PENGANTAR TEORI KEMUNGKINAN

OLEH

DRS IDRUS RAMLI

DITERBITKAN OLEH

P3DK IKIP PADANG

1985

KATA PENGANTAR

Buku ini penulis susun dalam rangka pengadaan buku bacaan bagi mahasiswa program diploma pendidikan matematika LPTK - IKIP Padang. Penyusunannya berdasarkan kepada materi pokok bahasan kombinatorik dan kemungkinan pada Sekolah Menengah dan studi beberapa buku Teori Kemungkinan yang relevan.

Isi buku ini terdiri dari empat bab, yaitu :

Bab I memuat tentang himpunan, yang mempunyai peranan penting untuk menanamkan pengertian ruang sampel, titik sampel dan kejadian .

Bab II memuat tentang permutasi dan kombinasi, yang mempunyai peranan penting untuk menghitung banyak titik sampel dari suatu ruang sampel dan suatu kejadian.

Bab III memuat tentang pengertian frekwensi relatif dan kemungkinan .

Bab IV memuat tentang distribusi kemungkinan, frekwensi harapan dan ekspektasi .

Setiap bab dimulai dengan pernyataan/definisi dan diikuti dengan contoh soal - contoh soal, beberapa sifat - sifat yang diturunkan dari definisi-definisi, serta diakhiri dengan soal-soal .

Penulis menyadari bahwa isi buku yang penulis susun ini masih terdapat kekurangan-kekurangannya. Walaupun demi-

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

kian buku ini setidak-tidaknya akan dapat membantu mahasiswa program diploma pendidikan matematika LPTK - IKIP Padang atau guru matematika Sekolah Menengah yang akan mengajarkan pokok bahasan kombinatorik dan kemungkinan.

Kritik-kritik sehat dari pembaca dalam rangka penyempurnaan isi buku ini akan penulis terima dengan segala senang hati.

Padang, September 1985

Penulis

Drs. Idrus Ramli

DAFTAR ISI

			Halaman
KATA PENGANTAR		....	ii
DAFTAR ISI		....	iv
BAB I	HIMPUNAN	....	1
	A. HIMPUNAN DAN ANGGOTA HIMPUNAN	....	11
	B. OPERASI HIMPUNAN	....	4
	C. HIMPUNAN YANG TERBATAS	....	6
	D. PERKALIAN HIMPUNAN	....	7
	E. KELAS DARI HIMPUNAN-HIMPUNAN	....	8
	F. SOAL - SOAL	....	8
BAB II	PERMUTASI DAN KOMBINASI	....	11
	A. FAKTORIAL	....	11
	B. PERMUTASI	....	11
	C. KOMBINASI	....	21
	D. RUANG SAMPEL DAN KEJADIAN	....	31
	E. PENGAMBILAN SAMPEL	....	33
	F. SOAL - SOAL	....	41
BAB III	PENGERTIAN KEMUNGKINAN	....	47
	A. FREKWENSI RELATIF	....	47
	B. KEMUNGKINAN	....	49
	C. KEMUNGKINAN SUATU KEJADIAN PADA RUANG SAMPEL	....	50
	D. AKSIOMA KEMUNGKINAN	....	55

Halaman

E. KEJADIAN BEBAS 61
F. KEMUNGKINAN BERSYARAT 63
G. PERHITUNGAN KEMUNGKINAN PADA SAMPEL ... 66
H. SOAL - SOAL 75
BAB IV DISTRIBUSI KEMUNGKINAN, FREKWENSI HARAPAN
DAN EKSPEKTASI 83
A. VARIABEL RANDOM 83
B. DISTRIBUSI KEMUNGKINAN 84
C. FREKWENSI HARAPAN 88
D. EKSPEKTASI 89
E. DISTRIBUSI KEMUNGKINAN YANG DISKRIT ... 91
F. DISTRIBUSI KEMUNGKINAN YANG KONTINU ... 92
G. SOAL - SOAL 94
DAFTAR BACAAN

BAB I

HIMPUNAN

A. HIMPUNAN DAN ANGGOTA HIMPUNAN

Himpunan (set) adalah kumpulan objek-objek, misalnya : kumpulan bilangan bulat positif, kumpulan huruf hidup dan sebagainya.
Objek-objek itu sendiri disebut anggota-anggota (elemen-elemen) himpunan. Jika p sebuah anggota himpunan A maka kita tuliskan dengan $p \in A$.

Suatu himpunan A disebut himpunan bagian (subset) dari himpunan B, jika setiap anggota himpunan A adalah juga anggota himpunan B dan disimbulkan dengan $A \subset B$ atau $B \supset A$.

Himpunan A dikatakan sama dengan himpunan B jika setiap anggota himpunan A adalah juga anggota himpunan B , demikian juga sebaliknya. Dengan demikian $A = B$ jika dan hanya jika $A \subset B$ dan $B \subset A$.

Berkenaan dengan himpunan yang telah kita bicarakan ini perlu juga diketahui beberapa buah simbul , jaitu :

1. Himpunan biasanya disimpulkan dengan huruf besar, dan anggota himpunan disimbulkan dengan huruf kecil.
2. $p \notin A$ maksudnya p tidak anggota himpunan A.

3. $A \not\subset B$ maksudnya A tidak himpunan bagian B .

4. $A \neq B$ maksudnya A tidak sama dengan B .

5. Himpunan itu biasanya dinyatakan dengan memakai tanda kurung keraval, misalnya : Himpunan A beranggotakan bilangan-bilangan 1, 3, 5, 7 dan 9 , maka himpunan A dinyatakan dengan $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$.
Contoh lain : Misalkan himpunan B beranggotakan bilangan prima yang kecil dari 7 , maka himpunan B dapat dinyatakan dengan ,

$B = \{x \mid x$ adalah bilangan prima dan $x < 7\}$

atau $B = \{2, 3, 5\}$

Himpunan yang dijadikan semesta pembicaraan disebut himpunan semesta (universal set). Semua himpunan yang dibicarakan merupakan himpunan bagian dari himpunan semesta. Contoh : Himpunan mahasiswa FPMIPA-IKIP Padang dapat dipandang sebagai suatu himpunan semesta . Dalam hal ini yang dibicarakan mungkin himpunan mahasiswa Jurusan Pendidikan Matematika atau himpunan mahasiswa Jurusan Pendidikan Fisika atau himpunan mahasiswa Jurusan Pendidikan Kimia yang masing-masingnya dapat dilihat merupakan himpunan bagian dari himpunan semesta tersebut. Himpunan semesta biasanya disimbulkan dengan S.

Suatu himpunan yang tidak mempunyai anggota disebut himpunan kosong atau himpunan hampa, dan biasanya disimbulkan menuliskannya dengan $\emptyset$ atau $\{\ \}$.

Untuk sembarang himpunan A akan selalu berlaku $\emptyset \subset A \subset S$.

Contoh soal :

1. Diketahui : $A = \{ x \mid x$ adalah bilangan ganjil, $x < 10 \}$
   $B = \{2, 3, 5, 7, 11, 13\}$

   Ditanyakan : Periksalah 9, 11, 3 dan 6 .

   Jawab : $9 \in A$ tetapi $9 \notin B$, $11 \in B$ tetapi $11 \notin A$, $3 \in A$ dan $3 \in B$, $6 \notin A$ dan $6 \notin B$.

2. Perhatikanlah simbul-simbul dibawah ini :

   N = himpunan bilangan asli, yaitu : $\{1, 2, 3, \ldots\}$

   Z = himpunan bilangan bulat, yaitu : $\{\ldots, -2, -1, -0, 1, 2, \ldots\}$

   R = himpunan bilangan real.

   Dapat disimpulkan bahwa : $N \subset Z \subset R$.

3. Misalkan $C = \{ x \mid x^2 = 4$, x bilangan ganjil$\}$, maka $C = \emptyset$

Sifat 1 : Misalkan A, B, dan C tiga buah himpunan, maka

a) $A \subset A$

b) Jika $A \subset B$ dan $B \subset A$ maka $A = B$

c) Jika $A \subset B$ dan $B \subset C$ maka $A \subset C$.

Jika seandainya $A \subset B$ tetapi $A \neq B$ maka kita katakan bahwa A himpunan bahagian sejati (proper subset).

Kadang-kadang pada beberapa buah buku simbul $\subseteq$ dipakai untuk menyatakan himpunan bahagian dan simbul $\subset$ dipakai untuk menyatakan himpunan bahagian sejati.

B. OPERASI HIMPUNAN

Misalkan A dan B dua buah himpunan. A gabungan (union) B dinyatakan menuliskannya dengan $A \cup B$ adalah suatu himpunan yang anggota-anggotanya kepunyaan himpunan A dan atau kepunyaan himpunan B .

Jadi $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ dan atau } x \in B\}$

A irisan B dinyatakan menuliskannya dengan $A \cap B$ adalah suatu himpunan yang anggota-anggotanya kepunyaan himpunan A dan himpunan B .

Jadi $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ dan } x \in B\}$

Jika $A \cap B = \emptyset$, yaitu jika A dan B tidak mempunyai anggota himpunan persekutuan, dalam hal ini A dan B disebut lepas (disjoint).

Selisih (difference) himpunan A dengan himpunan B dinyatakan menuliskannya dengan $A \setminus B$, adalah suatu himpunan yang anggota-anggotanya kepunyaan himpunan A, tetapi bukan kepunyaan himpunan B . Selisih himpunan A dengan himpunan B ini disebut juga komplemen relatif dari himpunan B terhadap himpunan A.

Jadi $A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ , } x \notin B\}$

Jika kita amati $A \setminus B$ dan B maka jelaslah kedua himpunan ini lepas atau $(A \setminus B) \cap B = \emptyset$.

Komplemen absolut (Absolute Complement) atau disederhanakan menyebutkannya dengan komplemen dari himpunan A, dinyatakan menuliskannya dengan $\bar{A}$ atau A^c adalah

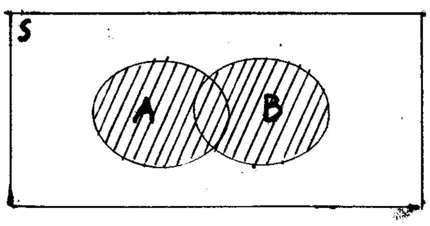
suatu himpunan yang anggota-anggotanya tidak kepunyaan himpunan A .

Jadi $\bar{A} = \{x \mid x \in S, \ x \notin A\}$

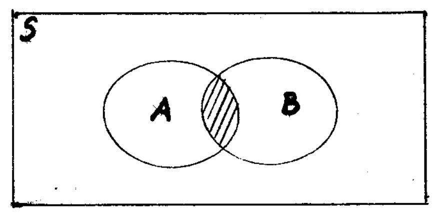
Dengan demikian jelas pula kepada kita bahwa, $\bar{A}$ adalah selisih himpunan semesta dengan himpunan A .

Contoh soal :

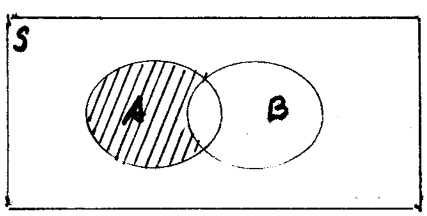
1. Diagram yang berikut disebut diagram Venn yang kita gunakan untuk mengilustrasikan operasi himpunan diatas. Dalam hal ini himpunan-himpunan yang dibicarakan ditunjukkan dengan daerah bidang lingkaran-daerah bidang lingkaran dan himpunan semesta S ditunjukkan dengan daerah keseluruhan persegipanjang.



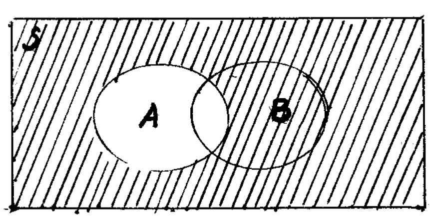
Yang diarsir adalah $A \cup B$



Yang diarsir adalah $A \cap B$



Yang diarsir adalah $A \setminus B$



Yang diarsir adalah $\bar{A}$

2. Misalkan $A = \{1,2,3,4\}$ dan $B = \{3,4,5,6\}$ dimana $S = \{1,2,3, ,...\}$, maka diperoleh :

   $A \cup B = \{1,2,3,4,5,6\}$ $\quad A \cap B = \{3,4\}$

   $A \setminus B = \{1,2\}$ $\quad \bar{A} = \{5,6,7,...\}$

Himpunan-himpunan dengan memakai operasi diatas memenuhi beberapa sifat-sifat seperti tercantum dibawah ini :

1. a) $A \cup A = A$ b) $A \cap A = A$ (idempoten)

2. a) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

   b) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ (sifat assosiatif)

3. a) $A \cup B = B \cup A$

   b) $A \cap B = B \cap A$ (sifat komutatif)

4. a) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

   b) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (sifat distributif)

5. a) $A \cup \emptyset = A$ b) $A \cap S = A$ (sifat identitas)

6. a) $A \cup S = S$ b) $A \cap \emptyset = \emptyset$ (sifat identitas)

7. a) $A \cup \bar{A} = S$ b) $A \cap \bar{A} = \emptyset$ (sifat komplemen)

8. a) $\bar{\bar{A}} = A$ b) $\bar{S} = \emptyset$

   $\bar{\emptyset} = S$ (sifat komplemen)

9. a) $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$ b) $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$ (sifat atau dalil De Morgan)

C. HIMPUNAN YANG TERBATAS

Suatu himpunan dikatakan terbatas jika himpunan tersebut kosong atau memuat n buah elemen yang terbatas, dimana n bilangan bulat positif. Jika tidak demikian himpunan tersebut dikatakan tidak terbatas .

Contoh Soal :

1. Misalkan himpunan N merupakan himpunan nama-nama hari pada satu minggu, maka N = {Senin, Selasa, Rabu, Kamis, Ju'mat, Sabtu, Minggu} .
   Jadi N merupakan himpunan yang terbatas.
2. Y merupakan himpunan bilangan bulat positif yang ganjil, maka Y = {1, 3, 5, ...} . Jadi Y merupakan himpunan yang tidak terbatas .

D. PERKALIAN HIMPUNAN

Misalkan A dan B dua buah himpunan yang diketahui. Perkalian himpunan A dan B, dinyatakan menuliskannya dengan A x B , adalah suatu himpunan yang anggota-anggotanya terdiri dari pasangan-pasangan (a,b) dimana $a \in A$ dan $b \in B$, yaitu :

$$A \times B = \{(a,b) \mid a \in A,\ b \in B\}$$

Perkalian himpunan dengan dirinya sendiri, misalkan perkalian himpunan A dengan dirinya sendiri dinyatakan menuliskannya dengan A x A atau A^2 .

Contoh soal :

1. Misalkan A = {1, 2, 3} dan B = {a, b} , maka
   $A \times B = \{(1,a),(1,b),(2,a),(2,b),(3,a),(3,b)\}$
   $A^2 = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3)\}$

E. KELAS DARI HIMPUNAN-HIMPUNAN

Suatu himpunan yang anggota-anggotanya adalah himpunan-himpunan disebut kelas atau keluarga .

Contoh soal :

1. Himpunan $\{\{2,3\}, \{2\}, \{5,6\}\}$ adalah sebuah kelas dari himpunan-himpunan $\{2,3\}$, $\{2\}$, dan $\{5,6\}$. Himpunan-himpunan $\{2,3\}$, $\{2\}$, dan $\{5,6\}$ adalah anggota-anggota dari kelas tersebut.

   Himpunan kuasa dari suatu himpunan A adalah kelas dari semua himpunan bagian - himpunan bagian dari himpunan A , dan dinyatakan dengan P(A) .

   Contoh soal :

2. Misalkan $A = \{a,b,c\}$, maka

   $$P(A) = \{A, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \emptyset\}$$

   Sifat : Jika A terbatas yang mempunyai n buah anggota maka P(A) mempunyai 2^n anggota .

F. SOAL-SOAL

1. Tuliskanlah pernyataan berikut dengan menggunakan notasi himpunan :

   a) R adalah himpunan bahagian dari T

   b) x adalah anggota dari Y

   c) M tidak himpunan bahagian dari S

   d) x tidak anggota himpunan dari himpunan A

   e) R tidak anggota himpunan dari kelas $\mathcal{A}$

2. Tuliskanlah secara ekplisit anggota himpunan-anggota himpunan dari setiap himpunan yang berikut :

a) $A = \{x \mid x^2 - x - 2 = 0\}$

b) $B = \{x \mid x$ adalah huruf dari perkataan ibu$\}$

c) $C = \{x \mid x^2 = 9,\ x - 3 = 5\}$

3. Misalkan $A = \{1,2,\ldots,8,9\}$, $B = \{2,4,6,8\}$
$C = \{1,3,5,7,9\}$, $D = \{3,4,5\}$ dan
$E = \{3,5\}$.

Himpunan-himpunan yang manakah yang dapat sama dengan X jika kepada kita diberikan informasi yang berikut :

a) X dan B lepas . b) $X \subset D$ tetapi $X \not\subset B$.

c) $X \subset A$ tetapi $X \not\subset C$. d) $X \subset C$ tetapi $X \not\subset A$.

