sqrt{5}$

   d. $\text{Cotg } X_4 = \sqrt{10}$ e. $\text{Sec } X_5 = \sqrt{3}$ f. $\text{Cosec } X_6 = \sqrt{7}$

5. Diketahui garis C dan sudut α, lukislah.

   $U = C \text{ Tg}\,\alpha \text{ Cos}\,\alpha$ $V = C \text{ Tg}\,\alpha \text{ Cos}^2\,\alpha$ $W = C \text{ Tg}^3\,\alpha \text{ Sin}^2\,\alpha$

6. Diketahui garis p dan sudut α, lukiskanlah.

   $X = p \text{ Sin}\,\alpha \text{ Cos}\,\alpha$ $Y = p \text{ Sin}^2\,\alpha \text{ Cos}\,\alpha$ $Z = p \text{ Sin}^2\,\alpha \text{ Cos}^3\,\alpha$

7. Hitunglah Sin $55°15'$ kalau diketahui Sin $34°55' = 0{,}5700$.

8. Bila α dan β sudut-sudut lancip dalam segitiga dan Sin α = Cos α. Apa dan bagaimana segitiga tersebut.

1.2. Perbandingan Trigonometri

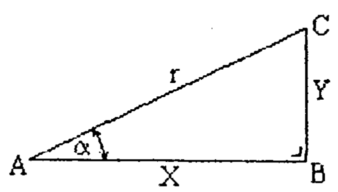
Didalam ilmu geometri, besaran sudut antara dua garis lurus ditetapkan dengan derajat, tetapi dalam trigonometri, satuan besaran suatu sudut dinyatakan oleh perbandingan (ratio) antara dua sisi dalam sebuah segitiga siku-siku. Keuntungan utama dalam pemakaian trigonometri ini, ialah tidak diperlukan mengukur jarak secara langsung, seperti yang ditemukan dalam mempelajari astronomi, dan navigasi. Dengan perbandingan-perbandingan trigonometri, permasalahan dalam astronomi dan navigasi tersebut dapat dipecahkan.

Manfaat lain yang ditemukan ialah besaran sudut bisa saja digunakan ke dalam suatu persamaan tertentu, tanpa mengalami perubahan-perubahan dalam setiap unit, karena perbandingan (= ratio) adalah juga bilangan. Dan ini adalah penting pemakaiannya dalam matematika dan ilmu Fisika.

Ada enam dasar utama perbandingan trigonometri yang merupakan dasar awal dalam mempelajari trigonometri ini. Keenam perbandingan trigonometri itu ialah Sinus (= Sin), Cosinus (= Cos), Tangen (= Tg), Cosecan (= Cosec), Secan (= Sec), dan Cotangen (= Cotg) dari suatu sudut. Cosecan, Secan dan Cotangen merupakan kebalikan dari Sinus, Cosinus dan Tangen. Kadang kala, ini disebut juga fungsi trigonemetri, karena masing-masing sudut mempunyai satu harga untuk masing-masing perbandingan trigonometri.

Dalam bagian ini akan dibahas perbandingan-perbandingan trigonometri dari suatu sudut lancip (sudut yang besarnya kecil dari 90°) dalam sebuah segitiga siku-siku.

Gambar 1.2 menunjukan sebuah segitiga siku-siku ABC, dengan sudut α, dimana α adalah sudut lancip ($\alpha < 90°$). Garis atau sisi AB = X garis proyeksi, dan sisi BC = Y, ditetapkan sebagai garis yang memproyeksi, dan sisi AC = r disebut hipotenusa segitiga tersebut.



AB = X = garis proyeksi
BC = Y = garis yang memproyeksi
AC = r = hipotenusa

Gambar 1.2

Definisi I : Sinus suatu sudut, adalah perbandingan antara garis yang memproyeksi dengan hipotenusa. Ditulis (lihat gambar 1.2) :

$$\text{Sin}\,\alpha = \frac{BC}{AC} = \frac{Y}{r}$$

Definisi II : Cosinus suatu sudut, ialah perbandingan antara garis proyeksi dengan hipotenusa. Ditulis (lihat gambar 1.2) :

$$\text{Cos}\,\alpha = \frac{AB}{AC} = \frac{X}{r}$$

Definisi III : Tangen suatu sudut, adalah perbandingan antara garis yang mem-proyeksi dengan garis proyeksi. Ditulis (lihat gambar 1.2) :

$$\text{Tg}\,\alpha = \frac{BC}{AB} = \frac{Y}{X}$$

Suatu cacatan khusus, ialah bahwa definisi IV, V dan VI merupakan kebalikan dari definisi I. II dan III.

Definisi IV : Cosecan suatu sudut adalah perbandingan antara garis hipotenusa dengan garis yang memproyeksi. Ditulis (lihat gambar 1.2) :

$$\text{Cosec}\,\alpha = \frac{AC}{BC} = \frac{r}{Y}$$

Definisi V : Secan suatu sudut adalah perbandingan antara garis hipotenusa dengan garis proyeksi. Ditulis (lihat gambar 1.2) :

$$\text{Sec}\,\alpha = \frac{AC}{AB} = \frac{r}{X}$$

Definisi VI : Cotangen suatu sudut ialah perbandingan antara garis hipotenusa dengan garis yang memproyeksi. Ditulis (lihat gambar 1.2) :

$$\text{Cotg}\,\alpha = \frac{AB}{BC} = \frac{X}{Y}$$

Dari definisi 1 s/d VI di atas, dapat dilahirkan beberapa rumus-rumus, yaitu :

$$\textbf{Sin}\,\alpha \,.\, \textbf{Cosec}\,\alpha = 1$$

$$\textbf{Cos}\,\alpha \,.\, \textbf{Sec}\,\alpha = 1$$

$$\textbf{Tg}\,\alpha \,.\, \textbf{Cotg}\,\alpha = 1$$

<u>Bukti</u> : lihat gambar 1.2

$$\text{Sin}\,\alpha = \frac{Y}{r} \qquad (\text{ definisi I })$$

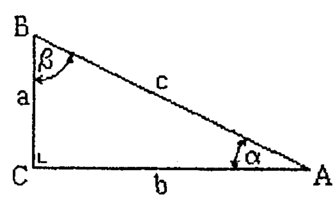
$$\text{Cosec}\,\alpha = \frac{r}{Y} \qquad (\text{ definisi IV })$$

$$\text{Jadi}\quad \text{Sin}\,\alpha\ .\ \text{Cosec}\,\alpha = \frac{Y}{r}\ .\ \frac{r}{Y} = 1$$

Coba anda buktikan $\text{Cos}\,\alpha\ .\ \text{Sec}\,\alpha = 1$

$\text{Tg}\,\alpha\ .\ \text{Cotg}\,\alpha = 1$

Peninjauan lebih lanjut, pemakaian definisi-definisi di atas, dalam segitiga siku-siku lancip, dapat dijabarkan di bawah ini, untuk mendapatkan rumus-rumus baru.



Gambar 1.3 Segitiga ABC siku-siku lancip

Lihat gambar 1.3

Menurut definisi I : $\text{Sin}\,\alpha = \frac{a}{c}$

Menurut definisi II : $\text{Cos}\,\alpha = \frac{b}{c}$

$$\text{Maka}\quad \frac{\text{Sin}\,\alpha}{\text{Cos}\,\alpha} = \frac{a}{c} : \frac{b}{c} = \frac{a}{b} = \text{Tg}\,\alpha \qquad (\text{menurut definisi III})$$

Jadi terdapar rumus :

$$\mathbf{Tg}\,\alpha = \frac{\mathbf{Sin}\,\alpha}{\mathbf{Cos}\,\alpha}$$

$$\mathbf{Cotg}\,\alpha = \frac{\mathbf{Cos}\,\alpha}{\mathbf{Sin}\,\alpha}$$

Buktikan rumus $\text{Cotg}\,\alpha = \frac{\text{Cos}\,\alpha}{\text{Sin}\,\alpha}$

Dari gambar 1.3, juga dapat dipakai dalil Phytagoras.

$$a^2 + b^2 = c^2$$

$\text{Sin } \alpha = \dfrac{a}{c}$ (definisi I), maka $\text{Sin}^2 \alpha = \dfrac{a^2}{b^2}$

$\text{Cos } \alpha = \dfrac{a}{c}$ (definisi II), maka $\text{Cos}^2 \alpha = \dfrac{b^2}{c^2}$

Jadi $\text{Sin}^2 \alpha + \text{Cos}^2 \alpha = \dfrac{a^2}{b^2} + \dfrac{b^2}{c^2} = \dfrac{a^2 + b^2}{c^2} = \dfrac{c^2}{c^2} = 1$

Rumus-rumus yang seazas dengan ini ialah :

$$\mathbf{Sin^2 \alpha + Cos^2 \alpha = 1}$$

$$\mathbf{1 + Tg^2 \alpha = Sec^2 \alpha}$$

$$\mathbf{1 + Cotg^2 \alpha = Cosec^2 \alpha}$$

Buktikan kebenaran rumus-rumus : $1 + \text{Tg}^2 \alpha = \text{Sec}^2 \alpha$

$1 + \text{Cotg}^2 \alpha = \text{Cosec}^2 \alpha$

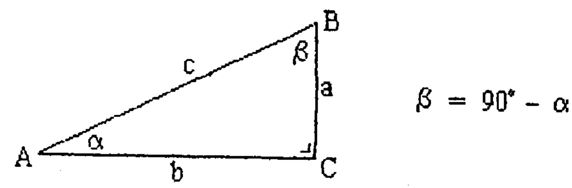
Cacatan : menurut ketentuan yang berlaku, bahwa pangkat dua (= kuadrat) atau pemangkatan lainnya, maka pangkat itu diletakkan atau diberikan kepada perbandingan trigonometri, bukan kepada sudut.

Contoh

Sin α dipangkatkan dengan 3, maka ditulis $\text{Sin}^3 \alpha$, bukan Sin α^3 dan bukan pula $\text{Sin}^3 \alpha^3$.

Cos β dipangkatkan dengan 10, maka ditulis $\text{Cos}^{10} \beta$, bukan Cos β^{10} dan bukan pula $\text{Cos}^{10} \beta^{10}$.

Kalau diperhatikan lagi gambar 1.4, yaitu segitiga siku-siku ABC, yang sudut siku-sikunya pada titik C, dan diketahui pula sudut A = α, maka besarya sudut B = $\beta = 90° - \alpha$



Gambar 1.4 Segitiga siku-siku ABC

Maka perbandingan trigonometri dapat dijabarkan sebagai berikut : Sin $\beta = {}^{b}/_{c}$ (definisi I), kalau diganti β dengan $90° - \alpha$ karena $\beta = 90° - \alpha$ (lihat gambar 1.4) maka Sin $(90° - \alpha) = {}^{b}/_{c}$ sama harganya dengan Cos α (definisi II) maka Sin $(90° - \alpha)$ = Cos α.

Analog pemikirannya dan cara penyelesaian seperti di atas maka ditemukan rumus-rumus sebagai berikut :

Sin (90° - α) = Cos α

Cos (90° - α) = Sin α

tg (90° - α) = Cotg α

Cotg (90° - α) = Tg α

Sec (90° - α) = Cosec α

Cosec (90° - α) = Sec α

Buktikan rumus-rumus di atas, selain Sin $(90° - \alpha)$ = Cos α.

1.3. Beberapa Perbandingan Trigonometri Sudut-sudut Tertentu

Untuk beberapa sudut tertentu seperti 30°, 45° dan 60°, kita akan dapat memperoleh nilai perbandingan trigonometri dengan mudah. Harga atau nilai perbandingan trigonometri tersebut adalah harga yang eksak.

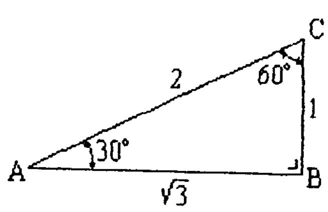
Untuk mencari harga perbandingan trigonometri dapat dipergunakan bantuan dalil Phytagoras yang berlaku pada sebuah segitiga siku-siku. Gambar 1.5a, menunjukkan sebuah segitiga siku-siku, dengan sudut A = 30° dan sudut B = 60°. Kalau panjang sisi BC = 1 satuan unit, maka panjang sisi AC = 2 satuan unit. Dalil Phytagoras menyatakan bahwa $AC^2 = AB^2 + BC^2$ atau $4 = AB^2 + 1$, maka $AB^2 = 3$ atau $AB = \sqrt{3}$.

Lihat gambar 1.5a

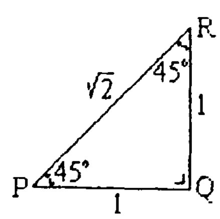
Menurut definisi : $\text{Sin } 30° = \dfrac{BC}{AC} = \dfrac{1}{2}$

$$\text{Cos } 30° = \frac{AB}{AC} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{tg } 30° = \frac{BC}{AB} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$



Gambar 1.5a Segitiga siku-siku ABC



Gambar 1.5b Segitiga siku-siku PQR

Pada gambar 1.5b, segitiga siku-siku dengan sudut-sudutnya 45°, dapat dijabarkan dalil Phytagoras, yaitu jika panjang sisi PQ = 1 satuan unit, maka panjang sisi QR = 1 satuan unit.

$PR^2 = PQ^2 + QR^2$ (dalil Phytagoras)

$PR^2 = 1 + 1 = 2$ maka

$PR = \sqrt{2}$

Harga perbandingan trigonometri pada segitiga siku-siku PQR adalah :

$$\text{Sin } 45° = \frac{QR}{PR} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{Cos } 45° = \frac{PQ}{PR} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{tg } 30° = \frac{QR}{PQ} = \frac{1}{1} = 1$$

Dengan mempergunakan cara-cara penyelesaian seperti di atas, dan bantuan dalil Phytagoras, maka harga-harga perbandingan tigonometri untuk susdut-sudut tertentu dapat dicari. Hasil perhitungan perbandingan trigonometri sudut-sudut tersebut dapat dilihat pada tabel 1.2 di bawah ini.

Tabel 2. Perbandingan Trigonemetri Sudut-sudut

Perbandingan Trigonometri	Sudut-sudut		
	30°	45°	60°
Sin	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
Cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tg	$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
Cosec	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$
Sec	$\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{2}$	2
Cotg	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Latihan : Coba anda hitung kembali nilai-nilai atau harga perbandingan trigonometri seperti dalam tabel 2.

1.4. Kesehargaan

Kesehargaan atau identitas (= identiteit), di dalam dunia matematika, penulisannya dinotasikan dengan tanda ≡. Lazimnya, dalam penulisan-penulisan dilambangkan dengan tanda =. Jelas, bahwa tanda ≡ tidak sama maknanya dengan tanda =, tetapi dalam penulisannya sering disamakan.

Persoalan-persoalan dalam masalah kesehargaan, harus diselesaikan pada masing-masing ruas. Ruas kiri dan ruas kanan dibatasi oleh tanda ≡. Suku-suku atau faktor-faktor tidak boleh dipindah-pindahkan melampaui tanda ≡. Untuk menyelesaikan permasalahan yang timbul dalam kesehargaan ini, saran-saran di bawah ini akan membantu anda. Saran-saran tersebut ialah :

1 Olah saja dengan mempergunakan definisi atau dalil, atau lainnya, masing-masing ruas, atau

2 olah saja yang ada pada ruas kiri, dimana ruas kanan tidak diolah, atau

3 olah saja yang disebelah kanan tanda ≡, dan ruas kiri tidak diganggu, atau

4 kedua ruas, baik ruas kiri maupun ruas kanan, diolah, asal saja tidak ada pemindahan suku-suku atau bagian-bagian melampaui tanda ≡.

Contoh-contoh

1. Buktikanlah : $(1 - \text{Sin}^2\,\alpha)^2 + (1 - \text{Cos}^2\,\alpha)^2 = 1 - 2\,\text{Sin}^2\,\alpha\,\text{Cos}^2\alpha$

Bukti : Kalau melihat bentuk permasalahan kesehargaan ini, ruas kanan tidak kita ganggu, dan hanya mengolah persoalan yang ada pada ruas kiri. Dengan ketentuan-ketentuan yang berlaku, maka pengolahan ruas kiri adalah sebagai berikut :

$$(1 - \text{Sin}^2\,\alpha)^2 + (1 - \text{Cos}^2\,\alpha)^2 = 1 - 2\,\text{Sin}^2\,\alpha\,\text{Cos}^2\alpha$$

$$(1 - 2\,\text{Sin}^2\,\alpha + \text{Sin}^4\,\alpha) + (1 - 2\,\text{Cos}^2\,\alpha + \text{Cos}^4\,\alpha) =$$

$$1 - 2\,\text{Sin}^2\alpha + \text{Sin}^4\alpha + 1 - 2\,\text{Cos}^2\alpha + \text{Cos}^4\alpha \quad =$$

$$2 - 2\,(\text{Sin}^2\alpha + \text{Cos}^2\alpha) + \text{Sin}^4\alpha + \text{Cos}^4\alpha \quad =$$

$$2 - 2\,.\,1 + (\text{Sin}^2\alpha + \text{Cos}^2\alpha)^2 - 2\,\text{Sin}^2\alpha\,\text{Cos}^2\alpha \quad =$$

$$2 - 2 + 1^2 - 2\,\text{Sin}^2\alpha\,\text{Cos}^2\alpha \quad =$$

$$1 - 2\,\text{Sin}^2\alpha\,\text{Cos}^2\alpha \quad = 1 - 2\,\text{Sin}^2\alpha\,\text{Cos}^2\alpha$$

q . e . d

Cacatan : q . e . d = quadrant erat demonstranden, berarti terbukti.

2. Buktikanlah : Sin α . Sec α + Cos α . Cosec α = Sec α . Cosec α

Bukti : Kedua ruas kita oleh dengan menggunakan rumus-rumus yang ada, dengan persyaratan tidak boleh memindah-mindahkan suku melampui tanda kesehargaan.

$$\text{Sin}\,\alpha\,.\,\text{Sec}\,\alpha + \text{Cos}\,\alpha\,.\,\text{Cosec}\,\alpha = \text{Sec}\,\alpha\,.\,\text{Cosec}\,\alpha$$

$$\text{Sin}\,\alpha\,.\,\frac{1}{\text{Cos}\,\alpha} + \text{Cos}\,\alpha\,.\,\frac{1}{\text{Sin}\,\alpha} = \frac{1}{\text{Cos}\,\alpha}\,.\,\frac{1}{\text{Sin}\,\alpha}$$

$$\frac{\text{Sin}\,\alpha}{\text{Cos}\,\alpha} + \frac{\text{Cos}\,\alpha}{\text{Sin}\,\alpha} = \frac{1}{\text{Sin}\,\alpha\,.\,\text{Cos}\,\alpha}$$

$$\frac{\text{Sin}^2\alpha + \text{Cos}^2\alpha}{\text{Sin}\,\alpha\,.\,\text{Cos}\,\alpha} = \frac{1}{\text{Sin}\,\alpha\,.\,\text{Cos}\,\alpha}$$

$$\frac{1}{\text{Sin}\,\alpha\,.\,\text{Cos}\,\alpha} = \frac{1}{\text{Sin}\,\alpha\,.\,\text{Cos}\,\alpha}$$

q . e . d

Beberapa tambahan saran-saran dalam menyelesaikan persoalan kesehargaan :

1. Usahakanlah bekerja pada ruas yang memuat suku-suku banyak atau pecahan.
2. Usahakanlah bekerja pada ruas yang memuat suku-suku berpangkat tinggi.
3. Usahakanlah terlebih dulu merobah bentuk-bentuk Tg, Cotg, Sec, Cosec, menjadi Sin dan Cos.

Soal-soal

Buktikanlah kesehargaan-kesehargaan di bawah ini :

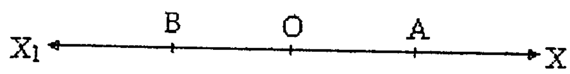
1. $\text{Cos}^2\,\alpha\ -\ \text{Sin}^2\,\alpha\ =\ 2\,\text{Cos}^2\,\alpha\ -\ 1$
2. $3\,\text{Sin}^2\,\gamma\ +\ 4\,\text{Cos}^2\,\gamma\ =\ 3\ +\ \text{Cos}^2\,\gamma$
3. $\dfrac{\text{Tg}\,X}{\text{Cosec}\,X}\ =\ (\,1\ -\ \text{Cos}^2\,X\,)\ \text{Sec}\,X$
4. $(\,\text{Sin}\,X\ -\ \text{Cos}\,X\,)\,(\,1\ +\ \text{Sin}\,X\ \text{Cos}\,X\,)\ =\ \text{Sin}^3\,X\ -\ \text{Cos}^3\,X$
5. $\dfrac{\text{Sin}^2\,X\ -\ \text{Cos}^2\,X}{\text{Tg}^2\,X\ -\ 1}\,(\,1\ +\ \text{Tg}^2\,X\,)\ =\ 1$
6. Kalau $\text{Tg}\,\alpha\ =\ q$ Buktikan $\text{Sec}\,\alpha\ =\ q\ +\ {}^1/_2$
7. $\text{Cosec}^2\,\alpha\ (\,1\ -\ \text{Cos}^2\,\alpha\,)\ =\ 1$
8. $\text{Cotg}^2\,X\ -\ \text{Cos}^2\,X\ =\ \text{Cos}^2\,X\ .\ \text{Cotg}^2\,X$
9. $3\,\text{Cos}^4\,X\ +\ 6\,\text{Sin}^2\,X\ =\ 3\ +\ 3\,\text{Sin}^4\,X$
10. $\text{Sec}^2\,X\ +\ \text{Tg}^2\,X\ =\ \text{Sec}^4\,X\ -\ \text{Tg}^4\,X$
11. $\dfrac{\text{Tg}^3\,X\ -\ \text{Cotg}^3\,X}{\text{Tg}\,X\ -\ \text{Cotg}\,X}\ =\ \text{Sec}^2\,X\ +\ \text{Cotg}^2\,X$
12. $\text{Sec}^2\,X\ .\ \text{Cosec}^2\,X\ =\ 2\ +\ \dfrac{\text{Sin}^4\,X\ +\ \text{Cos}^4\,X}{\text{Sin}^2\,X\ .\ \text{Cos}^2\,X}$
13. $(\,\text{Cosec}\,X\ -\ \text{Cotg}\,X\,)\,(\,1\ +\ \text{Cos}\,X\,)\ =\ \text{Sin}\,X$
14. $\dfrac{\text{Tg}^3\,X\ -\ \text{Cotg}^3\,X}{\text{Tg}\,X\ -\ \text{Cotg}\,X}\ =\ \text{Tg}^2\,X\ +\ \text{Cotg}^2\,X\ +\ 1$
15. $\dfrac{\text{Tg}^2\,X\ +\ 1}{\text{Cotg}^2\,X\ +\ 1}\ =\ \text{Tg}^2\,X$

BAB II

PERBANDINGAN TRIGONOMETRI PADA SUDUT YANG LEBIH BESAR DARI PADA 90° DAN SUDUT NEGATIF

2.1. Koordinat Suatu Titik

Pada suatu garis lurus yang tak terbatas panjangnya dapat diletakkan sembarang suatu titik O. Titik O ini disebut titik awal atau titik pangkal.

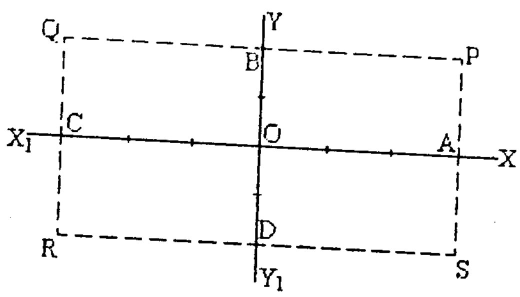


Gambar 2.1 Garis lurus

Jika pada garis tersebut (gambar 2.1) ada suatu titik A, maka kedudukannya itu tidak ditentukan dengan jelas hanya oleh jarak OA. Disamping jarak OA itu diketahui, masih harus diketahui lagi disebelah yang mana dari titik O, titik A itu berada.

Sehubungan dengan itu, pada garis itu harus ditetapkan terlebih dahulu bagian-bagian positif (arah positif) dan bagian-bagian negatif (arah negatif). Sebelah kanan dari titik pangkal O (OX) disebut dengan bagian positif dan sebelah kiri dari titik awal O (OX_1) disebut bagian negatif. Seandainya titik A terletak pada bagian yang positif, sedangkan OA = 3 cm, maka jarak OA adalah +3 cm. Jika B berada disebelah yang negatif, dengan OB = 2 cm, maka jaraknya B terhadap O adalah -2 cm. Bialangan-bilangan aljabar +3 dan -2 menentukan dengan tepat kedudukkannya titik-titik A dan B. Mereka disebut koordinat-koordinatnya A dan B.

Demikian pula, dapat ditentukan kedudukkannya suatu titik pada bidang datar. Dengan cara melukiskan terlebih dahulu garis-garis XX_1 dan YY_1, sehingga $XX_1 \perp YY_1$ yang berpotongan di titik O.



Gambar 2.2 Sumbu Koordinat

XX_1 dan YY_1 dinamakan poros-poros atau sumbu-sumbu koordinat. Titik O disebut pusat.

Pada sumbu Y, bagian OY disebut bagian positif dan bagian OY_1 adalah bagian negatif.

Pada P, dalam bidang XOY dapat diproyeksikan pada sumbu OX dan OY. Maka letaknya dapat ditentukan sama sekali, jika proyeksi-proyeksinya A dan B diketahui. Jarak OA dinamakan x yaitu absis titik P, dan OB (= AP) dinamakan y, yaitu ordinat titik P. Dari gambar 2.2 dapat dilihat, bahwa :

absisnya P adalah + 3 , dan ordinatnya + 2 ditulis P (3 , 2)

absisnya Q adalah - 3 , dan ordinatnya + 2 ditulis Q (-3 , 2)

absisnya R adalah - 3 , dan ordinatnya - 2 ditulis R (-3 , -2)

absisnya S adalah + 3 , dan ordinatnya - 2 ditulis S (3 , -2)

Secara umum koordinat titik P ditulis P (x , y), dimana x = absis titik P, dan y = ordinat titik P.

Jadi sumbu-sumbu koordinat membagi daerah koordinat (bidang koordinat) dalam empat bagian bidang. Bagian bidang itu disebut "Kuadran", masing-masing dinamakan Kuadran I, Kuadran II, Kuadran III dan Kuadran IV. Sehingga letak suatu titik di bidang koordinat dapat disimpulkan dalam tabel berikut ini.

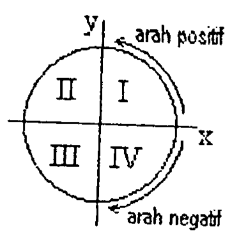
Tabel 3. Letak Suatu Titik Dibidang Koordinat

Kuadran	absis X	ordinat Y
I	+	+
II	-	+
III	-	-
IV	+	-

2.2. Sudut pada Kuadran

Sekarang kita hendak mencari sudut-sudut yang lebih besar daripada 90°. Dapat juga dikatakan, kita akan menentukan letak suatu sudut pada suatu kuadran.

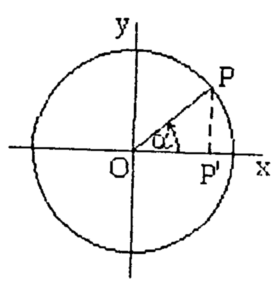
Besar suatu sudut diukur menurut arah yang berlawanan dengan arah jarum jam. Arah yang berlawanan dengan jarum jam disebut arah positif. Sebaliknya, arah yang sama dengan jarum jam disebut arah negatif.



Gambar 2.3

Gambar 2.3 memperlihatkan arah positif dan arah negatif suatu sudut.

a. Sudut-sudut di kuadran I

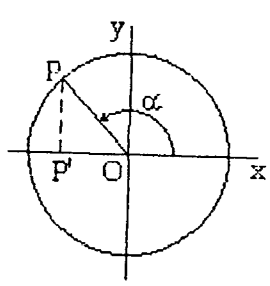


Gambar 2.4 Sudut di kuadran I

Pada gambar 2.4, OP = r = jari-jari lingkaran. Proyeksi titik P pada sumbu X adalah P'.