4. Misalkan $A = \{1,0\}$. Nyatakanlah apakah pernyataan yang berikut benar atau salah :

a) $\{0\} \in A$, b) $\emptyset \in A$, c) $\{0\} \subset A$, d) $0 \in A$.

5. Manakah diantara himpunan-himpunan yang berikut terbatas atau tidak terbatas :

a) Himpunan dari garis-garis yang sejajar dengan sumbu x .

b) Himpunan dari huruf-huruf pada perkataan "mesin".

c) Himpunan dari bilangan kelipatan 5 .

d) Himpunan lingkaran-lingkaran yang melalui titik (0,0) .

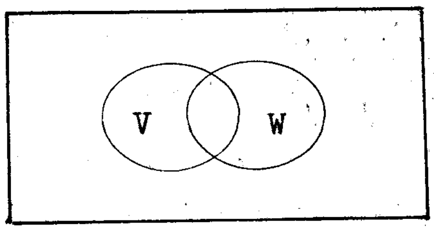
6. Misalkan $S = \{a,b,c,d,e,f,g\}$, $A = \{a,b,c,d,e\}$, $B = \{b,e,f,g\}$ dan $C = \{b,e,f,g\}$. Dapatkanlah :

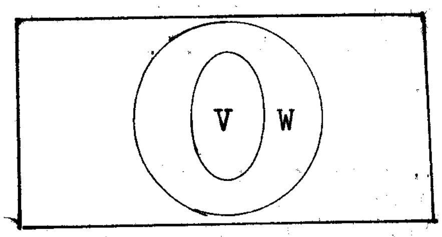
a) $A\cup B$ c) $C\setminus B$ e) $\bar{B}\cap A$ g) $\overline{\overline{A\setminus B}}$

b) $B\cap A$ d) $\bar{C}\cup B$ f) $\overline{A\setminus B}$ h) $A\cap\bar{A}$

7. Pada diagram Venn dibawah ini arsirlah :

a) $W\setminus V$, b) $\bar{V}\cup W$, c) $V\cap\bar{W}$, d) $\bar{V}\setminus\bar{W}$





8. Misalkan $W = \{$Amir, Ramlan, Dodi$\}$ dan $V = \{$Siti , meri$\}$

Dapatkanlah : a) $W \times V$, b) $V \times W$, c) $V \times V$

9. Misalkan himpunan-himpunan V, W, dan Z masing-masing nya mempunyai anggota himpunan sebanyak 3, 4 dan 5 buah . Tentukanlah banyak anggota himpunan dari :

a) $V \times W \times Z$, b) $Z \times V \times W$, c) $W \times Z \times V$.

10. Jika $A = \{1,2,3,4\}$ dapatkanlah himpunan kuasa $P(A)$.

11. Jelaskanlah perbedaan himpunan dengan kelas himpunan.

B A B II

PERMUTASI DAN KOMBINASI

A. FAKTORIAL

Perkalian bilangan bulat positif dari 1 sampai dengan n dalam matematika biasanya disimbulkan dengan n!, dan dibaca dengan n faktorial.

Dengan demikian $n! = 1.2.3\ldots(n-2)(n-1)n$.

Dalam hal ini didefinisikan $0! = 1$.

Contoh soal :

1. $3! = 1.2.3 = 6$
2. $\frac{15!}{12!} = \frac{12!.13.14.15}{12!} = 13.14.15 = 2730$.

B. PERMUTASI

Jumlah cara menyusun suatu himpunan dari n buah objek yang tertentu, dimana pada setiap susunan yang terjadi,semua atau tidak semuanya dari n objek tersebut dipakai, disebut permutasi dari n buah objek .

1. <u>Permutasi dari keseluruhan n objek yang berbeda</u>.

Permutasi dari keseluruhan n objek yang berbeda biasanya disimbulkan dengan p_n^n atau $P(n,n)$ atau nPn. Untuk memahami pengertian permutasi dari keseluruhan n objek yang berbeda ini, perhatikanlah contoh soal dibawah ini :

a) Dalam berapa carakah kita dapat menyusun tiga buah buku A, B dan C pada sebuah rak buku ?

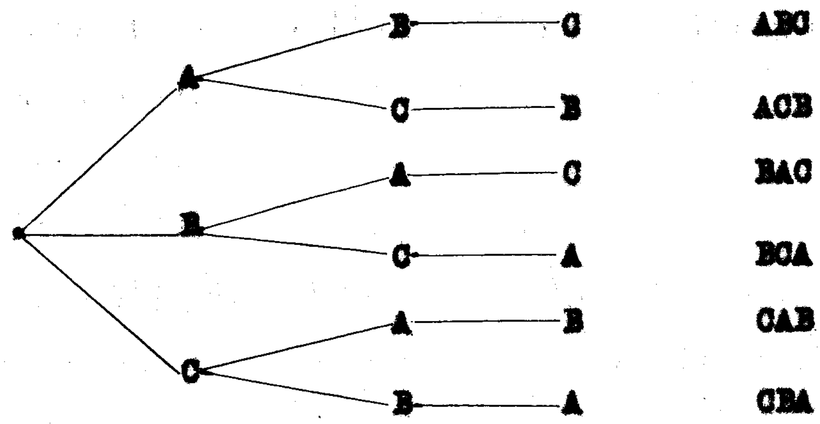
Penyelesaian :

Cara (1) , yaitu cara yang paling sederhana.
Dalam hal ini kita langsung mencatat semua susunan yang berbeda mungkin dapat dibentuk dari ketiga buku tersebut, kemudian dihitung jumlah hasilnya .
Hasil yang diperoleh adalah sebagai berikut :

ABC, ACB, BAC, BCA, CAB dan CBA .

Penyelesaian soal dengan cara (1) ini tidak merupakan cara penyelesaian yang sistematis .

Cara (2) , yaitu dengan menggunakan diagram bercabang . Cara (2) ini lebih sistematis. Mula - mula buatlah tiga buah cabang yang masing-masingnya ber titik ujung A, B dan C. Selanjutnya dari masing-masing ujung cabang ini dibuat lagi dua buah cabang. Dari titik A dibuat cabang AB dan AC, dari titik B dibuat cabang BA dan BC dan dari titik C dibuat cabang CA dan CB. Akhirnya masing- masing cabang AB, AC, BA, BC, CA dan CB dilanjutkan dengan BC, CB, AC, CA, AB dan BA, seperti terlihat pada gambar dibawah ini.

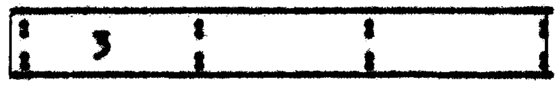


Dengan memperhatikan cabang-cabang diagram ini di peroleh hasilnya : ABC, ACB, BAC, BCA, CAB dan CBA, Jadi ada enam cara kita dapat menyusun tiga buah buku yang berlainan pada sebuah rak buku .

Diagram bercabang ini hanya tepat kita pakai,jika banyak objek yang dipermutasikan cukup terbatas .

Cara (3), yaitu dengan menggunakan metoda spasi . Dalam hal ini kita siapkan tiga buah spasi pada rak buku, dimana ketiga buah buku tersebut akan disusun. Ketiga buah spasi tersebut digambarkan seperti dibawah ini,

Pada spasi pertama dapat kita letakkan buku A atau buku B atau buku C. Dengan demikian pada spasi pertama dapat diisi dengan tiga cara, seperti terlihat dibawah ini,



Setelah spasi pertama diisi dengan salah satu buku tersebut, maka untuk mengisi spasi kedua tinggal lagi dengan dua cara, karena hanya sisa dua buku, yang diambil salah satu dari padanya yang dapat dipakai untuk mengisi spasi kedua, seperti terlihat dibawah ini.

3	2	

Ini berarti kita dapat mengisi dua spasi pertama dengan $3 \times 2 = 6$ cara .

Setelah dua spasi diisi dengan satu buku masing - masingnya, maka hanya ada satu buku saja yang tinggal untuk dapat digunakan untuk mengisi spasi yang ketiga. Dengan demikian jelaslah bahwa hanya ada satu cara saja yang dapat digunakan untuk mengisi spasi yang ketiga, seperti terlihat dibawah ini ,

3	2	1

Jadi ketiga spasi tersebut dapat diisi dengan tiga buah buku dengan $3 \times 2 \times 1 = 6$ cara .

Contoh soal yang kita selesaikan diatas adalah masalah permutasi dari tiga buah objek yang berbeda, dimana ketiga objek tersebut kita pakai semuanya .

Jadi $P_3^3 = 3 \times 2 \times 1 = 6$.

Mudah dipahami untuk permutasi dari keseluruhan n objek yang berbeda, maka ,

$$P_n^n = n(n-1)(n-2)\ldots3.2.1 = n!$$

2. Permutasi dari n buah objek yang berbeda, dimana tidak semua objek tersebut dipakai.

Untuk memahami pengertian tentang hal ini perhatikanlah contoh soal dibawah ini ,

a) Dalam berapa carakah kita dapat menyusun dua buah buku yang diambil dari tiga buah buku A, B dan C?

Penyelesaian :

Cara (1), yaitu cara yang paling sederhana .

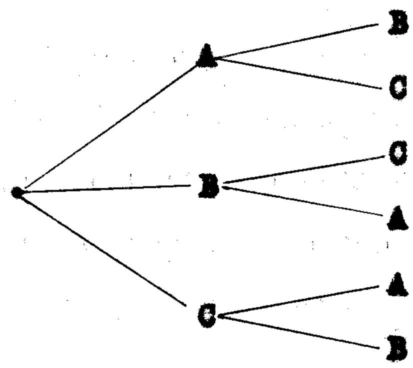
Dalam hal ini kita langsung mencatat semua susunan berbeda yang mungkin dibentuk dari ketiga buku tersebut kemudian dihitung jumlah hasilnya .

Hasil yang diperoleh adalah sebagai berikut :

AB, AC, BC, BA, CA dan CB .

Dari sini kelihatan bahwa hasilnya ada enam cara. Penyelesaian soal dengan cara (1) ini tidak merupakan cara penyelesaian yang sistematis .

Cara (2), yaitu dengan menggunakan diagram bercabang. Cara (2) ini lebih sistematis. Mula-mula kita buat tiga buah cabang yang masing-masingnya ber titik ujung A, B dan C. Selanjutnya masing-masing cabang ini kita buat bercabang dua, Dari titik A dibuat cabang AB dan AC, dari titik B dibuat ca - bang BC dan BA dan dari titik C dibuat cabang CA dan CB. Gambarnya seperti terlihat dibawah ini .

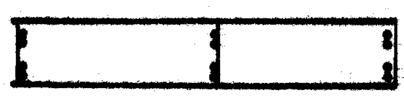


AB
AC
BC
BA
CA
CB

Dengan memperhatikan cabang-cabang diagram ini di- peroleh hasilnya : AB, AC, BC, BA, CA dan CB .

Dari sini juga kelihatan bahwa hasilnya ada enam cara kita dapat menyusun dua buah buku dari tiga buah buku.

Cara (3), yaitu dengan menggunakan metoda spasi . Dalam hal ini kita siapkan dua buah spasi yang di- gambarkan seperti dibawah ini .



Pada spasi pertama dapat kita letakkan buku A atau buku B atau buku C. Dengan demikian pada spasi per tama dapat diisi dengan tiga cara, seperti terlihat dibawah ini.

Setelah spasi pertama diisi dengan salah satu buku tersebut, maka untuk mengisi spasi kedua tinggal lagi dengan dua cara, karena hanya sisa dua buku yang diambil salah satu dari padanya yang dapat dipakai untuk mengisi spasi kedua, seperti terlihat dibawah ini.

3	2

Jadi kedua spasi tersebut dapat diisi dengan dua buah buku yang diambil dari tiga buah buku dengan $3 \times 2 = 6$ cara .

Mudah dipahami untuk permutasi dari n buah objek yang berbeda dan yang diambil sebanyak r, dan jika kita gunakan metoda spasi, berarti kita menyediakan spasi sebanyak r buah, seperti terlihat di bawah ini.

		...		

Spasi pertama dapat diisi dengan n cara, spasi kedua dapat diisi dengan (n-1) cara, demikian seterusnya spasi yang ke (r-1) dapat diisi dengan (n-r+2) cara, dan spasi yang ke r dapat diisi dengan (n-r+1) cara, seperti terlihat dibawah ini .

n	n-1	...	n-r+2	n-r+1

Permutasi dari n buah objek yang berbeda dan yang diambil sebanyak r , biasanya disimbulkan dengan P_r^n atau P(n,r) atau nPr .

Jadi $P_r^n = n(n-1) \ldots (n-r+2)(n-r+1)$

$$= \frac{n(n-1) \ldots (n-r+2)(n-r+1)(n-r)!}{(n-r)!}$$

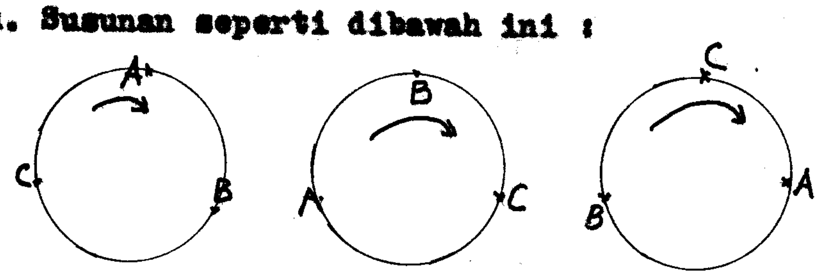
$$= \frac{n!}{(n-r)!}$$

Dapat disimpulkan $P_r^n = \frac{n!}{(n-r)!}$

3. <u>Permutasi dari n buah objek yang berbeda yang tersusun membentuk suatu lingkaran</u> .

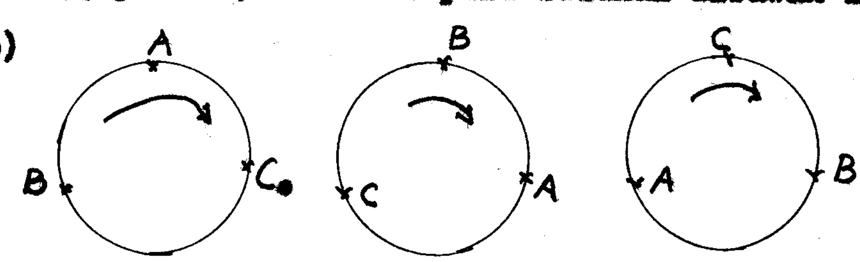
Dalam hal ini permutasi dari n objek tersebut kita hitung berdasarkan banyaknya susunan yang berbeda dari n objek tersebut, dimana perbedaan suatu susunan dengan susunan lainnya berdasarkan kepada kedudukan relatif dari objek-objek pada setiap susunan itu, bila melintasi lingkaran dalam arah yang tertentu. Susunan seperti dibawah ini :

a)



dianggap sama, demikian pula susunan dibawah ini.

b)



untuk menghitung jumlah permutasi dari n buah objek yang berbeda yang tersusun membentuk suatu lingkaran ini, kita harus menetapkan kedudukan salah satu objek secara bebas dan kemudian menghitung jumlah permutasi dari objek-objek yang masih tinggal. Dengan demikian jika permutasi dari n buah objek yang berbeda yang tersusun membentuk suatu lingkaran ini disimbulkan dengan $P^n_{n\ cyc}$ maka,

$$P^n_{n\ cyc} = 1 \times (n-1)! = (n-1)!$$

Contoh soal :

a) Dalam berapa carakah 5 orang siswa dapat diatur duduk mengelilingi sebuah meja bundar ?

Penyelesaian :

Contoh soal ini berkenaan dengan permutasi dari lima objek yang berbeda yang tersusun membentuk suatu lingkaran.

Dengan demikian penyelesaian soal tersebut diatas adalah $P^5_{5\ cyc} = (5-1)! = 4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$.
Jadi ada 24 cara, lima orang siswa dapat diatur duduk mengelilingi sebuah meja bundar.

4. <u>Permutasi dari n buah objek yang tidak semuanya berbeda</u>.

Pada pasal-pasal sebelumnya dalam Bab II ini kita sudah membicarakan permutasi dari objek-objek yang semuanya berbeda. Sekarang marilah kita tinjau pula permutasi dari objek-objek yang tidak semuanya berbeda.

Misalkan ada n buah objek yang terdiri dari n_1 objek adalah sama, n_2 berikutnya juga sama tetapi berbeda dengan n_1 objek pertama atau dengan objek lainnya, demikian seterusnya sampai n_r objek berikutnya, maka permutasi dari n objek tersebut adalah :

$$\frac{n!}{n_1! \times n_2! \times \ldots n_r!}$$

Untuk jelasnya pengertian rumus ini perhatikanlah contoh soal dibawah ini :

a) Dalam berapa carakah kita dapat menyusun huruf - huruf dengan menggunakan semuanya huruf pada perkataan KAKAK ?

Penyelesaian :

Jika seandainya semua huruf-huruf pada perkataan KAKAK tersebut dianggap berbeda maka banyak susunan dengan memakai kelima huruf pada perkataan KAKAK itu dapat dilakukan dengan 5x4x3x2x1 = 120 cara, dimana didalamnya ada tiga buah huruf K yang mempunyai permutasi 3! dan dua buah huruf A yang mempunayi permutasi 2!. Agar susunan dari kelima huruf tersebut berbeda satu sama lain, maka hasil yang diperoleh diatas harus dibagi dengan 3! dan 2! .

Jadi kita dapat menyusun lima buah huruf dengan menggunakan kelima buah huruf pada perkataan KA-KAK dalam

$$\frac{5!}{3! \times 2!} = \frac{5x4x3x2x1}{3x2x1x2x1} = 10$$ cara yang ber - beda.

C. KOMBINASI

1. Pengertian kombinasi

Misalkan kita mempunyai suatu himpunan dari n buah objek, maka yang dimaksud dengan kombinasi dari n buah objek ini yang diambil sebanyak r buah dari padanya adalah banyak himpunan bahagian-himpunan bahagian yang masing-masingnya mempunyai anggota sebanyak r buah .

Contoh soal :

a) Kombinasi dari huruf-huruf anggota himpunan $\{a,b,c,d\}$ yang diambil sebanyak tiga buah huruf dari padanya adalah : $\{a,b,c\}$, $\{a,b,d\}$, $\{a,c,d\}$ $\{b,c,d\}$ atau dapat juga disederhanakan menuliskannya dengan abc, abd, acd dan bcd .

Dalam kombinasi susunan-susunan abc,acb,bac,bca , cab,cba, semuanya dianggap sama, sebab ketiga huruf yang terpakai pada setiap susunan tersebut adalah semua anggota himpunan $\{a,b,c\}$.

Kombinasi dari n buah objek yang diambil sebanyak r buah dari padanya, dapat juga didefinisikan sebagai banyaknya cara pemilihan r buah objek tersebut tanpa menghiraukan urutan susunan dari objek-objek yang bersangkutan.

Jika pengertian kombinasi ini dibandingkan dengan pengertian permutasi, maka perbedaannya adalah sebagai berikut :

Pada permutasi urutan susunan objek-objek diperhatikan, sedangkan pada kombinasi urutan susunan objek-objek tidak diperhatikan.

Kombinasi dari n buah objek yang diambil sebanyak r buah dari padanya disimbulkan menuliskannya dengan C_r^n atau $C(n,r)$ atau nCr dan untuk mendapatkan rumusnya perhatikanlah contoh soal dibawah ini.

b) Pada contoh soal a) , kita sudah memperlihatkan hasil kombinasi empat buah huruf a,b,c,d yang diambil sebanyak tiga buah huruf dari padanya.

Masing-masing susunan dari hasil kombinasi tersebut mempunyai hasil permutasi 3! = 6 seperti terlihat dibawah ini :

Kombinasi	:	Permutasi
abc		abc,acb,bac,bca,cab,cba
abd		abd,adb,bad,bda,dab,dba
acd		acd,adc,cad,cda,dac,dca
bcd		bcd,bdc,cbd,cdb,dbc,dcb

Dari sini dapat dilihat bahwa, bila hasil kombinasinya dikalikan dengan hasil permutasi setiap susunan yaitu dengan 3! , maka hasilnya sama dengan hasil permutasi dari 4 huruf tersebut yang diambil sebanyak 3 huruf dari padanya .

$$\text{Jadi } C_3^4 \cdot 3! = P_3^4$$

$$C_3^4 = \frac{P_3^4}{3!}$$

$$= \frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{3 \times 2 \times 1}$$

$$= 4$$

Dengan demikian secara umum, kombinasi dari n buah objek yang diambil sebanyak r buah dari pada - nya dapat dirumuskan dengan :

$$C_r^n = \frac{P_r^n}{r!}$$

$$= \frac{\frac{n!}{(n-r)!}}{r!}$$

$$\text{Jadi} \qquad C_r^n = \frac{n!}{(n-r)!\,r!} \qquad (r \leqslant n)$$

Untuk lebih memahami pemakaian rumus tersebut perhatikanlah contoh soal dibawah ini :

e) Berapa banyak panitia yang terdiri dari tiga pria dan dua wanita dapat disusun dari lima pria dan empat wanita ?

Penyelesaian :

Memilih tiga pria dari lima pria adalah masalah

kombinasi lima pria yang diambil tiga pria dari padanya, yaitu :

$$C_3^5 = \frac{5!}{(5-3)!3!}$$

$$= \frac{5!}{2!3!}$$

$$= \frac{5x4x3x2x1}{2x1x3x2x1}$$

$$= 10$$

Jadi memilih tiga pria dari lima pria dapat dilakukan dalam 10 cara.

Memilih dua wanita dari empat wanita adalah juga masalah kombinasi empat wanita yang diambil dua wanita dari padanya, yaitu :

$$C_2^4 = \frac{4!}{(4-2)!2!}$$

$$= \frac{4x3x2x1}{2x1x2x1}$$

$$= 6$$

Dengan demikian memilih dua wanita dari empat wanita dapat dilakukan dengan 6 cara.

Jadi banyak panitia yang terdiri dari tiga pria dan dua wanita yang dapat disusun dari lima pria dan empat wanita adalah :

$$C_3^5 \times C_2^4 = 10 \times 6 = 60$$

d) Buktikanlah : $C_r^n = C_{(n-r)}^n$

Bukti : $C^n_{(n-r)} = \frac{n!}{(n-n+r)!(n-r)!}$

$= \frac{n!}{r!(n-r)!}$

$= C^n_r$

2. **Koeffisien Binomial**

Koeffisien Binomial disimbulkan dengan $\binom{n}{r}$ dibaca dengan "nCr" , dimana n dan r bilangan bulat positif dengan $r \leq n$, dan didefinisikan sebagai berikut :

$$\binom{n}{r} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)}{1.2.3\ldots(r-1)r}$$

Contoh soal :

a) $\binom{8}{2} = \frac{8.7}{1.2} = 28$

b) $\binom{9}{4} = \frac{9.8.7.6}{1.2.3.4} = 126$

Catatan : tanda . dalam rumus diatas maksudnya sebagai pengganti tanda kali atau x .

Dari rumus yang didefinisikan diatas dapat dilihat , bahwa masing-masing pembilang dan penyebut mempunyai r faktor .

Dapat kita buktikan bahwa, $\binom{n}{r} = C^n_r$

Bukti : $\binom{n}{r} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)}{1.2\ldots(r-1)r}$

$= \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)}{1.2.3\ldots(r-1)r} \times \frac{(n-r)!}{(n-r)!}$

$= \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{n!}{(n-r)!r!} = C^n_r$

Jadi $\binom{n}{r} = C^n_r$

Berhubung karena $0! = 1$, maka $\binom{0}{0} = C^0_0 = \frac{0!}{0!0!} = 1$

$$\binom{n}{0} = C^n_0 = \frac{n!}{n!0!} = 1$$

Contoh soal :

c) Buktikanlah , bahwa : $\binom{n}{n-r} = \binom{n}{r}$

Bukti : $\binom{n}{n-r} = C^n_{n-r} = \frac{n!}{(n-n+r)(n-r)}$

$$= \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{n!}{(n-r)!r!} = C^n_r = \binom{n}{r}$$

d) Buktikanlah bahwa : $\binom{n+1}{r} = \binom{n}{r-1} + \binom{n}{r}$

Bukti : $\binom{n}{r-1} + \binom{n}{r} = \frac{n!}{(r-1)!(n-r+1)!} + \frac{n!}{r!(n-r)!}$

Samakan penyebut kedua pecahan tersebut dimana pecahan pertama dikalikan dengan $\frac{r}{r}$, dan pecahan yang kedua dikalikan dengan $\frac{n-r+1}{n-r+1}$

$$\binom{n}{r-1} + \binom{n}{r} = \frac{r.n!}{r(r-1)!.(n-r+1)!} + \frac{(n-r+1).n!}{r!.(n-r+1).(n-r)!}$$

$$= \frac{r.n!}{r!(n-r+1)!} + \frac{(n-r+1).n!}{r!(n-r+1)!}$$

$$= \frac{r.n!+(n-r+1).n!}{r!(n-r+1)!}$$

$$= \frac{(n+1)n!}{r!(n-r+1)!}$$

$$= \frac{(n+1)!}{r!(n-r+1)!}$$

$$= \binom{n+1}{r} \quad \text{(terbukti)}$$

3. **Teori Binomial**

$$(a+b)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} a^{n-r} b^r$$

$$= a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{1.2} a^{n-2}b^2 + \ldots + nab^{n-1}$$
$$+ b^n$$

Teori ini dapat dibuktikan dengan menggunakan induksi matematika .

Bukti : Teori ini benar untuk $n = 1$, karena

$$\sum_{r=0}^{1} \binom{1}{r} a^{1-r}b^r = \binom{1}{0} a^1b^0 + \binom{1}{1} a^0b^1$$
$$= a + b$$
$$= (a + b)^1 .$$

Kita asumsikan teori ini benar untuk sembarang n, kemudian kita buktikan bahwa teori ini juga benar untuk $n + 1$.

$$(a + b)^{n+1} = (a+b)(a+b)^n$$
$$= (a+b)\left\{ a^n + \binom{n}{1} a^{n-1}b + \ldots + \binom{n}{r-1} a^{n-r+1}b^{r-1} + \binom{n}{r} a^{n-r}b^r + \ldots + \binom{n}{1} ab^{n-1} + b^n \right\}$$

Suku-suku yang memuat b^r diperoleh dari :

$$b \binom{n}{r-1} a^{n-r+1}b^{r-1} + a \binom{n}{r} a^{n-r}b^r = \binom{n}{r-1} a^{n-r+1}b^r$$
$$+ \binom{n}{r} a^{n-r+1}b^r.$$
$$= \left\{\binom{n}{r-1} + \binom{n}{r}\right\} a^{n-r+1}b^r$$

Diatas pada contoh soal 2.d) sudah dibuktikan bahwa

$$\binom{n}{r-1} + \binom{n}{r} = \binom{n+1}{r}$$

Jadi suku yang memuat b^r adalah $\binom{n+1}{r} a^{n-r+1} b^r$.

Kita tahu bahwa $(a+b)(a+b)^n$ adalah sebuah polynomial dengan pangkat n+1 dalam b . Akibatnya :

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)(a+b)^n = \sum_{r=0}^{n+1} \binom{n+1}{r} a^{n-r+1} b^r ,$$

Dengan demikian teori Binomial terbukti.

Sifat-sifat teori Binomial ini adalah sebagai berikut :

a) Banyak suku-suku (n+1) buah .

b) Jumlah pangkat a dan b pada setiap suku sama dengan n .

c) Pangkat dari a menurun, yaitu dari n menuju 0, sedangkan pangkat dari b menaik dari 0 menuju n .

d) Koeffisien dari sembarang suku $a^k b^{n-k}$ atau $a^{n-k} b^k$ sama dengan $\binom{n}{k}$.

e) Koeffisien suku-suku yang letaknya sama jauhnya dari suku permulaan dan suku terakhir adalah sama.

Contoh soal :

a) Tentukanlah semua suku dari $(a+b)^6$.

$$(a+b)^6 = a^6 + 6a^5b + \frac{6.5}{1.2} a^4b^2 + \frac{6.5.4}{1.2.3} a^3b^3 + \frac{6.5}{1.2} a^2b^4 + \frac{6}{1} ab^5 + b^6 .$$

$$= a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6 .$$

b) Tentukanlah koeffisien dari a^8b^2 yang merupakan salah satu suku dari $(a+b)^{10}$.

Penyelesaian :

Sesuai dengan sifat d) dari teori Binomial , dimana koeffisien dari suku a^kb^{n-k} adalah $\binom{n}{k}$, maka koeffisien dari suku a^8b^2 adalah $\binom{10}{8}$ =

$$\frac{10.9.8.7.6.5.4.3.}{1.2.3.4.5.6.7.8} = \frac{10.9}{1.2} = 5.9 = 45 .$$

c) Tentukanlah koeffisien x^2y^4 dari $(-2x + y^2)^4$.

Penyelesaian :

Suku-suku pokok yang dipangkatkan empat itu adalah $-2x$ dan y^2 . Akibatnya x^2y^4 akan muncul dari suku $(-2x)^2(y^2)^2$. Koeffisien $(-2x)^2(y^2)^2$ menurut sifat d) teori Binomial diatas adalah $\binom{4}{2} = \frac{4.3}{1.2} = 6$.

Dengan demikian jika dituliskan dengan lengkap suku $(-2x)^2(y^2)^2$ dengan koeffisiennya adalah :

$6(-2x)^2(y^2)^2 = 24\ x^2y^4$.

Jadi koeffisien x^2y^4 adalah 24 .

d) Dari soal c) hitunglah koeffisien dari x^3y^2 .

Penyelesaian :

x^3y^2 akan muncul dari suku $(-2x)^3(y^2)^1$.

Koeffisien $(-2x)^3(y^2)^1$ menurut sifat d) teori Binomial adalah $\binom{4}{3} = \frac{4.3.2}{1.2.3} = 4$.

Jika kita tuliskan dengan lengkap suku $(-2x)^3(y^2)$

dengan koeffisiennya maka hasilnya adalah :

$$4(-2x)^3(y^2)^1 = -32x^3y^2$$

Jadi koeffisien x^3y^2 adalah -32 .

4. <u>Koeffisien Multinomial</u>

Koeffisien Multinomial dituliskan dengan $\binom{n}{n_1,n_2,\ldots,n_r}$ dan didefinisikan dengan

$$\binom{n}{n_1,n_2,\ldots,n_r} = \frac{n!}{n_1!\,n_2!\ldots n_r!} ,$$

dimana $n_1 + n_2 + \ldots + n_r = n$

Contoh soal :

a) Hitunglah : (1) $\binom{7}{2,3,2}$ (2) $\binom{8}{4,2,20}$

Penyelesaian :

(1) $\binom{7}{2,3,2} = \frac{7!}{2!\,3!\,2!} = 210$

(2) $\binom{8}{4,2,2,0} = \frac{8!}{4!\,2!\,2!\,0!} = 420$.

Teori Multinomial

$$(a_1+a_2+\ldots+a_r)^n = \sum_{n_1+n_2+\ldots+n_r=n} \binom{n}{n_1,n_2,\ldots,n_r} a_1^{n_1}a_2^{n_2}\ldots a_r^{n_r}$$

Disini $\binom{n}{n_1,n_2,\ldots,n_r}$ merupakan koeffisien dari suku $a_1^{n_1}a_2^{n_2}\ldots a_r^{n_r}$.

Contoh soal :

b) Tentukanlah koeffisien $x^2y^4z^4$ dari $(x + y + z)^{10}$.

Penyelesaian : Sesuai dengan teori Multinomial di atas maka koeffisien $x^2y^4z^4$ itu adalah : $\binom{10}{2,4,4} = \frac{10!}{2!4!4!} = 3150$.

c) Tentukanlah koeffisien x^4y^2zw dari $(-x^2+2Y+z+w)^4$.

Penyelesaian : Suku-suku yang dipangkatkan empat itu adalah : $-x^2, 2y, z$ dan w .

Dengan demikian maka x^4y^4zw akan muncul dari $(-x^2)^2(2y)^2zw$.

Koeffisien dari $(-x^2)^2(2y)^2zw$ ini adalah :

$$\binom{4}{2,2,1,1} = \frac{4!}{2!2!1!1!} = \frac{4.3.2.1}{2.1\,2.1.1.1} = 6 .$$

Jadi koeffisien x^4y^2zw adalah $6 \times 4 = 24$.

D. RUANG SAMPEL DAN KEJADIAN

Misalkan kita melakukan suatu experimen dengan melemparkan sebuah dadu. Hasil experimen ini tentu merupakan salah satu dari anggota himpunan $\{1,2,3,4,5,6\}$. Namakan himpunan ini S . Dengan demikian maka $S = \{1,2,3,4,5,6\}$.

S disebut ruang sampel dan anggota himpunan S disebut titik sampel .

Dapat disimpulkan bahwa :

Ruang sampel adalah suatu himpunan dari hasil yang mungkin terjadi dari suatu experimen dan biasanya di -

simbulkan menuliskannya dengan huruf S, sedangkan anggota himpunan S disebut titik sampel atau kejadian elementer .