$\angle$ P'OP berada di kuadran I yang besarnya antara 0° dan 90°. Bila $\angle$ P'OP = α maka sudut di kuadran I adalah $0° < \alpha < 90°$

b. Sudut-sudut di kuadran II

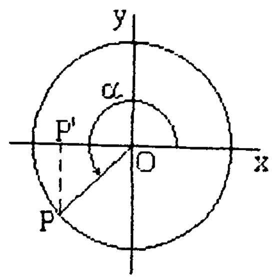


Gambar 2.5 Sudut di kuadran II

Pada gambar 2.5, bila OP berimpitan dengan OY maka $\angle \alpha = 90°$.

OP berada di kuadran II besar sudut yang dibentuknya antara 90° dan 180°, atau $90° < \alpha < 180°$

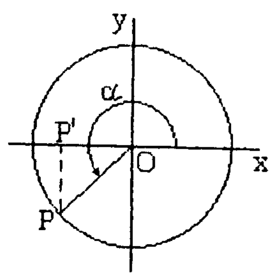
c. Sudut-sudut di kuadran III



Gambar 2.6 Sudut di kuadran III

Pada gambar 2.6, OP berada di kuadran III. Sudut yang dibentuknya, besarnya antara 180° dan 270°. Ditulis : $180° < \alpha < 270°$

d. Sudut-sudut di kuadran IV



Gambar 2.7 Sudut di kuadran IV

Pada gambar 2.7, OP berada di kuadran IV. Besar sudut yang dibentuknya antara 270° dan 360°. Ditulis : $270° < \alpha < 360°$

2.3. <u>Perbandingan Trigonometri pada Sudut yang Lebih Besar dari 90°</u>

Selanjutnya kita tinjau perbandingan-perbandingan trigonometri pada susut-sudut yang lebih besar dari 90°. Atau dengan perkataan lain, perbandingan tigonometri pada sudut dalam kuadran II, III dan IV.

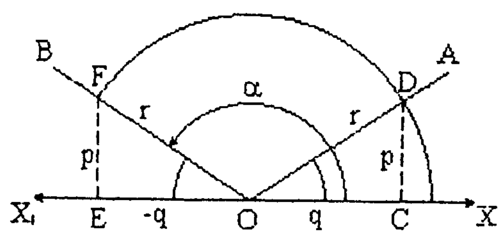
Karena nilai perbandingan trigonometri pada kuadran I adalah positif, maka usaha-usaha yang dilakukan dalam mencari, menghitung perbandingan trigonometri pada kuadran lain, sebaliknya dikaitkan atau dihubungkan kepada nilai perbandingan trigonometri pada kuadran I tersebut.

Untuk itu, marilah kita pelajari perbandingan trigonometri pada masing-masing kuadran, mulai dari kuadran II sampai kuadran IV.

2.3.1. Sudut dalam Kuadran II

Dalil : Dua buah sudut yang berpelurus mempunyai sifat-sifat sebagai berikut : Sinus kedua sudut itu sama, Cosinus dan Tangen kedua sudut itu adalah berlawanan.

Bukti.



Gambar 2.8 Sudut dalam Kuadran II

Pada gambar 2.8 dapat dibaca, bahwa $\angle$ AOX adalah sudut dalam kuadran I (sudut lancip) $\angle$ BOX adalah pelurusnya $\angle$ AOX.

Ini berarti $\angle$ AOX + $\angle$ BOX = 180°, maka dari itu $\angle$ BOX$_1$ = $\angle$ BOX. Kita ambil sembarangan titik D dan F kaki OA dan OB yang sama dengan jari-jari lingkaran r. Kita proyeksikan potongan garis OD dan OF pada sumbu OX dan OX$_1$.

Perhatikan dua segitiga DOC dan FOE :

$$\text{Sin} \angle \text{BOX} = \frac{FE}{FO} = \frac{p}{r} \qquad \text{Sin} \angle \text{AOX} = \frac{DC}{OD} = \frac{p}{r}$$

$$\text{Cos} \angle \text{BOX} = \frac{EO}{FO} = \frac{-q}{r} \qquad \text{Cos} \angle \text{AOX} = \frac{OC}{OD} = \frac{q}{r}$$

$$\text{Tg} \angle \text{BOX} = \frac{FE}{EO} = \frac{p}{-q} \qquad \text{Tg} \angle \text{AOX} = \frac{DC}{OC} = \frac{p}{q}$$

Inilah yang dimaksud dalam dalil di atas.

Jika α adalah suatu sudut dalam kuadran II, maka didapat rumus :

$$\textbf{Sin}\ \alpha = +\textbf{Sin}\ (180° - \alpha)$$

$$\textbf{Cos}\ \alpha = -\textbf{Cos}\ (180° - \alpha)$$

$$\textbf{Tg}\ \alpha = -\textbf{Tg}\ (180° - \alpha)$$

Karena Cosecan, Secan dan Cotagen suatu sudut adalah kebalikkan dari Sinus, Cosinus dan Tangen sudut tersebut, maka :

$$\textbf{Cosec}\ \alpha = +\ \textbf{Cosec}\ (180^\circ - \alpha)$$

$$\textbf{Sec}\ \alpha = -\ \textbf{Sec}\ (180^\circ - \alpha)$$

$$\textbf{Cotg}\ \alpha = -\ \textbf{Cotg}\ (180^\circ - \alpha)$$

Bukti salah satu rumus dapat dilakukan sebagai berikut :

$$\text{Cotg}\ \alpha = \frac{1}{\text{Tg}\ \alpha} \qquad \text{(definisi)}$$

$$\text{Tg}\ \alpha = -\text{Tg}\ (180^\circ - \alpha) \qquad \text{(rumus di atas)}$$

maka

$$\text{Cotg}\ \alpha = \frac{1}{-\text{Tg}\ (180^\circ - \alpha)} = -\text{Cotg}\ (180^\circ - \alpha)$$

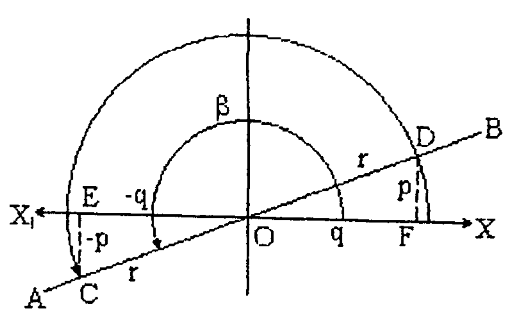
q . e . d

Coba anda buktikan rumus yang lain. Silahkan!

2.3.2. Sudut dalam Kuadran III

Perbandingan trigonometri sudut-sudut dalam kaudran III dapat dikaitkan atau dijadikan perbandingan trigonometri sudut-sudut dalam kuadran I.

Sudut--sudut dalam kuadran III ialah $180^\circ < \beta < 270^\circ$, dimana β diumpamakan sudut dalam kuadran III.



Gambar 2.9 Sudut dalam Kuadran III

Pada gambar 2.9 diumpamakan β adalah sudut dalam kuadran III. Katakanlah $\beta = 200^\circ$, maka $\angle$ BOX $= 200^\circ - 180^\circ = 20^\circ$, dan $\angle$ BOX $= \angle$ AOX_1 $= 20^\circ$ (sudut yang bertolakbelakang)

Titik D dan C diproyeksikan kepada sumbu X dan X_1, dan proyeksi potongan garis OD dan OC ialah q dan -q, serta proyektornya (garis yang memproyeksi) p dan -p.

Perbandingan trigonometri sudut dalam kuadran III ialah :

$$\text{Sin} \angle AOX = \frac{EC}{CO} = \frac{-p}{r} \qquad \text{Sin} \angle BOX = \frac{DF}{OD} = \frac{p}{r}$$

$$\text{Cos} \angle AOX = \frac{EO}{CO} = \frac{-q}{r} \qquad \text{Cos} \angle BOX = \frac{OF}{OD} = \frac{q}{r}$$

$$\text{Tg} \angle AOX = \frac{EC}{OE} = \frac{-p}{-q} \qquad \text{Tg} \angle BOX = \frac{DF}{OF} = \frac{p}{q}$$

Karena $\angle$ AOX = β, sudut dalam kuadran III, maka

$$\textbf{Sin}\,\beta = -\,\textbf{Sin}\,(\beta - 180°)$$

$$\textbf{Cos}\,\beta = -\,\textbf{Cos}\,(\beta - 180°)$$

$$\textbf{Tg}\,\beta = +\,\textbf{Tg}\,(\beta - 180°)$$

Sebagai contoh :

$$\text{Sin } 200° = -\text{ Sin } 20°$$

$$\text{Cos } 200° = -\text{ Cos } 20°$$

$$\text{Tg } 200° = +\text{ Tg } 20°$$

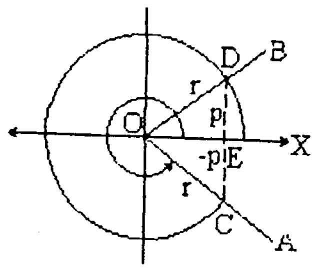
Untuk kebalikan perbandingan trigonometri Cosecan, Secan dan Cotagen suatu sudut pada kuadran III, dapat disusun rumus-rumusnya :

$$\textbf{Cosec}\,\beta = -\,\textbf{Cosec}\,(\beta - 180°)$$

$$\textbf{Sec}\,\beta = -\,\textbf{Sec}\,(\beta - 180°)$$

$$\textbf{Cotg}\,\beta = +\,\textbf{Cotg}\,(\beta - 180°)$$

2.3.3. Sudut dalam Kuadran IV



Gambar 2.10 Sudut dalam Kuadran IV

Lihat gambar 2.10 diumpamakan $\angle$ AOX = 310°. Kita lukis dalam kuadran I suatu sudut $\angle$ BOX = 360° - 310° = 50°.
Kita ukur pada kaki-kaki OA dan OB potongan-potongan garis OC = OD = r.

Potongan-potongan garis OD dan OC diproyeksikan pada sumbu OX, maka dengan mudah dapat dibuktikan bahwa proyeksinya adalah sama, yaitu OE = q, berhubungan dengan Δ OEC $\cong$ Δ OED.

Perbandingan trigonometri pada sudut kuadran IV dan dihubungkan dengan perbandingan trigonometri pada sudut kuadran I adalah :

$$\text{Sin} \angle AOX = \frac{EC}{OC} = \frac{-p}{r} \qquad \text{Sin} \angle BOX = \frac{DE}{OD} = \frac{p}{r}$$

$$\text{Cos} \angle AOX = \frac{OE}{OC} = \frac{q}{r} \qquad \text{Cos} \angle BOX = \frac{OE}{OD} = \frac{q}{r}$$

$$\text{Tg} \angle AOX = \frac{CE}{OE} = \frac{-p}{q} \qquad \text{Tg} \angle BOX = \frac{DE}{OE} = \frac{p}{q}$$

Jadi : Sin $\angle$ AOX = - Sin $\angle$ BOX

Cos $\angle$ AOX = + Cos $\angle$ BOX

Tg $\angle$ AOX = - Tg $\angle$ BOX

Sebagai contoh :

Sin 310° = - Sin 50°

Cos 310° = + Cos 50°

Tg 310° = - Tg 50°

Seandainya γ suatu sudut dalam kuadran IV, kita mendapatkan rumus-rumus :

$$\mathbf{Sin}\ \gamma = -\mathbf{Sin}\ (360^\circ - \gamma)$$

$$\mathbf{Cos}\ \gamma = +\mathbf{Cos}\ (360^\circ - \gamma)$$

$$\mathbf{Tg}\ \gamma = -\mathbf{Tg}\ (360^\circ - \gamma)$$

Selanjutnya dengan kebalikkannya Sinus, Cosinus dan Tangen didapat pula :

$$\mathbf{Cosec}\ \gamma = -\mathbf{Cosec}\ (360^\circ - \gamma)$$

$$\mathbf{Sec}\ \gamma = +\mathbf{Sec}\ (360^\circ - \gamma)$$

$$\mathbf{Cotg}\ \gamma = -\mathbf{Cotg}\ (360^\circ - \gamma)$$

Setelah dipelajari perbandingan trigonometri pada sudut-sudut dalam kuadran I, II, III dan IV, dikumpulkan ikhtisar seperti dalam tabel di bawah ini.

Tabel 4. Perbandingan Trigonometri Sudut-sudut dalam Kuadran-kuadran

Perbandingan trigonometri	0°	I	90°	II	180°	III	270°	IV	360°
Sinus	0	+	1	+	0	-	-1	-	0
Cosinus	1	+	0	-	-1	-	0	+	1
Tangen	0	+	$\pm\infty$	-	0	+	$\pm\infty$	-	0
Cosecan	∞	+	1	+	$\pm\infty$	-	-1	-	$-\infty$
Secan	1	+	$\pm\infty$	-	-1	-	$\pm\infty$	+	1
Cotangen	∞	+	0	-	$\pm\infty$	+	0	-	$-\infty$

Contoh-Contoh :

1. Hitunglah : Cos 210° Sin 240° Tg 225°

   Jawab.

   Cos 210° = - Cos (210° - 180°) (sudut dalam kuadran III)

   = - Cos 30°

   = $-\frac{1}{2}\sqrt{3}$

   Sin 240° = - Sin (240° - 180°) (sudut dalam kuadran III)

$= -\text{Sin } 60°$

$= -\frac{1}{2}\sqrt{3}$

Tg 225° $= +\text{Tg } (225° - 180°)$ (sudut dalam kuadran III)

$= +\text{Tg } 45°$

$= +1$

2. Hitunglah : Cos 300° Sin 3150° Tg 330°

Jawab.

Cos 300° $= +\text{Cos } (360° - 300°)$ (sudut dalam kuadran IV)

$= +\text{Cos } 60°$

$= \frac{1}{2}$

Sin 315° $= -\text{Sin } (360° - 315°)$ (sudut dalam kuadran IV)

$= -\text{Sin } 45°$

$= -\frac{1}{2}\sqrt{2}$

Tg 330° $= -\text{Tg } (360° - 330°)$ (sudut dalam kuadran IV)

$= -\text{Tg } 30°$

$= -\frac{1}{3}\sqrt{3}$

Soal-soal :

1. Mudahkanlah menjadi perbandingan trigonometri suatu sudut lancip.

a. Sin 100°	Cos 100°	Tg 100°	Sec 100°
b. Cos 200°	Tg 200°	Cotg 200°	Cosec 200°
c. Sin 300°	Cos 300°	Tg 300°	Sec 300°

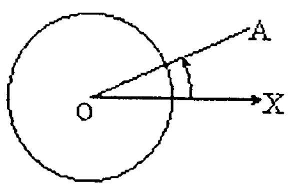
2. Jika diketahui Sin 50° = 0,7660, carilah sudut-sudut yang Sinusnya sama besarnya? Berapakah besarnya sudut-sudut yang Sinusnya = -0,7660 ?

3. Jika diketahui Cos 50° = 0,6428, carilah sudut-sudut yang Cosinusnya sama besar? Berapakah besarnya sudut-sudut dengan Cosinusnya = -0,6428 ? Dan dengan Sinus = 0,6428 ?

4. Diketahui Tg 35° = 0,7002. Carilah semua sudut dengan Tangen = 0,7002. Carilah pula semua sudut dengan Cotangen 0,7002 ; semua sudut dengan Tangen -0,7002 ; semua sudut dengan Cotangen -0,7002.

5. Hitunglah harganya bentuk-bentuk berikut :
   a. $\text{Sin } 200^\circ + \text{Sin } 210^\circ + \text{Sin } 160^\circ$
   b. $\text{Sin } 180^\circ + \text{Cos } 180^\circ + \text{Cos } 100^\circ$
   c. $\text{Tg } 225^\circ + \dfrac{\text{Tg } 10^\circ}{\text{Tg } 270^\circ} + \text{Cotg } 45^\circ$

2.3.4. Sudut yang Lebih Besar dari 360°



Suatu garis OA, (lihat gambar 2.11) yang semula berimpit dengan OX , diputar berturut-turut melalui kuadran I, II, III, dan IV.

Gambar 2.11 Sudut yang lebih besar dari 360°

Sesudah berimpit lagi dengan OX, berputar satu lingkaran, garis OA itu masih terus berputar, sehingga akhirnya membentuk $\angle$ XOA = 15°. Jadi jumlah sudut yang telah dilalui OA adalah 360° + 15° = 375°. Suatu sudut yang sedemikian besarnya, dikatakan akhirnya sudut itu terletak dalam kuadran pertama.

Contoh lain besarnya sudut yang dilalui 840° adalah sama dengan 2 x 360° + 120°, yang akhirnya terletak dalam kuadran III.

Ketentuan : Perbandingannya trigonometri suatu sudut AOX hanya tergantung pada akhir letaknya kaki OA yang berputar.

Menurut ketentuan ini, maka :

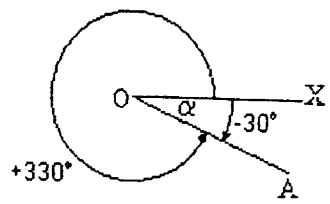
Sin 375° = Sin 15° Cos 380° = Cos 20° Tg 400° = Tg 40°

Cosec 420° = Cosec 60° Sec 850° = Sec (2 x 360° + 130°) = Sec 130°

dan seterusnya.

Pada umumnya dapat dinyatakan : Perbandingan trigonometri suatu sudut $\alpha + k \; . \; 360°$ adalah sama dengan perbandingan trigonometri sudut α. Dimana k = bilangan bulat positif.

2.3.5. Sudut Negatif



Gambar 2.12 Sudut Negatif

Dalam fasal-fasal yang lalu, dijelaskan bahwa suatu sudut positif terbentuk jika potongan garis diputar yang arah perputarannya berlawanan dengan jarum jam.

Jika potongan garis OA yang semula berimpit dengan OX (gambar 2.12) dibawa berputar searah dengan jarum jam, dan OA akhirnya terletak dalam kaudran IV, maka sudut α disebut sudut negatif. Contoh pada gambar 2.12 $\angle$ XOA = -30°.

Untuk menyelesaikan perbandingan trigonometri sudut-sudut negatif, ialah dengan menjadikan atau merubah ke dalam bentuk sudut-sudut positif dan lancip.

Contoh-contoh :

Sin (-30°) = Sin 330° = - Sin 30° (kuadran IV)
Cos (-30°) = Cos 330° = + Cos 30° (kuadran IV)
Tg (-30°) = Tg 330° = - Tg 30° (kuadran IV)
Cosec (-120°) = Cosec 240° = - Cosec 60° (kuadran III)
Sec (-120°) = Sec 240° = - Sec 60° (kuadran III)
Cotg (-120°) = Cotg 240° = + Cotg 60° (kuadran III)

Soal-soal :

1. Mudahkanlah menjadi perbandingan trigonometri suatu sudut lancip.

a.	Sin 370°	Cos 500°	Tg 910°	Sec 1400°
b.	Cotg 460°	Cosec 800°	Sin 900°	Cos 1000°
c.	Cos (-50°)	Sec (-100°)	Tg (-200°)	Cotg (-300°)

2. Hitunglah harga dari bentuk-bentuk di bawah ini :

   a. $\text{Sin } 375° + \dfrac{\text{Tg } 400°}{\text{Cotg } 400°} + \text{Cotg } 45° - \text{Sin } 15°$

   b. $\text{Cos } 80° + \text{Cos } 540° - \text{Sin } 10° + \text{Cos } 90°$

   c. $\text{Sin } (-45°) + \text{Cos } (-45°) + \text{Tg } (-45°) - \text{Cotg } (-45°)$

3. Hitunglah harga dari bentuk-bentuk di bawah ini :

   a. $\text{Cos } 60° > \text{Cos } 30°$ $\quad$ $\text{Cos } 60° - \text{Cos } 30°$ $\quad$ $\text{Cos } 60° < \text{Cos } 30°$

   b. $\text{Sin } 30° + \text{Cos } 60° > \text{Sin } 90°$ $\quad$ $\text{Sin } 30° + \text{Cos } 60° < \text{Sin } 90°$

4. Hitunglah harga-harga perbandingan trigonometri di bawah ini :

   a. $\dfrac{\text{Sin } 60°}{\text{Cos } 60°}$

   b. $\text{Sin } (-135°) \times \text{Tg } (-150°) + \text{Cos } (-330°)$

5. Apakah peryataan di bawah ini benar atau salah.

   a. $\text{Tg } 30° < \text{Tg } 45° < \text{Tg } 60°$

   b. $\text{Sin } 135° - \text{Sin } (-135°)$

   c. $\text{Sin } 60° + \text{Sin } 30° = \text{Sin } 90°$

   d. $\text{Cos } 12° = \dfrac{1}{\text{Cosec } 780°}$

6. Hitunglah harga bentuk-bentuk di bawah ini.

   a. $\text{Sin } (-270°) + \text{Cos } (-240°) + \text{Sin } (-310°) + \text{Cos } (-310°)$

   b. $\text{Tg } (315°) + \text{Cotg } (-315°) + \text{Sec } (315°) + \text{Cosec } (-315°)$

   c. $\text{Sec } (-270°) + \text{Cosec } (-270°) + \text{Tg } (-270°)$

   d. $\text{Cotg } (45°) + \text{Cos } (225°) + \text{Cotg } (225°) - \text{Tg } 45°$

7. Hitunglah harga bentuk-bentuk di bawah ini :

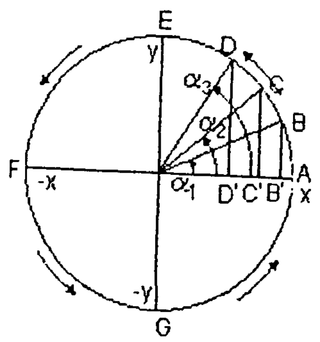
   a. $\text{Tg } 45° + \text{Cos } 45° + \text{Cotg } 135° + \text{Sin } 60°$

   b. $\text{Cos } (-45°) + \text{Sin } (-45°)\ \text{Tg } (-45°)$

   c. $\text{Sec } 135° - \text{Sec } (-45°) + \text{Cosec } 60° - \text{Cosec } (-120°)$

   d. $\text{Sin } 90° + \text{Cos } (-90°) + \text{Sin } (-90°) + \text{Tg } (-45°)$

2.4. Tinjauan terhadap Nilai Sinus, Cosinus dan Tangen suatu Sudut



Gambar 2.13 Nilai Perbandingan Trigonometri

Hasil harga-harga perbandingan trigonometri berobah-robah dari suatu sudut ke sudut lainnya. Jadi perobahan nilai perbandingan trigonometri kepada besarnya sudut dan letaknya sudut tersebut.

Untuk itu marilah kita tinjau beberapa perbandingan trigonometri pada sudut yang berkisar antara 0° dan 360°.

2.4.1. Tinjauan terhadap Nilai Sinus α

Sudut α berobah-robah dari 0° sampai dengan 360° (lihat gambar 2.13). Mula-mula potongan garis OA berhimpit dengan OX, ini berarti sudut $\alpha = 0°$. Jadi $\sin \alpha = \sin 0° = {}^{0}/_{OA} = 0$. Pada saat potongan garis OA berhimpit dengan OX, panjang garis proyektor = 0 dan sisi miring = OA, dan $\alpha = 0°$ maka $\sin \alpha = \sin 0° = {}^{0}/_{OA} = 0$.

Kemudian OA digerakkan ke atas menurut arah yang berlawanan dengan jarum jam, sehingga OA berada pada OC umpamanya. Dalam hal ini sudut yang dibentuk adalah α_2 yaitu $\angle$ COX. Pada saat ini harga $\sin \alpha_2 = {}^{CC'}/_{OC}$. Jika umpamanya besarnya sudut $\alpha_2 = 45°$ maka harga perbandingan trigonometri $\sin \alpha_2 = \sin 45° = {}^{CC'}/_{OC} = {}^{1}/_{\sqrt{2}} = {}^{1}/_{2}\sqrt{2}$.

Potongan OA digerakkan terus ke atas, yang sudut α berobah-robah menjadi sudut α_1, α_2, α_3 dan seterusnya, sehingga pada akhir kuadran pertama sudut $\alpha = 90°$.

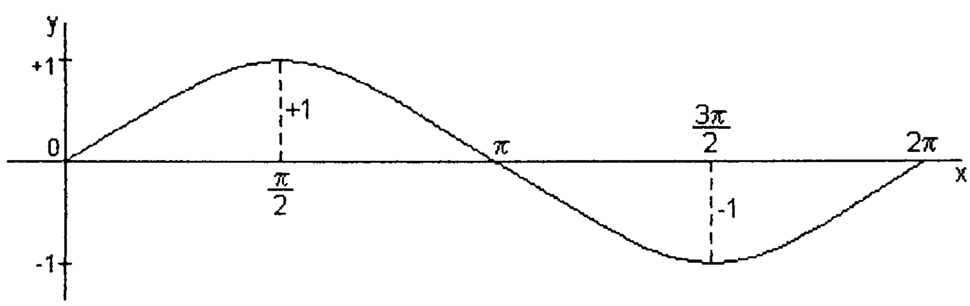
Dalam hal ini garis proyektor OE = sisi miring OE, maka harga Sin α = Sin 90° = $^{OE}/_{OE}$ = +1.

Seterusnya potongan garis OA berhimpit dengan sudut OX-. Pada posisi OA berhimpit dengan OX-, maka panjang proyektor F = 0, dan sisi miringnya = OF = -X, besar sudut α = 180°. Jadi nilai Sin α = Sin 180° = $^{0}/_{OF}$ = $^{0}/_{-X}$ = 0.

Potongan garis OA kita bawa bergerak sampai akhir kuadran III, yaitu berimpit dengan OG. Dalam hal ini sudut α menjadi 270°, α = 270°. Dan garis proyektor sama panjang dengan OG, sekaligus sama panjang dengan sisi miring. Harga Sin α = Sin 270° = $^{OG}/_{OG}$ = $^{OG}/_{-Y}$ = -1, dimana sisi miring merupakan garis miring sumbu Y yang arahnya negatif.

Akhirnya pada sudut = 360°, akibat potongan garis OA bergerak terus, sehingga kembali berhimpit dengan garis OA semula. Pada posisi sudut α = 360°, besarnya proyektor = 0, sehingga Sin α = Sin 360° = $^{0}/_{OA}$ = 0.

Kesimpulan peninjauan terhadap nilai Sin α, dimana α berobah-robah besarnya, tergantung dimana posisi potongan garis OA, maka terdapat : Nilai Sin α berkisar antara 0, -1 dan +1, dan dapat ditulis : -1 ≤ Sin α ≤ +1. Atau dengan perkataan lain, nilai Sinus suatu sudut akan mencapai nilai tertinggi +1 pada sudut 90° dan akan mencapai nilai terendah -1 pada sudut 270°, seperti grafik Sinus di bawah ini.



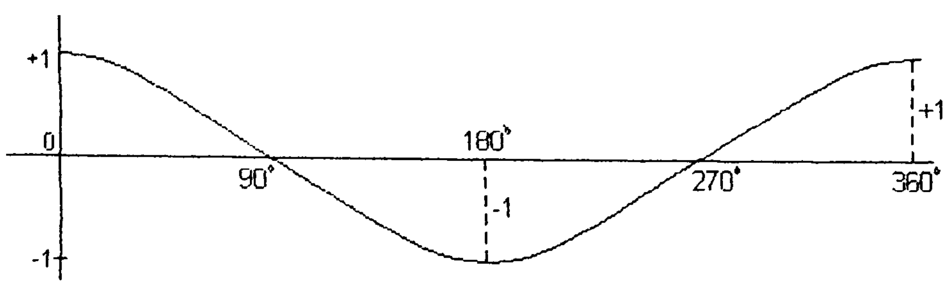
Gambar 2.14 Grafik Sinus

2.4.2. Tinjauan terhadap Nilai Cosinus α

Dengan berdasarkan ketentuan-ketentuan Trigonometri, mengenai Cosinus suatu sudut ialah harga perbandingan antara garis proyeksi (proyektor) dan garis yang diproyeksikan (proyektum).

Analog pemikiran dengan cara-cara peninjauan terhadap Sinus suatu sudut di atas, yang sudut pandangan berobah-robah dari 0° sampai 360°. Harga perbandingan trigonometri khusus Cosinus suatu sudut dapat dihitung antara lain : Cos 0° = +1 ; Cos 90° = 0 ; Cos 180° = -1 ; Cos 270° = 0 ; Cos 360° = +1. Jadi dapat disimpulkan jika suatu sudut α dirobah-robah dari 0° sampai dengan 360°, nilai Cosinus α berobah pula dari +1 (maksimum) ke nilai -1 (terendah), dan ditulis $0° \leq \alpha \leq 360°$, maka $-1 \leq \text{Cos}\ \alpha \leq +1$.

Secara grafis, dapat diperlihatkan perobahan nilai Cos α tersebut (lihat gambar 2.15).



Gambar 2.15 Grafik Cosinus

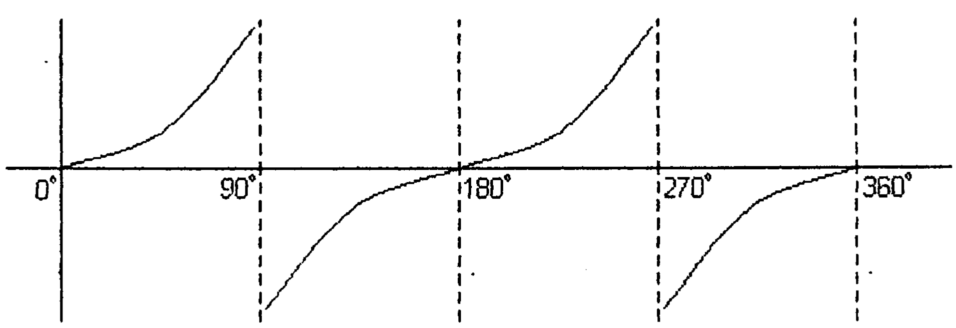
2.4.3. Tinjauan terhadap Nilai Tangen α

Secara definisi nilai Tangen suatu sudut α ialah harga perbandingan antara garis yang memproyeksi (proyektor) dan garis proyeksi. Bila garis OA (lihat gambar 2.13) terus diputar sampai ke OB, OC, OE dan seterusnya, maka garis proyeksinya bertambah pendek, yaitu OA, OB', OC', OO dan seterusnya, maka kita dapati :

$\text{Tg } 0° = 0$; $\text{Tg } 90° = \pm\infty$; $\text{Tg } 180° = 0$; $\text{Tg } 270° = \pm\infty$; $\text{Tg } 360° = 0$

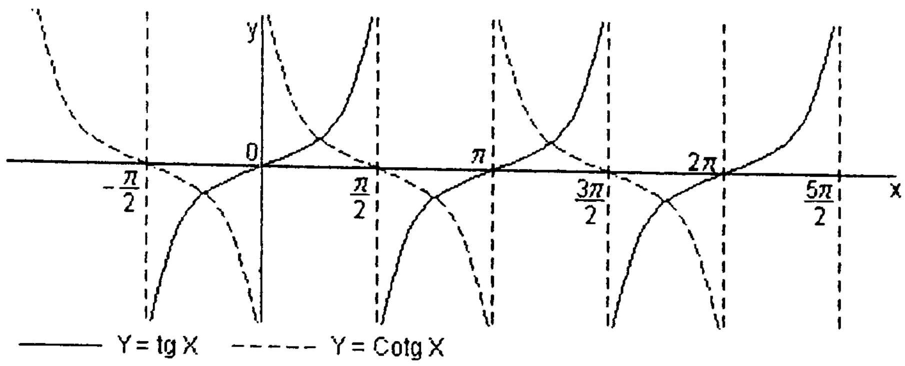
Kalau kita simpulkan ialah jika sudut α berobah-robah dari 0° sampai dengan 360°, maka nilai Tg α bergerak dari nilai $-\infty$ ke nilai $+\infty$, ditulis $-\infty \leq \text{Tg } \alpha \leq +\infty$.

Secara grafik, nilai Tg α itu dapat dilukiskan sebagai berikut :



Gambar 2.16 Grafik Tangen

Pada gambar 2.17 di bawah ini, menunjukkan grafik Y = Tg X dan Y = Cotg X. Kedua grafik ini dilukiskan dengan mengunakan nilai-nilai fungsi trigonometri. Kurva Tg X dan Cotg X tidak kontinu (terputus) karena harga Tg 90° adalah jauh tak terhingga (∞), dan tidak bisa dilukiskan. Begitu pula harga Cotg 0°, juga tidak terhingga. Lihat gambar 2.17.



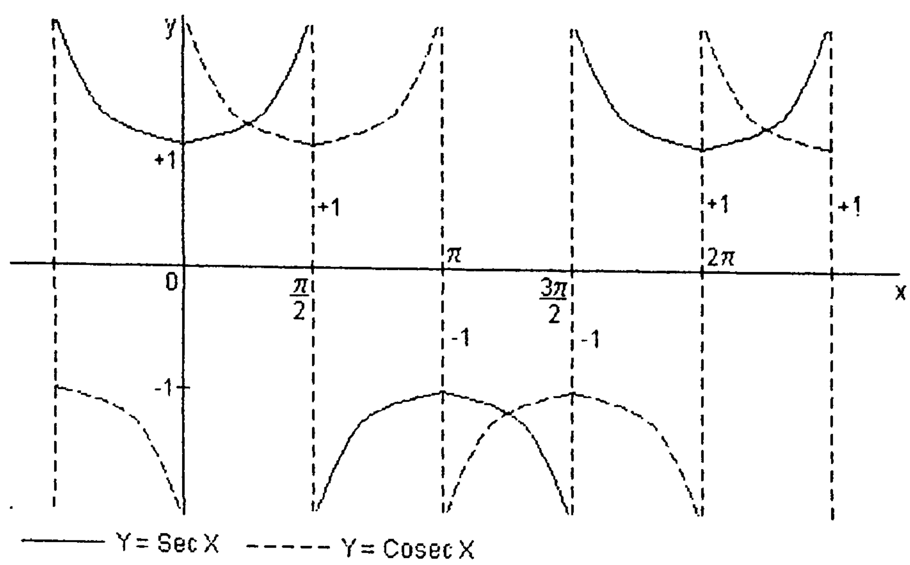
Gambar 2.17 Grafik Cotangen

Pada gambar 2.18 menunjukkan grafik Y = Sec X dan Y = Cosec X. Harga Sec dan Cosec suatu sudut mudah dihitung, dari nilai Cos dan Sin sudut tersebut.

Harus diingat : $\text{Cosec } \alpha = \dfrac{1}{\text{Sin } \alpha}$ dan

$$\text{Sec } \alpha = \frac{1}{\text{Cos } \alpha}$$

Kurva Sec dan Cosec dapat dilihat pada gambar di bawah ini.



Gambar 2.18 Grafik Secan dan Cosecan

Contoh-contoh :

1. Diketahui $\text{Sin}\ \alpha = \dfrac{p-2}{8-p}$, ada harganya

   Hitunglah harga p yang memenuhinya

   Jawab : Pengertian adanya suatu harga Sinus suatu sudut ialah interval atau nilai antara harga Sin α ialah :

   $-1 \leq \text{Sin}\ \alpha \leq +1$

   $-1 \leq \dfrac{p-2}{8-p} \leq +1$, maka

   $-1 \leq \dfrac{p-2}{8-p}$ dan $\dfrac{p-2}{8-p} \leq +1$

   Jadi $p \leq 5$

2 Diketahui $\angle\ \varphi$ adalah salah satu sudut pada kuadran III , dan Tg $\varphi = {}^1/_2\sqrt{2}$. Hitunglah harga perbandingan trigonometri lainnya Tg $\varphi = {}^1/_2\sqrt{2}$, maka dengan definisi, nilai :

   $\text{Cotg}\ \varphi = \dfrac{1}{\text{Tg}\ \varphi} = \dfrac{1}{½\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

   $\text{Sec}^2\ \varphi = 1 + \text{Tg}^2\ \varphi$ (rumus)

   $= 1 + {}^1/_2 = 1{}^1/_2$

   $\text{Sec}\ \varphi = \sqrt{{}^3/_2}$ karena φ berada di kuadran III, maka

   $\text{Sec}\ \varphi = -\sqrt{{}^3/_2} = -{}^1/_2\sqrt{6}$

   $\text{Cos}\ \varphi = \dfrac{1}{-½\sqrt{6}} = -{}^1/_3\sqrt{6}$

   $\text{Sin}\ \varphi = \text{Cos}\ \varphi\ .\ \text{Tg}\ \varphi = -{}^1/_3\sqrt{6} \times {}^1/_2\sqrt{2} = -{}^1/_3\sqrt{3}$

   $\text{Cosec}\ \varphi = \dfrac{1}{-{}^1/_3\sqrt{3}} = -\sqrt{3}$

Soal-soal.

1. Hitunglah perbandingan trigonometri pada sudut-sudut :

   a. 135° b. 120° c. 240° d. 315°

2. Hitunglah.

   a. $\text{Sin}\ {}^5/_4\,\pi + \text{Cos}\ {}^5/_4\,\pi$ b. $\text{Sin}\ {}^1/_4\,\pi + \text{Cos}\ 1{}^3/_4\,\pi$

   c. $\text{Tg}\ {}^3/_4\,\pi$ d. $\text{Cotg}\,(\,2\pi - {}^1/_4\,\pi\,)$

3. Hitunglah kemungkinan harga-harga q, bila nilai Sin $= \dfrac{2q - 7}{q + 1}$, ada.

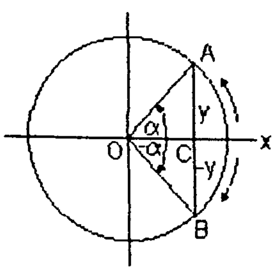
4. Berapakah harga φ yang memenuhi antara 0° dan 360° kalau diketahui :

   a. $\text{Sec}\ \varphi \geq 2$ b. $\text{Cos}\ \varphi < {}^1/_2\sqrt{2}$ c. $\text{Cotg}\ \varphi > \sqrt{3}$ d. $\text{Cosec}\ \varphi < -2$

2.5. Fungsi ($\alpha + k\,.\,360°$) dan Fungsi ($\alpha + k\,.\,180°$)

2.5.1. Fungsi ($\alpha + k\,.\,360°$)

Pengertian ($\alpha + k\,.\,360°$)



Perhatikan $\Delta X + OA$, dengan sumbu $X + OA = \alpha$. Jika A berputar terus dengan arah berlawanan dengan jarum jam sampai 360°, maka kita peroleh sekali putar penuh, $\angle\, \alpha + 360°$

Gambar 2.19 Sudut $\alpha + k\,.\,360°$

Hal ini berarti posisi titik A berada pada tempat semula seperti pada gambar 2.19.

Kalau dilakukan pemutaran 2 kali, maka besar sudutnya akan menjadi $\alpha + 2\,.\,360°$. Secara umum akan kita peroleh : $\angle\, \alpha + n\,.\,360°$ .... (1)

Kalau OB berputar menurut arah jarum jam, dan berputar sekali putaran penuh, maka titik B kembali berada pada posisi semula, lihat gambar 2.19, maka kita dapati $\angle\, \alpha - 360°$. Andaikata kita putar sekali lagi secara putaran penuh, akan didapati $\angle\, \alpha - 2\,.\,360°$, dan secara umum, yang diputar n kali, akan diperoleh

$\angle\, \alpha - n\,.\,360°$ .... (2)

Kalau deretan (1) dan (2) di atas dapat ditunjukkan dengan $\angle \alpha + k \,.\, 360°$ dimana harga k adalah semua bilangan bulat k = ...-3, -2, -1, 0, 2, 3... Marilah kita tinjau harga perbandingan trigonometri terhadap fungsi ($\alpha + k \,.\, 360°$), lihat gambar 2.19.

$$\text{Sin}\,(\alpha + 360°) = \text{Sin}\,\alpha = \frac{AC}{OA}$$

$$\text{Cos}\,(\alpha + 360°) = \text{Cos}\,\alpha = \frac{OC}{OA}$$

$$\text{Tg}\,(\alpha + 360°) = \text{Tg}\,\alpha = \frac{AC}{OC}$$

$$\text{Cosec}\,(\alpha + 360°) = \text{Cosec}\,\alpha = \frac{OA}{AC}$$

$$\text{Sec}\,(\alpha + 360°) = \text{Sec}\,\alpha = \frac{AO}{CO}$$

$$\text{Cotg}\,(\alpha + 360°) = \text{Cotg}\,\alpha = \frac{OC}{AO}$$

Secara umum dapat disusun rumus :

$$\mathbf{Sin\,(\alpha + k\,.\,360°) = Sin\,\alpha}$$

$$\mathbf{Cos\,(\alpha + k\,.\,360°) = Cos\,\alpha}$$

$$\mathbf{Tg\,(\alpha + k\,.\,360°) = Tg\,\alpha}$$

dimana k ialah bilangan bulat yang positif, dan perhatikan $\angle \alpha$ berada pada kuadran berapa.

Bagi sudut negatif (lihat gambar 2.19).

$$\text{Sin}\,(-\alpha) = \frac{BC}{OB} = \frac{-Y}{OB} = -\left(\frac{Y}{OB}\right) = -\,\text{Sin}\,\alpha$$

$$\text{Cos}\,(-\alpha) = \frac{OC}{OB} = \text{Cos}\,\alpha$$

$$Tg(-\alpha) = \frac{BC}{OC} = \frac{-Y}{OC} = -\left(\frac{Y}{OC}\right) = -Tg\,\alpha$$

atau :

$$\mathbf{Sin}(-\alpha) = -\mathbf{Sin}\,\alpha$$

$$\mathbf{Cos}(-\alpha) = +\mathbf{Cos}\,\alpha$$

α = Sudut lancip

$$\mathbf{Tg}(-\alpha) = -\mathbf{Tg}\,\alpha$$

$$\mathbf{Cotg}(-\alpha) = -\mathbf{Cotg}\,\alpha$$

Rumus di atas dapat diperluas menjadi :

$$\mathbf{Sin}(\alpha - k \cdot 360°) = -\mathbf{Sin}\,\alpha$$

$$\mathbf{Cos}(\alpha - k \cdot 360°) = \mathbf{Cos}\,\alpha$$

$$\mathbf{Tg}(\alpha - k \cdot 360°) = \mathbf{Tg}\,\alpha$$

$$\mathbf{Cotg}(\alpha - k \cdot 360°) = \mathbf{Cotg}\,\alpha$$

Cacatan :

1. k ialah bilangan-bilangan bulat.
2. Perhatikan letak sudut α pada kuadran berapa.

Contoh-contoh :

1. Sin 330° = Sin (360° - 30°) = -Sin 30°

   Karena α = 330° terletak pada kuadran IV nilai Sinus adalah negatif, jadi :

   Sin 330° = -Sin 30° = $-\frac{1}{2}\sqrt{3}$

2. Cos 330° = Cos (360° - 30°) = Cos 30°

   Karena α = 330° terletak pada kuadran IV, dan nilai Cosinus adalah positif, jadi :

   Cos 330° = +Cos 30° = $\frac{1}{2}\sqrt{3}$

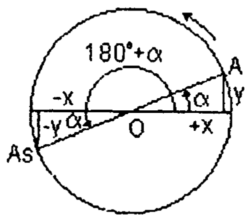
3. Tg 330° = Tg (360° - 30°) = -Tg 30° = $-\frac{1}{3}\sqrt{3}$

   Karena α = 330° terletak pada kuadran IV, dan nilai Tangen adalah negatif, jadi :

   Tg 330° = -Tg 30° = $-\frac{1}{3}\sqrt{3}$

2.5.2. Fungsi (α + k . 180°)

Pengertian (α + k . 180°)



Perhatikan ΔX + OA, dimana $\angle$ X + OA = $\angle\alpha$. Titik A diputar berlawanan dengan jarum jam, dan berada pada As. Titik A dan As segitiga lurus, dan diperoleh $\angle$ X + OAs = $\angle$ α + 180°

Gambar 2.20 Sudut α + k . 180°

Perhatikan perbandingan trigonometri.

1. $\text{Sin}\,\alpha = \dfrac{+Y}{OA}$ $\quad$ $\text{Sin}\,(180° + \alpha) = \dfrac{-Y}{OAs}$ $\quad$ OA = OAs

   jadi Sin (180° + α) = - Sin α

2. $\text{Cos}\,\alpha = \dfrac{+X}{OA}$ $\quad$ $\text{Cos}\,(180° + \alpha) = \dfrac{-X}{OAs}$ $\quad$ OA = OAs

   jadi Cos (180° + α) = - Cos α

3. $\text{Tg}\,\alpha = \dfrac{+Y}{+X}$ $\quad$ $\text{Tg}\,(180° + \alpha) = \dfrac{-Y}{-X}$

   jadi Tg (180° + α) = Tg α

Dari contoh 1), 2) dan 3) di atas dapat ditarik kesimpulan, bahwa walaupun diputar suatu titik kemana saja, asal perbedaan sudut tetap 180°, antara posisi semula dan posisi terakhir maka nilai Sinus, Cosinusnya sama, tetapi tandanya berlawanan, sedangkan harga Tangennya sama, juga tanda-tandanya. Kesimpulan ini dapat ditulis dengan :

Sin (α + 180°) = - Sin α

Cos (α + 180°) = - Cos α

Tg (α + 180°) = - Tg α

Secara umum, jika sudut itu ditambah dengan beberapa kali 180°, maka rumus itu menjadi :

$$\textbf{Sin}(\alpha + k \,.\, 180°) = (-1)^k \textbf{ Sin } \alpha$$

$$\textbf{Cos}(\alpha + k \,.\, 180°) = (-1)^k \textbf{ Cos } \alpha$$

$$\textbf{Tg}(\alpha + k \,.\, 180°) = \textbf{Tg } \alpha$$

<u>Contoh-contoh</u> :

1. $\text{Sin } 225° = \text{Sin}(45° + 1 \,.\, 180°) = (-1)^1 \text{ Sin } 45° = -\text{Sin } 45° = -\tfrac{1}{2}\sqrt{2}$

   $\text{Cos } 225° = \text{Cos}(45° + 1 \,.\, 180°) = (-1)^1 \text{ Cos } 45° = -\text{Cos } 45° = -\tfrac{1}{2}\sqrt{2}$

   $\text{Tg } 225° = \text{Tg}(45° + 1 \,.\, 180°) = \text{Tg } 45° = 1$

2. $\text{Sin}(\alpha + 360°) = \text{Sin}(\alpha + 2 \,.\, 180°) = (-1)^2 \text{ Sin } \alpha = + \text{Sin } \alpha$

   $\text{Cos}(\alpha + 360°) = \text{Sin}(\alpha + 2 \,.\, 180°) = (-1)^2 \text{ Cos } \alpha = + \text{Cos } \alpha$

   $\text{Tg}(\alpha + 360°) = \text{Tg}(\alpha + 2 \,.\, 180°) = \text{Tg } \alpha$

3. Hitunglah Cotg (α + 180)

$$\text{Cotg}(\alpha + 180°) = \frac{1}{\text{Tg}(\alpha + 180°)} \qquad \text{(definisi)}$$

$$= \frac{1}{+ \text{Tg } \alpha}$$

$$= \text{Cotg } \alpha$$

$$\text{Sec}(\alpha + 180°) = \frac{1}{\text{Cos}(\alpha + 180°)} \qquad \text{(definisi)}$$

$$= \frac{1}{- \text{Cos } \alpha}$$

$$= - \text{Sec } \alpha$$

$$\text{Cosec}(\alpha + 180°) = \frac{1}{\text{Sin}(\alpha + 180°)} \qquad \text{(definisi)}$$

$$= \frac{1}{- \text{Sin } \alpha}$$

$$= - \text{Cosec } \alpha$$

Soal-soal

1. Hitunglah harga perbandingan trigonometri di bawah ini :

a. Sin 150°	b. Cotg 450°	c. Cos (-45°)	d. Sin 210°
e. Cos 225°	f. Cotg (-330°)	g. Sec (-120°)	h. Sec 300°

2. Hitunglah Tg α, jika Cos $\alpha = 0{,}8$

3. Hitunglah Cos α dan Tg α, jika Sin $\alpha = 0{,}9$

4. Hitunglah Sin α dan Cos α, jika Tg $\alpha = -{}^{7}/_{24}$

5. Berapa harga X, jika

$\sin X = {}^{1}/_{2}$	$\cos X = 0{,}2$	$\operatorname{Cosec} X = {}^{8}/_{3}$
$\operatorname{Tg} X = -\sqrt{3}$	$\operatorname{Tg} X = 3$	$\sec X = {}^{7}/_{3}$

6. Hitunglah

a. Sin 200° + Sin 450° + Sin 160°

b. Cos 80° + Cos 180° + Cos 100°

c. $$\operatorname{Tg} 225° + \frac{\operatorname{Tg} 10°}{\operatorname{Tg} 270°} + \operatorname{Cotg} 45°$$

2.6. Daftar Logaritma Goniometri

Dalam fasal-fasal yang lalu, kita hanya menghitung perbandingan-perbandingan goniometri untuk sudut-sudut tertentu saja, antara lain sudut 0°, 30°, 45°, 60°, 90° juga sudut-sudut yang berada pada kuadran II, III dan IV, tetapi sudutnya ialah sudut-sudut tertentu pula.

Kenyataannya, dalam trigonometri, tidaklah demikian halnya, sudut-sudut istimewa saja, malahan segala sudut termasuk menit dan detik harus pula diketahui, dan dicari harga-harga perbandingan trigonometri.

Untuk itulah, tabel atau daftar logaritma baik dalam empat atau lima decimal, memuat daftar logaritma fungsi-fungsi goniometris : log Sin, log Tg, log Cotg, log Cos, juga daftar fungsi-fungsi goniometris : Sinus, Tangen, Cotangen dan Cosinus, dapat membantu kita memecahkan persoalan ini.

Dengan mempergunakan daftar lgaritma ini, kita mendapat bantuan yang besar, dalam kecepatan, ketepatan dan ketelitian menyelesaikan suatu persoalan trigonometri.

Dalam daftar logaritma, hanya kita dapati log Sin, log Tg, log Cotg dan log Cos. Log Sec dan log Cosec tidak ada, karena hal itu dapat diperoleh dari :

$$\log \mathrm{Sec}\,\alpha = \log \frac{1}{\mathrm{Cos}\,\alpha} = \log 1 - \log \mathrm{Cos}\,\alpha = -\log \mathrm{Cos}\,\alpha$$

$$\log \mathrm{Cosec}\,\alpha = \log \frac{1}{\mathrm{Sin}\,\alpha} = \log 1 - \log \mathrm{Sin}\,\alpha = -\log \mathrm{Sin}\,\alpha$$

Juga fungsi goniometri yang terdapat dalam buku daftar logaritma hanya Sin, Cos, Tg dan Cotg. Sedangkan nilai Sec dan Cosec tak ada. Umpamanya untuk mencari Sec 10°, dicari dengan menggunakan rumus kebalikan Cosec 10°, sebab Sec 10° x Cos 10° = 1.

$$\mathrm{Sec}\ 10^\circ = \frac{1}{\mathrm{Cos}\ 10^\circ} = \frac{1}{0{,}98481} = 1{,}01542$$

Contoh ke 2. Untuk mencari Cosec 25° ialah dengan rumus :

Cosec 25° x Sin 25° = 1. Nilai Sin 25° dapat dicari dalam daftar sinus.

$$\mathrm{Cosec}\ 25^\circ = \frac{1}{\mathrm{Sin}\ 25^\circ} = \frac{1}{0{,}42262} = 2{,}36691$$

Tentang logaritma-logaritma perbandingan trigonometri dapat dipelajari sifat-sifat di bawah ini.

a. Logaritma setiap Sinus dan Cosinus adalah Negatif

Nilai Sinus dan Cosinus suatu sudut adalah bilangan-bilangan yang lebih kecil dari 1 (kecuali Sin 90°). Ingat nilai Sin α berada dalam nilai antara (interval) : $-1 \leq \text{Sin } \alpha \leq +1$, pun begitu pula nilai Cos α, yaitu $-1 \leq \text{Cos } \alpha \leq +1$. Logaritma bilangan-bilangan yang lebih kecil dari 1 adalah negatif.

Contoh : Sin 30° = $^1/_2$

$$\log \text{Sin } 30° = \log {}^1/_2 = \log 1 - \log 2$$

$$= -\log 2 \qquad (\text{ lihat daftar log})$$

$$\log \text{Sin } 30° = -0{,}30103$$

$$= 9{,}69897 - 10$$

Perhatian

Dalam daftar logaritma Sinus, dan sebagainya, selalu dipakai petunjuk -10. Jadi log Sin 30° = 9,69897 - 10. Tetapi petunjuk -10 itu dalam daftar tidak dicetak. Untuk menghemat tempat. Jadi hanya tertulis log Sin 30° = 9,69897.

Begitu juga untuk logaritma Tangen dan logaritma Cotangen.

b. Perbandingan goniometri sudut-sudut yang lebih besar dari 45° dapat dimudahkan menjadi perbandingan goniometri sudut-sudut yang lebih kecil dari 45°.

Umpamanya : Cos 62° = Cos (90° - 28°) = Sin 28°

Lihat rumus : Cos (90° - α) = Sin α, dan sebagainya.

Jadi log Cos 62° = log Sin 28°

= 9,94593 - 10

Dalam daftar logaritma hanya tertulis 9,94593, tetapi hasil log Cos 62° = 9,94593 - 10

c. Logaritma Cosecan suatu sudut adalah berlawanan dengan logaritma Sinus sudut itu. Karena Sin α x Cosec α = 1

Jadi $\log \text{Sin}\,\alpha + \log \text{Cosec}\,\alpha = \log 1 = 0$

Maka $\log \text{Cosec}\,\alpha = -\log \text{Sin}\,\alpha$

Contoh : Berapakah log Cosec 40°.

$\log \text{Cosec}\,40° = -\log \text{Sin}\,40°$

$\log \text{Sin}\,40° = 9{,}80807 - 10$

$= -0{,}19193$

Jadi $\log \text{Cosec}\,40° = +0{,}19193$

$\log \text{Cosec}\,40° = 10{,}19193 - 10$

Begitu juga untuk Cosinus dengan Secan dan Tangen dengan Cotangen.

Jadi secara umum, dalam daftar-daftar logaritma hanya dimuat logaritma-logaritma Sinus, Cosinus, Tangen dan Cotangen. Maka tiap-tiap Secan dan Cosecan harus terlebih dahulu dijadikan Cosinus atau Sinus.

2.7. Keterampilan Mempergunakan Daftar Logaritma

Seperti halnya yang diutarakan di atas, bahwa nilai perbandingan trigonometri atau perbandingan goniometri tidak hanya pada sudut-sudut istimewa atau tertentu saja, tetapi juga pada sembangan sudut, lengkap dengan menit dan detik.

Perbandingan-perbandingan goniometri untuk sudut-sudut lancip telah dihitung dan hasil perhitungannya telah dikumpulkan dalam sebuah daftar, yang disebut daftar perbandingan goniometri dan daftar logaritma perbandingan goniometri.

Dalam daftar perbandingan goniometri, sudut antara 0° sampai 45° tertulis pada pinggir sebelah kiri halaman daftar dan nama-nama perbandingan goniometri (Sin, Cos, Tg, Cotg) terdapat diatas halaman daftar (lihat tabel 5).

Tabel 5. Daftar Perbandingan Goniometri

20°

M	Sin	Cos	Tg	Cotg
0	0,34202	0,93969	0,36397	2,74748
1	229	959	430	4499
2	257	949	463	4251
3	284	939	496	4004
4	311	929	529	3756
5	399	919	562	3509
6	366	909	595	3263
7	393	899	628	3017
8	421	889	661	2771
9	448	879	694	2526
10	0,34475	0,93869	0,36727	2,72281
dst				

Sedangkan sudut antara 45° sampai 90° tertulis pada pinggir sebelah kanan bagian bawah dari halaman daftar (lihat tabel 6)

Tabel 6. Daftar Perbandingan Goniometri

0,41998	0,.90753	0,46277	2,16090	10
024	741	312	15925	9
051	729	348	15760	8
077	717	383	15596	7
104	704	418	15432	6
130	692	454	15268	5
156	680	489	15104	4
183	668	525	14940	3
209	655	560	14777	2
235	643	595	14614	1
0,42262	0,90631	0,46631	0,14451	0
Cos	Sin	Cotg	Tg	M

65°

Memang dalam daftar nilai perbandingan trigonometri untuk Secans dan Cosecan tidak diberikan dalam daftar. Untuk menghitung harga Secan dan Cosecan suatu sudut, kita harus mengubah Secan menjadi $^1/_{\text{Cos}}$, dan Cosecan menjadi $^1/_{\text{Sin}}$. lalu Sin dan Cos sudut tersebut kita cari pada daftar perbandingan goniometri.