Contoh Soal :

1. Tentukanlah ruang sampel S dari hasil experimen,dimana dua buah mata uang ditoss sekaligus ?
   Kemudian tentukan juga semua titik sampelnya .
   Penyelesaian :
   Misalkan bahagian muka dari mata uang itu dinyatakan dengan m dan bahagian belakangnya dinyatakan dengan b.
   Maka ruang sampel S dari hasil experimen ini adalah:
   $S = \{(m,m) , (m,b) , (b,m) , (b,b)\}$.
   Dapat juga kita lihat bahwa S ini merupakan himpunan hasil perkalian $A = \{m,b\}$ dengan dirinya sendiri ,
   yaitu $S = A \times A$.
   Semua titik sampelnya adalah : (m,m) , (m,b) , (b,m) dan (b,b) .

   Satu kejadian merupakan himpunan bagian (subse) dari ruang sampel .

2. Jika kejadian A merupakan hasil yang sama dari lemparan dua buah mata uang, tentukanlah kejadian A itu.
   Penyelesaian :
   $A = \{(m,m) , (b,b)\}$.

3. Jika kejadian B merupakan hasil lemparan dua buah mata uang, dimana mata uang pertama menghasilkan muka, tentukanlah kejadian B tersebut .

   Penyelesaian :

   $B = \{(m,m) , (m,b)\}$.

4. Tentukanlah kejadian $A \cap B$ dari soal 2) dan 3) .

   Penyelesaian :

   $A \cap B = \{(m,m)\}$

5. Jika kejadian $\bar{B}$ adalah kejadian yang bukan kejadian B dari soal 3) maka $\bar{B} = \{(b,m) , (b,b)\}$.

6. Jika kejadian $\overline{A \cap B}$ adalah kejadian yang bukan kejadian $A \cap B$ dari soal 4), maka tentukanlah kejadian $\overline{A \cap B}$ tersebut .

   Penyelesaian :

   $\overline{A \cap B} = \{(m,b) , (b,m) , (b,b)\}$.

B. PENGAMBILAN SAMPEL (SAMPLING) .

Bila kita mengambil sebuah objek setelah yang lain diambil dari n buah objek, misalkan pengambilan itu dilakukan sebanyak r kali, kita katakan sampel yang terambil itu suatu sampel tersusun yang panjangnya r .

Berhubungan dengan ini perlu kita perhatikan dua hal , yaitu :

..1

1. <u>Pengambilan sampel dengan pengembalian</u>

Dalam hal ini setiap objek yang terambil dikembali - kan kepada tempatnya semula sebelum pengambilan ob - jek yang berikutnya dilakukan. Dengan demikian pengam bilan setiap objek dapat dilakukan dengan n cara . Berhubung karena pengambilan objek tersebut dilaku - kan sebanyak r kali, maka pengambilan sampel tersu - sun yang panjangnya r tersebut dapat dilakukan de - ngan $n \times n \times \ldots n$ (r kali) = n^r cara .

Contoh soal :

a) Dalam berapa carakah pengambilan tiga helai kartu dari setumpuk kartu bridge dapat dilakukan jika pengambilan kartu itu dilakukan satu persatu de- ngan cara pengembalian ?

Penyelesaian :

Berhubung karena setiap kartu yang terambil harus dikembalikan lagi ketumpuk kartu tersebut sebelum pengambilan kartu berikutnya dilakukan sampai ter ambilnya tiga helai kartu, maka pengambilan tiga helai kartu tersebut dapat dilakukan dalam

$52 \times 52 \times 52 = 52^3 = 140608$ cara .

b) Jika diketahui himpunan $S = \{2,3,5,6,7,9\}$, dan jika kita bentuk sebuah bilangan yang terdiri da- ri tiga angka dari anggota himpunan S itu, dimana pemakaian angka boleh berulang, maka :

(1) Dalam berapa carakah bilangan tersebut dapat kita bentuk ?

(2) Dari semua hasil yang mungkin membentuk bi - langan yang terdiri dari tiga angka tersebut berapa buah bilangan yang merupakan bilangan genap dan berapa buah bilangan yang merupakan bilangan ganjil ?

(3) Berapa buah bilangan yang habis dibagi dengan 5 ?

(4) Berapa buah bilangan yang kurang dari 400 ?

Penyelesaian :

(1) Semua angka anggota S dapat dipilih untuk di- pakai sebagai ratusan, demikian juga untuk pu luhan dan satuan .

Dengan demikian bilangan itu dapat kita ben - tuk dalam 6 x 6 x 6 = 216 cara .

(2) Genap atau ganjilnya suatu bilangan ditentu - kan oleh satuannya.

Jika satuannya bilangan genap maka bilangan itu merupakan bilangan genap dan jika satuan- nya bilangan ganjil maka bilangan itu merupa- kan bilangan ganjil.

Dari anggota himpunan S tersebut diatas untuk membuat sebuah bilangan yang terdiri dari ti- ga angka agar bilangan yang terbentuk itu bi-

langan genap maka yang dapat dipakai sebagai satuannya ada dua buah angka, yaitu : 2 dan 6, sedangkan untuk ratusan dan puluhannya keenam anggota himpunan S dapat dipakai .
Jadi semua bilangan genap yang terdiri dari tiga angka yang mungkin dapat dibentuk dari anggota himpunan S adalah : 6 x 6 x 2 = 72 buah.

Untuk membuat sebuah bilangan ganjil yang terdiri dari tiga angka dari anggota himpunan S, maka yang dapat dipakai sebagai satuannya ada empat angka, yaitu : 3,5,7 dan 9 , sedangkan untuk ratusan dan puluhannya keenam anggota himpunan S dapat dipakai. Dengan demikian semua bilangan ganjil yang terdiri dari tiga angka dari anggota himpunan S, yang mungkin dapat dibentuk adalah : 6 x 6 x 4=144 buah .

Pada bagian (a) sudah kita kemukakan , bahwa sebuah bilangan yang terdiri dari tiga angka dari anggota himpunan S, dimana pemakaian angka boleh berulang dapat dibentuk dalam 216 cara. Ini berarti kita dapat membentuk bilangan yang terdiri dari tiga angka dari anggota himpunan S, dimana pemakaian angka boleh berulang, ada 216 buah.

Bilangan-bilangan yang terbentuk itu tentu sa ja terdiri dari bilangan genap dan bilangan ganjil. Jika kita tinjau kembali jumlah bi - langan genap dan bilangan ganjil yang terdiri dari tiga angka dari anggota himpunan S terse but, dimana pemakaian angka boleh berulang adalah 72 + 144 = 216 buah, yaitu cocok de - ngan banyaknya bilangan yang terdiri dari ti- ga angka dari anggota himpunan S, dimana pema kaian angka boleh berulang.

(3) Bilangan yang terdiri dari tiga angka terse - but habis dibagi dengan 5 jika satuannya 5 atau 0; tetapi yang pada bilangan tersebut ti dak ada yang satuannya 0. Dengan demikian ba- nyak bilangan yang habis dibagi dengan 5 ada- lah 6 x 6 x 1 = 36 buah .

(4) Bilangan yang kurang dari 400, jika ratusan - nya angka 2 atau angka 3. Angka 2 dan angka 3 keduanya anggota himpunan S. Dengan demikian kedua angka tersebut dapat dipakai sebagai ra tusannya. Jadi banyak bilangan yang kurang da ri 400 yang dimaksud adalah 2 x 6 x 6 = 72 bu ah.

2. Pengambilan sampel tanpa pengembalian

Dalam hal ini setiap objek yang terambil tidak dikembalikan ketempatnya semula sebelum pengambilan

objek yang berikutnya dilakukan.

Dengan demikian pengambilan objek yang pertama dapat dilakukan dalam n cara. Pengambilan objek yang kedua dapat dilakukan dalam (n-1) cara, pengambilan objek yang ketiga dapat dilakukan dalam (n-2) cara, demikian seterusnya pengambilan objek yang ke r dapat dilakukan dalam (n-r+1) cara. Jadi pengambilan r buah objek tersebut dapat dilakukan dalam

$n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)$ cara .

Pada halaman 18 sudah dikemukakan bahwa :

$$P_r^n = n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Jadi pengambilan r buah objek dari n buah objek tanpa pengembalian dapat dilakukan dalam $P_r^n = \frac{n!}{(n-r)!}$ cara.

Contoh soal :

a) Dalam berapa carakah pengambilan tiga helai kartu dari setumpuk kartu bridge dapat dilakukan jika pengambilan kartu itu dilakukan satu persatu tanpa pengembalian ?

Penyelesaian :

Berhubung karena setiap kartu yang terambil tidak dikembalikan lagi ketumpuk kartu tersebut sebelum pengambilan kartu berikutnya dilakukan sampai terambilnya tiga helai kartu, maka pengambilan tiga kartu tersebut dapat dilakukan dalam 52x51x50=132 600 cara.

b) Jika diketahui himpunan S = 2,3,5,6,7,9 , dan jika kita bentuk sebuah bilangan yang terdiri dari tiga angka dari anggota himpunan S itu, dimana pemakaian angka tidak boleh berulang, maka :

(1) Dalam berapa carakah bilangan tersebut dapat kita bentuk ?

(2) Dari semua hasil yang mungkin membentuk bilangan yang terdiri dari tiga angka tersebut berapa buah bilangan yang merupakan bilangan genap dan berapa buah bilangan yang merupakan bilangan ganjil ?

(3) Berapa buah bilangan yang habis dibagi dengan 5 ?

(4) Berapa buah bilangan yang kurang dari 400 ?

Penyelesaian :

(1) Semua angka anggota himpunan S dapat dipilih untuk dipakai sebagai ratusan, yaitu ada enam cara untuk dapat memilihnya. Kalau sudah ditetapkan salah satu anggota himpunan S sebagai ratusan, maka untuk memilih salah satu angka yang akan dipakai sebagai puluhan dapat dilakukan dalam lima cara, sebab angka yang sudah dipilih untuk dipakai sebagai ratusan tidak dapat dipakai lagi sebagai puluhan. Demikian juga halnya untuk memilih salah satu angka

yang akan dipakai sebagai satuan dapat dilaku kan lagi dalam empat cara.

Jadi sebuah bilangan yang terdiri dari tiga angka dari anggota himpunan S itu dapat kita bentuk dalam 6 x 5 x 4 = 120 cara.

(2) Untuk membuat bilangan yang terdiri dari tiga angka agar bilangan yang terbentuk itu bilangan genap maka yang dapat dipakai sebagai satuannya ada dua buah anggota himpunan S, yaitu 2 dan 6. Kalau sudah ditetapkan salah satu dari dua bilangan genap ini sebagai satuannya, maka untuk memilih salah satu angka yang akan dipakai sebagai ratusan dapat dilakukan dalam lima cara, sebab angka yang sudah dipilih untuk dipakai sebagai satuan tidak dapat dipakai lagi sebagai ratusan. Demikian juga halnya untuk memilih salah satu angka yang akan dipakai sebagai puluhan dapat dilakukan dalam empat cara . Jadi dari semua hasil yang mungkin membentuk bilangan yang terdiri dari tiga angka dari anggota himpunan S yang merupakan bilangan genap ada sebanyak 5 x 4 x 2 = 40 buah, dimana pemakaian angka pada masing-masing bilangan tidak boleh berulang.

Dengan cara yang sama hasil yang mungkin, membentuk bilangan yang terdiri dari tiga angka dari anggota himpunan S yang merupakan bilang an ganjil ada sebanyak 5 x 4 x 4 = 80 buah .

(3) Bilangan yang terdiri dari tiga angka yang di bentuk dari anggota himpunan S yang habis dibagi dengan 5 ada sebanyak 5 x 4 x 1 = 20 buah, dimana pemakaian angka pada setiap bilangan tidak boleh berulang.

(4) Bilangan yang terdiri dari tiga angka yang di bentuk dari anggota himpunan S yang kurang dari 400 ada sebanyak 2 x 5 x 4 = 40 buah .

F. SOAL - SOAL

1. Hitunglah : a) $9!$ b) $10!$ c) $12!$

2. Hitunglah : a) $\frac{16!}{14!}$ b) $\frac{14!}{11!}$ c) $\frac{8!}{10!}$

3. Sederhanakanlah :

a) $\frac{(n+1)!}{n!}$ b) $\frac{n!}{(n-2)!}$

c) $\frac{(n-1)!}{(n+2)!}$ d) $\frac{(n-r+1)!}{(n-r-1)!}$

4. Dalam berapa cara susunan tujuh orang dapat duduk :

a) pada sebuah bangku panjang ?

b) sekeliling sebuah meja bundar ?

5. Tiga lembar bendera dengan warna masing-masingnya merah, putih dan biru dinaikkan pada sebuah tiang. Setiap susunan yang berbeda dari tiga lembar bendera itu memberikan sinyal yang berbeda. Berapa buah sinyal yang berbeda dapat diberikan oleh ketiga lembar bendera tersebut ?

6. Jika dari tiga lembar bendera pada soal nomor 5 diambil dua lembar bendera untuk dinaikkan pada sebuah tiang, dimana setiap susunan yang berbeda memberikan sinyal yang berbeda, berapa buah sinyal dapat diberikan ?

7. Tiga orang siswa laki-laki dan dua orang siswa perempuan duduk pada sebuah bangku panjang.

   a) Dalam berapa cara yang berbeda kelima siswa tersebut dapat duduk ?

   b) Dalam berapa cara mereka dapat duduk jika siswa laki-laki dan siswa perempuan harus duduk pada kelompok jenis kelaminnya masing-masing ?

   c) Dalam berapa cara mereka dapat duduk jika siswa perempuan harus duduk mengelompok ?

8. Berapakah hasil permutasi yang dapat dibentuk dari semua huruf-huruf pada perkataan :

   a) teori   b) menanamkan

9. Dalam berapa cara empat orang Perancis, tiga orang Amerika, empat orang Italia dan dua orang India dapat duduk pada sebuah bangku panjang, sehingga mereka duduk tidak terpisah dari kelompok warga negara - nya ?

10. Berapa buah plat mobil dapat dibuat dimana pada setiap nomor terdiri dari dua huruf yang berbeda dan diikuti oleh tiga angka ?

11. a) Dapatkanlah banyaknya permutasi yang berbeda yang dapat dibentuk dari semua huruf-huruf pada perkataan " eleven " .
    b) Berapa buah dari hasil permutasi itu yang diakhiri dengan huruf e .
12. Kita akan memilih sebanyak empat orang dari sembilan orang laki-laki dan tiga orang wanita untuk suatu panitia.
    a) Dalam berapa carakah pemilihan empat orang itu dapat kita lakukan ?
    b) Jika pemilihan empat orang yang kita lakukan itu terdiri dari paling sedikit satu orang wanita , dalam berapa carakah pemilihan itu dapat kita lakukan ?
13. Seorang siswa mengundang teman-temannya untuk makan malam sebanyak lima orang dari 10 orang.
    Dalam berapa carakah undangan itu dapat dilakukannya?
14. Diketahui ada 10 buah titik yang terletak pada sebuah bidang, dimana tidak ada diantara tiga buah titik yang terletak pada sebuah garis .
    a) Berapa buah garis dapat kita buat ?
    b) Kalau A adalah salah satu titik dari 10 titik tersebut, berapa garis yang dapat kita buat yang tidak melalui titik A ?
    c) Berapa buah segitiga dapat kita buat dengan menggunakan 10 titik tersebut ?

15. Suatu ujian terdiri dari 13 pertanyaan. Seorang sis wa diwajibkan menjawab 10 pertanyaan dari 13 pertanyaan itu .

   a) Dalam berapa cara siswa tersebut dapat memilih - nya ?

   b) Jika pertanyaan nomor 1 dan nomor 2 wajib dija - wab oleh siswa tersebut, dalam berapa cara siswa dapat memilih jawaban 10 pertanyaan itu ?

16. Hitunglah n jika : a) $P_2^n = 72$ b) $P_4^n = 42\ P_2^n$.

17. Dalam sebuah kotak ada enam buah bola. Dalam berapa carakah pengambilan bola itu sekaligus dari enam bo la ini dapat dilakukan ?

18. Hitunglah : a) $\binom{n}{n-1}$ b) $\binom{n}{n-3}$

   c) $\binom{7}{5}$ d) $\binom{7}{0}$

19. Tentukanlah semua suku-suku hasil dari $(x + y)^6$.

20. Tentukanlah koeffisien x^3y^5 dari $(-2x + y)^8$.

21. Tentukanlah koeffisien x^4y^3 dari $(-2x^2 + y)^5$.

22. Hitunglah : a) $\binom{6}{3,2,1}$ b) $\binom{7}{4,3,0}$

23. Tentukanlah koeffisien $x^2y^3z^2$ dari $(x + y + z)^7$

24. Tentukanlah koeffisien dari $x^2y^4z^2$ dari $(-x+2y^2+z^2)^5$.

25. Tentukanlah ruang sampel S dari hasil lemparan dua buah dadu yang masing-masingnya berwarna merah (m) dan putih (p), kemudian tentukanlah kejadian A dari hasil lemparan itu dengan jumlah mata kedua dadu itu sembilan.