Nah, marilah kita pelajari contoh-contoh di bawah ini.

1. Contoh : Berapakah harga Sin 20°9′ = ?

   Caranya : Carilah dahulu halaman daftar yang pada pinggir kiri bagian atas memuat 20°. Lalu kita cari pada jalur atau kolom M angka 9 yang berarti 9′. Akhirnya kita cari kolom yang memuat kata perbandingan trigonometri Sin. Pada kolom Sin, baris 20°9′ terbaca 0,34448. Ini berarti Sin 20°9′ = 0,34448. (lihat tabel 5)

2. Contoh : Berapakah nilai Tg 20°5′15″ = ?

   Kita diminta oleh persoalan ini suatu keterampilan untuk menggunakan daftar, sehingga persoalan tersebut dapat dipecahkan. Sebabnya ialah dalam daftar (lihat tabel 5) hanya ada harga Tg 20°5′, sedangkan untuk 15″ tidak tertulis, untuk itu perhatikan cara-cara di bawah ini :

Kita cari dulu $\text{Tg } 20°5' = a$, dan

$$\begin{array}{rcl} \text{Tg } 20°6' & = & b \\ \hline \text{selisih} & = & p \end{array}$$

Untuk 15″ berarti $\frac{15}{60} \times p = q$

Jadi $\text{Tg } 20°5'15'' = a + q$

Lihat tabel 5 :

$$\begin{array}{rcl} \text{Tg } 20°5' & = & 0{,}36562 \\ \text{Tg } 20°6' & = & 0{,}36595 \\ \hline \text{selisih} & = & 0{,}00033 \end{array}$$

Untuk 15″ berarti $\frac{15}{60} \times 0{,}00033 = 0{,}00008$

$$\begin{aligned} \text{Jadi Tg } 20°5'15'' &= 0{,}36562 + 0{,}00008 \\ &= 0{,}36570 \end{aligned}$$

3. Mencari kembali besarnya suatu sudut. Umpama :

berapakah harga X dalam Cos X = 0,6

Caranya : Harga 0,6 kita cari dalam daftar. Angka 0,6 berada pada kolom Cosinus antara baris 53°7′ dan 53°8′, yaitu :

$$\begin{array}{rcl} \text{Cos } 53°7' & = & 0{,}60019 \\ \text{Cos } 53°8' & = & 0{,}59995 \\ \hline \text{selisih} & = & 0{,}00024 \end{array}$$

Perbedaan antara 0,6 dengan 0,59995 = 0,00005

$$\text{Jadi } \frac{0{,}00005}{0{,}00024} \times 60'' = 13''$$

$$\text{Cos } X = 0{,}6$$

$$X_1 = 53°7'13'' + k\,.\,360$$

$$X_2 = 306°52'47'' + k\,.\,360$$

2.8. Logaritma Perbandingan-perbandingan Trigonometri

Logaritma perbandingan trigonometri dalam daftar hanya tertulis log Sin, log Tg, log Cotg, log Cos. Tetapi loc Sec dan log Cosec tidak ada dalam daftar, karena kedua hal ini dapat diperoleh dari :

$$\log \text{Sec } \alpha = \log \frac{1}{\text{Cos } \alpha} = -\log \text{Cos } \alpha$$

$$\log \text{Cosec } \alpha = \log \frac{1}{\text{Sin } \alpha} = -\log \text{Sin } \alpha$$

Cara penulisannya sudut, menit, sama dengan daftar perbandingan goniometri. Untuk mendapatkan harga perbandingan goniometri sampai dengan detik, diperlukan keterampilan dalam menghitung.

Sebelum ini telah dijelaskan, karena nilai antara :

$$-1 \leq \text{Sin}\,\alpha \leq +1 \quad \text{dan}$$
$$-1 \leq \text{Cos}\,\alpha \leq +1$$

maka logaritma Sin α dan logaritma Cos α merupakan logaritma bilangan yang lebih kecil dari 1, dan hasilnya adalah negatif. Tidak terdapat dalam bilangan negatif, karena sudah dikurangi dengan angka petunjuk -10. Untuk itulah, sebagai hasil akhir dari harga perbandingan goniometri selalu dikurangi 10 dari angka yang terdapat dalam daftar.

Perhatikanlah contoh-contoh di bawah ini.

1. Berapakah log Cos 34°9′ = ?

   Caranya : Kita cari dalam daftar logaritma angka dari 34° berada pada sebelah kiri halaman atas; dan kita cari pula kolom log Cos. Pada kolom Min (= minute), kita temukan angka 9, yang berarti sebagai petunjuk 9 detik. Jadi pada halaman yang memuat 34°, dan pada angka 9 dalam kolom Min, terdapat pada jalur log Cos, suatu angka 9,91781. Ini berarti, bahwa hasilnya dari log Cos 34°9′ = 9,91781 - 10

   INGAT : jangan lupa menulis -10

2. Berapakah log Cos 34°9′23″ = ?

   Caranya : 23 detik (23″) berada antara 34°9′ dan 34°10′. Untuk itu kita cari terlebih dahulu log Cos 34°9′ dan log Cos 34°10′, dan sesudah itu dihitung selisihnya.

   log Cos 34°9′ = 9,91781 - 10
   log Cos 34°10′ = 9,91772 - 10

   selisih = 0,00009 atau 9e (e = enheid = satuan)

   Sebenarnya daftar log telah memberi bantuan kepada kita untuk mencari selisih log perbandingan goniometri ini, yaitu kolom d (d = differentia).

   Antara log Cos 34°9′ dan log Cos 34°10′ dalam lajur d terdapat angka 9, yang berarti selisih log Cos 34°9′ dan log Cos 34°10′ = 9e.

Selanjutnya kita perhatikan pada kolom yang sebelah kanan, terdapat tabel-tabel kecil. Dalam contoh kita ini, dicari tabel : S | 9 , karena selisih 9e.

S berarti second = detik, tabel tersebut sebagai berikut :

S	9
10	1,5
20	3,5
30	4,5
40	6,0
50	7,5
6	0,9
7	1,1
8	1,2
9	1,4

Yang akan kita cari ialah 23″

Dari tabel kita baca 20″ 3,0

3″ 0,45

23″ . . . . 3,45 = 3

Jadi log Cos 34°9′23″ = 9,91781 - 10

3

log Cos 34°9′23″ = 9,91778 - 10

Pertanyaan : Kenapa harus dikurangi dengan 3 ?

Kenapa harus dikurangi dengan 3 ?

Jawabnya : ialah harga Cosinus suatu sudut akan bertambah kecil, bila sudutnya bertambah besar.

3. Mencari kembali

Mencari kembali berarti mencari besarnya sudut kalau harga logaritma perbandingan trigonometri diketahui. Cara-cara mencari kembali sama dengan cara mencari kembali kalau daftar perbandingan trigonometri.

Contoh : Berapakah log Sin X = 9,74968 - 10

Caranya : Terlebih dahulu dicari angka 9,74968 berada dimana? Angka atau bilangan 9,74968 berada antara log Sin 34°11′ dan log Sin 34°12′

$$\log \text{Sin } 34°11' = 9{,}74961 - 10$$
$$\log \text{Sin } 34°12' = 9{,}74980 - 10$$
$$\text{selisih} = 0{,}00019 \qquad \text{atau} = 19$$

lihat kolom d (d berarti selisih atau defferentia) log Sin X = 9,7468 - 10 berada 7e dengan log Sin 34°11′

Pada tabel S - 19 dapat dibaca :

$$20'' \dots\dots\dots\dots 6{,}3$$
$$2'' \dots\dots\dots\dots 0{,}63$$
$$22'' \dots\dots\dots\dots 6{,}93 = 7$$

Jadi harga X diperoleh sebagai berikut :

$$X_1 = 34°11'22'' + k \,.\, 360°$$
$$X_2 = 145°48'48'' + k \,.\, 180°$$

k = bilangan bulat

4. Berapakah log Sec 34°9′

Caranya : Kita telah tahu harga $\text{Sec } 34°9' = \dfrac{1}{\text{Cos } 34°9'}$

$$\text{Jadi } \log \text{Sec } 34°9' = \log \frac{1}{\text{Cos } 34°9'}$$
$$= \log 1 - \log \text{Cos } 34°9'$$
$$= 0 - \log \text{Cos } 34°9'$$
$$= -\log \text{Cos } 34°9'$$

Harga log Cos 34°9′ dapat kita cari dalam daftar yaitu :

$$\log \text{Cos } 34°9' = 9{,}91781 - 10$$

$$\text{Jadi } \log \text{Sec } 34°9' = -\log \text{Cos } 34°9'$$
$$= -(9{,}91781 - 10)$$
$$= -9{,}91781 - 10$$
$$= +0{,}08219$$

5. Berapakah harga X dalam log Tg X = 0,16930.

Caranya untuk mencari kembali harga X, sama dengan mencari kembali dalam contoh 3 di atas.

$\log Tg\ X = 0{,}16930$ atau $\log Tg\ X = 10{,}16930 - 10$

Bilangan 10, 16930 terletak antara $\log Tg\ 55°53'$ dan $\log Tg\ 55°54'$

$$\begin{array}{lcl} \log Tg\ 55°53' & = & 10{,}16911 - 10 \\ \log Tg\ 55°54' & = & 10{,}16938 - 10 \\ \hline \text{selisih} & = & 0{,}00027 \end{array}$$ atau = 27 satuan (lihat kolom d.c)

d.c berarti differentin-comment

Perbedaan antara $\log Tg\ 55°53'$ dan $\log Tg\ 55°54'$ ialah antara $(10{,}16911 - 10)$ dengan $(10{,}16930 - 10)$ ialah 19 satuan .

Dalam tabel S - 27 dapat kita baca :
$$\begin{array}{lcl} 10'' & \ldots\ldots\ldots & 4{,}5 \\ 9'' & \ldots\ldots\ldots & 4{,}1 \\ \hline 19'' & \ldots\ldots\ldots & 8{,}6 = 9 \end{array}$$

Jadi dalam $\log Tg\ X = 10{,}16930 - 10$ didapat harga :

$$X_1 = 55°53'19'' + k \,.\, 360°$$

$$X_2 = 235°53'19'' + k \,.\, 180°$$

k = bilangan bulat

Soal-soal.

1. Lukislah grafik-grafik dari persamaan di bawah ini.
   a. $Y = \text{Sin}\ X$ dan $Y = \text{Cos}\ X$ (dalam satu salib sumbu)
   b. $Y = \text{Sin}\ X$; $Y = 2\ \text{Sin}\ X$; $Y = 3\ \text{Cos}\ X$ (dalam satu salib sumbu)
   c. $Y = \text{Cos}\ X$; $Y = 2\ \text{Cos}\ X$; $Y = 3\ \text{Cos}\ X$ (dalam satu salib sumbu)

2. Lukislah $Y = \text{Sin}\ X + \text{Cos}X$

   Petunjuk ; Lukislah $Y = \text{Sin}\ X$ dan $Y = \text{Cos}\ X$ pada satu salib sumbu. Tentukan harga ordinat dari jumlah ordinat $Y = \text{Sin}\ X$ dan ordinat $Y = \text{Cos}\ X$ pada beberapa harga absis X.

3. Carilah harga φ antara 0° dan 360° yang memenuhi :

   a. $\text{Sec}\ \varphi \geq 2$ b. $\text{Cos}\ \varphi < \frac{1}{2}\sqrt{2}$ c. $\text{Cotg}\ \varphi > \sqrt{3}$

   d. $\text{Cosec}\ \varphi < -2$ e. $\text{Cos}\ 2\varphi < \frac{1}{2}$ f. $\text{Tg}\ 3\varphi > -\sqrt{3}$

4. Hitunglah dengan menggunakan daftar.

a. $\sin 12°17'12''$ b. $\cos 53°24'37''$ c. $\text{Tg}\ 70°20'40''$

d. $\sin 204°15'13''$ e. $\cos 217°49'46''$ f. $\text{Cotg}\ 244°16'10''$

5. Carilah harga di bawah ini.

a. $\log \sin 32°18'13''$ b. $\log \cos 18°15'21''$ c. $\log \text{Tg}\ 44°19'42''$

d. $\log \text{Cosec}\ 300°23'$ e. $\log \text{Sec}\ 210°25'$ f. $\log \text{Cotg}\ 270°50'50''$

6. Berapa harga X dalam :

a. $\log \sin X = 9{,}26094 - 10$ b. $\log \cos X = 9{,}98105 - 10$

b. $\log \text{Tg}\ X = 9{,}62201 - 10$ d. $\log \text{Cotg}\ X = 0{,}24221$

7. Hitunglah X

$$\sin X = \frac{\cos 163°25'30'' + \sin 213°18'41'' + \text{Cosec}\ 108°39'18''}{\text{Tg}\ 118°55'12'' + \text{Sec}\ 331°31'14'' + \text{Cotg}\ 299°11'13''}$$

8. Tentukan sudut X, jika

a. $\cos X = 0{,}80730$ b. $\text{Cotg}\ X = 2$

c. $\text{Tg}\ X = 0{,}4841$ d. $\sin X = {}^3/_7$

9. Tentukan X, jika

a. $0 < \sin X < 0{,}1$ b. $1 > \cos X > 0{,}75$

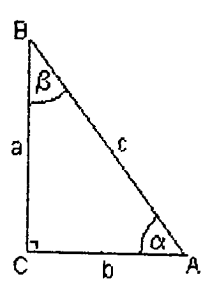
c. $0 \leq \text{Tg}\ X \leq 2$

10. Hitung X dalam :

a. $\sin X = \sin 34° + \sin 18°$ b. $\text{Tg}\ X = \text{Tg}\ 10° + \text{Tg}\ 40°$

c. $\cos X = 2 \cos 50° - \cos 40°$ d. $\text{Sec}\ 2X = \text{Cosec}\ 40° + \text{Cotg}\ 50°$

11. Hitunglah unsur-unsur yang tidak diketahui jika :



a. $a = 10$ dan $c = 15$

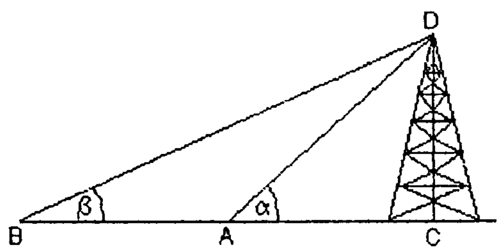
b. $c = 30$ dan $\alpha = 35°$

c. $b = 10$ dan $\beta = 50°$

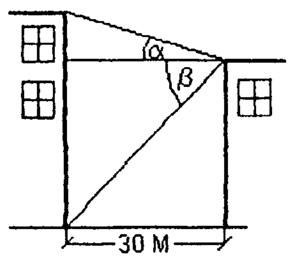
d. $a = 547{,}3$ dan $\beta = 45°16'8''$

e. $c = 382{,}3$ dan $\beta = 50°12'12''$

12. Sebuah tiang listrik yang tingginya 4 m disinari matahari. Panjang bayangan tiang listrik 5 m. Hitunglah besar sudut antara sinar matahari dan bumi.

13. 

Sebuah menara CD, tingginya 25 m. Dari A kita ukur $\alpha = 21°$ dan B, $\beta = 18°$. Berapakah jarak antara A dan B.

14. 

Jarak antara 2 gedung ialah 30 m. Dari atap salah satu gedung $\alpha = 14°$ dan $\beta = 23°$. Berapa tinggi gedung-gedung tersebut ?

ULANGAN

1. Mudahkanlah :

a. $\sin(180° + \alpha)$; $\cos(360° + \alpha)$; $\text{Tg}(180° + \alpha)$; $\sec(180° + \alpha)$

b $\text{Cotg}(180° + \alpha)$; $\text{Cosec}(360° + \alpha)$; $\sin(-\alpha + 180°)$; $\text{Tg}(\alpha - 360°)$

c. $\cos(90° + \alpha)$; $\sin(90° + \alpha)$; $\cos(270° + \alpha)$; $\text{Tg}(270° + \alpha)$

2. Mudahkanlah :

a. $$\frac{\sin(90° + \alpha)\ \cos(90° - \alpha)}{\cos(180° + \alpha)} + \frac{\sin(180° - \alpha)\ \cos(90° - \alpha)}{\sin(180° + \alpha)}$$

b. $$\frac{\text{Tg}(90° + \alpha)\ \text{Cotg}(90° - \alpha)}{\text{Cotg}(180° + \alpha)} + \frac{\text{Tg}(180° - \alpha)\ \text{Cotg}(90° + \alpha)}{\text{Tg}(180° - \alpha)}$$

3. Dari suatu sudut dalam kuadran II, Sinusnya = $^3/_5$. Hitunglah perbandingan goniometri sudut yang lain.

4. Jawablah pertanyaan ini, untuk suatu sudut dalam kuadran III dengan Cosinusnya = -1.

5. Pula untuk suatu sudut dalam kuadran IV dengan Tangennya = -n.

6. Hitunglah X dengan daftar logaritma, jika

a. $X = \dfrac{\text{Sin}^2\, 200°31'10''}{\text{Cos}^3\, (-40°50'10'')}$ b. $X = \dfrac{\text{Tg}\, 200° \times \text{Sin}^2\, 300°}{\text{Cotg}\, -40°}$

7. Hitunglah harga semua sudut antara 0° dan 360°

a. $\text{Tg}\, X = \dfrac{\text{Sin}\, 127° \times \text{Cos}\, 144°}{\text{Cotg}\, 315°}$

b. $\text{Cos}\, X = \dfrac{\text{Tg}\, 325° \times \text{Sin}\, 238°}{\text{Cotg}\, 315°}$

c. $\text{Sin}\, X = -0{,}3471$

8. Hitunglah X, jika

a. $X = \sqrt[3]{\dfrac{100\,(\text{Cos}\, 323° + \text{Cos}\, 204°)}{\text{Tg}\, 219°}}$

b. $X = \sqrt[3]{\dfrac{\text{Costg}\, 205° + \text{Tg}\, 105°}{10\, \text{Sin}\, 149°}}$

9. Buktikanlah kesehargaan :

$$\frac{\text{Cos}\, \alpha}{1 - \text{Tg}\, \alpha} + \frac{\text{Sin}\, \alpha}{1 - \text{Cotg}\, \alpha} = \text{Cos}\, \alpha + \text{Sin}\, \alpha$$

10. Mudahkanlah : $\text{Tg}^2\, \alpha - \text{Tg}^2\, \beta - \dfrac{\text{Sin}^2\, \alpha - \text{Sin}^2\, \beta}{\text{Cos}^2\, \alpha \,.\, \text{Cos}^2\, \beta}$

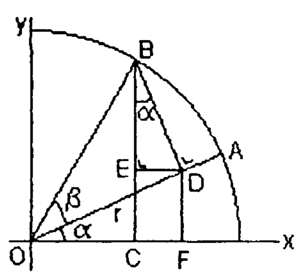
BAB III

PERBANDINGAN GONIOMETRI BEBERAPA BUAH SUDUT

Dengan berdasarkan teori-teori trigonometri dalam bab-bab terdahulu, kita akan mempelajari perbandingan-perbandingan goniometri dari beberapa buah sudut. Umpamanya yang akan dibahas ialah perbandingan-perbandingan goniometri suatu sudut lancip $(\alpha + \beta)$, jika perbandingan goniometri α dan β diketahui. Tidak hanya jumlah dua buah sudut lancip saja, bahkan perbandingan goniometri dari selisih dua buah sudut lancip, seperti Sin $(\alpha - \beta)$.

Masalah yang akan dibahas dalam bab ini ialah mengenai rumus-rumus Sin $(\alpha \pm \beta)$ dan Cos $(\alpha \pm \beta)$, dan sebagainya.

3.1. Jumlah Dua Buah Sudut



Gambar 3.1 Jumlah dua buah sudut

Pada gambar 3.1, sudut α dan β ialah positif dan lancip. $\angle$ BOC (jumlah sudut α dan β) ialah positif dan lancip.

Busur YBAX ialah seperempat lingkaran dengan jari-jari = 1 dan berputar di O

Garis BC tegak lurus pada OX ; Garis BD tegak lurus pada OA ; Garis DF tegak lurus pada OX ; dan Garis DE tegak lurus pada BC.

Perhatikan Δ ORC : $\angle ORC = 90^\circ - \alpha$

Perhatikan Δ BDR : $\angle BRD = \angle ORC$ (bertolak belakang)

$$\angle RBD = 90^\circ - \angle BRD = 90^\circ - \angle ORC$$
$$= 90^\circ - (90^\circ - \alpha) = \alpha$$

Dalam Δ ODF : $\dfrac{FD}{OD} = \text{Sin}\,\alpha$ atau $FD = OD\ \text{Sin}\,\alpha$ .... (1)

$$\frac{OF}{OD} = \text{Cos}\,\alpha \quad \text{atau} \quad OF = OD\ \text{Cos}\,\alpha \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Dalam Δ BDE : $\frac{ED}{BD} = \text{Sin}\,\alpha \quad \text{atau} \quad ED = BD\ \text{Sin}\,\alpha \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$

$$\frac{BE}{BD} = \text{Cos}\,\alpha \quad \text{atau} \quad BE = BD\ \text{Cos}\,\alpha \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

Dalam Δ BOD : $\frac{BD}{OB} = \text{Sin}\,\beta \quad \text{atau} \quad BD = OB\ \text{Sin}\,\beta \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5)$

$$\frac{OD}{OB} = \text{Cos}\,\beta \quad \text{atau} \quad OD = OB\ \text{Cos}\,\beta \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

Dalam Δ OBC :

$$\text{Sin}\,(\alpha + \beta) = \frac{BC}{OB}$$

$$= \frac{CE + EB}{OB} \quad \text{, sedangkan } CE = FD$$

$$= \frac{FD + EB}{OB} \quad \text{, dan deminasi/substansi (1), (4) maka}$$

$$= \frac{OD\ \text{Sin}\,\alpha\ +\ BD\ \text{Cos}\,\alpha}{OB}$$

$$= \frac{OD}{OB}\ \text{Sin}\,\alpha + \frac{BD}{OB}\ \text{Cos}\,\alpha \quad \text{, lihat (5) dan (6)}$$

$$\text{Sin}\,(\alpha + \beta) = \text{Sin}\,\alpha\ \text{Cos}\,\beta + \text{Cos}\,\alpha\ \text{Sin}\,\beta$$

Masih dalam Δ OBC :

$$\text{Cos}\,(\alpha + \beta) = \frac{OC}{OB}$$

$$= \frac{OF - ED}{OB} \quad \text{, sedangkan } ED = CF$$

$$= \frac{OD\ \text{Sin}\,\alpha\ -\ BD\ \text{Cos}\,\alpha}{OB}$$

$$= \frac{OD}{OB}\ \text{Cos}\,\alpha - \frac{BD}{OB}\ \text{Sin}\,\alpha$$

$$\text{Cos}\,(\alpha + \beta) = \text{Cos}\,\alpha\ \text{Cos}\,\beta - \text{Sin}\,\alpha\ \text{Sin}\,\beta$$

Dari kedua rumus di atas dapat diturunkan :

$$\mathrm{Tg}\,(\alpha+\beta) = \frac{\mathrm{Sin}\,(\alpha+\beta)}{\mathrm{Cos}\,(\alpha+\beta)}$$

$$= \frac{\mathrm{Sin}\,\alpha\,\mathrm{Cos}\,\beta + \mathrm{Cos}\,\alpha\,\mathrm{Sin}\,\beta}{\mathrm{Cos}\,\alpha\,\mathrm{Cos}\,\beta - \mathrm{Sin}\,\alpha\,\mathrm{Sin}\,\beta} \quad , \quad \text{bagi pembilang dan penyebut dengan } \mathrm{Cos}\,\alpha\,\mathrm{Cos}\,\beta$$

$$= \frac{\dfrac{\mathrm{Sin}\,\alpha\,\cancel{\mathrm{Cos}\,\beta}}{\mathrm{Cos}\,\alpha\,\cancel{\mathrm{Cos}\,\beta}} + \dfrac{\cancel{\mathrm{Cos}\,\alpha}\,\mathrm{Sin}\,\beta}{\cancel{\mathrm{Cos}\,\alpha}\,\mathrm{Cos}\,\beta}}{\dfrac{\cancel{\mathrm{Cos}\,\alpha}\,\cancel{\mathrm{Cos}\,\beta}}{\cancel{\mathrm{Cos}\,\alpha}\,\cancel{\mathrm{Cos}\,\beta}} - \dfrac{\mathrm{Sin}\,\alpha\,\mathrm{Sin}\,\beta}{\mathrm{Cos}\,\alpha\,\mathrm{Cos}\,\beta}} \quad ; \quad \text{ingat } \frac{\mathrm{Sin}\,\alpha}{\mathrm{Cos}\,\alpha} = \mathrm{Tg}\,\alpha$$

$$\mathrm{Tg}\,(\alpha+\beta) = \frac{\mathrm{Tg}\,\alpha + \mathrm{Tg}\,\beta}{1 - \mathrm{Tg}\,\alpha\,\mathrm{Tg}\,\beta}$$

Rumus-rumus jumlah 2 buah sudut :

$$\mathbf{Sin\,(\alpha+\beta) = Sin\,\alpha\,Cos\,\beta + Cos\,\alpha\,Sin\,\beta}$$

$$\mathbf{Cos\,(\alpha+\beta) = Cos\,\alpha\,Cos\,\beta - Sin\,\alpha\,Sin\,\beta}$$

$$\mathbf{Tg\,(\alpha+\beta) = \frac{Tg\,\alpha + Tg\,\beta}{1 - Tg\,\alpha\,Tg\,\beta}} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(I)}$$

3.2. Selisih Dua Buah Sudut

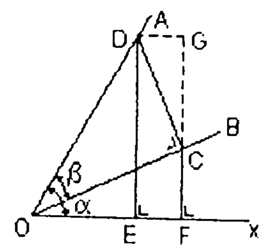
Jika pada rumus di atas β diganti dengan $(-\beta)$ maka didapat rumus-rumus selisih 2 buah sudut :

$$\mathbf{Sin\,(\alpha-\beta) = Sin\,\alpha\,Cos\,\beta - Cos\,\alpha\,Sin\,\beta}$$

$$\mathbf{Cos\,(\alpha-\beta) = Cos\,\alpha\,Cos\,\beta + Sin\,\alpha\,Sin\,\beta}$$

$$\mathbf{Tg\,(\alpha-\beta) = \frac{Tg\,\alpha - Tg\,\beta}{1 + Tg\,\alpha\,Tg\,\beta}} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(II)}$$

Selanjutnya buktikan rumus perbandingan goniometri selisih dua buah sudut, tidak seperti di atas yaitu mengganti sudut β dengan $-\beta$, tetapi dengan menggunakan bantuan gambar 3.2.



Gambar 3.2 Perbandingan goniometri selisih dua buah sudut

Carilah :

1. Sin (α - β)
2. Cos (α - β)
3. Tg (α - β)

3.3. Perluasan Perbandingan Goniometri terhadap Jumlah Dua Buah Sudut (Sudut Rangkap)

Jika pada rumus I, kita ambil $\alpha = \beta$ maka :

$$\text{Sin } 2\alpha = \text{Sin}(\alpha+\alpha) = \text{Sin}\,\alpha\,\text{Cos}\,\alpha + \text{Cos}\,\alpha\,\text{Sin}\,\alpha$$

$$= 2\,\text{Sin}\,\alpha\,\text{Cos}\,\alpha$$

$$\text{Cos } 2\alpha = \text{Cos}(\alpha+\alpha) = \text{Cos}\,\alpha\,\text{Cos}\,\alpha - \text{Sin}\,\alpha\,\text{Sin}\,\alpha$$

$$= \text{Cos}^2\alpha - \text{Sin}^2\alpha$$

$$= \text{Cos}^2\alpha - (1 - \text{Cos}^2\alpha) = 2\,\text{Cos}^2\alpha - 1$$

$$= (1 - \text{Sin}^2\alpha) - \text{Sin}^2\alpha = 1 - \text{Sin}^2\alpha$$

$$\text{Tg } 2\alpha = \text{Tg}(\alpha+\alpha) = \frac{\text{Tg}\,\alpha + \text{Tg}\,\alpha}{1 - \text{Tg}\,\alpha\,\text{Tg}\,\alpha}$$

$$= \frac{2\,\text{Tg}\,\alpha}{1 - \text{Tg}^2\alpha}$$

Rumus-rumus untuk sudut ganda :

$$\textbf{Sin } 2\alpha = 2\,\textbf{Sin}\,\alpha\,\textbf{Cos}\,\alpha$$

$$\textbf{Cos } 2\alpha = \textbf{Cos}^2\alpha - \textbf{Sin}^2\alpha$$

$$= 2\,\textbf{Cos}^2\alpha - 1$$

$$= 1 - 2\,\textbf{Sin}^2\alpha$$

$$\mathbf{Tg\ 2\alpha = \frac{2\ Tg\ \alpha}{1 - Tg^2\ \alpha}} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (III)$$

Contoh-contoh

1. Hitunglah harga Sin 15° tanpa menggunakan daftar logaritma.

   Penyelesaian :

$$15° = 45° - 30°$$

$$\begin{aligned} \text{Sin } 15° &= \text{Sin } 45° - \text{Sin } 30° \\ &= \text{Sin } 45° \text{ Cos } 30° - \text{Cos } 45° \text{ Sin } 30° \\ &= {}^1/_2\sqrt{2}\ .\ {}^1/_2\sqrt{3} - {}^1/_2\sqrt{2}\ .\ {}^1/_2 \\ &= \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

2. Hitunglah Cos $67^1/_2°$ tanpa menggunakan daftar goniometri.

   Penyelesaian :

$$135° = 2\,(67^1/_2°)$$

$\text{Cos } 135° = \text{Cos } 2(67^1/_2°) = 2\text{ Cos}^2\ 67^1/_2° - 1$ rumus III

$2\text{ Cos}^2\ 67^1/_2° = 1 + \text{Cos } 135° = 1 - {}^1/_2\sqrt{2}$ (sudut Kw II)

$\text{Cos}^2\ 67^1/_2° = {}^1/_2\,(1 - {}^1/_2\sqrt{2}) = {}^1/_4\,(2 - \sqrt{2})$

$\text{Cos } 67^1/_2° = {}^1/_2\sqrt{2 - \sqrt{2}}$

Karena Cos $67^1/_2° > 0$ (Sudut lancip, positif)

Maka Cos $67^1/_2° = +{}^1/_2\sqrt{2 - \sqrt{2}}$

3. Hitunglah Tg $22^1/_2°$ tanpa menggunakan daftar goniometri.

   Penyelesaian :

$$22^1/_2° = {}^1/_2\,(45°)$$

Dengan memakai rumus : $\text{Tg } 2\alpha = \dfrac{2\text{ Tg }\alpha}{1 - \text{Tg}^2\ \alpha}$

didapat : $\text{Tg } 45° = \text{Tg } 2\,(22^1/_2°)$

$$1 = \frac{2\text{ Tg } 22^1/_2°}{1 - \text{Tg}^2\ 22^1/_2°}$$

$1 - Tg^2\, 22^1/_2° = 2\, Tg\, 22^1/_2°$

$Tg^2\, 22^1/_2° + 2\, Tg\, 22^1/_2° - 1 = 0$

Umpama : $Tg\, 22^1/_2° = p$

$p2 + 2p - 1 = 0$

$$p_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{4 + \sqrt{4}}}{2}$$

$$= \frac{-2 \pm \sqrt{8}}{2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{2}}{2}$$

$p_{1,2} = -1 \pm \sqrt{2}$

$Tg\, 22^1/_2° = -1 \pm \sqrt{2}$ Karena $Tg\, 22^1/_2° > 0$, maka

$Tg\, 22^1/_2° = -1 + \sqrt{2} = \sqrt{2} - 1$

4. Jika Cos $\alpha = {}^3/_5$ dan Cos $\beta = {}^5/_{13}$, dimana α dan β terletak pada kuadran pertama, hitunglah Sin $(\alpha + \beta)$.

Penyelesaian :

Rumus ; $Sin^2\,\alpha + Cos^2\,\alpha = 1$, maka

$Sin\,\alpha = \pm \sqrt{1 - Cos^2\,\alpha}$

$= \pm \sqrt{1 - ({}^3/_5)^2}$

$= \pm {}^4/_5$

Karena α terletak pada kuadran pertama, maka Sin $\alpha = {}^4/_5$

Dengan cara yang sama :

$Sin\,\beta = \sqrt{1 - Cos^2\,\beta}$

$= \sqrt{1 - ({}^5/_{13})^2}$

$= {}^{12}/_{13}$

$Sin\,(\alpha + \beta) = Sin\,\alpha\, Cos\,\beta + Cos\,\alpha\, Sin\,\beta$

$= {}^4/_5 \,.\, {}^5/_{13} + {}^3/_5 \,.\, {}^{12}/_{13}$

$= {}^{20}/_{65} + {}^{36}/_{65}$

$= {}^{56}/_{65}$

<u>Soal-soal :</u>

1. Hitunglah nilai-nilai yang berikut ini tanpa menggunakan daftar perbandingan goniometri.

   a. Cos $22^1/_2°$ b. Cos 105° c. Tg 75° d. Tg 15°

   e. Sin 195° f. Cos 165° g. Sin $7^1/_2°$ h. Sin 255°

2. Hitunglah Sin (x + y) dari soal-soal berikut ini, jika diketahui :

   a. Sin x = 0,6 ; Cos y = 0,8 x dan y dalam kuadran I

   b. Sin x = 0,5 ; Sin y = 0,7 x dalam kuadran I, y dalam kuadran II

3. Hitunglah Sin (x - y) dari soal-soal berikut ini, jika diketahui :

   a. Cos x = 0,8 ; Cos y = 0,8 x dalam kuadran I, y dalam kuadran I

   b. Sin x = -0,1 ; Cos y = 0,3 x dalam kuadran IV, y dalam kuadran I

4. Hitunglah Cos (x + y) dari soal-soal berikut ini, jika diketahui :

   a. Sin x = 0,6 ; Cos y = 0,9 x dan y dalam kuadran I

   b. Sin x = 0,8 ; Sin y = 0,7 x dalam kuadran IV, y dalam kuadran II

5. Hitunglah Cos (x - y) dari soal-soal berikut ini, jika diketahui :

   a. Sin x = 0,4 ; Cos y = 0,4 x dalam kuadran III, y dalam kuadran I

   b. Cos x = 0,2 ; Cos y = 0,3 x dalam kuadran I, y dalam kuadran III

6. Hitunglah Sin 2A ; Sin $^A/_2$; Cos 2A ; Cos $^A/_2$ jika dikatahui :

   a. Cos A = $^{12}/_{13}$ A dalam kuadran I

   b. Sin A = $^4/_5$ A dalam kuadran II

   d. Sin A = $-^5/_8$ A dalam kuadran III

   e. Cos A = $^2/_5$ A dalam kuadran IV

7. Uraikan Sin (45° - α) dan Cos (45° - α). Mengapakah hasilnya sama ?

8. Diketahui : α sudut tumpul, β sudut lancip. Sin α = $^8/_{17}$, Cos β = $^3/_5$

   Hitunglah : Sin (α + β) ; Cos (α + β)

   Sin (α - β) ; Cos (α - β)

   Dalam kuadran manakah letaknya α + β dan α - β.

9. Buktikan :

a. $\text{Cotg}(\alpha + \beta) = \dfrac{\text{Cotg}\,\alpha\ \text{Cotg}\,\beta - 1}{\text{Cotg}\,\alpha + \text{Cotg}\,\beta}$

b. $\text{Tg}\,\alpha + \text{Tg}\,\beta = \dfrac{\text{Sin}(\alpha + \beta)}{\text{Cos}\,\alpha\ \text{Cos}\,\beta}$

c. $\text{Cos}(\alpha + \beta) \times \text{Cos}(\alpha - \beta) = \text{Cos}^2\alpha - \text{Sin}^2\beta$

$= \text{Cos}^2\beta - \text{Sin}^2\alpha$

10. Buktikan :

a. $\dfrac{\text{Sin}(\alpha + \beta) + \text{Cos}(\alpha - \beta)}{\text{Sin}(\alpha - \beta) + \text{Cos}(\alpha + \beta)} = \dfrac{\text{Cos}\,\beta + \text{Sin}\,\beta}{\text{Cos}\,\beta - \text{Sin}\,\beta}$

b. $\text{Sin}(\alpha + \beta) + \text{Sin}(\alpha - \beta) = 2\,\text{Sin}\,\alpha\ \text{Cos}\,\beta$

11. Buktikan :

a. $\text{Sin}\,41° - \text{Sin}\,39° = 2\,\text{Cos}\,40°\ \text{Sin}\,1°$

b. $\text{Cos}(150° + x) - \text{Cos}(150° - x) = -\text{Sin}\,x$

c. $\dfrac{\text{Tg}\,\alpha + \text{Tg}\,\beta}{\text{Tg}\,\alpha - \text{Tg}\,\beta} = \dfrac{\text{Sin}(\alpha + \beta)}{\text{Sin}(\alpha - \beta)}$

3.4. Perbandingan Goniometri Setengah Sudut

Rumus-rumus perbandingan goniometri sudut kembar atau sudut rangkap, telah kita dapati yaitu :

$$\text{Sin}\,2\alpha = 2\,\text{Sin}\,\alpha\ \text{Cos}\,\beta \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ (1)$$

$$\text{Cos}\,2\alpha = \text{Cos}^2\alpha - \text{Sin}^2\alpha \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ (2)$$

$$= 1 - 2\,\text{Sin}^2\alpha$$

$$= 2\,\text{Cos}^2\alpha - 1$$

$$\text{Tg}\,2\alpha = \frac{2\,\text{Tg}\,\alpha}{1 - \text{Tg}^2\alpha} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ (3)$$

Dari rumus (2) α diganti dengan $\frac{1}{2}\alpha$, kita peroleh :

$$\text{Cos}\,\alpha = \text{Cos}^2\tfrac{1}{2}\alpha - \text{Sin}^2\tfrac{1}{2}\alpha$$

$= 1 - 2 \,\text{Sin}^2 \tfrac{1}{2}\alpha$

$= 2 \,\text{Cos}^2 \tfrac{1}{2}\alpha - 1$

atau $1 + \text{Cos}\,\alpha = 2 \,\text{Cos}^2 \tfrac{1}{2}\alpha$ .... (a)

$1 - \text{Cos}\,\alpha = 2 \,\text{Sin}^2 \tfrac{1}{2}\alpha$ .... (b)

Dari (a) dan (b) diperoleh :

$$\textbf{Cos}\,\tfrac{1}{2}\alpha = \pm\sqrt{\tfrac{1}{2}(1 + \textbf{Cos}\,\alpha)}$$

$$\textbf{Sin}\,\tfrac{1}{2}\alpha = \pm\sqrt{\tfrac{1}{2}(1 - \textbf{Cos}\,\alpha)}$$

$$\textbf{Tg}\,\tfrac{1}{2}\alpha = \pm\sqrt{\frac{1 - \textbf{Cos}\,\alpha}{1 + \textbf{Cos}\,\alpha}} \quad \text{.............. (IV)}$$

Hati-hati kita dengan tanda $\pm$, karena tidak selalu Sin $\tfrac{1}{2}\alpha$ dan Cos $\tfrac{1}{2}\alpha$ memakai tanda $\pm$, tergantung kepada besarnya sudut α. Disini pula tidak ada ketentuan tentang tanda positif atau negatif, akan tetapi jika pada persamaan yang pertama telah ditentukan tandanya, maka tanda ini juga harus dipakai selanjutnya.

Selanjutnya kita dapat menghitung perbandingan goniometri dalam Tg $\tfrac{1}{2}\alpha$.

Contoh :

$$\text{Tg}\,\alpha = \text{Tg}\,(\tfrac{1}{2}\alpha + \tfrac{1}{2}\alpha)$$

$$= \frac{2\,\text{Tg}\,\tfrac{1}{2}\alpha}{1 - \text{Tg}^2\,\tfrac{1}{2}\alpha}$$

$$\text{Sin}\,\alpha = \text{Sin}\,(\tfrac{1}{2}\alpha + \tfrac{1}{2}\alpha)$$

$$= 2\,\text{Sin}\,\tfrac{1}{2}\alpha \,.\, \text{Cos}\,\tfrac{1}{2}\alpha$$

$$= \frac{2\,\text{Sin}\,\tfrac{1}{2}\alpha \,.\, \text{Cos}\,\tfrac{1}{2}\alpha}{\text{Sin}^2\,\tfrac{1}{2}\alpha + \text{Cos}^2\,\tfrac{1}{2}\alpha}$$

$$\text{Sin}\,\alpha = \frac{2\,\text{Tg}\,\tfrac{1}{2}\alpha}{\text{Tg}^2\,\tfrac{1}{2}\alpha + 1}$$

$$\text{Cos}\,\alpha = \text{Cos}^2\,\tfrac{1}{2}\alpha - \text{Sin}^2\,\tfrac{1}{2}\alpha$$

$$= \frac{\text{Cos}^2 \tfrac{1}{2}\alpha - \text{Sin}^2 \tfrac{1}{2}\alpha}{\text{Sin}^2 \tfrac{1}{2}\alpha + \text{Cos}^2 \tfrac{1}{2}\alpha}$$

$$\text{Cos}\,\alpha = \frac{1 - \text{Tg}^2 \tfrac{1}{2}\alpha}{1 + \text{Tg}^2 \tfrac{1}{2}\alpha}$$

$$\text{Cosec}\,\alpha = \frac{1}{\text{Sin}\,\alpha}$$

$$= \frac{1}{2\,\text{Sin}\,\tfrac{1}{2}\alpha\,\text{Cos}\,\tfrac{1}{2}\alpha}$$

$$= \frac{\text{Sin}^2 \tfrac{1}{2}\alpha + \text{Cos}^2 \tfrac{1}{2}\alpha}{2\,\text{Sin}\,\tfrac{1}{2}\alpha\,\text{Cos}\,\tfrac{1}{2}\alpha}$$

$$\text{Cosec}\,\alpha = \frac{\text{Tg}^2 \tfrac{1}{2}\alpha + 1}{2\,\text{Tg}\,\tfrac{1}{2}\alpha}$$

$$\text{Sec}\,\alpha = \frac{1}{\text{Cos}\,\alpha}$$

$$= \frac{1 + \text{Tg}^2 \tfrac{1}{2}\alpha}{1 - \text{Tg}^2 \tfrac{1}{2}\alpha}$$

Rumus-rumus di atas biasanya lebih disederhanakan, terlebih dahulu dengan mengsubsitusikan Tg $\tfrac{1}{2}\alpha$ = t, maka :

$$\textbf{Sin}\,\alpha = \frac{2t}{t^2 + 1}$$

$$\textbf{Cos}\,\alpha = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$$

$$\textbf{Tg}\,\alpha = \frac{2t}{1 - t^2} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (V)$$

<u>Soal-soal</u> :

1. a. Hitunglah Sin 3 α , jika diketahui Sin α
   b. Hitunglah Sin 4 α , jika diketahui Sin α dan Cos α
   c. Hitunglah Cos 3 α , jika diketahui Cos α
   d. Hitunglah Tg 3α, jika diketahui Tg α

2. Diketahui Cos 30° = $\frac{1}{2}\sqrt{3}$, hitunglah perbandingan goniometri sudut 15°, Sin 75°, Cos 15° dan Sin $37\frac{1}{2}$°

3. Buktikanlah : $Tg\,(45° - \frac{1}{2}\alpha) = \dfrac{\text{Cos}\,\alpha}{1 + \text{Sin}\,\alpha} = \dfrac{1 - \text{Sin}\,\alpha}{\text{Cos}\,\alpha}$

4. a. Diketahui Tg ½α = p ; hitunglah Cos α

   b. Diketahui Tg ½α = p ; hitunglah Sin α

5. Diketahui Cos 45° = $\frac{1}{2}\sqrt{3}$; hitunglah perbandingan-perbandingan goniometri sudut 22°30′.

6. Jika diketahui Cos α, hitunglah Tg ½α

3.5. Merobah suatu Jumlah atau Selisih menjadi suatu Hasil Perbanyakan

Dalam fasal ini akan dipelajari hubungan antara perbandingan goniometri sudut jumlah atau selisih dua buah sudut dengan perbanyakan perbandingan goniometri. Seperti dalam fasal-fasal terdahulu, telah ditemukan :

$$\text{Sin}\,(x + y) = \text{Sin}\,x\,\text{Cos}\,y + \text{Cos}\,x\,\text{Sin}\,y \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$\text{Sin}\,(x - y) = \text{Sin}\,x\,\text{Cos}\,y - \text{Cos}\,x\,\text{Sin}\,y \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

jika (1) dan (2) dijumlahkan, dan diperoleh :

$$\text{Sin}\,(x + y) + \text{Sin}\,(x - y) = 2\,\text{Sin}\,x\,\text{Cos}\,y \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

jika (1) dan (2) dikuarngkan, dan diperoleh :

$$\text{Sin}\,(x + y) - \text{Sin}\,(x - y) = 2\,\text{Cos}\,x\,\text{Sin}\,y \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

misalkan :

$$x + y = p \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

$$x - y = q \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

jika (5) dan (6) dijumlahkan, didapat :

$$2x = p + q$$

$$x = \tfrac{1}{2}(p - q) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

jika (5) dan (6) dikurangkan, didapat :

$$2y = p - q$$

$$x = \tfrac{1}{2}(p - q) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

jika (5), (6), (7), (8) dimasukan dalam (3), diperoleh :

$$\text{Sin } p + \text{Sin } q = 2 \text{ Sin } {}^1/_2(p + q) \text{ Cos } {}^1/_2(p - q)$$

jika (5), (6), (7), (8) dimasukan dalam (4), diperoleh :

$$\text{Sin } p - \text{Sin } q = 2 \text{ Cos } {}^1/_2(p + q) \text{ Sin } {}^1/_2(p - q)$$

Akhirnya kita temukan rumus jumlah atau selisih perbandingan goniometri menjadi hasil perbanyakan perbandingan goniometri :

$$\textbf{Sin } \alpha + \textbf{Sin } \beta = \textbf{2 Sin } {}^1/_2(\alpha + \beta) \textbf{ Cos } {}^1/_2(\alpha - \beta)$$

$$\textbf{Sin } \alpha - \textbf{Sin } \beta = \textbf{2 Cos } {}^1/_2(\alpha + \beta) \textbf{ Sin } {}^1/_2(\alpha - \beta)$$

Dengan cara yang serupa dengan di atas, dari :

$$\text{Cos } (x + y) = \text{Cos } x \text{ Cos } y - \text{Sin } x \text{ Sin } y$$

$$\text{Cos } (x - y) = \text{Cos } x \text{ Cos } y + \text{Sin } x \text{ Sin } y$$

dapat diperoleh :

$$\textbf{Cos } \alpha + \textbf{Cos } \beta = \textbf{2 Cos } {}^1/_2(\alpha + \beta) \textbf{ Cos } {}^1/_2(\alpha - \beta)$$

$$\textbf{Cos } \alpha - \textbf{Cos } \beta = \textbf{-2 Sin } {}^1/_2(\alpha + \beta) \textbf{ Sin } {}^1/_2(\alpha - \beta)$$

<u>Contoh-contoh dan penyelesaian</u> :

1. Ubahlah Sin 7y + Sin 3y sebagai hasil kali.

   Penyelesaian :

   Rumus : $\text{Sin } \alpha + \text{Sin } \beta = 2 \text{ Sin } {}^1/_2(\alpha + \beta) \text{ Cos } {}^1/_2(\alpha - \beta)$

   Jadi $\text{Sin } 7y + \text{Sin } 3y = 2 \text{ Sin } {}^1/_2(7y + 3y) \text{ Cos } {}^1/_2(7y - 3y)$

   $= 2 \text{ Sin } {}^1/_2(10y) \text{ Cos } {}^1/_2(4y)$

   $= 2 \text{ Sin } 5y \text{ Cos } 2y$

2. Ubahlah Cos 70° + Cos 50° sebagai perbandingan goniometri dari suatu sudut.

   Penyelesaian :

   Rumus : $\text{Cos } \alpha + \text{Cos } \beta = 2 \text{ Cos } {}^1/_2(\alpha + \beta) \text{ Cos } {}^1/_2(\alpha - \beta)$

   $\text{Cos } 70° + \text{Cos } 50° = 2 \text{ Cos } {}^1/_2(120°) \text{ Cos } {}^1/_2(20°)$

   $= 2 \text{ Cos } 60° \text{ Cos } 10°$

   $= 2\,({}^1/_2) \text{ Cos } 10° = \text{Cos } 10°$

Soal-soal.

1. Robahlah jumlah atau selisih perbandingan goniometri menjadi suatu hasil perbanyakan perbandingan goniometri, sesudahnya (jika mungkin) mudahkan.
   a. Sin 33° + Sin 27° b. Sin 130° - Sin 110°
   c. Cos 63° + Cos 57° d. Cos 82° - Cos 58°
2. a. Apa betul : Sin A + Cos B = Sin A + Sin (90° - A) ?
   b. Apa betul : 1 + Sin A = Sin 90° + Sin A ?
3. Buktikanlah kesehargaan-kesehargaan berikut ini,
   a. $\dfrac{\text{Sin A} + \text{Sin B}}{\text{Sin A} - \text{Sin B}} = \dfrac{\text{Tg } {}^1\!/_2(A + B)}{\text{Tg } {}^1\!/_2(A - B)}$
   b. $\dfrac{\text{Sin A} + \text{Sin B}}{\text{Cos A} + \text{Cos B}} = \text{Tg } {}^1\!/_2(A + B)$
   c. (Sin A + Sin B) (Sin A - Sin B) = Sin (A + B) Sin (A - B)
   d. Sin A + 2 Sin 2A + Sin 3A = 4 Sin 2A . $\text{Cos}^2\ {}^1\!/_2 A$
4. Hitunglah besarnya φ, jika

   $$\text{Cos}(\varphi - 360°) = \frac{\text{Sin}(A + 180°)\ \text{Cos}(B + 90°)}{\text{Tg}(2C - 270°)\ \text{Sec}(-D)}\ \text{, jika}$$

   A, $^1/_2$B, C dan D sudut-sudut lancip, sedangkan Tg A = $^3/_4$, Cos $^1/_2$B = $^5/_{13}$, Tg C = $^1/_5$ dan Sin D = $^4/_5$.

3.6. Perluasan Perbandingan Goniometri Beberapa Buah Sudut

Pada fasal terdahulu telah diperlihatkan, kita dapat merbah suatu jumlah atau selisih perbandingan goniometri menjadi suatu hasil perbanyakan. Sedangkan sebaliknya mungkin juga. Umpama :

$$\begin{array}{rcl} \text{Sin}(A + B) &=& \text{Sin A Cos B} + \text{Cos A Sin B} \\ \text{Sin}(A - B) &=& \text{Sin A Cos B} - \text{Cos A Sin B} \\ \hline \text{Sin}(A + B) + \text{Sin}(A - B) &=& 2\ \text{Sin A Cos B} \end{array} +$$

atau

$$2 \sin \alpha \cos \beta = \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)$$

dengan mudah dapat ditemukan :

$$2 \cos \alpha \sin \beta = \sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)$$

$$2 \cos \alpha \cos \beta = \cos(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)$$

$$2 \sin \alpha \sin \beta = \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)$$

Contoh-contoh dan penyelesaian.

1. Hitunglah 2 buah sudut x dan y, jika jumlah kedua sudut itu dan hasil perbanyakan Sinus-sinus kedua sudut itu diketahui.

   Penyelesaian : $x + y = \alpha$ (diketahui)

   $\sin x \sin y = p$ (diketahui)

   Rumus : $2 \sin \alpha \sin \beta = \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)$

   Jadi : $\cos(x - y) - \cos(x + y) = 2 \sin x \sin y$

   $\cos(x - y) - \cos \alpha = 2p$

   Karena p dan α dikatahui, maka x - y dapat dihitung karena x + y juga diketahui, maka x dan y pula dapat dicari.

2. Bagilah suatu sudut siku-siku menjadi 2 bahagian, sehingga jumlah Sinus-sinusnya mendapat harga yang terbesar (harga maximum). Tentukanlah harga maximum itu.

   Penyelesaian :

   Umpamakan bagian sudut I = A , bagian sudut II = B

   sehingga diketahui $A + B = 90°$

   Diketahui pula : $\sin A + \sin B$ mendapat harga maximum.

   Rumus : $\sin A + \sin B = 2 \sin \frac{1}{2}(A + B) \cos \frac{1}{2}(A - B)$

   $2 \sin \frac{1}{2}(90°) \cos \frac{1}{2}(A - B) =$

   $2 \sin 45° \cos \frac{1}{2}(A - B) =$

   $2 (\frac{1}{2}\sqrt{2}) \cos \frac{1}{2}(A - B) =$

   $\sqrt{2} \cos \frac{1}{2}(A - B) =$ agar mendapat harga maximum, maka syaratnya $\cos \frac{1}{2}(A - B) = 1$

INGAT : Cosinus suatu sudut akan mencapai nilai tertinggi (maximum), bila Cosinus sudut itu = +1

Jadi harga maximumnya ialah = $\sqrt{2}\,.\,1 = \sqrt{2}$, bila Cos $^1/_2$(A - B) = 1 = Cos 0° atau $^1/_2$(A - B) = 0 atau A - B = 0 atau A = B.

3. Jika terdapat kuadrat Sinus atau Cosinus, maka sebaiknya harus dirobah kedalam Sinus atau Cosinus dari suatu sudut rangkap atau kembar.