26. Jika B adalah kejadian dadu putih bermata empat atau enam dalam ruang sampel S pada soal nomor 25; tentukanlah :

a) Kejadian B

b) Banyak titik sampel $A \cap B$, dimana kejadian A seperti disebutkan pada soal nomor 25 .

c) Kejadian $A \cap B$.

d) Banyak titik sampel kejadian $\overline{A \cap B}$

27. Dalam suatu kotak terdapat tiga buah bola yang masing-masingnya dinomori dengan nomor 1, atau nomor 2 atau nomor 3.

a) Jika dua buah bola diambil satu persatu, dimana jika bola pertama telah terambil, maka sebelum dilakukan pengambilan bola yang kedua, bola pertama yang terambil tadi dikembalikan terlebih dahulu kedalam kotak, maka tentukanlah

(1) Ruang sampelnya

(2) Tentukanlah kejadian A dimana bola pertama yang terambil bernomor ganjil .

b) Jika dua buah bola diambil satu persatu, dimana jika bola pertama telah terambil, bola tersebut tidak dikembalikan kedalam kotak sebelum dilakukan pengambilan bola yang kedua, maka tentukanlah :

(1) Ruang sampelnya

(2) Tentukanlah kejadian B dimana bola pertama yang terambil bernomor ganjil .

c) Jika dua buah bola diambil sekaligus, maka tentukanlah :

(1) Ruang sampelnya

(2) Tentukanlah kejadian B, dimana jumlah nomor pada kedua bola yang terambil lebih besar dari tiga .

28. Kita hendak membuat nomor telepon yang terdiri dari lima angka dengan menggunakan anggota bilangan dasar sepuluh. Berapa buah nomor telepon dapat kita buat, dengan ketentuan angka pertama dari kiri tidak boleh 0 .

B A B III

PENGERTIAN KEMUNGKINAN

A. FREKWENSI RELATIF

1. Frekwensi relatif suatu titik sampel

Misalkan sebuah mata uang ditoss sebanyak 100 kali dengan muka m keluar sebanyak 51 kali dan belakang b keluar sebanyak 49 kali. Dalam hal ini dikatakan frekwensi terjadinya titik sampel m yang dinyatakan dengan $f(m) = 51$.

Jika frekwensi terjadinya titik sampel m dibagi dengan banyak lemparan mata uang yang dilakukan , yaitu dibagi dengan 100, maka hasil yang diperoleh disebut frekwensi relatif terjadinya titik sampel m. Jika $f_r(m)$ menyatakan frekwensi relatif terjadinya titik sampel m, maka $f_r(m) = \frac{51}{100}$.

Dengan demikian diperoleh pula untuk titik sampel belakang b, $f(b) = 49$, dan $f_r(b) = \frac{49}{100}$.

Hasil lemparan 100 kali dari sebuah mata uang tersebut diatas dapat disimpulkan pada tabel dibawah ini.

Titik Sampel	f	f_r
m	51	$\frac{51}{100}$
b	49	$\frac{49}{100}$
Jumlah	n= f=100	f_r=1

Pada tabel diatas dapat dilihat bahwa jumlah semua frekwensi relatif terjadinya titik sampel muka m dan frekwensi terjadinya titik sampel belakang b, sama dengan 1 .

2. <u>Frekwensi relatif suatu kejadian</u>

Misalkan sebuah dadu ditoss sebanyak 36 kali dengan kejadian A adalah mata 3 atau mata 5 yang keluar, dimana mata 3 keluar sebanyak 4 kali dan mata 5 keluar sebanyak 7 kali. Dalam hal ini frekwensi relatif keluarnya mata 3 adalah $\frac{4}{36}$, frekwensi relatif keluarnya mata 5 adalah $\frac{7}{36}$ dan frekwensi relatif kejadian A adalah $\frac{11}{36}$.

Kejadian $\bar{A} = \{1,2,4,6\}$. Frekwensi relatif kejadian $\bar{A} = \frac{25}{36}$.

Dari (1) dan (2) dapat disimpulkan tentang frekwensi relatif sebagai berikut :

"Jika kita lakukan suatu eksperimen sebanyak n kali dengan hasil ruang sampel $S = \{a_1, a_2, \ldots a_i, a_{i+1}, \ldots a_t\}$ dan jika A suatu kejadian dari hasil eksperimen itu dengan $A = \{a_i, a_{i+1}, \ldots a_{i+k}\}$, dimana a_i dapat terjadi sebanyak m_i kali, a_{i+1} dapat terjadi sebanyak m_{i+1} kali,... a_{i+k} dapat terjadi sebanyak m_{i+k} kali dan jika $m = m_i + m_{i+1} + \ldots + m_{i+k}$, maka frekwensi relatif kejadian A adalah $\frac{m}{n}$ dan frekwensi relatif kejadian $\bar{A} = \frac{n - m}{n}$

B. KEMUNGKINAN

Jika pada mata uang yang ditoss pada A.1. diatas, keluarnya muka m dan keluarnya belakang b mempunyai kesempatan yang sama untuk terjadi (equally likely) , dan jika eksperimen itu dilakukan 100 kali, ada harapan muka m akan keluar 50 kali dan belakang b akan keluar 50 kali, atau dengan perkataan lain kita mempunyai harapan muka m akan keluar $\frac{1}{2}$ dari jumlah eksperimen yang dilakukan dan belakang b juga akan keluar $\frac{1}{2}$ dari jumlah eksperimen yang dilakukan.

Makin banyak jumlah eksperimen yang kita lakukan maka frekwensi relatif keluarnya muka (atau belakang) makin mendekati $\frac{1}{2}$. Dalam hal ini dikatakan bahwa kemungkinan keluarnya muka m sama dengan $\frac{1}{2}$, demikian juga kemungkinan keluarnya belakang b sama dengan $\frac{1}{2}$. Jika P(m) menyatakan kemungkinan keluarnya muka m dan P(b) menyatakan kemungkinan keluarnya belakang b, maka $P(m) = P(b) = \frac{1}{2}$.

Selanjutnya kita perhatikan hasil toss sebuah dadu. Kita tahu hasil yang mungkin keluar adalah mata 1 atau mata 2 atau mata 3 atau mata 4 atau mata 5 atau mata 6. Jadi ruang sampelnya adalah $S = \{1,2,3,4,5,6\}$. Misalkan masing-masing mata dadu itu mempunyai kesempatan yang sama untuk terjadi, maka makin banyak jumlah eksperimen yang kita lakukan maka frekwensi relatif keluarnya masing-masing mata dadu itu mendekati $\frac{1}{6}$.

Dalam hal ini dikatakan bahwa kemungkinan keluarnya masing-masing mata dadu itu sama dengan $\frac{1}{6}$.
Jadi $P(1) = P(2) = P(3) = P(4) = P(5) = P(6) = \frac{1}{6}$.

Sekarang dapatlah kita definisikan kemungkinan itu sebagai berikut :
"Kemungkinan adalah harga batas (limit) dari frekwensi relatif suatu kejadian pada suatu eksperimen, jika eksperimen itu dilakukan tak terhingga".

C. KEMUNGKINAN SUATU KEJADIAN PADA RUANG SAMPEL

Kita sudah membicarakan ruang sampel dan kejadian pada bab II .
Pada bagian ini kita mempelajari kemungkinan suatu kejadian pada ruang sampel. Misalkan ruang sampel S adalah hasil toss dua buah mata uang sekaligus, maka ruang sampel S dapat dilihat pada tabel dibawah ini

Mata uang pertama / Mata uang kedua	m	b
m	(m,m)	(m,b)
b	(b,m)	(b,b)

Jadi S = (m,m) , (m,b) ,(b,m) , (b,b) mempunyai empat buah titik sampel. Jika kedua mata uang itu equally likely, yaitu m dan b mempunyai kesempatan yang sama untuk keluar, maka kemungkinan keluarnya masing - masing titik sampel tersebut adalah $\frac{1}{4}$.

Jadi $P(m,m) = P(m,b) = P(b,m) = P(b,b) = \frac{1}{4}$.

Jika kita misalkan A adalah kejadian keluarnya hasil yang berbeda dari kedua mata uang itu maka $A = \{(m,b),(b,m)\}$

$P(A) = P(m,b) + P(b,m) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$.

Dengan demikian dapat kita definisikan kemungkinan untuk suatu kejadian sebagai berikut :

"Jika suatu ruang sampel S mempunyai n buah titik sampel, dimana semua titik sampel itu mempunyai kesempatan yang sama untuk terjadi dan jika suatu kejadian A pada ruang sampel itu mempunyai m buah titik sampel, maka kemungkinan terjadinya kejadian A adalah :

$P(A) = \frac{m}{n}$ dengan $m \leqslant n$ " .

Bila kejadian yang bukan A dinyatakan dengan $\bar{A}$, maka kejadian $\bar{A}$ ini mempunyai (n-m) titik sampel.

Jadi $P(\bar{A}) = \frac{n-m}{n} = 1 - \frac{m}{n} = 1 - P(A)$.

Jika $m = 0$, maka ini berarti kejadian A tidak mempunyai titik sampel. Dalam hal ini dikatakan kejadian A tidak terjadi. Jika $m = 0$, maka $P(A) = \frac{0}{n} = 0$.

Jadi jika $P(A) = 0$, maka kejadian A pasti tidak terjadi, atau dengan perkataan lain kejadian A mustahil terjadi, oleh karena itu $P(A) = 0$ disebut juga kemustahilan .

Jika $m = n$, maka ini berarti banyak anggota titik sampel kejadian A sama dengan banyak titik sampel dari ruang sampel S , dalam hal ini kejadian A pasti terjadi .

Akibatnya $P(A) = \frac{n}{n} = 1$. Jadi jika $P(A) = 1$, maka ke jadian A pasti terjadi, oleh karena itu $P(A) = 1$ dise - but juga kepastian.

Jadi harga kemungkinan suatu kejadian selalu terletak dalam interval $0 \leqslant P \leqslant 1$.

Kita dapat mengombinasikan dua kejadian atau lebih untuk membentuk kejadian-kejadian baru dengan memakai operasi himpunan, yaitu :

1. $A \cup B$ adalah suatu kejadian yang terjadi jika dan hanya jika kejadian A terjadi atau kejadian B terjadi atau keduanya terjadi.
2. $A \cap B$ adalah suatu kejadian yang terjadi jika dan hanya jika kejadian A terjadi dan kejadian B terjadi .
3. A^c atau $\bar{A}$ (komplemen dari kejadian A atau bukan kejadian A) adalah suatu kejadian jika dan hanya jika kejadian A tidak terjadi .

Dua buah kejadian A dan B disebut saling mengasingkan (mutually exlusive) jika kedua kejadian ini tidak mempunyai titik sampel persekutuan atau $A \cap B = \emptyset$. Dalam buku matematika SMA jilid 2 kejadian macam ini disebut juga saling lepas.

Contoh soal :

1. Sebuah dadu ditoss.

   Pertanyaan :

   a) Tentukanlah ruang sampel S

b) Jika A adalah kejadian sebuah bilangan genap yang keluar, B adalah kejadian sebuah bilangan ganjil yang keluar dan C adalah kejadian sebuah bilangan prima yang keluar dari hasil dari hasil eksperi - men tersebut, tentukanlah masing-masing kejadian tersebut.

c) Tentukanlah kejadian $A \cup C$, dan $B \cup C$.

d) Tentukanlah kejadian $\overline{C}$, $\overline{A \cup C}$, dan $\overline{B \cup C}$

e) Apakah kejadian A dan B saling mengasingkan ?

f) Hitunglah : $P(A)$, $P(B)$, $P(C)$, $P(A \cup B)$, $P(A \cup C)$, $P(B \cup C)$, $P(\overline{C})$, $P(\overline{A \cup C})$, $P(\overline{B \cup C})$.

Penyelesaian :

a) $S = \{1,2,3,4,5,6\}$

b) $A = \{2,4,6\}$. Ingatlah kembali pengertian kejadian. Mengingat kejadian A itu adalah keluarnya sebuah bilangan genap, maka peristiwa tersebut yang mungkin dapat terjadi adalah mata 2 atau mata 4 atau mata 6 . Jelaslah bahwa kejadian A itu merupakan sebuah himpunan yang merupakan himpunan bagian dari S. Setiap keluarnya sebuah bilangan genap dari hasil eksperimen tersebut adalah anggota himpunan A .

Dengan cara yang sama, maka $B = \{1,3,5\}$, dan $C = \{2,3,5\}$

c) $A \cup C = \{2,3,4,5,6\}$ dan $B \cup C = \{1,2,3,5\}$

d) $\bar{C} = \{1,4,6\}$, $\overline{A \cup C} = \{1\}$, $\overline{B \cup C} = \{4,6\}$

e) $A \cap B = \emptyset$, maka kejadian A dan B saling mengasing kan atau saling lepas .

f) $P(A) = \frac{3}{6}$, $P(B) = \frac{3}{6}$, $P(C) = \frac{3}{6}$, $P(A \cup B) = \frac{6}{6} = 1$,

$P(A \cup C) = \frac{5}{6}$, $P(B \quad C) = \frac{4}{6}$, $P(\bar{C}) = 1 - P(C) = \frac{3}{6}$

Harga $P(\bar{C})$ ini dapat juga dihitung langsung dengan mengamati kejadian $\bar{C}$, kemudian banyak titik sam - pelnya dibandingkan dengan banyak titik sampel S .

Dengan cara yang sama diperoleh :

$P(\overline{A \cup C}) = 1 - P(A \cup C) = 1 - \frac{5}{6} = \frac{1}{6}$.

$P(\overline{B \cup C}) = 1 - P(B \cup C) = 1 - \frac{4}{6} = \frac{2}{6}$

2. Tiga mata uang ditoss sekaligus. Kejadian A menunjukkan muka m keluar paling sedikit 1, dan kejadian B me nunjukkan belakang b ketiganya keluar atau muka m ketiganya keluar .

Pertanyaan :

a) Tentukanlah kejadian A dan B .

b) Tentukanlah kejadian $A \cup B$ dan $A \cap B$.

c) Hitunglah $P(A)$, $P(B)$, $P(A \cup B)$, $P(A \cap B)$, $P(\bar{A})$, $P(\bar{B})$ $P(\overline{A \cup B})$, $P(\overline{A \cap B})$.

Penyelesaian :

Masing-masing mata uang mempunyai bentuk ruang sampel $\{m,b\}$.

Jika ketiga mata uang itu dilemparkan sekaligus, maka ruang sampelnya merupakan perkalian tiga buah himpunan $\{m,b\}$, yaitu :

$$S = \{m,b\} \times \{m,b\} \times \{m,b\} .$$

$$= \{m,b\} \times \{(m,m) , (m,b) , (b,m) , (b,b)\}$$

$$= \{(m,m,m) , (m,m,b) , (m,b,m) , (m,b,b) , (b,m,m) (b,m,b) , (b,b,m) , (b,b,b)\} .$$

Dari ruang sampel S dapat dilihat, bahwa :

a) $A = \{(m,m,m) , (m,m,b), (m,b,m), (m,b,b), (b,m,m), (b,m,b) , (b,b,m)\}$

$B = \{(m,m,m), (b,b,b)\}$

b) $A \cup B = \{(m,m,m), (m,m,b), (m,b,m), (m,b,b),(b,m,m), (b,m,b), (b,b,m), (b,b,b)\} .$

$= S$

$A \cap B = \{(m,m,m)\}$

c) $P(A) = \frac{7}{8}$, $P(B) = \frac{2}{8}$, $P(A \cup B) = \frac{8}{8} = 1$,

$P(A \cap B) = \frac{1}{8}$, $P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{7}{8} = \frac{1}{8}$,

$P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 1 - \frac{2}{8} = \frac{6}{8}$,

$P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \quad B) = 1 - 1 = 0$.

$P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \quad B) = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$.

D. AKSIOMA KEMUNGKINAN

Misalkan S sebuah ruang sampel $\mathcal{E}$ adalah klas dari kejadian-kejadian, dan P adalah harga fungsi yang real pada $\mathcal{E}$. Maka P disebut sebuah fungsi kemungkinan, dan P(A) disebut kemungkinan dari kejadian A, jika aksioma berikut dipenuhi, yaitu :

1. Untuk setiap kejadian A, maka $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$.
2. $P(S) = 1$.
3. Jika A dan B adalah dua buah kejadian yang saling me ngasingkan (lepas), maka berlaku :

   $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.
4. Jika $A_1, A_2 \ldots A_n$ merupakan kejadian-kejadian yang saling mengasingkan, maka :

   $P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \ldots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots P(A_n)$.