Umpamanya diketahui :

Rumus : $\text{Cos } 2\varphi = 1 - 2 \text{ Sin}^2 \varphi$, maka

$$\text{Sin}^2 \varphi = \frac{1 - \text{Cos } 2\varphi}{2}$$

dan diketahui :

Rumus : $\text{Cos } 2\varphi = 2 \text{ Cos}^2 \varphi - 1$, maka

$$\text{Cos}^2 \varphi = \frac{1 + \text{Cos } 2\varphi}{2}$$

Contoh pemakaian rumus-rumus di atas :

Jika : A + B + C = 270°, buktikan bahwa

$$\text{Sin}^2 A + \text{Sin}^2 B + \text{Sin}^2 C - 2 \text{ Sin } A \text{ Sin } B \text{ Sin } C = 1 \qquad \ldots\ldots\ldots (1)$$

Penyelesaian :

$$\text{Rumus : } \text{Sin}^2 A = \frac{1 - \text{Cos } 2A}{2} \qquad \ldots\ldots\ldots (2)$$

$$\text{Sin}^2 B = \frac{1 - \text{Cos } 2B}{2} \qquad \ldots\ldots\ldots (3)$$

Dari (2) dan (3)

$$\text{Sin}^2 A + \text{Sin}^2 B = \frac{1 - \text{Cos } 2A}{2} + \frac{1 - \text{Cos } 2A}{2}$$

$$= {}^2/_2 - {}^1/_2 (\text{Cos } 2A + \text{Cos } 2B)$$

$$= 1 - {}^1/_2 \left(2 \text{ Cos}\left(\frac{2A + 2B}{2}\right) \text{Cos}\left(\frac{2A - 2B}{2}\right)\right)$$

$$= 1 - \text{Cos } (A + B) \text{ Cos } (A + B)$$

$$\text{Sin}^2 A + \text{Sin}^2 B = 1 + \text{ Sin } C \text{ Cos } (A - B) \qquad \ldots\ldots\ldots (4)$$

Perhatikan : A + B + C = 270°

$$A + B = 270^\circ - C$$

$$\text{Cos}(A + B) = \text{Cos}(270^\circ - C) = -\text{Sin } C \text{ (kuadran III)}$$

Dari (1) dan (4)

$$1 + \text{Sin } C \text{ Cos}(A - B) + \text{Sin}^2 C - 2 \text{ Sin } A \text{ Sin } B \text{ Sin } C = 1$$

$$1 + \text{Sin } C \{\text{Cos}(A - B) - \text{Cos}(A + B)\} - 2 \text{ Sin } A \text{ Sin } B \text{ Sin } C = 1$$

$$1 + \text{Sin } C \left(-2 \text{ Sin} \frac{A \cancel{- B} + A \cancel{+ B}}{2} \text{ Sin} \frac{A - B - A - B}{2}\right) - 2 \text{ Sin } A \text{ Sin } B \text{ Sin } C = 1$$

$$1 + \cancel{2 \text{ Sin } A \text{ Sin } B \text{ Sin } C} - \cancel{2 \text{ Sin } A \text{ Sin } B \text{ Sin } C} = 1$$

$$1 = 1 \qquad \text{q.e.d.}$$

<u>Soal-soal</u>

1. Diketahui : $A + B + C = 180^\circ$, buktikanlah :
   a. $\text{Cos}^2 A + \text{Cos}^2 B + \text{Cos}^2 C = 1 - 2 \text{ Cos } A \text{ Cos } B \text{ Cos } C$
   b. $\text{Cotg } {}^1/_2 A + \text{Cotg } {}^1/_2 B + \text{Cotg } {}^1/_2 C = \text{Cotg } {}^1/_2 A \text{ Cotg } {}^1/_2 B \text{ Cotg } {}^1/_2 C$
2. Diketahui : $A + B + C = 90^\circ$, buktikanlah :
   $\text{Cotg } A + \text{Cotg } B + \text{Cotg } C = \text{Cotg } A \text{ Cotg } B \text{ Cotg } C$
3. Bagilah suatu sudut lancip, menjadi 2 bagian, sehingga perbanyakan Cosinus-cosinusnya mendapat harga yang terbesar. Tentukanlah harga maximum itu.
4. Bagilah sudut 60°, menjadi 2 bagian, sehingga jumlah Tangen-tangennya mendapat harga yang terkecil (harga minimum). Tentukanlah harga minimum itu.
5. Diketahui $\text{Tg } x = -n$. Hitunglah perbandingan-perbandingan goniometri sudut x yang lain.
6. Jika $A + B + C + D = 180^\circ$. Buktikanlah :
   $\text{Cos } A \text{ Cos } B + \text{Cos } C \text{ Cos } D = \text{Sin } A \text{ Sin } B + \text{Sin } C \text{ Sin } D$
7. Buktikanlah :
   a. $\text{Tg } A - \text{Sin } A = \text{Tg } A \text{ Sin } A \text{ Tg } {}^1/_2 A$
   b. $\text{Sin } 8a = 8 \text{ Sin } a \text{ Cos } a \text{ Cos } 2a \text{ Cos } 4a$
   c. $\text{Tg}(225^\circ + a) + \text{Tg}(135^\circ + a) - \text{Tg } 135^\circ = 1 + 2 \text{ Tg } 2a$

BAB IV

PERSAMAAN-PERSAMAAN TRIGONOMETRI

4.1. Persamaan Trigonometri

Persamaan trigonometri atau persamaan goniometri ialah suatu persamaan yang mengandung satu atau lebih perbandingan trigonometri dari sudut yang tidak diketahui. Beberapa contoh persamaan ialah :

1. $\text{Cos } x = {}^1/_2$
2. $2 \text{ Sin } x + 1 = 0$
3. $\text{Cos}^2 x + 2 \text{ Cos } x + 1 = 0$
4. $x + y = 120°$, $\text{Sin } x - \text{Sin } y = 0{,}5$

Persamaan (1), (2), (3) mengandung satu sudut yang tidak diketahui (yaitu x), sedangkan persamaan (4) mengandung dua sudut yang tidak diketahui (yaitu sudut x dan y).

Marilah kita perhatikan dahulu persamaan-persamaan yang mengandung satu sudut yang tidak diketahui. bentuk-bentuk dasarnya ialah : $\text{Sin } x = a$, $\text{Cos } x = b$, $\text{tg } x = c$ dengan persyaratan-persyaratan sebagai berikut :

a ialah suatu bilangan tetap yang memenuhi $-1 \leq a \leq +1$

b ialah suatu bilangan tetap yang memenuhi $-1 \leq b \leq +1$

c ialah suatu bilangan tetap sembarangan.

Jawaban umum dari permasalahan trigonometri yang dikelompokan dalam tiga bentuk dasar di atas ialah :

$$\text{I. Sin } x = \text{Sin } \alpha \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = \alpha + k.360° \\ x_2 = (180° - \alpha) + k.360° \end{array}\right.$$

II. $\text{Cos } x = \text{Cos } \alpha \Rightarrow x = \pm\alpha + k.360°$

III. $\text{tg } x = \text{tg } \alpha \Rightarrow x = \alpha + k.360°$

dimana $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Jika mengunakan satuan radial (= radian), maka persamaan-persamaan trigonometri di atas dapat menpunyai jawaban umumnya sebagai berikut :

I. $\text{Sin } x = \text{Sin } \alpha \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \alpha + 2k\pi \\ x_2 = (\pi - \alpha) + 2k\pi \end{cases}$

II. $\text{Cos } x = \text{Cos } \alpha \Rightarrow x = \pm\alpha + k\pi$

III. $\text{tg } x = \text{tg } \alpha \Rightarrow x = \alpha + k\pi$

dimana $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Yang perlu diperhatikan ialah setiap permasalahan persamaan trigonometri biasanya dikembalikan pada bentuk-bentuk dasar atau bentuk pokok.

Contoh-contoh penyelesaiannya :

1. Kita akan mencari harga x dari suatu bentuk $\text{Cos } x = {}^1/_2$

   Penyelesaian :

   Jawaban umum II : $\text{Cos } x = \text{Cos } 60°$

   $x = \pm 60° + k.360°$

   untuk $k = 0$ $\quad x_1 = \pm 60°$

   untuk $k = 1$ $\quad x_2 = 420°$ dan $x_3 = 300°$

   Jadi nilai x dari persamaan Cos x = ialah 60° atau -60° atau 420° atau 300° dan seterusnya dengan menganti k dengan suatu bilangan bulat, jadi jawabannya banyak.

2. Hitunglah x dari persamaan $\text{Cos } 2x = \text{Cos } x$

   Penyelesaian :

   Rumus sudut kembar : Cos 2x = 1 - Sin2 x, sehingga persamaan menjadi :

   $1 - 2\,\text{Sin}^2 x = \text{Sin } x$

   $-2\,\text{Sin}^2 x - \text{Sin } x + 1 = 0$

   $2\,\text{Sin}^2 x + \text{Sin } x - 1 = 0$

$(2 \sin x - 1)(\sin x + 1) = 0$

$2 \sin x - 1 = 0$ atau $\sin x + 1 = 0$

$\sin x = {}^1/_2$ $\qquad$ $\sin x = -1$

Jawaban I : $\sin x = \sin 30°$ $\qquad$ Jawaban I :

$x_1 = 30° + k.360°$ $\qquad$ $x_3 = -90° + k.360°$

$x_2 = 150° + k.360°$ $\qquad$ $x_4 = 270° + k.360°$

3. Kita akan mencari harga x yang memenuhi a Cos x + b Sin x = c (a, b, c ialah bilangan tetap.

Penyelesaian :

Jelas bentuk umum/pokok tak ada, tetapi dapat kita selesaikan dengan bentuk-bentuk lain. Ruas kiri dan ruas kanan dibagi dengan a dan kita misalkan :

$\dfrac{b}{a} = \operatorname{tg} \varphi$ $\qquad$ dalam $\operatorname{tg} \varphi = \dfrac{b}{a}$, φ dapat dicari :

Persamaan : $a \cos x + b \sin x = c$ menjadi

$$\cos x + \frac{b}{a} \sin x = c$$

$$\cos x + \operatorname{tg} \varphi \ \sin x = \frac{c}{a}$$

Kedua ruas kita kalikan dengan Cos φ, persamaan di atas menjadi :

$$\cos x \cos \varphi + \sin x \ \sin \varphi = \frac{c}{a} \cos \varphi$$

Ingat rumus dalam bab III : $\cos (x - \varphi) = {}^c/_a \cos \varphi$ dimana ${}^c/_a \cos \varphi$ adalah bilangan tetap, umpamakan dengan p, maka

$$\cos (x - \varphi) = p$$

Nah bentuk ini, telah mengingatkan kita ke dalam bentuk umum/pokok, $(x - \varphi)$ dapat dihitung dengan jawaban umum II dan harga x dapat dicari.

Syarat-syarat yang perlu dan cukup supaya $(x - \varphi)$ dapat dihitung ialah :

$$-1 \leq {}^c/_a \cos \varphi \leq +1$$

$$\text{jadi} \quad \frac{c^2}{a^2} \cos^2 \varphi \leq +1$$

Diketahui pula : $\operatorname{tg} \varphi = {}^b/_a$ sehingga dengan rumus :

$$1 + tg^2 \varphi = Sec^2 \varphi \text{, maka}$$

$$Sec^2 \varphi = 1 + tg^2 \varphi$$

$$Cos^2 \varphi = \frac{1}{1 + \frac{b^2}{a^2}} = \frac{a^2}{a^2 + b^2}$$

Jadi : $\frac{c^2}{a^2} Cos^2 \varphi \leq 1$ maka

$$\frac{c^2}{a^2} \cdot \frac{a^2}{a^2 + b^2} \leq 1 \Rightarrow \frac{a^2}{a^2 + b^2} \leq 1$$

$$c^2 \leq a^2 + b^2$$

Kesimpulannya : Agar persamaan a Cos x + b Sin x = c dapat diselesaikan, syaratnya ialah : $c^2 \leq a^2 + b^2$

4. Hitunglah x dari persamaan 4 Cos x + 6 Sin x = 3

Penyelesaian :

Periksa syarat seperti dalam contoh 3

$$c^2 \leq a^2 + b^2$$

$a \leq 16 + 36$. jadi benar, syarat dipenuhi.

Ruas kiri dan kanan 4 Cos x + 6 Sin x = 3 dibagi dengan 4 :

$$Cos\ x + {}^3/_2\ Sin\ x = {}^3/_4$$

Misalkan ${}^3/_2 = tg\ \varphi \Rightarrow \varphi = 56°19'$ (daftar perbandingan geometri)

Jadi : $Cos\ x + tg\ \varphi\ Sin\ x = {}^3/_4$

Sekarang ruas kiri dan kanan dikalikan dengan Cos φ, didapat

$$Cos\ x\ Cos\ \varphi + Sin\ x\ Sin\ \varphi = {}^3/_4\ Cos\ \varphi$$

$$Cos\ (x - \varphi) = {}^3/_4\ Cos\ 56°19'$$

$$= {}^3/_4\ (0{,}5546)$$

$$= 0{,}4160$$

Jadi $x - \varphi = \pm\ 65°25' + k.360°$

Hasilnya ialah :

a. $x_1 = \varphi + 65°25' + k.360° \Rightarrow x_1 = 121°44' + k.360°$

a. $x_2 = \varphi - 65°25' + k.360° \Rightarrow x_2 = -10°54' + k.360°$

5. Hitunglah x dari persamaan $\text{Sin } x + \text{Sin } 2x + \text{Sin } 3x = \text{Cos } x + 2\text{ Cos}^2 x$

Penyelesaian :

Suku pertama dan ketiga dari ruas kiri kita satukan menjadi :

$$\text{Sin } x + \text{Sin } 3x = 2 \text{ Sin } \frac{x + 3x}{2} \text{ Cos } \frac{3x - x}{2}$$

$$= 2 \text{ Sin } 2x \ . \ \text{Cos } x$$

maka didapat :

$$2 \text{ Sin } 2x \text{ Cos } x + \text{Sin } 2x = \text{Cos } x + 2 \text{ Cos}^2 x$$

$$\text{Sin } 2x (2 \text{ Cos } x + 1) = \text{Cos } x (1 + 2 \text{ Cos } x)$$

$$(1 + 2 \text{ Cos } x) \text{ Sin } 2x - \text{Cos } x (1 + 2 \text{ Cos } x) = 0$$

$$(1 + 2 \text{ Cos } x) (\text{Sin } 2x - \text{Cos } x) = 0$$

$$(1 + 2 \text{ Cos } x) (2 \text{ Sin } x \text{ Cos } x - \text{Cos } x) = 0$$

$$(1 + 2 \text{ Cos } x) (2 \text{ Sin } x - 1) \text{ Cos } x = 0$$

Hasil-hasilnya ialah :

a. $\text{Cos } x = 0 \Rightarrow x_1 = 90° + k.360°$

b. $1 + 2 \text{ Cos } x = 0 \Rightarrow \text{Cos } x = -0{,}5 \Rightarrow x_2 = \pm 120° + k.360°$

c. $2 \text{ Sin } x - 1 = 0 \Rightarrow \text{Sin } x = 0{,}5 \Rightarrow x_3 = 30° + k.360°$

$x_4 = 150° + k.360°$

Catatan Penting :

1. Cos (-x) = Cos (x), ingat rumus-rumus dalam bab II.
2. Ingatlah bahwa dalam penyelesaian di atas, kita tidak boleh membagi dengan 2 Cos x + 1, sebab 2 Cos x + 1 dapat bernilai nol.

6. Hitunglah x dan y dalam

$$\text{Cos } x + \text{Cos } y = a \quad ; \quad \text{Sec } x + \text{Sec } y = b$$

Penyelesaian :

Untuk penyelesaian susunan persamaan yang mengandung 2 sudut yang tidak diketahui, kita pakai cara yang biasanya dipakai dalam Aljabar, yaitu menghilangkan dahulu salah satu sudut yang tak diketahui.

Umpamakanlah Cos x = U, Cos y = V maka persamaan tersebut menjadi :

$$U + V = a$$

$$\frac{1}{U} + \frac{1}{V} = b.$$

Yang selanjutnya dapat dihitung secara Aljabar.

7. Kita akan menghitung x dan y yang memenuhi

   $x - y = 80°$; $\text{Cos } x + \text{Cos } Y = 1{,}25$

   Penyelesaian :

   Dari $x - y = 80°$ maka $x = 80° + y$

   Jadi $x = 80° + y$ dimasukan ke dalam persamaan $\text{Cos } x + \text{Cos } y = 1{,}25$, maka

   $$\text{Cos }(80° + y) + \text{Cos } y = 1{,}25$$
   $$\text{Cos } 80° \text{ Cos } y - \text{Sin } 80° \text{ Sin } y + \text{Cos } y = 1{,}25$$
   $$0{,}1736 \text{ Cos } y - 0{,}9848 \text{ Sin } y + \text{Cos } y = 1{,}25$$
   $$1{,}1736 \text{ Cos } y - 0{,}9848 \text{ Sin } y = 1{,}25$$

   Persamaan ini berbentuk $a \text{ Cos } y + b \text{ Sin } y = c$

   Jadi cara penyelesaiannya sudah dibahas dalam persamaan yang mengandung satu sudut yang tak diketahui.

   Cara lain :

   $$\text{Cos } x + \text{Cos } y = 1{,}25$$
   $$2 \text{ Cos } {}^1/_2(x + y) \text{ Cos } {}^1/_2(x - y) = 1{,}25$$

   karena $x - y = 80°$, maka

   $$2 \text{ Cos } {}^1/_2(x + y) \text{ Cos } 40° = 1{,}25$$

   jadi $\text{Cos } {}^1/_2(x + y) = \dfrac{1{,}25}{\text{Cos } 40°}$

   maka ${}^1/_2(x + y) = \pm\ 35°20' + k.360°$

   Jadi kita peroleh dua buah susunan, yakni

   $$\begin{array}{ll} {}^1/_2(x - y) = 40° & {}^1/_2(x - y) = 40° \\ {}^1/_2(x + y) = 35°20' + k.360° \quad + & {}^1/_2(x + y) = -35°20' + k.360° \quad + \\ \hline x_1 = 75°20' + k.360° & x_2 = 4°40' + k.360° \\ y_1 = -4°40' + k.360° & y_2 = -75°20' + k.360° \end{array}$$

Soal-soal :

1. Hitunglah x dan y dari persamaan-persamaan :

a. $\text{Sin } x + \text{Sin } y = 0{,}9195$
$x + y = 55^\circ$

b. $\text{Cos } x + \text{Cos } y = 1{,}583$
$y + x = 25^\circ 59'$

c. $\text{Sin } x + \text{Sin } y = 1{,}157$
$\text{Cos } x + \text{Cos } y = 1{,}563$

d. $\text{Sin } x + \text{Sin } y = 0{,}9066$
$\text{Cos } x - \text{Cos } y = -0{,}0201$

2. Hitunglah x dari persamaan-persamaan berikut :

a. $3 \text{ Cos}^2 x - 5 \text{ Cos } x - 2 = 0$

b. $3 \text{ Sin } x + \text{Cos}^2 x - 3 = 0$

c. $\text{tg } x = \text{Cos } x$

d. $\text{Cotg } x = \text{Sin } x$

3. Hitunglah x dari persamaan-persamaan berikut :

a. $\text{tg } x = \text{Cotg } 50^\circ$

b. $\text{Cos } 2x = -\text{Sin } 40^\circ$

c. $\text{tg } x + \text{Cotg } 20^\circ = 0$

d. $\text{Cos } 2x + \text{Sin } x = 0$

4. Hitunglah harga x dari :

a. $\text{tg } 2x = \text{Cotg } (x - 10^\circ)$

b. $\text{Sin } x + 2 \text{ Cos } x = 1$

c. $\text{Sin } 2x + \text{Cos } 2x = 0$

d. $3 \text{ Cos } x + 2 \text{ Sin } x = \sqrt{3}$

5. Hitunglah x dan y yang memenuhi :

a. $x + y = 60^\circ$
$\text{Sin } x + \text{Sin } y = 1$

b. $x - y = 45^\circ$
$\text{tg } x - \text{tg } y = 1$

6. Hitunglah x dan y yang memenuhi :

a. $\text{Sin } x + \text{Cos } x = a \text{ Cos } x$
$\text{Sec } x = b$

b. $\text{Sin } x + \text{Cos } x = a$
$\text{Cos } 2x = b$

c. $\text{Cos } (x + \beta) = a$
$\text{Cos } (x - \beta) = b$

d. $\text{Sin } x + \text{Cos } y = a$
$\text{Cos } x + \text{Sin } y = b$
$\text{Sin } (x + y) = c$

7. Buktikanlah :

$$\text{tg } x + \text{tg } 2x + \text{tg } 3x + \text{tg } x \text{ tg } 3x \text{ tg } 4x = \frac{\text{Sin } 6x}{\text{Cos } 2x \text{ Cos } 4x}$$

4.2. Ketidaksamaan

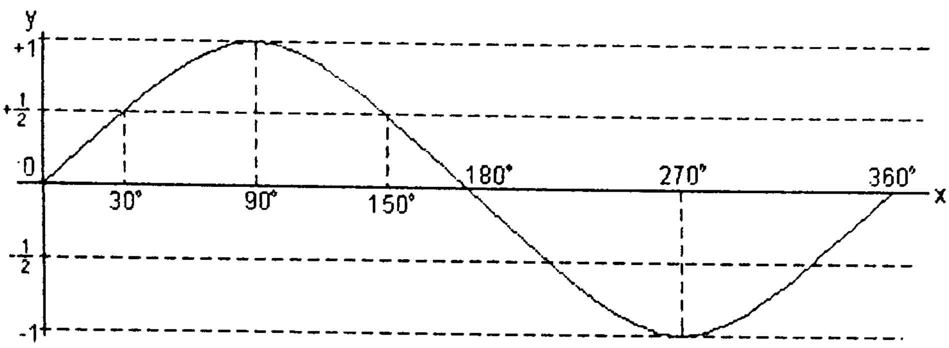
Ketidaksamaan, penyelesaian untuk mencari suatu harga yang tidak diketahui, dapat dilakukan dengan aljabar dan sebagainya, tetapi kita akan menyelesaikan ketidaksamaan dengan pertolongan grafik. Disamping itupula, kita hanya menghitung nilai-nilai x diantara 0° dan 360° yang memenuhi ketidaksamaan.

Contoh-contoh

1. Untuk nilai-nilai x manakah $\text{Sin } x < {}^1/_2$

   Penyelesaiannya : terlebih dahulu kita membuat grafik

   $$y = \text{Sin } x \qquad 0° \leq x \leq 360°$$



Gambar 4.1 Grafik y = Sin x

   Perhatikan gambar 4.1

   Dalam fasal terdahulu, telah kita ketahui :

   $$\text{Sin } x = {}^1/_2 \quad \text{untuk} \quad x_1 = 30° + k.360°$$
   $$x_2 = 150° + k.360°$$

   Karena x harus terletak diantara 0° dan 360° maka nilai x yang memenuhi

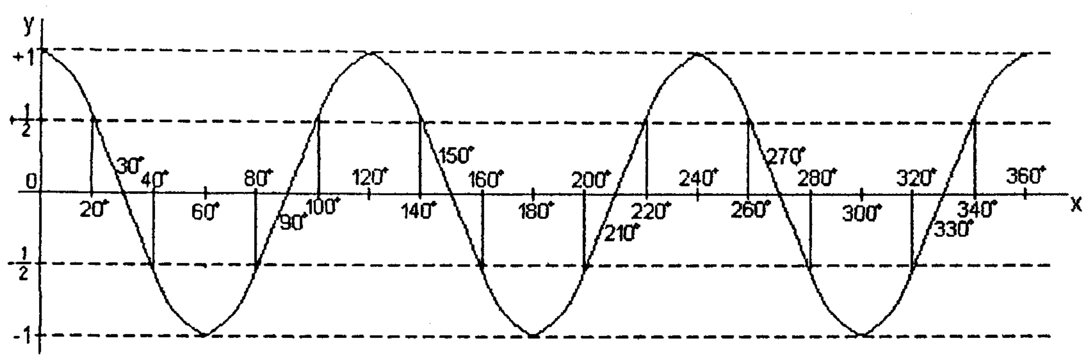
   $$x = {}^1/_2 \quad \text{ialah} \quad x_1 = 30°$$
   $$x_2 = 150°$$

   dari grafik $y = \text{Sin } x$ terlihat bahwa :

   $$\text{Sin } x < {}^1/_2 \quad \text{untuk} \quad 0° \leq x < 30° \ ;$$
   $$\text{untuk} \quad 150° < x \leq 360°$$

2. Nilai-nilai x yang manakah memenuhi ketidaksamaan $\text{Cos } 3x < 0{,}5$?

Penyelesaian : lihat gambar 4.2



Gambar 4.2 Grafik y = Cos 3x

Tabel penyelesaian y = Cos 3x

x	0°	20°	30°	40°	60°	80°	90°	100°	120°	dst
y	+1	$^1/_2$	0	$-^1/_2$	-1	$-^1/_2$	0	$^1/_2$	+1	

Dari Cos 3x = 0,5 didapat :

$$\text{Cos } 3x = \text{Cos } 60°$$

$$3x = \pm 60° + k.360°$$

$$x = \pm 20° + k.120°$$

Untuk $0° \le x \le 360°$ yang memenuhi Cos 3x = 0,5 ialah :

x = 20°, 100°, 140°, 220°, 260°, 340°.

dari grafik x = Cos 3x terlihat bahwa Cos 3x < 0,5

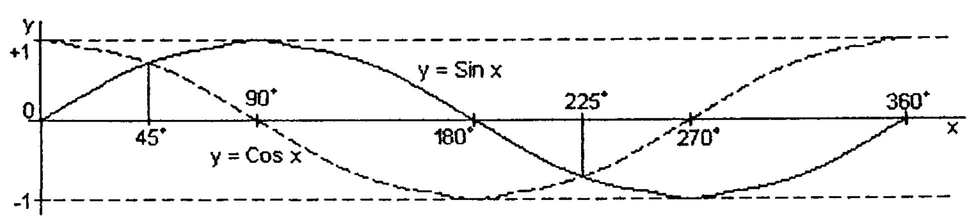
$20° < x < 100°$

$140° < x < 220°$

$260° < x < 340°$

3. Nilai-nilai x manakah yang memenuhi Cos x > Sin x

Penyelesaian : lihat gambar 4.3



Gambar 4.3 Grafik y = Cos x dan y = Sin x

Dari Cos x = Sin x didapat :

$$x = \pm 45° + k.360°$$

Nilai-nilai yang memenuhi Cos x = Sin x, untuk $0° < x < 360°$ ialah :

$x = 45°$ dan $x = 225°$

Dari grafik di atas terlihat bahwa : Cos x > Sin x

untuk $0° \leq x < 45°$, dan $225° \leq x < 360°$

Soal-soal :

Tentukanlah nilai-nilai x diantara 0° dan 360° yang memenuhi.

1. $\text{tg}\, x < \sqrt{3}$
2. $\text{Cos}\, 2x < {}^1/_2\sqrt{2}$
3. $\text{Sin}\, 2x < -{}^1/_2$
4. $\text{Cos}\, x > {}^1/_2$
5. $\text{Cotg}\, x > 1$
6. $\text{Sin}\, 2x > \text{Sin}\, x$

BAB V

ILMU UKUR SEGITIGA

Dalam bab V ini kita akan menghitung panjang sisi-sisi dan besar sudut-sudut dalam suatu segitiga. Disamping sisi dan besar sudut, juga akan menghitung panjang garis-garis istimewa dalam segitiga seperti garis tinggi, garis berat, garis bagi, jari-jari lingkaran dalam dan jari-jari lingkaran luar suatu segitiga.

Luas segitiga juga akan dibahas dalam bab ini. Hubungan antara aturan atau dalil atau rumus yang berlaku dalam segitiga dan trigonometri akan diperbincangkan juga dalam bab ini, serta penggunaannya dalam kehidupan sehari-hari. Pengetahuan dasar trigonometri yang diberikan dalam empat bab terdahulu, akan digunakan dalam unsur-unsur suatu segitiga. Berikut ini akan mempelajari sisi-sisi dan sudut-sudut suatu segitiga.

5.1. Sisi-sisi dan Sudut-sudut suatu Segitiga

Suatu segitiga mempunyai tiga buah sisi dan tiga buah sudut, jadi suatu segitiga mempunyai 6 unsur atau 6 elemen. Dengan mengetahui 3 unsur dalam suatu segitiga (selain 3 sudut) maka unsur segitiga sudah diketahui, dan 3 unsur lainnya dapat dihitung.

Untuk menghitung unsur-unsur segitiga ABC, kita dapat menggunakan rumus-rumus (atau aturan-aturan atau dalil-dalil) :

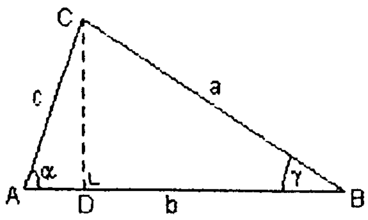
1. Aturan Sinus.
2. Aturan Cosinus
3. Rumus-rumus yang diperoleh dari perluasan aturan Sinus dan Cosinus, seperti :

a. Aturan Tangen

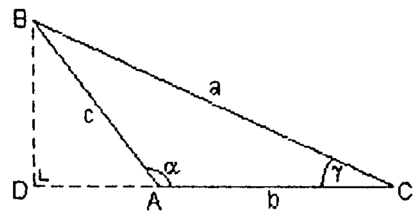
b. Rumus D' Alamber

5.1.1. Aturan Sinus

Pada setiap segitiga, sisi-sisinya berbanding sebagai Sinus, sudut-sudut didepannya.



Gambar 5.1a α adalah sudut lancip



Gambar 5.1b α adalah sudut tumpul

Karena Sin $(180° - \alpha)$ = Sin α maka pada kedua gambar di atas (gambar 5.1a dan 5.1b) berlaku :

$$\text{Sin } \alpha = \frac{BD}{c} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

$$\text{Sin } \gamma = \frac{BD}{a} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

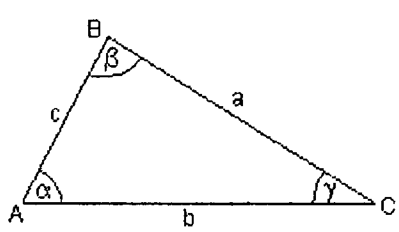
jika (1) dibagi (2) didapat :

$$\frac{\text{Sin } \alpha}{\text{Sin } \gamma} = \frac{BD}{c} : \frac{BD}{a} = \frac{a}{c}$$

jadi $$\frac{a}{\text{Sin } \alpha} = \frac{c}{\text{Sin } \gamma}$$

Dengan jalan yang sama, jika ditarik garis tinggi dari A akan didapat :

$$\frac{b}{\text{Sin } \beta} = \frac{c}{\text{Sin } \gamma}$$



Gambar 5.2

Sehingga : $$\frac{a}{\text{Sin } \alpha} = \frac{b}{\text{Sin } \beta} = \frac{c}{\text{Sin } \gamma}$$

Hubungan ini disebut aturan Sinus.

Dalam suatu segitiga ABC (lihat gambar 5.2) terdapat tiga macam kemungkinan diketahui (diketahui 3 unsur), sehingga Sinus dapat digunakan untuk mencari 3 unsur lain. Kemungkinan-kemungkinan itu ialah :

a. Dua sudut dan sebuah sisi persekutuannya, yaitu umpamanya α, β dan c.

   Diketahui : α, β dan c

   maka $\gamma = 180° - (\alpha + \beta) \Rightarrow \gamma$ dapat dicari.

   Aturan Sinus : $$\frac{a}{\text{Sin } \alpha} = \frac{c}{\text{Sin } \gamma}$$

   $$a = \frac{c \text{ Sin } \alpha}{\text{Sin } \gamma} \quad \Rightarrow a \text{ dapat dihitung}$$

   $$\frac{b}{\text{Sin } \beta} = \frac{c}{\text{Sin } \gamma}$$

   $$b = \frac{c \text{ Sin } \beta}{\text{Sin } \gamma} \quad \Rightarrow b \text{ dapat dicari}$$

b Diketahui 2 sudut dan sebuah sisi yang berseberangan dengan salah satu sudut, dan sudut lain dapat ditemukan.

   Diketahui : α, β dan a

   maka $\gamma = 180° - (\alpha + \beta) \Rightarrow \gamma$ dapat dicari.

   Aturan Sinus : $$\frac{a}{\text{Sin } \alpha} = \frac{c}{\text{Sin } \gamma}$$

   $$c = \frac{a \text{ Sin } \gamma}{\text{Sin } \alpha} \quad \Rightarrow c \text{ dapat dicari}$$

   $$\frac{a}{\text{Sin } \alpha} = \frac{b}{\text{Sin } \beta}$$

   $$b = \frac{a \text{ Sin } \beta}{\text{Sin } \alpha} \quad \Rightarrow b \text{ dapat dihitung}$$

c Dua sisi dan sebuah sudut yang tidak diapitnya.

Diketahui : a, b dan α

Aturan Sinus : $\dfrac{a}{\text{Sin } \alpha} = \dfrac{b}{\text{Sin } \beta}$

$\text{Sin } \beta = \dfrac{b \text{ Sin } \alpha}{a}$ $\Rightarrow$ β dapat dihitung

$\gamma = 180° - (\alpha + \beta)$ $\Rightarrow$ γ dapat dicari

$\dfrac{a}{\text{Sin } \alpha} = \dfrac{c}{\text{Sin } \gamma}$

$c = \dfrac{a \text{ Sin } \gamma}{\text{Sin } \alpha}$ $\Rightarrow$ c dapat dihitung

Kemungkinan-kemungkinan yang timbul :

1. Jika $b \text{ Sin } \alpha > a$, maka tidak ada segitiga.
2. Jika $b \text{ Sin } \alpha = a$, maka $\text{Sin } \beta = 1 \Rightarrow \beta = 90°$

   $\beta = 90°$ jika $\alpha < 90°$

3. Jika $b \text{ Sin } \alpha < a$, maka ada 2 segitiga, karena ada 2 harga β, yaitu β_1 dan β_2.

   Dengan $\beta_1 < \beta_2$, maka $\gamma_1 = 180° - \alpha - \beta_1$, dan

   $\gamma_2 = 180° - \alpha - \beta_2$

   3.1. jika $\alpha < 90°$ maka $\gamma_1 > 0$

   a. jika $180° - \beta_2 > \alpha$ atau $\text{Sin } \beta_2 > \text{Sin } \alpha$ atau $b > a \Rightarrow \gamma_2 > 0$

   b. jika $b \leq a \Rightarrow \gamma_2 < 0$ hanya ada Δ ABC

   3.2. jika $\alpha = 90° \Rightarrow$ ada satu segitiga

   3.3. jika $\alpha > 90° \Rightarrow \gamma_2 < 0$

   $\gamma_1 > 0$ jika $180° - \beta_1 < \alpha$

   atau $\text{Sin } \beta_1 < \text{Sin } \alpha$, $b < a$ hanya ada satu segitiga.

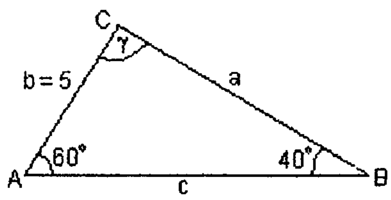
Contoh-contoh.

1. Pada segitiga ABC diketahui bahwa $\alpha = 60°$, $\beta = 40°$ dan $b = 5$ cm. Hitunglah unsur-unsur lain dari segitiga tersebut.

   Penyelesaian : lihat gambar 5.3

   $\gamma = 180° - \alpha - \beta = 180° - 60° - 40° = 80°$

   dari aturan Sinus :



Gambar 5.3

$$\frac{a}{\text{Sin }\alpha} = \frac{b}{\text{Sin }\beta}$$

$$a = \frac{b \text{ Sin }\alpha}{\text{Sin }\beta}$$

$$= \frac{5 \text{ Sin } 60°}{\text{Sin } 40°}$$

$$= \frac{5 \times 0{,}8660}{0{,}6428} = \frac{4{,}3300}{0{,}6428}$$

$$a = 6{,}7 \text{ cm}$$

dari aturan Sinus :

$$\frac{c}{\text{Sin }\gamma} = \frac{b}{\text{Sin }\beta}$$

$$\frac{c}{\text{Sin } 80°} = \frac{5}{\text{Sin } 40°}$$

$$c = \frac{5 \times 0{,}9848}{0{,}6428}$$

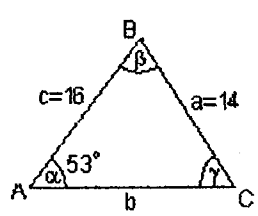
$$c = 7{,}6 \text{ cm}$$

2. Dalam segitiga ABC diketahui $a = 14$ cm, $c = 16$ cm dan $\alpha = 53°$. Hitunglah unsur-unsur lain dalam segitiga tersebut.

   Penyelesaian : lihat gambar 5.4

   Ditanya = b, β dan γ

   dari aturan Sinus : $$\frac{c}{\text{Sin }\gamma} = \frac{a}{\text{Sin }\alpha}$$



Gambar 5.4

$$\frac{16}{\text{Sin }\gamma} = \frac{14}{\text{Sin } 53°}$$

$$\text{Sin}\,\gamma = \frac{16\ \text{Sin}\,53^\circ}{14}$$

$$= \frac{16\,(0{,}7986)}{14}$$

$$\text{Sin}\,\gamma = 0{,}9127 \qquad \text{daftar Sinus}$$

$$\gamma = 65^\circ 53'$$

$$\beta = 180^\circ - \alpha - \gamma$$

$$= 180^\circ - 53^\circ - 66^\circ = 61^\circ$$

dari aturan Sinus : $\dfrac{b}{\text{Sin}\,\beta} = \dfrac{a}{\text{Sin}\,\alpha}$

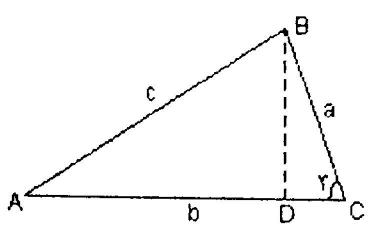
$$b = \frac{a\ \text{Sin}\,\beta}{\text{Sin}\,\alpha}$$

$$= \frac{14\ \text{Sin}\,61^\circ}{\text{Sin}\,53^\circ}$$

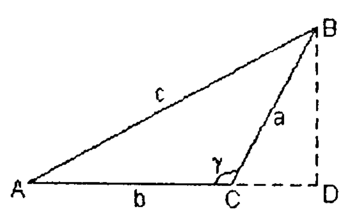
$$b = \frac{14\ (0{,}8756)}{0{,}7986} = 15{,}35\ \text{cm}$$

5.1.2. Aturan Cosinus

Berikut ini akan ditinjau rumus atau aturan lain di samping aturan Sinus yang telah dipelajari di atas. Rumus atau aturan ini akan dapat membantu memecahkan persoalam-persoalan yang timbul dalam suatu segitiga.



Gambar 5.5a γ ialah sudut lancip



Gambar 5.5b γ ialah sudut tumpul

Dari kedua gambar di atas :

$$c^2 = AB^2 = AD^2 + BD^2 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ (1)$$

karena $\text{Sin}\,(180^\circ - \gamma) = \text{Sin}\,\gamma$ maka

$$BD = a\,\text{Sin}\,\gamma \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ (2)$$

jika γ lancip (gambar 5.5a), $AD = AC - DC$

$$= b - a \cos \gamma \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

jika γ tumpul (gambar 5.5b), $AD = AC - DC$

$$= b + a \cos (180° - \gamma)$$

$$= b - a \cos \gamma \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

karena (3) dan (4) sama, maka

$$AD = b - a \cos \gamma, \text{ untuk } \gamma \text{ sudut lancip atau tumpul} \qquad \ldots\ldots (5)$$

Jika (5) digambungkan dengan (1) dan (2) didapat :

$$c^2 = (b - a \cos \gamma)^2 + (a \sin \gamma)^2$$

$$= b^2 - 2ab \cos \gamma + a^2 \cos^2 \gamma + a \sin^2 \gamma$$

$$= b^2 - 2ab \cos \gamma + a^2 (\cos^2 \gamma + \sin^2 \gamma)$$

$$= b^2 - 2ab \cos \gamma + a^2$$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$, untuk γ sudut lancip atau tumpul.

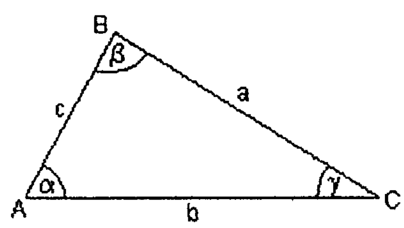
$$\mathbf{c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma}$$

Hubungan ini disebut aturan Cosinus.

Dengan jalan yang sama, didapat :

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$



Gambar 5.6

Kesimpulannya dalam tiap-tiap segitiga ABC (lancip atau tumpul) berlaku :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

Jika dalam suatu segitiga, diketahui :

a. dua sisi dan sebuah sudut apitnya, atau

b. tiga sisi

maka unsur-unsur lain dalam segitiga tersebut dapat dihitung dengan aturan Cosinus.

Contoh-contoh

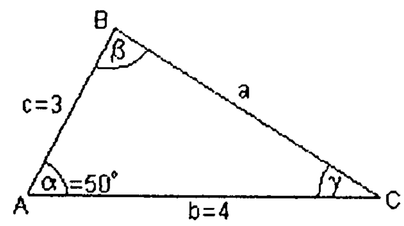
1. Dua buah sisi sebuah segitiga panjangnya 3 dan 4 cm, sudut apitnya ialah 50°. Hitunglah unsur-unsur lainnya dalam segitiga tersebut.

   Penyelesaian : lihat gambar 5.7

   Dari aturan Cosinus :

   $$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \text{ Cos } \alpha$$
   $$= 4^2 + 3^2 - 2.4.3 \text{ Cos } 50°$$
   $$= 9{,}573$$
   $$a = \sqrt{9{,}573} = 3{,}094 \text{ cm}$$

   dibulatkan a = 3 cm



Gambar 5.7

   Dari aturan Cosinus :

   $$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \text{ Cos } \beta$$
   $$4^2 = 9{,}573 + 3^2 - 2\,(3{,}094)\,3 \text{ Cos } \beta$$
   $$16 = 9{,}573 + 9 - 18{,}564 \text{ Cos } \beta$$
   $$\text{Cos } \beta = \frac{2{,}573}{18{,}564}$$
   $$\log \text{Cos } \beta = \log 2{,}573 - \log 18{,}564$$
   $$= 0{,}4104 - 1{,}2686$$
   $$= -0{,}8582$$
   $$\log \text{Cos } \beta = 9{,}1418 - 10$$

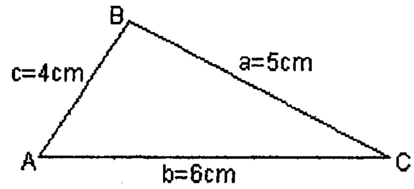
   $\beta = 82°2'$ (didapat dari daftar logaritma perandingan goniometri)

   dibulatkan $\beta = 82°$

   jadi $\gamma = 180° - 50° - 82°2' = 47°58'$

2. Sisi-sisi sebuah segitiga mempunyai 4, 5 dan 6 cm. Hitunglah sudut-sudut dalam segitiga tersebut.

   Penyelesaian : lihat gambar 5.8



Gambar 5.8

Dari aturan Cosinus :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \operatorname{Cos} \alpha$$

$$2bc \operatorname{Cos} \alpha = b^2 + c^2 - a^2$$

$$\operatorname{Cos} \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2\,b\,c}$$

$$= \frac{6^2 + 4^2 - 5^2}{2 \,.\, 6 \,.\, 4}$$

$$\operatorname{Cos} \alpha = \frac{27}{48} = 0{,}5625$$

$$\alpha = 55°46'$$

Dari aturan Cosinus :

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \operatorname{Cos} \beta$$

$$2ac \operatorname{Cos} \beta = a^2 + c^2 - b^2$$

$$\operatorname{Cos} \beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2\,a\,c}$$

$$= \frac{5^2 + 4^2 - 6^2}{2 \,.\, 5 \,.\, 4}$$

$$\operatorname{Cos} \beta = \frac{5}{46} = 0{,}1250$$

jadi $\beta = 82°49'$

Sudut $\gamma = 180° - \alpha - \beta$

$$= 180° - 55°46' - 82°49'$$

$$\gamma = 41°25'$$

3. Diketahui dalam sebuah segitiga ABC, $\beta = 2\gamma$, $b = 2a$, dan keliling segitiga $= 2S$. Hitunglah unsur-unsur dalam segitiga tersebut.

   Penyelesaian :

   Diketahui : $b = 2a$

   Aturan Sinus : $\dfrac{b}{\operatorname{Sin} \beta} = \dfrac{a}{\operatorname{Sin} \alpha}$, maka

   $\dfrac{2a}{\operatorname{Sin} \beta} = \dfrac{a}{\operatorname{Sin} \alpha}$, jadi

$$\sin\beta = 2\sin\alpha \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ (1)$$

Dalam sebuah segitiga : $\alpha + \beta + \gamma = 180°$

$$\alpha = 180° - \beta - \gamma$$

$$= 180° - 2\gamma - \gamma$$

$$\alpha = 180° - 3\gamma \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ (2)$$

Diketahui pula : $\beta = 2\gamma$, dan (1), maka

$\sin 2\gamma = 2\sin(180° - 3\gamma)$, maka

$$\sin 2\gamma = 2\sin 3\gamma$$

$$2\sin\gamma\cos\gamma = 2(3\sin\gamma - 4\sin^3\gamma)$$

$$\sin\gamma\cos\gamma = 3\sin\gamma - 4\sin^3\gamma$$

$$\sin\gamma \neq 0$$

$$\cos\gamma = 3 - 4\sin^2\gamma$$

$$4\sin^2\gamma + \cos\gamma - 3 = 0$$

$$4(1 - \cos^2\gamma) + \cos\gamma - 3 = 0$$

$$-4\cos 2\gamma + \cos\gamma + 4 - 3 = 0$$

$$4\cos^2\gamma - \cos\gamma - 1 = 0$$

$$\cos\gamma = \frac{1 \pm \sqrt{(1 + 16)}}{8}$$

$$\cos\gamma = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{8} = 0{,}64039$$

$$\gamma = 50°10'44''$$

Jadi $\beta = 2\gamma = 100°21'28''$, dan

$$\alpha = 180° - 100°21'28'' - 50°10'44''$$

$$\alpha = 29°27'48''$$

Dari $\beta = 2\gamma$ didapat :

$$\sin\beta = \sin 2\gamma$$

$$\sin\beta = 2\sin\gamma\cos\gamma$$

$$\frac{\sin\beta}{2\sin\gamma} = \cos\gamma$$

$$\frac{b}{2c} = \cos\gamma$$

$$\frac{b}{2c} = \frac{1}{8}(1 + \sqrt{17})$$

maka $c = \dfrac{4b}{1 + \sqrt{17}}$, dan dari b = 2a maka $a = \dfrac{1}{2} b$

Dari keliling segitiga : a + b + c = 2S maka

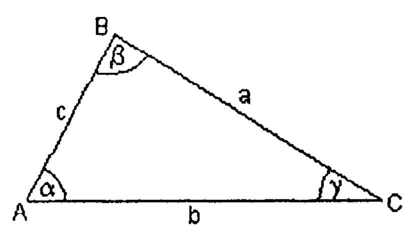
$$\frac{1}{b} + b + \frac{4b}{1 + \sqrt{17}} = 2S, \quad \text{maka}$$

$$b = (5 - \sqrt{17})\, S, \quad \text{maka}$$

$$a = \frac{1}{2} b = \frac{1}{2}(5 - \sqrt{17})\, S, \text{ dan}$$

$$c = \frac{4}{5 + \sqrt{17}}(5 - \sqrt{17})\, S = \left(\frac{5 - \sqrt{17} - 11}{2}\right) S$$

5.1.3. Aturan Tangen



Gambar 5.9

Perhatikan gambar 5.9 dan dari aturan Sinus diperoleh :

$$\frac{a}{\text{Sin } \alpha} = \frac{b}{\text{Sin } \beta}$$

jika nilai perbandingan ini dimisalkan = k maka

$$\frac{a}{\text{Sin } \alpha} = \frac{b}{\text{Sin } \beta} = k, \quad \text{maka}$$

$$a = k \text{ Sin } \alpha$$

$$b = k \text{ Sin } \beta$$

$$\text{maka } \frac{a - b}{a + b} = \frac{k \text{ Sin } \alpha - k \text{ Sin } \beta}{k \text{ Sin } \alpha + k \text{ Sin } \beta}$$

$$= \frac{\text{Sin } \alpha - \text{Sin } \beta}{\text{Sin } \alpha + \text{Sin } \beta}$$

$$= \frac{2 \text{ Cos } {}^1\!/_2(\alpha + \beta) \text{ Sin } {}^1\!/_2(\alpha - \beta)}{2 \text{ Sin } {}^1\!/_2(\alpha + \beta) \text{ Cos } {}^1\!/_2(\alpha - \beta)}$$

$$= \text{Cotg } {}^1\!/_2(\alpha + \beta) \text{ Tg } {}^1\!/_2(\alpha - \beta)$$

atau :

$$\mathbf{\frac{a - b}{a + b} = \frac{Tg\ {}^1\!/_2(\alpha - \beta)}{Tg\ {}^1\!/_2(\alpha + \beta)}}$$

Hubungan ini disebut aturan Tangen

Dapat juga dibuktikan bahwa

$$\frac{a - c}{a + c} = \frac{\text{Tg } {}^1\!/_2(\alpha - \gamma)}{\text{Tg } {}^1\!/_2(\alpha + \gamma)}$$

Misalkan dalam segitiga diketahui panjang sisi a, sisi b dan sudut apitnya γ.

Dari aturan Tangen didapat :

$$\frac{a - b}{a + b} = \frac{\text{Tg } {}^1\!/_2(\alpha - \beta)}{\text{Tg } {}^1\!/_2(\alpha + \beta)}$$

$$= \frac{\text{Tg } {}^1\!/_2(\alpha - \beta)}{\text{Tg } {}^1\!/_2(180^\circ + \gamma)}$$

$$= \frac{\text{Tg } {}^1\!/_2(\alpha - \beta)}{\text{Tg } (90^\circ - {}^1\!/_2\gamma)}$$

$$\frac{a - b}{a + b} = \frac{\text{Tg } {}^1\!/_2(\alpha - \beta)}{\text{Cotg } {}^1\!/_2\gamma}$$

Karena $\text{Tg } (90^\circ - {}^1\!/_2\gamma) = \text{Cotg } {}^1\!/_2\gamma$

sehingga $\text{Tg } {}^1\!/_2(\alpha - \beta) = \dfrac{a - b}{a + b} = \text{Cotg } {}^1\!/_2\gamma$

Jika dalam suatu segitiga diketahui 2 sisi dan sebuah sudut apitnya, maka unsur-unsur lain dalam segitiga tersebut dapat dicari dengan rumus Tangen. Dengan aturan Cosinus juga dapat dihitung unsur-unsur lain dalam segitiga tersebut. Hanya dalam perhitungan dengan aturan Cosinus, kita harus mengkuadratkan atau menarik akar, sedangkan perhitungan dengan memakai aturan Tangen tidak.

Contoh

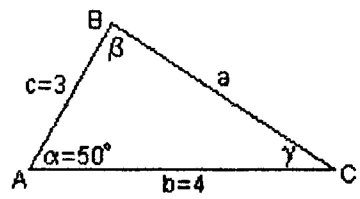
Dua buah sisi sebuah segitiga panjangnya 3 dan 4 cm, sudut apitnya = 50°. Hitunglah unsur-unsur lainnya. (Bandingkan contoh ini dengan contoh nomor 1 pada bagian aturan Cosinus).

Penyelesaian : lihat gambar 5.10

Dari aturan Tangen didapat :

$$\frac{b - c}{b + c} = \frac{Tg\ ^1/_2(\beta - \gamma)}{Tg\ ^1/_2(\beta + \gamma)} = \frac{Tg\ ^1/_2(\beta - \gamma)}{Tg\ ^1/_2(180° - \alpha)}$$

$$= \frac{Tg\ ^1/_2(\beta - \gamma)}{Cotg\ ½\,\alpha}, \text{ sehingga}$$



Gambar 5.10

$$Tg\ ^1/_2(\beta - \gamma) = \frac{b - c}{b + c}\ Cotg\ ½\,\alpha$$

$$Tg\ ^1/_2(\beta - \gamma) = \frac{4 - 3}{4 + 3}\ Cotg\ 25°$$

$$= \frac{1}{7} \times 2{,}1445$$

$$Tg\ ^1/_2(\beta - \gamma) = 0{,}3064, \quad \text{jadi}$$

$$^1/_2(\beta - \gamma) = 17°2'$$

Dengan menjumlahkan (1) dan (2) didapat $\beta = 82°2'$

Dengan mengurangkan (1) dan (2) didapat $\gamma = 47°2'$

Dari aturan Sinus didapat :

$$\frac{a}{Sin\ \alpha} = \frac{c}{Sin\ \gamma}$$

$$a = \frac{c}{Sin\ \gamma}\ Sin\ \alpha = \frac{3 \times Sin\ 50°}{Sin\ 47°2'}$$

$$= \frac{3 \times 0{,}7660}{0{,}7428}$$

$$a = 3{,}094 \text{ cm}$$

5.1.4. Rumus D' Alamber

Dari aturan Tangen : $\dfrac{a - b}{a + b} = \dfrac{Tg\ {}^1/_2(\alpha - \beta)}{Tg\ {}^1/_2(\alpha + \beta)}$ juga

disebut Rumus Napier, dengan bentuk :

$$\frac{a + b}{a - b} = \frac{Tg\ {}^1/_2(\alpha + \beta)}{Tg\ {}^1/_2(\alpha - \beta)}$$

dengan cara yang sama, dapat mencari hubungan antara sisi suatu segitiga dengan sudut-sudut didalamnya dengan menggunakan fungsi Tangen. Bentuk ini antara lain ialah :

$$\frac{a + b}{c}$$

dari aturan Sinus : $\dfrac{a}{\operatorname{Sin}\alpha} = \dfrac{b}{\operatorname{Sin}\beta} = \dfrac{c}{\operatorname{Sin}\gamma}$

jika nilai perbandingan ini dimisalkan = k, maka

$$a = k \operatorname{Sin}\alpha \qquad b = k \operatorname{Sin}\beta \qquad c = k \operatorname{Sin}\gamma$$

Jadi $\dfrac{a + b}{c} = \dfrac{k \operatorname{Sin}\alpha + k \operatorname{Sin}\beta}{k \operatorname{Sin}\gamma}$, maka

$$= \frac{\operatorname{Sin}\alpha + \operatorname{Sin}\beta}{\operatorname{Sin}\gamma}$$

$$= \frac{2 \operatorname{Sin} {}^1/_2(\alpha + \beta) \operatorname{Cos} {}^1/_2(\alpha - \beta)}{2 \operatorname{Sin} {}^1/_2\gamma \operatorname{Cos} {}^1/_2\gamma}$$

$$\frac{a + b}{c} = \frac{\operatorname{Sin} {}^1/_2(\alpha + \beta) \operatorname{Cos} {}^1/_2(\alpha - \beta)}{\operatorname{Sin} {}^1/_2\gamma \operatorname{Cos} {}^1/_2\gamma} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

karena $\alpha + \beta + \gamma = 180°$, maka $\alpha + \beta = 180° - \gamma$

$$½(\alpha + \beta) = ½(180° - \gamma) = 90 - ½\gamma$$

maka $\operatorname{Sin} ½(\alpha + \beta) = \operatorname{Sin}(90 - ½\gamma) = \operatorname{Cos} ½\gamma$

maka dari (1) dapat diganti $\operatorname{Sin} ½(\alpha + \beta)$ dengan $\operatorname{Cos} ½\gamma$,

jadi $\dfrac{a + b}{c} = \dfrac{\operatorname{Cos} {}^1/_2\gamma \operatorname{Cos} {}^1/_2(\alpha - \beta)}{\operatorname{Sin} {}^1/_2\gamma \operatorname{Cos} {}^1/_2\gamma}$ maka

$$\frac{a + b}{c} = \frac{\text{Cos } {}^1/_2(\alpha - \beta)}{\text{Sin } {}^1/_2\gamma}$$

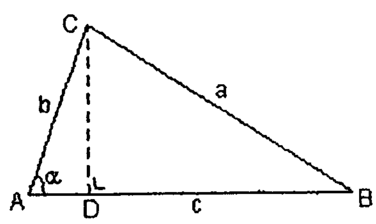
Hubungan ini disebut rumus D' Alamber.

Analog dengan penemuan di atas, maka rumus De Lambre kedua dapat dicari, yaitu:

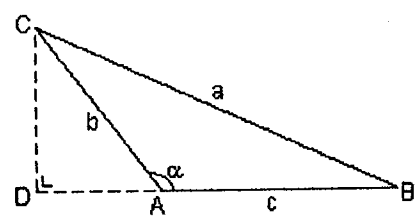
$$\frac{a - b}{c} = \frac{\text{Sin } {}^1/_2(\alpha - \beta)}{\text{Cos } {}^1/_2\gamma}$$

Pemakaian aturan Sinus, aturan Cosinus, aturan Tangen dapat dilihat dalam menyelesaikan permasalahan pada suatu segitiga ABC. Contohnya untuk menghitung luas suatu segitiga dan keliling suatu segitiga.

Luas suatu segitiga



Gambar 5.11a α ialah sudut lancip



Gambar 5.11b α ialah sudut tumpul

Perhatikan gambar 5.11. Untuk kedua gambar ini

$CD = b \text{ Sin } \alpha$

dan luas segitiga ABC $= {}^1/_2 \times AB \times CD$

$= {}^1/_2 \times c \times b \text{ Sin } \alpha$

$= {}^1/_2 \, bc \text{ Sin } \alpha$

Dengan jalan yang sama, dapat dibuktikan bahwa

luas segitiga ABC $= {}^1/_2 \, ac \text{ Sin } \beta = {}^1/_2 \, ab \text{ Sin } \gamma$

Dengan kata-kata dapat disusun, bahwa :

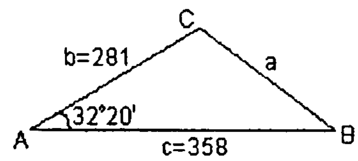
Luas suatu segitiga sama dengan seperdua hasil kali 2 sisi dengan Sinus sudut apitnya.

$$L = {}^1/_2\,\mathbf{bc\ Sin}\ \alpha = {}^1/_2\,\mathbf{ca\ Sin}\ \beta = {}^1/_2\,\mathbf{ab\ Sin}\ \gamma$$

Contoh :

Dalam segitiga ABC, b = 281, c = 358 dan α 32°20′. Hitunglah luas segitiga tersebut.