Dari aksioma-aksioma ini dapat diturunkan beberapa buah dalil, yaitu :

1. Jika $\emptyset$ adalah kejadian yang merupakan himpunan kosong maka $P(\emptyset) = 0$.

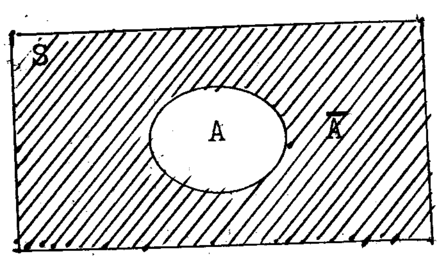
   Bukti : Misalkan A suatu kejadian, maka A dan $\emptyset$ saling mengasingkan dan $A \cup \emptyset = A$

   Dengan menggunakan aksioma 3) maka $P(A \cup \emptyset) = P(A) + P(\emptyset)$

   $A \cup \emptyset = A$, maka $P(A \cup \emptyset) = P(A)$.

   Jadi $P(A) = P(A) + P(\emptyset)$

   Dengan demikian $P(\emptyset) = 0$.
2. Jika $\bar{A}$ atau A^c adalah komplemen dari suatu kejadian A, maka $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.



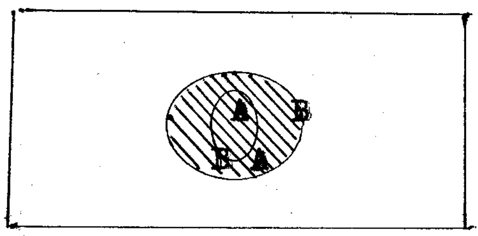
Bukti : Perhatikanlah diagram Venn diatas, dimana S adalah ruang sampel yang memuat kejadian A . Dapat dilihat bahwa $S = A \cup \bar{A}$ $\quad P(S) = P(A \cup \bar{A})$

A dan $\bar{A}$ adalah dua kejadian yang saling mengasingkan. Menurut aksioma 3), maka

$$P(A \cup \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A})$$

$$\begin{aligned} \text{Jadi } P(S) &= P(A) + P(\bar{A}) \\ 1 &= P(A) + P(\bar{A}) \\ P(\bar{A}) &= 1 - P(A) \; . \end{aligned}$$

3. Jika $A \subset B$ maka $P(A) \leqslant P(B)$.

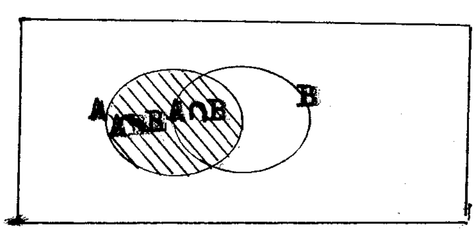


Bukti : Perhatikanlah diagram Venn diatas ini. Kejadian A dan $B \setminus A$ merupakan dua kejadian yang saling mengasingkan. $B = A \cup (B \setminus A)$

$$P(B) = P(A \cup (B \setminus A)) = P(A) + P(B \setminus A)$$

$$P(A) = P(B) - P(B \setminus A) \quad . \text{ Jadi } P(A) \leqslant P(B) \; .$$

4. Jika A dan B adalah dua kejadian yang tidak saling mengasingkan, maka $P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$.



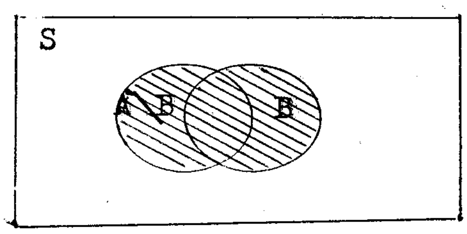
Bukti : Perhatikanlah diagram Venn diatas.

Kejadian $A \setminus B$ dan kejadian $A \cap B$ merupakan dua kejadian yang saling mengasingkan, sedangkan kejadian $A = (A \setminus B) \cup (A \cap B)$

$P(A) = P(A \setminus B) + P(A \cap B)$

Jadi $P(A \cap B) = P(A) - P(A \setminus B)$.

5. Jika A dan B adalah dua kejadian yang tidak saling mengasingkan, maka $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.



Bukti : $A \setminus B$ dan B merupakan dua kejadian yang saling mengasingkan, seperti terlihat pada diagram Venn diatas ini.

Kejadian $A \cup B = (A \setminus B) \cup B$

Jadi $P(A \cup B) = P(A \setminus B) + P(B)$

$= P(A) - P(A \cap B) + P(B)$

Dengan demikian jelaslah $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Contoh soal :

1. Diketahui ruang sampel $S = \{1,2,3,4,5,6\}$

Kejadian $A = \{1,2\}$

$B = \{4,5,6\}$

$C = \{3,4,5\}$

Pertanyaan :

a) Hitunglah $P(A)$, $P(B)$, $P(C)$, $P(\bar{A})$

b) Apakah A dan B merupakan dua kejadian yang saling mengasingkan ?

c) Hitunglah $P(A \cup B)$

d) Apakah kejadian B dan C merupakan dua kejadian yang saling mengasingkan ?

e) Hitunglah $P(B \cup C)$

Penyelesaian :

a) $P(A) = \frac{2}{6}$, $P(B) = \frac{3}{6}$, $P(C) = \frac{3}{6}$

$P(\bar{A}) = 1 - \frac{2}{6} = \frac{4}{6}$

b) $A \cap B = \emptyset$. Jadi $P(A \cap B) = 0$. Dengan demikian A dan B merupakan dua kejadian yang saling menga - singkan.

c) $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, sebab A dan B merupakan dua kejadian yang saling mengasingkan .

$P(A \cup B) = \frac{2}{6} + \frac{3}{6} = \frac{5}{6}$.

d) $B \cap C = \{4,5\} \neq \emptyset$. Jadi $P(B \cap C) \neq 0$.

Dengan demikian jelaslah kejadian B dan C merupakan dua kejadian yang tidak saling mengasingkan .

e) $B \cap C = \{4,5\}$. $P(B \cap C) = \frac{2}{6}$

$$
\begin{aligned}
P(B \cup C) &= P(B) + P(C) - P(B \cap C) \\
&= \frac{3}{6} + \frac{3}{6} - \frac{2}{6} \\
&= \frac{4}{6} .
\end{aligned}
$$

Cara lain menghitung $P(B \cup C)$ adalah dengan menghi - tung langsung banyak titik sampel $B \cup C$, yaitu setelah dihitung banyak titik sampel $B \cup C$ ada 4 buah . Jadi $P(B \cup C) = \frac{4}{6}$.

2. Suatu sidang lembaga kemahasiswaan yang dikuti oleh lembaga kemahasiswaan IKIP dan Unand diadakan di Padang. $\frac{1}{4}$ dari jumlah mahasiswa yang hadir adalah dari lembaga kemahasiswaan IKIP dan yang lainnya dari lembaga kemahasiswaan Unand. 50% dari jumlah mahasiswa IKIP yang hadir adalah wanita dan 40% dari jumlah mahasiswa Unand yang hadir juga wanita. Jika secara random dipilih seorang dari anggota sidang untuk memimpin sidang, berapakah kemungkinannya yang terpilih itu seorang wanita atau seorang mahasiswa IKIP ?

Penyelesaian :

Misalkan A adalah kejadian seorang wanita terpilih , dan B kejadian seorang mahasiswa IKIP terpilih, maka kejadian A dan B tidak saling mengasingkan .

Jadi $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$P(A)$ = Kemungkinan terpilihnya mahasiswa wanita IKIP + kemungkinan terpilihnya mahasiswa wanita Unand .

$= 50\% \times \frac{1}{4} + 40\% \times \frac{1}{4}$

$= \frac{9}{20}$.

$P(B) = \frac{1}{2}$

$A \cap B$ adalah kejadian mahasiswa IKIP yang wanita.

Jadi $P(A \cap B) = 50\% \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$
$$= \frac{9}{20} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}$$
$$= \frac{14}{20}$$

B. KEJADIAN BEBAS (BERDIRI SENDIRI)

Dua kejadian dikatakan bebas (berdiri sendiri) jika terjadi atau tidak terjadinya kejadian yang pertama tidak mempengaruhi terjadi atau tidak terjadinya kejadian yang kedua. Kejadian yang saling mengasingkan tidak sama dengan kejadian bebas.

Sifat : Jika A dan B merupakan dua kejadian bebas, maka

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) .$$

Bila kejadian A dan B tidak memenuhi ketentuan ini, maka kedua kejadian itu merupakan dua kejadian bebas.

Contoh soal :

1. Diketahui : Ruang sampel $S = \{1,2,3,4,5,6\}$
   Kejadian $A = \{1,2,3\}$
   Kejadian $B = \{3,4,5\}$

   Ditanyakan : Apakah kejadian A dan B merupakan dua kejadian bebas ?

   Penyelesaian :

   $A \cap B = 3$. Jadi $P(A \cap B) = \frac{1}{6}$.

   $P(A) = \frac{3}{6}$, $P(B) = \frac{3}{6}$. $P(A) \times P(B) = \frac{9}{36}$.

Jadi $P(A \cap B) \neq P(A) \times P(B)$.

Dengan demikian kejadian A dan B tidak merupakan dua kejadian bebas.

2. Dua buah dadu ditoss sekaligus, dimana warna masing-masing dadu tersebut merah dan putih .

x menyatakan mata dadu merah dan y menyatakan mata dadu putih. A adalah kejadian mata dadu merah keluar dengan syarat $x \leq 3$. B adalah kejadian mata dadu putih keluar dengan $y \geq 4$.

Ditanyakan : 1) Tentukan kejadian A

b) Tentukan kejadian B

c) Hitunglah P(A)

d) Hitunglah P(A)

e) Tentukanlah kejadian $A \cap B$

f) Hitunglah $P(A \cap B)$

g) Apakah kejadian A dan B merupakan dua kejadian bebas ?

Penyelesaian :

x \ y	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

a) Dari ruang sampel S dapat kita lihat bahwa, kejadian A = $\{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),$
$(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),$
$(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6)\}$

b) Kejadian B = $\{(1,4),(1,5),(1,6),(2,4),(2,5),$
$(2,6),(3,4),(3,5),(3,6),(4,4),$
$(4,5),(4,6),(5,4),(5,5),(5,6),$
$(6,4),(6,5),(6,6)\}$

c) $P(A) = \frac{18}{36}$.

d) $P(B) = \frac{18}{36}$

e) Kejadian $A \cap B = \{(1,4),(1,5),(1,6),(2,4),(2,5),$
$(2,6),(3,4),(3,5),(3,6)\}$

f) $P(A \cap B) = \frac{9}{36}$

g) $P(A) \times P(B) = \frac{18}{36} \times \frac{18}{36} = \frac{9}{36}$.

Jadi $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

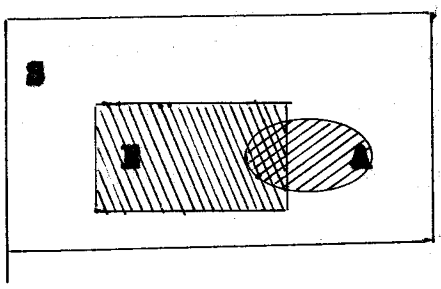
Dengan demikian A dan B merupakan dua kejadian bebas.

F. KEMUNGKINAN BERSYARAT

Misalkan E suatu kejadian dalam ruang sampel S dengan $P(E) > 0$.

Kemungkinan terjadinya kejadian A jika kejadian E diketahui (disebut juga kemungkinan bersyarat A jika kejadian E diketahui) dituliskan dengan $P(A/E)$ dan didefinisikan dengan $P(A/E) = \frac{P(A \cap E)}{P(E)}$.

Seperti terlihat pada diagram Venn dibawah ini $P(A / B)$ merupakan kemungkinan relatif terjadinya kejadian A da - lam kejadian B, dimana kejadian B dianggap sebagai ruang sampelnya dari kejadian A yang terjadi .



Misalkan : S merupakan ruang sampel yang terbatas,

$n(S)$ menyatakan banyak titik sampel S,

$n(A)$ menyatakan banyak titik sampel kejadian A,

$n(B)$ menyatakan banyak titik sampel kejadian B,

$n(A \quad B)$ menyatakan banyak titik sampel kejadian

A B, maka

$$P(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(S)}$$

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)}$$

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad \text{(definisi)}$$

$$= \frac{\frac{n(A \cap B)}{n(S)}}{\frac{n(B)}{n(S)}}$$

$$= \frac{n(A \cap B)}{n(B)}$$

Jadi $P(A/B) = \dfrac{n(A \cap B)}{n(B)}$

Contoh soal :

1. Misalkan S adalah ruang sampel dari hasil toss dua buah dadu. Misalkan lagi A adalah kejadian jika jumlah mata kedua dadu itu 6 dan B adalah kejadian jika paling sedikit satu dari kedua dadu itu bermata 2 .

   Pertanyaan :

   a) Tentukanlah kejadian A
   b) Tentukanlah kejadian B
   c) Hitunglah n(A)
   d) Hitunglah n(B)
   e) Hitunglah n(S)
   f) Hitunglah P(A)
   g) Hitunglah P(B)
   h) ~~Tentukanlah~~ kejadian $A \cap B$
   i) Hitunglah $n(A \cap B)$
   j) Hitunglah $P(A \cap B)$
   k) Hitunglah P(A/B) .

Penyelesaian :

Ruang sampel S dari hasil lemparan kedua dadu itu seperti terlihat pada tabel dibawah ini :

II \ I	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

a) $A = \{(5,1),(4,2),(3,3),(2,4),(1,5)\}$

b) $B = \{(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),(1,2),(3,2),$
$(4,2),(5,2),(6,2)\}$

c) $n(A) = 5$, d) $n(B) = 11$, e) $n(S) = 36$

f) $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{5}{36}$

g) $P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{11}{36}$

h) $A \cap B = \{(4,2),(2,4)\}$, i) $n(A \cap B) = 2$

j) $P(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(S)} = \frac{2}{36}$

k) $P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{2}{36} \times \frac{36}{11} = \frac{2}{11}$

Cara lain : $P(A/B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} = \frac{2}{11}$.

Jika A dan B merupakan dua kejadian bebas, maka terjadi tidak terjadinya kejadian A tidak dipengaruhi oleh ter - jadi atau tidak terjadinya oleh kejadian B.

Dengan demikian $P(A / B) = P(A)$

$P(A / B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

$P(A \cap B) = P(A / B) \times P(B)$

$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

Jadi kejadian bebas yang kita bicarakan pada bagian D di atas disini terbukti kebenaran rumus tersebut .

G. PERHITUNGAN KEMUNGKINAN PADA SAMPEL

Misalkan dalam suatu kotak terdapat 10 kelereng yang terdiri dari 6 buah kelereng berwarna merah (m) dan 4 buah kelereng berwarna putih (p). Setelah kelereng dalam kotak itu dikocok, kita ambil 3 buah kelereng. Berapakah kemungkinan terambilnya ketiga kelereng tersebut 1 merah, 2 putih ?

Pengambilan 3 buah kelereng itu dapat kita lakukan dengan cara pengambilan sampel tanpa pengembalian atau dengan cara pengambilan sampel dengan pengembalian .

1. Menghitung kemungkinan terambilnya 3 buah kelereng yang terdiri dari 1 merah, 2 putih dengan cara pengambilan sampel tanpa pengembalian.

   a) Kelereng pertama diambil secara random, diikuti dengan pengambilan kelereng yang kedua dan terakhir diikuti dengan pengambilan kelereng yang ketiga .

   b) Ketiga kelereng diambil sekaligus .

   a) Dalam hal yang pertama ruang sampel eksperimennya terdiri dari 8 titik sampel, yaitu :

   $$S = \{(p,p,p),(p,p,m),(p,m,p),(m,p,p),(p,m,m),(m,p,m),(m,m,p),(m,m,m)\}$$

   Nilai kemungkinan masing-masing titik sampelnya adalah sebagai berikut :

   $$P(p,p,p) = P\{\text{kelereng pertama putih}\} \times P\{\text{kelereng kedua putih} \mid \text{kelereng pertama putih}\} \times P\{\text{kelereng ketiga putih} \mid \text{kelereng pertama putih, kelereng kedua putih}\}$$

   $$= \frac{4}{10} \times \frac{3}{9} \times \frac{2}{8} = \frac{24}{720}$$

$P(p,p,m) = P \{$kelereng pertama putih$\}$ x

$P \{$kelereng kedua putih | kelereng pertama putih$\}$ x

$P \{$kelereng ketiga merah | kelereng pertama putih, kelereng kedua putih$\}$

$= \frac{4}{10} \times \frac{3}{9} \times \frac{6}{8}$

$= \frac{72}{720}$

$P(p,m,p) = P \{$kelereng pertama putih$\}$ x

$P \{$kelereng kedua merah | kelereng pertama putih$\}$ x

$P \{$kelereng ketiga putih | kelereng pertama putih, kelereng kedua merah$\}$

$= \frac{4}{10} \times \frac{6}{9} \times \frac{3}{8}$

$= \frac{72}{720}$

$P(m,p,p) = P \{$kelereng pertama merah$\}$ x

$P \{$kelereng kedua putih kelereng pertama merah$\}$ x

$P \{$kelereng ketiga putih kelereng pertama merah, kelereng kedua putih$\}$

$= \frac{6}{10} \times \frac{4}{9} \times \frac{3}{8}$

$= \frac{72}{720}$

$P(p,m,m) = P\{\text{kelereng pertama putih}\} \times$

$P\{\text{kelereng kedua merah} \mid \text{kelereng pertama putih}\} \times$

$P\{\text{kelereng ketiga merah} \mid \text{kelereng pertama putih, kelereng kedua merah}\}$

$= \frac{4}{10} \times \frac{6}{9} \times \frac{5}{8}$

$= \frac{120}{720}$

$P(m,p,m) = P\{\text{kelereng pertama merah}\} \times$

$P\{\text{kelereng kedua putih} \mid \text{kelereng pertama merah}\} \times$

$P\{\text{kelereng ketiga merah} \mid \text{kelereng pertama merah, kelereng kedua putih}\}$

$= \frac{6}{10} \times \frac{4}{9} \times \frac{5}{8}$

$= \frac{120}{720}$

$P(m,m,p) = P\{\text{kelereng pertama merah}\} \times$

$P\{\text{kelereng kedua merah} \mid \text{kelereng pertama merah}\} \times$

$P\{\text{kelereng ketiga putih} \mid \text{kelereng pertama merah, kelereng kedua merah}\}$

$= \frac{6}{10} \times \frac{5}{9} \times \frac{4}{8}$

$= \frac{120}{720}$

$P(m,m,m) = P\{\text{kelereng pertama merah}\} \times$

$P\{\text{kelereng kedua merah} \mid \text{kelereng pertama merah}\} \times$

P {kelereng ketiga merah | kelereng pertama merah kelereng kedua merah}

$$= \frac{6}{10} \times \frac{5}{9} \times \frac{4}{8}$$

$$= \frac{120}{720}$$

Dapat kita perhatikan bahwa jumlah semua kemungkinannya sama dengan 1 .

Kemungkinan terambilnya 3 kelereng yang terdiri dari 1 merah, 2 putih adalah :

$$P(p,p,m) + P(p,m,m) + P(m,p,p) = \frac{72}{720} + \frac{72}{720} + \frac{72}{720}$$

$$= \frac{216}{720}$$

b) Dalam hal kedua ini ruang sampel eksperimennya terdiri dari 4 titik sampel, yaitu :

$S = \{\{p,p,p\} , \{p,p,m\} , \{p,m,m\} , \{m,m,m\}\}$

Disini tidak ada perbedaan ketiga titik sampel : (p,p,m) , (p,m,p) dan (m,p,p) . Demikian juga ketiga titik sampel (p,m,m) , (m,p,m) dan (m,m,p) . Hal itu disebabkan oleh karena ketiga kelereng itu diambil sekaligus .

$P(\{p,p,p\}) = \dfrac{\text{Banyak cara pengambilan 3 kelereng putih sekaligus dari 4 kelereng putih}}{\text{Banyak cara pengambilan 3 kelereng sekaligus dari 10 kelereng}}$

$$= \frac{C_3^4}{C_3^{10}}$$

$$= \frac{4!}{3!1!} \times \frac{3!7!}{10!}$$

$$= 4 \times \frac{6}{8 \times 9 \ 10}$$

$$= \frac{24}{720}$$

$P\left(\{p,p,m\}\right) = \dfrac{\text{Banyak cara pengambilan 3 kelereng sekaligus yang terdiri dari 2 kelereng putih dari 4 kelereng putih dan 1 kelereng merah dari 6 kelereng merah}}{\text{Banyak cara cara pengambilan 3 kelereng sekaligus dari 10 kelereng}}$

$$= \frac{C^4_2 \times C^6_1}{C^{10}_3}$$

$$= \frac{\frac{4!}{2!2!} \times \frac{6!}{1!5!}}{\frac{10!}{3!7!}}$$

$$= \frac{216}{720}$$

$P\left(\{p,m,m\}\right) = \dfrac{\text{Banyak cara pengambilan 3 kelereng sekaligus yang terdiri dari 1 kelereng putih dari 4 kelereng putih dan 2 kelereng merah dari 6 kelereng merah.}}{\text{Banyak cara pengambilan 3 kelereng sekaligus dari 10 kelereng}}$

$$= \frac{C^4_1 \times C^6_2}{C^{10}_3}$$

$$= \frac{\frac{4!}{1!3!} \times \frac{6!}{2!4!}}{\frac{10!}{3!7!}}$$

$$= \frac{360}{720}$$

$P(\{m,m,m\})$ = $\dfrac{\text{Banyak cara pengambilan 3 kelereng merah sekaligus dari 6 kelereng merah}}{\text{Banyak cara pengambilan 3 kelereng sekaligus dari 10 kelereng}}$

$$= \frac{C_3^6}{C_3^{10}}$$

$$= \frac{6!}{3!3!} \times \frac{3!7!}{10!}$$

$$= \frac{120}{720}$$

Dapat kita perhatikan bahwa jumlah semua kemungkinannya juga sama dengan 1

Kemungkinan terambilnya 3 kelereng yang terdiri dari 1 merah, 2 putih adalah : $P(\{p,p,m\}) = \frac{216}{720}$

Dari a) dan b) ini terlihat bahwa :

$P(p,p,m) + P(p,m,m) + P(m,p,p) = P(\{p,p,m\}) = \frac{216}{720}$

2. Menghitung kemungkinan terambilnya 3 buah kelereng yang terdiri dari 1 merah, 2 putih dengan cara pengambilan sampel dengan pengembalian.

Pada cara ini kelereng yang terambil secara random 1 buah dicatat hasilnya (yaitu merah atau putih), kemudian dikembalikan kedalam kotak dan setelah dikocok, diambil lagi 1 buah dan setelah dicatat hasilnya, kelereng tersebut dikembalikan lagi kedalam kotak. Kelereng dalam kotak dikocok lagi kemudian diambil lagi 1 buah .

9 Ruang sampel eksperimennya adalah :

$$S = \{(p,p,p)\ ,\ (p,p,m)\ ,\ (p,m,p)\ ,\ (m,p,p)\ ,\ (p,m,m)\ ,\ (m,p,m)\ ,\ (m,m,p)\ ,\ (m,m,m)\}$$

Karena sebelum kelereng kedua diambil, kelereng pertama dikembalikan kedalam kotak, maka jumlah dan keadaan kelereng dalam kotak pada pengambilan kelereng kedua seperti semula, demikian juga keadaan kelereng dalam kotak pada waktu pengambilan kelereng yang ketiga.

Dengan demikian maka :

$$P(p,p,p) = P(\{\text{kelereng pertama putih}\}) \cdot P(\{\text{kelereng kedua putih}\}) \cdot P(\{\text{kelereng ketiga putih}\}) .$$

$$= \frac{4}{10} \times \frac{4}{10} \times \frac{4}{10}$$

$$= \frac{64}{1000}$$

$$P(p,p,m) = P(\{\text{kelereng pertama putih}\}) \cdot P(\{\text{kelereng kedua putih}\}) \cdot P(\{\text{kelereng ketiga merah}\}) .$$

$$= \frac{4}{10} \times \frac{4}{10} \times \frac{6}{10}$$

$$= \frac{96}{1000}$$

$P(p,m,p) = P(\{\text{kelereng pertama putih}\}) \cdot P(\{\text{kelereng kedua merah}\}) \cdot P(\{\text{kelereng ketiga putih}\})$.

$= \frac{4}{10} \times \frac{6}{10} \times \frac{4}{10}$

$= \frac{96}{1000}$

$P(m,p,p) = P(\{\text{kelereng pertama merah}\}) \cdot P(\{\text{kelereng kedua putih}\}) \cdot P(\{\text{kelereng ketiga putih}\})$.

$= \frac{6}{10} \times \frac{4}{10} \times \frac{4}{10}$

$= \frac{96}{1000}$

$P(p,m,m) = P(\{\text{kelereng pertama putih}\}) \cdot P(\{\text{kelereng kedua merah}\}) \cdot P(\{\text{kelereng ketiga merah}\})$.

$= \frac{4}{10} \times \frac{6}{10} \times \frac{6}{10}$

$= \frac{144}{1000}$

$P(m,p,m) = P(\{\text{kelereng pertama merah}\}) \cdot P(\{\text{Kelereng kedua putih}\}) \cdot P(\{\text{kelereng ketiga merah}\})$.

$= \frac{6}{10} \times \frac{4}{10} \times \frac{6}{10}$

$= \frac{144}{1000}$

$P(m,m,p) = P(\{\text{kelereng pertama merah}\}) \cdot P(\{\text{kelereng kedua merah}\}) \cdot P(\{\text{kelereng ketiga putih}\})$

$= \frac{6}{10} \times \frac{6}{10} \times \frac{4}{10}$

$= \frac{144}{1000}$

$P(m,m,m) = P(\{\text{kelereng pertama merah}\}) \cdot P(\{\text{kelereng kedua merah}\}) \cdot P(\{\text{kelereng ketiga merah}\})$.

$$= \frac{6}{10} \times \frac{6}{10} \times \frac{6}{10}$$
$$= \frac{216}{1000}$$

Dapat disimpulkan bahwa :

a) Jumlah semua kemungkinan sama dengan 1

b) Kemungkinan terambilnya ketiga kelereng putih =

$P(p,p,p) = \frac{64}{1000}$

c) Kemungkinan terambilnya 3 kelereng yang terdiri dari

1 merah, 2 putih = $P(p,p,m) + P(p,m,p) + P(m,p,p)$

$$= \frac{96}{1000} + \frac{96}{1000} + \frac{96}{1000}$$
$$= \frac{288}{1000}$$

d) Kemungkinan terambilnya 3 kelereng yang terdiri dari

2 merah, 1 putih = $P(p,m,m) + P(m,p,m) + P(m,m,p)$

$$= \frac{144}{1000} + \frac{144}{1000} + \frac{144}{1000}$$
$$= \frac{432}{1000}$$

e) Kemungkinan terambilnya ketiga kelereng merah =

$P(m,m,m) = \frac{216}{1000}$.

H. SOAL - SOAL

1. Sebuah dadu ditoss sebanyak 120 kali. Hasilnya adalah sebagai berikut : mata 1 keluar sebanyak 19 kali mata 2 keluar sebanyak 21 kali, mata 3 keluar sebanyak 18 kali, mata 4 keluar sebanyak 22 kali, mata 5 keluar sebanyak 17 kali dan mata 6 keluar sebanyak 23 kali.

Hitunglah frekwensi relatif untuk masing-masing mata dadu tersebut .

2. Tiga buah mata uang ditoss sebanyak 160 kali. Jika muka m dan belakang b menunjukkan masing-masing permukaan dari masing-masing mata uang tersebut dan jika (m,m,m) keluar sebanyak 18 kali, (b,b,b) keluar sebanyak 20 kali, (m,m,b) keluar sebanyak 21 kali, (m,b,m) keluar sebanyak 21 kali, (b,m,m) keluar 22 kali , (m,b,b) keluar sebanyak 21 kali, (b,m,b) keluar sebanyak 17 kali, (b,b,m) keluar sebanyak 20 kali, hitunglah :
   a) Frekwensi relatif dari titik sampel tersebut.
   b) Frekwensi relatif untuk kejadian dengan muka m keluar paling banyak satu buah .

3. Sebuah mata uang ditoss sebanyak n kali dengan n mendekati tak terhingga. Permukaan m keluar sebanyak k kali. Hitunglah P(m) .

4. Misalkan ruang sampel S terdiri dari 4 buah titik sampel, yaitu : S = a_1, a_2, a_3, a_4 , Diantara fungsi dibawah ini, manakah yang mendefinisikan ruang kemungkinan pada S ?
   a) $P(a_1) = \frac{1}{2}$, $P(a_2) = \frac{1}{3}$, $P(a_3) = \frac{1}{4}$, $P(a_4) = \frac{1}{5}$
   b) $P(a_1) = \frac{1}{2}$, $P(a_2) = \frac{1}{4}$, $P(a_3) = -\frac{1}{4}$, $P(a_4) = \frac{1}{2}$.
   c) $P(a_1) = \frac{1}{2}$, $P(a_2) = \frac{1}{4}$, $P(a_3) = \frac{1}{8}$, $P(a_4) = \frac{1}{8}$
   d) $P(a_1) = \frac{1}{2}$, $P(a_2) = \frac{1}{4}$, $P(a_3) = \frac{1}{4}$, $P(a_4) = 0$

5. Misalkan ruang sampel S seperti pada soal no. 4. Selanjutnya misalkan P adalah fungsi kemungkinan pada S .

   a) Jika $P(a_2) = \frac{1}{3}$, $P(a_3) = \frac{1}{6}$, $P(a_4) = \frac{1}{9}$, maka dapatkanlah $P(a_1)$.

   b) Jika $P(a_3) = P(a_4) = \frac{1}{4}$, $P(a_1) = 2P(a_2)$, dapatkanlah $P(a_1)$ dan $P(a_2)$.

   c) Jika $P(\{a_2, a_3\}) = \frac{2}{3}$, $P(\{a_2, a_4\}) = \frac{1}{2}$ dan $P(a_2) = \frac{1}{3}$ dapatkanlah $P(a_1)$.

6. Jika sebuah mata uang ditoss, dimana kemungkinan keluarnya muka m adalah dua kali kemungkinan keluarnya belakang b, maka dapatkanlah P(m) dan P(b) .

7. Jika sebuah dadu ditoss, dimana kemungkinan keluarnya masing-masing mata dadu itu mempunyai perbandingan sesuai dengan perbandingan angka-angka pada masing-masing mata dadu tersebut, maka :

   a) Hitunglah P(1), P(2), P(3), P(4), P(5) dan P(6) .

   b) Misalkan kejadian A = bilangan genap , kejadian B = bilangan prima dan kejadian C = bilangan ganjil maka dapatkanlah $P(A)$, $P(B)$, $P(A \cap B)$, $P(B \cap C)$ dan $P(A \cap \overline{B})$.

8. Seorang wanita sedang hamil. Menurut hasil pemeriksaan dokter spesialis kandungan, kemungkinan anak yang akan lahir itu wanita = $\frac{1}{2}$. Berapakah kemungkinan anak yang akan lahir itu laki-laki ?

9. Suatu pertemuan OSIS dari empat SMA Negeri dikota Padang yang dihadiri oleh 5 orang siswa dari SMA Neg.1, 4 orang siswa dari SMA Neg.2, 8 orang siswa dari SMA Neg.3, dan 3 orang siswa dari SMA Neg.4 diadakan di - Indarung. Salah seorang dari siswa tersebut dipilih secara random menjadi ketua sidang. Berapakah kemungkinan yang terpilih menjadi ketua sidang itu berasal dari :
   a) SMA Neg. 1
   b) SMA Neg. 2
   c) SMA Neg.3 atau SMA Neg. 4 .

10. Sebuah kartu bilangan dipilih secara random dari 50 kartu bilangan yang bernomor 1 s/d 50.
   Dapatkanlah kemungkinan bahwa kartu yang terambil itu
   a) habis dibagi 5
   b) bilangan prima
   c) berakhir dengan angka 2 .

11. Dari 10 orang siswa dalam suatu kelas, 3 orang dian - taranya bermata biru. Jika dua orang dipilih secara random, berapakah kemungkinannya :
   a) keduanya bermata biru
   b) salah seorang bermata biru
   c) paling sedikit satu orang bermata biru .

12. Dari 16 orang siswa yang terdiri dari 10 laki - laki dan 6 wanita, 3 orang diantaranya dipilih secara random menjadi suatu panitia. Berapakah yang terpilih itu :

a) 2 laki-laki, 1 wanita

b) 1 laki-laki, 2 wanita

c) paling sedikit satu orang wanita.

13. Misalkan A dan B dua kejadian, dimana $P(A \cup B) = \frac{7}{8}$, $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$ dan $P(\bar{A}) = \frac{5}{8}$.
Dapatkanlah $P(A)$, $P(B)$, $P(A \cap \bar{B})$ dan $P(\overline{\bar{A} \cup \bar{B}})$

14. Misalkan A dan B dua kejadian, dimana $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(A \cup B) = \frac{3}{4}$, dan $P(\bar{B}) = \frac{5}{8}$. Dapatkanlah $P(A \cap B)$, $P(\bar{A} \cap \bar{B})$, $P(\bar{A} \cup \bar{B})$ dan $P(B \cap \bar{A})$.

15. Sebuah dadu ditoss sebanyak 50 kali, dimana masing - masing mata dadu itu keluar seperti terlihat pada tabel frekwensi dibawah ini :

Mata dadu	1	2	3	4	5	6
Frekwensi	7	9	8	7	9	10

a) Dapatkanlah frekwensi relatif masing-masing mata dadu.

b) Dapatkanlah frekwensi relatif untuk kejadian mata dadu bilangan prima.