Dari rumus luas yaitu $L = ½\ bc\ \text{Sin}\ \alpha$ dapat dicari luas segitiga tersebut :



Gambar 5.12

$$L = {}^1/_2\,(281)\,(358)\ \text{Sin}\ 32°20'$$

$$\log L = \log 281 + \log 358 + \log \text{Sin}\ 32°20' - \log 2$$

$$\begin{aligned} \log 281 &= 2{,}4487 \\ \log 358 &= 2{,}5539 \\ \log \text{Sin}\ 32°20' &= 9{,}7282 - 10 \quad + \\ &= 14{,}7308 - 10 \\ \log 2 &= 0{,}3010 \quad - \\ \log L &= 4{,}4298 \\ L &= 26900 \end{aligned}$$

Kalau rumus luas di atas dijabarkan dalam bentuk lain, maka ditemukan hasilnya, dengan memperhatikan jalannya seperti berikut :

$$\begin{aligned} L &= {}^1/_2\,bc\ \text{Sin}\ \alpha \quad \text{(rumus luas)} \\ &= {}^1/_2\,bc\ \sqrt{(1 - \text{Cos}^2\alpha)} \qquad \text{ingat } \text{Sin}^2\alpha + \text{Cos}^2\alpha = 1 \\ &= {}^1/_2\,bc\ \sqrt{(1 + \text{Cos}\ \alpha)\,(1 - \text{Cos}\ \alpha)} \end{aligned}$$

Dari rumus atau aturan Cosinus :

$$\text{Cos}\ \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2\ bc}$$

$$\text{Sehingga}\ L = {}^1/_2\,bc\sqrt{\left(1 + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2\ bc}\right)\left(1 - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2\ bc}\right)}$$

$$L = {}^1/_2\,bc\sqrt{\frac{(2\ bc + b^2 + c^2 - a^2)\ (2\ bc - b^2 - c^2 + a^2)}{4\ b^2\ c^2}}$$

$$= \frac{1}{4}\sqrt{(b+c+a)(b+c+a)(a+b-c)(a-c+c)}$$

Kita mengetahui keliling suatu segitiga dinyatakan dengan 2 S, jadi $a + b + c = 2\,S$

atau $S = \frac{1}{2}(a + b + c)$

maka $\quad L = \frac{1}{4}\sqrt{2\,S(2\,S - 2\,a)(2\,S - 2\,b)(2\,S - 2\,c)}$

$$L = \frac{1}{4}\sqrt{S(S - a)(S - b)(S - c)}$$

Catatan : Jika dalam suatu segitiga diketahui panjang ketiga sisinya maka lebih mudah menentukan luas segitiga dengan memakai rumus ini.

Soal-soal

1. Aturan atau rumus Cosinus kalau dijabarkan dan dihubungkan dengan keliling suatu segitiga, maka terdapat rumus-rumus :

   a. $\cos \frac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{S(S-a)}{bc}}$

   b. $\cos \frac{1}{2}\beta = \sqrt{\frac{S(S-b)}{ac}}$

   c. $\cos \frac{1}{2}\gamma = \sqrt{\frac{S(S-c)}{ab}}$

   d. $\sin \frac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{(S-b)(S-c)}{bc}}$

   e. $\sin \frac{1}{2}\beta = \sqrt{\frac{(S-a)(S-c)}{ac}}$

   f. $\sin \frac{1}{2}\gamma = \sqrt{\frac{(S-a)(S-b)}{ab}}$

   g. $\mathrm{Tg}\, \frac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{(S-b)(S-c)}{S(S-a)}}$

   h. $\mathrm{Tg}\, \frac{1}{2}\beta = \sqrt{\frac{(S-a)(S-c)}{S(S-b)}}$

   i. $\mathrm{Tg}\, \frac{1}{2}\gamma = \sqrt{\frac{(S-a)(S-b)}{S(S-c)}}$

   Buktikan rumus-rumus di atas mulai dari a s/d I.

2. Dari suatu segitiga, salah satu sisinya ialah 120 cm, dan suatu sudut-sudut pada sisi itu 45°. Sedangkan sudut depannya ialah 120°. Hitunglah unsur-unsur lain dari segitiga tersebut.

3. Buktikan rumus-rumus Mollweide :

$$\frac{a+b}{c} = \frac{\cos \frac{1}{2}(\alpha + b)}{\sin \frac{1}{2}\gamma} \qquad \frac{a-b}{c} = \frac{\sin \frac{1}{2}(\alpha - b)}{\cos \frac{1}{2}\gamma}$$

4. Jika pada suatu segitiga sisinya memenuhi $3a + 4b = 5c$, maka sudut-sudutnya memenuhi $3 \sin \alpha + 4 \sin \beta = 5 \sin \gamma$. Buktikan !

5. Hitunglah unsur-unsur yang tidak diketahui, jika :

a. $a = 65$	$\beta = 67°23'$	$\gamma = 59°29'$
b. $a = 1313$	$b = 3{,}77$	$\gamma = 124°59'$
c. $a = 2$	$b = 3$	$c = 4$

6. Dari suatu segitiga ABC diketahui $\sin 2\alpha + \sin 2\beta = \sin 2\gamma$. Buktikanlah bahwa segitiga itu siku-siku.

7. Buktikan suatu segitiga ABC sama kaki, jika $a \sin^2 \alpha = b \cos \beta \cos \gamma$.

8. Buktikanlah bahwa dalam suatu segitiga

$$a \sin (\beta - \gamma) + b (\gamma - a) + c \sin (\alpha - \beta) = 0$$

9. Dari suatu segitiga, kaki-kakinya ialah 5 dan 8 cm, sedangkan salah satu sudut alasnya adalag 2x sudut alas yang lain. Hitunglah sudut-sudut segitiga itu.

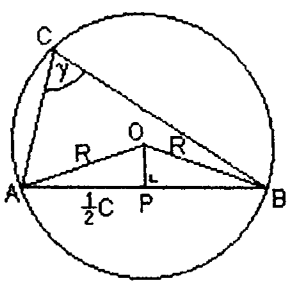
10. Sudut-sudut suatu segitiga berbanding 2 : 3 : 4, bagaimana perbandingan sisi-sisinya.

11. Lukislah dan hitunglah unsur-unsur yang tidak diketahui, jika :

a. $a = 4$	$b = 3$	$\beta = 30°$
b. $a = 4$	$b = 3$	$\beta = 120°$
c. $a = \sqrt{3}$	$b = \sqrt{5}$	$\beta = 135°$

5.2. Jari-jari Lingkaran suatu Segitiga

5.2.1. Jari-jari Lingkaran Luar suatu Segitiga



Gambar 5.13

Perhatikan gambar 5.13.

Titik pusat lingkaran luar Δ ABC ialah titik potong garis-garis sumbu AB, BC dan AC (= titik O)

Misalkan R ialah jari-jari lingkaran luar Δ ABC, maka :

$AP = \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} c$ .... (1)

Segitiga AOP sama dan sebangun dengan segitiga BOP, sehingga $\angle$ AOP = $\angle$ BOP

atau $\angle$ AOP = ½ $\angle$ AOB.

γ = ½ $\angle$AOB sehingga $\angle$ AOP = $\angle\gamma$

Dari Δ AOP, $\frac{AP}{R} = \text{Sin} \angle AOP$ atau $\frac{AP}{R} = \text{Sin}\,\gamma$ .... (2)

Dari (1) dan (2) didapat :

$$\tfrac{1}{2} c = R \ \text{Sin}\,\gamma$$

$$c = 2 R \ \text{Sin}\,\gamma$$

$$\frac{c}{\text{Sin}\,\gamma} = 2R$$

Karena rumus Sinus : $\frac{a}{\text{Sin}\,\alpha} = \frac{b}{\text{Sin}\,\beta} = \frac{c}{\text{Sin}\,\gamma}$ maka :

$$\mathbf{\frac{a}{Sin\,\alpha} = \frac{b}{Sin\,\beta} = \frac{c}{Sin\,\gamma} = 2\,R:}$$

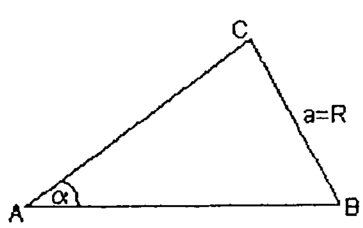
atau : a = 2 R Sin α

b = 2 R Sin β

c = 2 R Sin γ

Contoh : Dalam segitiga ABC panjang sisi BC sama dengan jari-jari lingkaran luar segitiga ABC. Hitunglah sudut α

Penyelesaian



Gambar 5.14

Lihat gambar 5.14

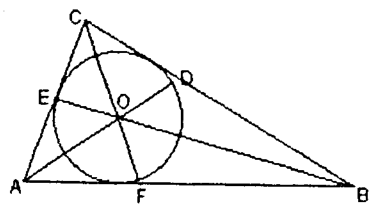
$a = 2R \ \text{Sin}\,\alpha$

$R = 2R \ \text{Sin}\,\alpha \qquad R \neq 0$

$1 = 2 \ \text{Sin}\,\alpha$

Sin α = ½, jadi $\alpha = 30°$ atau $\alpha = 150°$

5.2.2. Jari-jari Lingkaran Dalam suatu Segitiga



Gambar 5.13

Perhatikan gambar 5.15.

Titik pusat lingkaran dalam Δ ABC ialah titik potong garis bagi pada α, β dan γ (= titik O).

Misalkan r ialah jari-jari lingkaran dalam Δ ABC.

AE sama panjang dengan AD, yaitu AO Sin ½ α. Demikian pula BE = BF dan CD = CF. Keliling Δ ABC dinyatakan dengan 2 S.

Jadi : $2\,AE + 2\,BF + 2\,CD = 2\,S$

$$AE + BF + CD = S$$

Sehingga $AE = S - (BF + CD) = S - (BF + CF) = S - a$

$$BE = S - (AE + CD) = S - (AD + CD) = S - b$$

$$CD = a - (AE + BF) = S - (AE + BE) = S - c$$

dari Δ AOE, $\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\alpha = \dfrac{r}{AE} \Rightarrow \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\alpha = \dfrac{r}{S - a}$

dari Δ BOF, $\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\beta = \dfrac{r}{BE} \Rightarrow \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\beta = \dfrac{r}{S - b}$

dari Δ COD, $\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\gamma = \dfrac{r}{CD} \Rightarrow \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\gamma = \dfrac{r}{S - c}$

Rumus lain untuk jari-jari lingkaran dalam dalam suatu segitiga.

Luas Δ ABC ialah jumlah luas Δ AOE, Δ BOE, Δ BOF, Δ COF, Δ COD dan Δ AOD.

Jadi luas Δ ABC ($\mathbb{L}$) $= \tfrac{1}{2}(AE)\,r + \tfrac{1}{2}(EB)\,r + \tfrac{1}{2}(BF)\,r + \tfrac{1}{2}(FC)\,r + \tfrac{1}{2}(CD)\,r + \tfrac{1}{2}(DA)\,r$

$$= \tfrac{1}{2}\,r\,(AE + EB + BF + FC + CD + DA)$$

$$= \tfrac{1}{2}\,r\,(AB + BC + CA)$$

$$= \tfrac{1}{2}\, r\, (2\,S)$$

$$= r\,S$$

Sehingga $\qquad r = \dfrac{L}{S}$

Dengan ruas luas segitiga $L = \sqrt{(S - a)\,(S - b)\,(S - c)}$

didapat $\qquad r = \sqrt{\dfrac{S\,(S - a)\,(S - b)\,(S - c)}{S}}$

$$\mathbf{r = \sqrt{\dfrac{(S - a)\,(S - b)\,(S - c)}{S}}}$$

<u>Contoh</u>

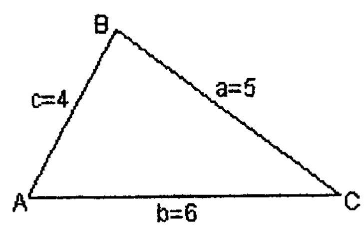
Dalam Δ ABC, panjang sisi-sisinya 4 cm, 5 cm dan 6 cm. Hitunglah jari-jari lingkaran dalam Δ ABC dan semua sudut-sudut segitiga ABC.

Penyelesaian :

Lihat gambar 5.16

$$2\,S = 4 + 5 + 6 = 15 \text{ cm}$$

$$S = 7{,}5 \text{ cm}$$



Gambar 5.16

$$r = \sqrt{\dfrac{(S - a)\,(S - b)\,(S - c)}{S}} = \sqrt{\dfrac{(2{,}5)\,(1{,}5)\,(3{,}5)}{7{,}5}} = \sqrt{1{,}75}$$

$$r = 1{,}325$$

jadi jari-jari lingkaran dalam Δ ABC = 1,325 cm

$$\text{tg } \tfrac{1}{2}\alpha = \dfrac{r}{S - a} = \dfrac{1{,}325}{2{,}5} = 0{,}5292$$

$$\tfrac{1}{2}\alpha = 27^\circ 53' \;\Rightarrow\; \alpha = 55^\circ 46'$$

$$\text{tg } \tfrac{1}{2}\beta = \dfrac{r}{S - b} = \dfrac{1{,}325}{1{,}5} = 0{,}8820$$

$$\tfrac{1}{2}\beta = 41^\circ 25' \;\Rightarrow\; \beta = 82^\circ 50'$$

$$\text{tg } \tfrac{1}{2}\gamma = \dfrac{r}{S - c} = \dfrac{1{,}325}{3{,}5} = 0{,}3780$$

$$\tfrac{1}{2}\gamma = 20^\circ 42' \;\Rightarrow\; \gamma = 41^\circ 24'$$

Soal-soal

1. Hitunglah unsur-unsur lainnya dari suatu segitiga jika diketahui :

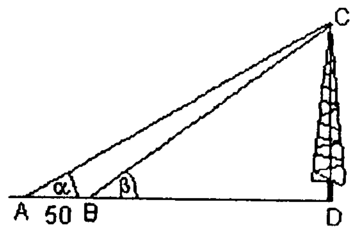
   a. $a = 5$ $\quad c = 7$ $\quad \beta = 64°$

   b. $b = 35$ $\quad \beta = 43°10'$ $\quad \gamma = 65°20'$

   c. $a - b = 10$ $\quad c = 30$ $\quad \gamma = 64°$

2. Dalam segitiga ABC, $a = 20$, $b = 30$ dan $\gamma = 64°$. Hitunglah luas segitiga tersebut dan jari-jari lingkaran luarnya.

3. Sisi-sisi suatu jajaran genjang ialah 42 dan 56 cm, luasnya ialah 1680 cm^2. Hitunglah diagonal jajaran genjang itu.

4. 

Gambar 5.17

   Hitunglah tinggi sebuah pohon, jika telah diukur :

   Jarak AB = 50 cm

   $\alpha = 28°10'$

   $\beta = 27°20'$

   (lihat gambar 5.17)

5. Dalam suatu segitiga, siku-siku pada c, R adalah jari-jari lingkaran luarnya. Buktikanlah : $a^2 + b^2 = 4R^2$. Buktikan pula bahwa $\alpha = 90° + \beta$ dan $\gamma = 90° - 2\beta$ jika a dan b diketahui, hitunglah c.

6. Jika dari Δ ABC diketahui sisi a dan sudut β dan γ pada sisi itu, maka jari-jari r_a lingkaran singgung pada sisi a, ialah :

$$r_a = \frac{a \text{ Cos } \frac{1}{2}\beta \text{ Cos } \frac{1}{2}\gamma}{\text{Sin } \frac{1}{2}(\beta + \gamma)}$$

   Buktikan.

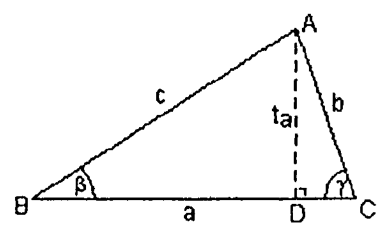
7. Buktikanlah segitiga ABC adalah segitiga siku-siku pada α jika $r_a + r_b = c$

5.3. Garis-garis Istimewa

Disamping jari-jari lingkaran luar dan lingkaran dalam serta lingkaran singgung pada suatu segitiga, masih ada lagi garis-garis istimewa. Garis-garis istimewa itu antara lain garis tinggi, garis bagi, garis berat dan lainnya.

Dalam fasal ini, garis-garis istimewa ini yang akan dipelajari dengan menggunakan difinisi, dalil atau rumus-rumus yang sudah dipelajari.

5.3.1. Garis Tinggi dan Bagian-bagiannya



Gambar 5.18

Perhatikan gambar 5.18

Kita namakan garis tinggi pada sisi a, ialah t_a

Jelaslah bahwa dalam segitiga siku-siku ACD :

$$t_a = b \operatorname{Sin} \gamma \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots (1)$$

Rumus ini dapat dirobah sebagai berikut :

Menurut aturan Sinus kita dapat :

$$\frac{a}{\operatorname{Sin} \alpha} = \frac{b}{\operatorname{Sin} \beta} \quad \text{atau } b = \frac{a \operatorname{Sin} \beta}{\operatorname{Sin} \alpha} = \frac{a \operatorname{Sin} \beta}{\operatorname{Sin} (\beta + \gamma)} \quad \dots\dots\dots\dots (2)$$

Dari (1) dan (2) didapat :

$$\mathbf{t_a = \frac{a \operatorname{Sin} \beta \operatorname{Sin} \gamma}{\operatorname{Sin} (\beta + \gamma)}}$$

Rumus untuk garis tinggi t_a, ini juga dapat ditulis hanya dengan sisi-sisi segitiga tersebut :

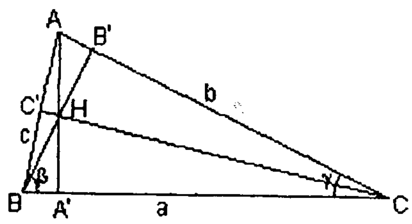
$$t_a = b \operatorname{Sin} \gamma = 2\, b \operatorname{Sin} \tfrac{1}{2}\gamma \operatorname{Cos} \tfrac{1}{2}\gamma$$

$$= 2\, b \sqrt{\frac{(S-a)(S-b)}{ab}} \sqrt{\frac{S(S-c)}{ab}}$$

$$\mathbf{t_a = \frac{2}{a} \sqrt{S(S-a)(S-b)(S-c)}}$$

Setelah diperoleh rumus garis tinggi pada sisi a, tentu rumus garis tinggi pada sisi b dan c dapat dicari dan ditemukan. Baik rumus garis tinggi itu dihubungkan dengan sisi dan sudut, juga terhadap keliling dan sisi-sisi suatu segitiga.

Bagian-bagian Garis Tinggi



Gambar 5.19

Perhatikan gambar 5.19

M = Pusat lingkaran luar

H = Titik potong ketiga garis tinggi

Potongan-potongan garis tinggi ialah HA, HA' dan HC, HC' dan HB, HB'.

Garis tinggi dari sudut A ke sisi a ialah h_a, menurut rumus garis tinggi, maka :

$$h_a = b \sin\gamma \quad \text{, atau}$$

$$h_a = \frac{a \sin\beta \sin\gamma}{\sin\alpha} \quad \text{, atau}$$

$$h_a = \frac{2}{a}\sqrt{(S(S-a)(S-b)(S-c))'}$$

Sekarang kita cari potongan garis tinggi h_a, yaitu : HA dan HA'.

Perhatikan Δ ABA' : $\cos\beta = \frac{BA'}{AB} = \frac{BA'}{c}$, maka

$$BA' = c \cos\beta$$

Perhatikan Δ B'BC' : $\angle B'BC = 90° - \gamma$

Perhatikan pula Δ HBA' :

$$\text{tg} \angle HBA' = \frac{HA'}{BA'}$$

$$\text{tg}(90° - \gamma) = \frac{HA'}{c \cos\beta}$$

$$HA' = c \cos\beta \, \text{tg}(90° - \gamma) = c \cos\beta \, \text{Cotg}\,\gamma$$

$$HA = h_a - HA'$$

$$HA = b \operatorname{Sin}\gamma - c \operatorname{Cos}\beta \operatorname{Cotg}\gamma$$

$$HA = 2R \operatorname{Sin}\beta \operatorname{Sin}\gamma - 2R \cancel{\operatorname{Sin}\gamma} \operatorname{Cos}\beta \frac{\operatorname{Cos}\gamma}{\cancel{\operatorname{Sin}\gamma}}$$

$$HA = 2R \operatorname{Sin}\beta \operatorname{Sin}\gamma - 2R \operatorname{Cos}\beta \operatorname{Cos}\gamma$$

$$HA = 2R(\operatorname{Sin}\beta \operatorname{Sin}\gamma - \operatorname{Cos}\beta \operatorname{Cos}\gamma)$$

$$HA = -2R(\operatorname{Cos}\beta \operatorname{Cos}\gamma - \operatorname{Sin}\beta \operatorname{Sin}\gamma)$$

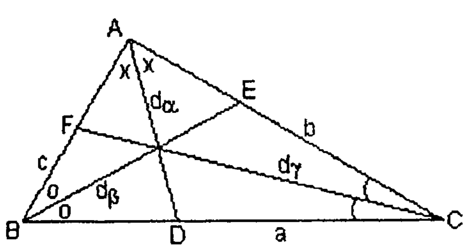
$$HA = -2R \operatorname{Cos}(\beta + \gamma)$$

$$HA = 2R \operatorname{Cos}\alpha$$

Dengan memperoleh HA dan HA', maka HB dan HB' serta HC dan HC' dapat pula dicari, yaitu :

$HA' = c \operatorname{Cos}\beta \operatorname{Cotg}\gamma$	**$HA = 2R \operatorname{Cos}\alpha$**
$HB' = a \operatorname{Cos}\gamma \operatorname{Cotg}\alpha$	**$HB = 2R \operatorname{Cos}\beta$**
$HC' = b \operatorname{Cos}\alpha \operatorname{Cotg}\beta$	**$HC = 2R \operatorname{Cos}\gamma$**

5.3.2. Garis Bagi



Gambar 5.20

Perhatikan gambar 5.20

d_α = garis bagi sudut α

d_β = garis bagi sudut β

d_γ = garis bagi sudut γ

Dari aturan Sinus yang telah dipelajari, maka diperoleh dalam Δ BEC :

$$\begin{aligned}\angle BEC &= 180° - (\angle EBC + \angle C) \\ &= 180° - (\tfrac{1}{2}\beta + \gamma) \\ &= 180° - \tfrac{1}{2}\beta - \gamma \\ &= 180° - (90° - \tfrac{1}{2}\alpha - \tfrac{1}{2}\gamma) - \gamma \\ &= 90° + (\tfrac{1}{2}\alpha - \tfrac{1}{2}\gamma)\end{aligned}$$

$$\frac{a}{\operatorname{Sin}\angle BE} = \frac{d_\beta}{\operatorname{Sin}\gamma}$$

$$d_\beta = \frac{a \operatorname{Sin} \gamma}{\operatorname{Sin} \angle BEC} = \frac{a \operatorname{Sin} \gamma}{\operatorname{Sin} \{90° (½ \alpha - ½ \gamma)\}}$$

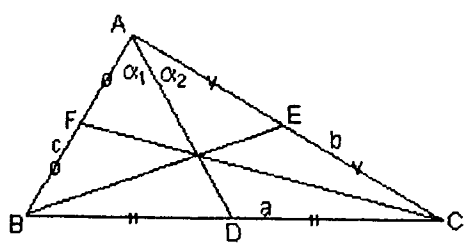
$$d_\beta = \frac{a \operatorname{Sin} \gamma}{\operatorname{Cos} ½ (\alpha - \gamma)}$$

maka garis lainnya ialah :

$$d_\gamma = \frac{a \operatorname{Sin} \beta}{\operatorname{Cos} ½ (\alpha - \beta)}$$

$$d_\alpha = \frac{c \operatorname{Sin} \beta}{\operatorname{Cos} ½ (\beta - \gamma)}$$

5.3.3. <u>Garis Berat</u>



Gambar 5.21

Perhatikan gambar 5.21

AD = garis berat pada sisi BC

BE = garis berat pada sisi AC

CF = garis berat pada sisi AB

Garis berat AD umpamanya membagi $\angle \alpha$ menjadi 2 bagian, ialah :

$\angle BAD = \alpha_1$ dan $\angle CAD = \alpha_2$ maka dalam Δ ABD :

$$\frac{AD}{\operatorname{Sin} \gamma} = \frac{BD}{\operatorname{Sin} \alpha_1} \qquad BD = ½ a$$

$$AD = \frac{½ a \operatorname{Sin} \beta}{\operatorname{Sin} \alpha_1} \qquad \dots\dots\dots\dots (1)$$

dalam Δ ADC :

$$\frac{AD}{\operatorname{Sin} \gamma} = \frac{CD}{\operatorname{Sin} \alpha_2} \qquad CD = ½ a$$

$$AD = \frac{½ a \operatorname{Sin} \gamma}{\operatorname{Sin} \alpha_2} \qquad \dots\dots\dots\dots (2)$$

karena (1) = (2), maka :

$$\frac{½ a \operatorname{Sin} \beta}{\operatorname{Sin} \alpha_1} = \frac{½ a \operatorname{Sin} \gamma}{\operatorname{Sin} \alpha_2} \quad \text{, jadi}$$

$$\frac{\operatorname{Sin} \alpha_1}{\operatorname{Sin} \alpha_2} = \frac{\operatorname{Sin} \beta}{\operatorname{Sin} \gamma}$$

Soal-soal

1. Dari suatu Δ ABC, diketahui α, β dan γ, hitunglah bagian-bagiannya sisi a yang dipotong oleh t_a. t_a ialah garis tinggi dari $\angle$ A.

2. Jika a dan α diketahui, hitunglah jaraknya dari A ke titik tinggi segitiga itu.

3. Jika dari Δ ABC, b_α garis bagi sudutnya α, buktikanlan bahwa :

$$b_\alpha = \frac{2\,bc\,\text{Cos}\,½\,\alpha}{b+c}$$

4. CD ialah garis tinggi dalam Δ ABC. Jika diketahui AD = 3 cm, BD = 5 cm dan $\gamma = 60°$. Hitunglah panjangnya CD.

5. Dari suatu Δ ABC diketahui $\alpha = 43°36'$, $\beta = 124°59'$ dan luas 12 cm^2. Hitunglah sisi C

6. Hitunglah jari-jari lingkaran luar dan jari-jari lingkaran dalam suatu segitiga, jika diketahui :

a. a = 67,1 cm	$\beta = 79°37'$	$\gamma = 66°59'$
b. a = 975 cm	b = 845 cm	c = 910 cm
c. a = 264 cm	b = 216,7 cm	$\alpha = 139°56'$

7. Jarak-jarak antara pusat lingkaran luar Δ ABC dan sisi-sisi BC dan AC ialah 5 dan 7,2 cm, sedangkan $\alpha = 72°41'$. Hitunglah unsur-unsurnya segitiga itu.

8. Diketahui : $\alpha + \beta + \gamma = 180°$

   Buktikanlah : $\text{Tg}\,\alpha + \text{Tg}\,\beta + \text{Tg}\,\gamma = \text{Tg}\,\alpha \,.\, \text{Tg}\,\beta \,.\, \text{Tg}\,\gamma$

9. Dari Δ ABC diketahui bahwa $a^2\,(1 + \text{Cos}\,\alpha) = 2\,bc\,\text{Sin}^2\,\alpha$

   Buktikan bahwa b = c.

10. Buktikanlah bahwa Δ ABC sama kaki, jika :

$$\text{Sin}\,2\alpha\,\text{Cos}\,\gamma + 2\,\text{Sin}\,\beta\,\text{Cos}\,\beta\,\text{Cos}\,2\,\alpha = 0$$

DAFTAR KEPUSTAKAAN

Alders, C.J. (1969). *Ilmu Ukur Segitiga.* Pradnya Paramita, Jakarta.

Dolciani, Mary P., William Woaton, Edwin F. Beckenbach & Sidney Tharron (1974). *Agreba 2 and Trigonometri.* Hougton Mifflin Company, Dallas.

Kobus, M.L., Van Thiju, A. Dr. & Rawuh. (1953). *Ilmu Ukur Segitiga.* Groningen, Jakarta.

Rosskaff, Myron F., Stephen S. Willonghby & Bruce R. Vogele. *Albegra Two and Trigonometri.* Silver Burdett Company, Dallas Atlanta.

Willerding, Margaret F. (1975). *College Algebta and Trigonometri.* John Wiley & Sons, Inc., New York,

Wydenes, P. (1953). *Leerboek Der Goniometri en Trigonometri.* P. Noor Dhoff, Groningen, Jakarta.