16. Sepasang dadu ditoss. Masing-masing mata dadu mempunyai kesempatan yang sama untuk keluar. Dapatkanlah kemungkinan (p) jumlah kedua mata dadu itu sama dengan 10 atau lebih dengan syarat :

a) mata 5 keluar pada dadu pertama .

b) mata 5 keluar paling sedikit pada satu dadu.

17. Sepasang mata uang ditoss. Dapatkanlah kemungkinan keluarnya muka m dari kedua mata uang itu dengan syarat :

a) pada mata uang pertama keluar muka m

b) paling sedikit satu dari kedua mata uang itu keluar muka m.

18. Sepasang dadu ditoss. Masing-masing mata dadu mempunyai kesempatan yang sama untuk keluar. Jika dua bilangan pada kedua mata dadu itu keluar berbeda,dapatkanlah kemungkinan yang

a) berjumlah enam

b) berjumlah empat atau kurang.

19. Pada sebuah kelas ada 12 siswa laki-laki dan 4 wanita. Jika 3 orang siswa dipilih secara random, hitunglah kemungkinan yang terpilih itu ketiganya laki - laki.

20. Dalam suatu kotak terdapat 7 kelereng merah, 3 kelereng putih. Tiga kelereng diambil secara random dari dalam kotak, hitunglah kemungkinan terambilnya :

a) kelereng pertama dan kedua merah, kelereng ketiga putih.

b) kelereng pertama merah, kelereng kedua putih, kelereng ketiga merah.

c) kelereng pertama putih, kelereng kedua merah, dan kelereng ketiga merah.

21. Dalam suatu kotak terdapat 5 buah kartu bilangan yang masing-masingnya berangka 1, 2, 3, 4 dan 5 . Tiga buah kartu bilangan diambil satu persatu dari dalam kotak secara random, dimana setiap selesai pengambilan kartu pertama hasilnya dicatat, selanjut - nya dikembalikan kedalam kotak dan dikocok. Kemudian dengan cara yang sama diambil kartu yang kedua dan yang ketiga. Bila angka pada kartu pertama dijadikan ratusan, angka pada kartu kedua dijadikan puluhan dan angka pada kartu yang ketiga yang terambil dijadikan satuan ,

a) Berapakah kemungkinan bilangan yang terdiri dari tiga angka itu merupakan bilangan genap ?

b) Berapakah kemungkinan bilangan yang terdiri dari tiga angka itu yang mempunyai ratusan bilangan prima ?

22. Misalkan A adalah kejadian sebuah keluarga yang mempunyai anak laki-laki dan wanita .

Misalkan B adalah kejadian bahwa sebuah keluarga mem

punyai satu anak laki-laki .

a) Tunjukkanlah bahwa A dan B merupakan dua kejadian bebas jika keluarga tersebut mempunyai tiga orang anak.

b) Tunjukkanlah bahwa A dan B merupakan yang bergantungan (tidak bebas) jika keluarga itu mempunyai dua orang anak.

23. Buktikanlah : Jika A dan B merupakan dua kejadian bebas, maka $\bar{A}$ dan $\bar{B}$ juga merupakan dua kejadian bebas.

24. Misalkan pada sepasang suami isteri, kemungkinan si-suami hidup 10 tahun lagi $\frac{1}{4}$, dan kemungkinan si isteri hidup 10 tahun lagi $\frac{1}{3}$, hitunglah kemungkinan :

a) kemungkinan keduanya hidup 10 tahun lagi.

b) salah satu akan hidup 10 tahun lagi .

c) hanya si isteri hidup 10 tahun lagi .

d) paling sedikit satu orang akan hidup 10 tahun lagi.

25. Dalam kotak A terdapat 5 kelereng merah dan 3 kelereng putih. Dalam kotak B terdapat 2 kelereng merah dan 6 kelereng putih.

a) Jika sebuah kelereng dari masing-masing kotak diambil secara random, hitunglah kemungkinan terambilnya kedua kelereng itu berwarna sama .

b) Jika dua buah kelereng dari masing-masing kotak diambil secara random, hitunglah kemungkinan terambilnya keempat kelereng berwarna sama .

B A B IV

DISTRIBUSI KEMUNGKINAN, FREKWENSI HARAPAN DAN EKSPEKTASI

A. VARIABEL RANDOM

Definisi : Variabel random x pada sebuah ruang sampel S adalah sebuah fungsi dari S ke himpunan bilangan real R, sehingga preimage dari setiap interval R adalah kejadian pada S .

Untuk jelasnya perhatikanlah contoh soal dibawah ini :

1. Dua buah mata uang ditoss sekaligus. Seperti sudah kita ketahui ruang sampelnya adalah $S = \{(m,m),(m,b), (b,m),(b,b)\}$.

   Misalkan variabel random X yang kita ambil adalah banyaknya muka m yang keluar dari hasil eksperimen tersebut. Tentukanlah nilai-nilai variabel randomnya.

   Penyelesaian :

   Sesuai dengan definisi diatas variabel random X adalah sebuah fungsi dari S ke R .

   Jadi $f : S \longrightarrow R$

   $(m,m) \longrightarrow 2$

   $(m,b) \longrightarrow 1$

   $(b,m) \longrightarrow 1$

   $(b,b) \longrightarrow 0$

Jadi dapat kita simpulkan nilai-nilai variabel randemnya adalah :

$x_1 = f(m,m) = 2$

$x_2 = f(m,b) = 1$

$x_3 = f(b,m) = 1$

$x_4 = f(b,b) = 0$

S disebut juga domain dan R disebut co-domain dari fungsi $f : S \longrightarrow R$.

Himpunan $\{0,1,2\}$ disebut range fungsi dan dapat disimbulkan dengan R_x . Jadi $R_x \subset R$.

2. Dengan cara yang sama variabel randem X dari banyaknya muka m keluar jika 3 buah mata uang ditoss sekaligus,maka nilai-nilai variabel randemnya adalah :

$x_1 = f(m,m,m) = 3$	$x_5 = f(m,b,b) = 1$
$x_2 = f(m,m,b) = 2$	$x_6 = f(b,m,b) = 1$
$x_3 = f(m,b,m) = 2$	$x_7 = f(b,b,m) = 1$
$x_4 = f(b,m,m) = 2$	$x_8 = f(b,b,b) = 0$

Jadi range fungsinya adalah $R_x = \{0,1,2,3\}$

B. DISTRIBUSI KEMUNGKINAN

Definisi : Himpunan dengan anggota pasangan bilangan $(x_i,p(x_i))$, $i = 1,2,\ldots n$, disebut distribusi kemungkinan atau disingkat distribusi X .

Untuk jelasnya perhatikanlah contoh soal dibawah ini :

1. Tentukanlah distribusi kemungkinan dari banyak muka m keluar dari hasil toss dua buah mata uang sekaligus .

Penyelesaian :

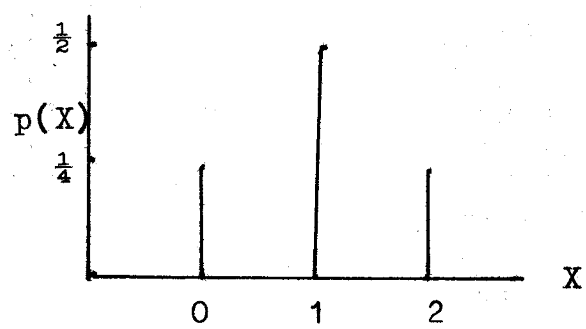
p(X=0) menunjukkan kemungkinan tidak ada keluar muka m . Dengan demikian $p(X=0) = p(b,b) = \frac{1}{4}$.

Dengan cara yang sama maka diperoleh : $p(X=1) = \frac{1}{2}$, dan $p(X=2) = \frac{1}{4}$.

Distribusi kemungkinan untuk soal nomor 1 ini dapa juga dikemukakan dengan bentuk tabel dibawah ini :

X	0	1	2
p(X)	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

Grafik distribusi kemungkinan (atau distribusi X) ini dapat dilihat dibawah ini :



2. Sepasang dadu merah (m) dan putih (p) ditoss sekali - gus. Variabel random X yang kita ambil misalkan jum - lah mata kedua dadu itu yang keluar dari hasil eksperimen tersebut .

Pertanyaan :

a) Tentukanlah nilai-nilai variabel random X tersebut.

b) Buatkanlah tabel distribusi kemungkinannya .

Penyelesaian :

Ruang sampel S dari hasil tess kedua dadu itu dapat dilihat pada tabel dibawah ini :

m \ P	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

a) Variabel random X adalah $f : S \longrightarrow R$, dengan nilai-nilainya sebagai berikut :

$x_1 = f(1,1) = 2$ $\quad$ $x_{11} = f(2,5) = 7$

$x_2 = f(1,2) = 3$ $\quad$ $x_{12} = f(2,6) = 8$

$x_3 = f(1,3) = 4$ $\quad$ $x_{13} = f(3,1) = 4$

$x_4 = f(1,4) = 5$ $\quad$ $x_{14} = f(3,2) = 5$

$x_5 = f(1,5) = 6$ $\quad$ $x_{15} = f(3,3) = 6$

$x_6 = f(1,6) = 7$ $\quad$ $x_{16} = f(3,4) = 7$

$x_7 = f(2,1) = 3$ $\quad$ $x_{17} = f(3,5) = 8$

$x_8 = f(2,2) = 4$ $\quad$ $x_{18} = f(3,6) = 9$

$x_9 = f(2,3) = 5$ $\quad$ $x_{19} = f(4,1) = 5$

$x_{10} = f(2,4) = 6$ $\quad$ $x_{20} = f(4,2) = 6$

$x_{21} = f(4,3) = 7$ $\quad$ $x_{29} = f(5,5) = 10$

$x_{22} = f(4,4) = 8$ $\quad$ $x_{30} = f(5,6) = 11$

$x_{23} = f(4,5) = 9$ $\quad$ $x_{31} = f(6,1) = 7$

$x_{24} = f(4,6) = 10$ $\quad$ $x_{32} = f(6,2) = 8$

$x_{25} = f(5,1) = 6$ $\quad$ $x_{33} = f(6,3) = 9$

$x_{26} = f(5,2) = 7$ $\quad$ $x_{34} = f(6,4) = 10$

$x_{27} = f(5,3) = 8$ $\quad$ $x_{35} = f(6,5) = 11$

$x_{28} = f(5,4) = 9$ $\quad$ $x_{36} = f(6,6) = 12$

Jadi variabel random X adalah anggota range R_x ,dimana $R_x = \{2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$

b) Diatas dapat dilihat bahwa variabel random $X = 2$, hanya ada satu buah yang muncul dari titik sampel (1,1) . Semua titik sampel ada 36 buah .

Jadi $P(X=2) = \frac{1}{36}$

Variabel random $X = 3$, muncul dari dua titi sampel (1,2) dan (2,1) . Jadi $p(X=3) = \frac{2}{36}$

Dengan cara yang sama diperoleh :

$p(X = 4) = \frac{3}{36}$ $\quad$ $p(X = 9) = \frac{4}{36}$

$p(X = 5) = \frac{4}{36}$ $\quad$ $p(X = 10) = \frac{3}{36}$

$p(X = 6) = \frac{5}{36}$ $\quad$ $p(X = 11) = \frac{2}{36}$

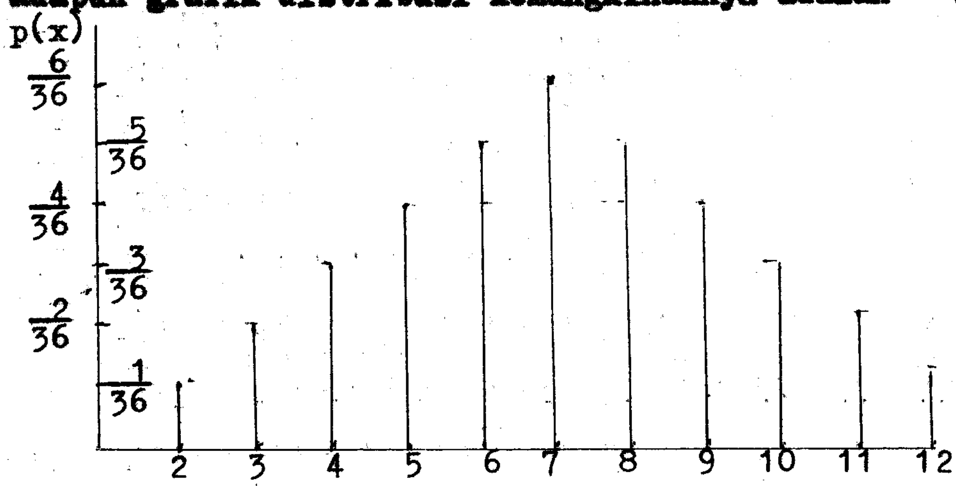
$p(X = 7) = \frac{6}{36}$ $\quad$ $p(X = 12) = \frac{1}{36}$

$p(X = 8) = \frac{5}{36}$

Tabel distribusi kemungkinan X dari jumlah mata ke dua itu dapat dilihat pada tabel dibawah ini :

X	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
p(x)	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Adapun grafik distribusi kemungkinannya adalah :



C. FREKWENSI HARAPAN

Misalkan A suatu kejadian dalam ruang sampel S. Jika kita lakukan percobaan (eksperimen) sebanyak n kali maka yang dimaksud dengan frekwensi harapan untuk terjadinya kejadian A adalah kemungkinan terjadinya kejadian A dikalikan dengan banyak percobaan yang dilakukan, yaitu p(A) x n .

Contoh soal :

1. Tiga buah mata uang ditoss sebanyak 80 kali, dimana masing-masing mata uang kesempatan keluarnya muka m

sama dengan kesempatan keluarnya belakang b . Jika A adalah kejadian keluarnya 2 muka m , hitunglah P(A) dan frekwensi harapan terjadinya kejadian A itu .

Penyelesaian :

$$P(A) = P \quad m,m,b$$
$$= P(m,m,b) + P(m,b,m) + P(b,m,m)$$
$$= \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}$$
$$= \frac{3}{8}$$

Frekwensi harapan untuk terjadinya kejadian A adalah $P(A) \times n = \frac{3}{8} \times 80 = 30$.

D. EKSPEKTASI (HARAPAN MATEMATIS)

Jika X adalah variabel randem dengan distribusi kemungkinannya seperti terlihat pada tabel dibawah ini :

X	x_1	x_2	...	x_n
p(x)	$p(x_1)$	$p(x_2)$	...	$p(x_n)$

maka ekspektasi X , atau mean X , atau harapan matematis X , disimbulkan dengan E(X) atau μ_x atau disederhanakan dengan E atau μ , didefinisikan dengan :

$$E(X) = x_1p(x_1) + x_2p(x_2) + \dots x_np(x_n)$$

Contoh soal :

1. Dua buah mata uang ditoss sekaligus, dimana masing - masing mata uang itu mempunyai permukaan muka m dan

belakang b mempunyai kesempatan yang sama untuk keluar. Misalkan variabel random X yang diambil banyaknya muka m yang keluar. Hitunglah E(X) .

Penyelesaian :

Pada contoh soal B.1. distribusi kemungkinannya adalah seperti tabel dibawah ini :

X	0	1	2
p(X)	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$

$$
\begin{aligned}
E(X) &= x_1 p(x_1) + x_2 p(x_2) + x_3 p(x_3) \\
&= 0 \times \tfrac{1}{4} + 1 \times \tfrac{2}{4} + 2 \times \tfrac{1}{4} \\
&= 0 + \tfrac{2}{4} + \tfrac{2}{4} \\
&= 1
\end{aligned}
$$

2. Sepasang dadu merah (m) dan putih (p) ditoss sekaligus. Variabel random X yang kita ambil misalkan jumlah mata kedua dadu itu yang keluar dari eksperimen tersebut.

Hitunglah ekspektasi X .

Penyelesaian :

Pada soal B.2. distribusi kemungkinannya adalah seperti tabel dibawah ini.

X	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
p(X)	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

$$E(X_1) = x_1p(x_1) + x_2p(x_2) + x_3p(x_3) + x_4p(x_4) + x_5p(x_5)$$
$$+ x_6p(x_6) + x_7p(x_7) + x_8p(x_8) + x_9p(x_9) +$$
$$x_{10}p(x_{10}) + x_{11}p(x_{11}) .$$
$$= 2 \times \frac{1}{36} + 3 \times \frac{2}{36} + 4 \times \frac{3}{36} + 5 \times \frac{4}{36} + 6 \times \frac{5}{36} +$$
$$7 \times \frac{6}{36} + 8 \times \frac{5}{36} + 9 \times \frac{4}{36} + 10 \times \frac{3}{36} + 11 \times \frac{2}{36} +$$
$$12 \times \frac{1}{36} \text{ x}$$
$$= \frac{2 + 6 + 12 + 20 + 30 + 42 + 40 + 36 + 30 + 22 + 12}{36}$$
$$= \frac{252}{36}$$
$$= 7$$

E. DISTRIBUSI KEMUNGKINAN YANG DISKRIT

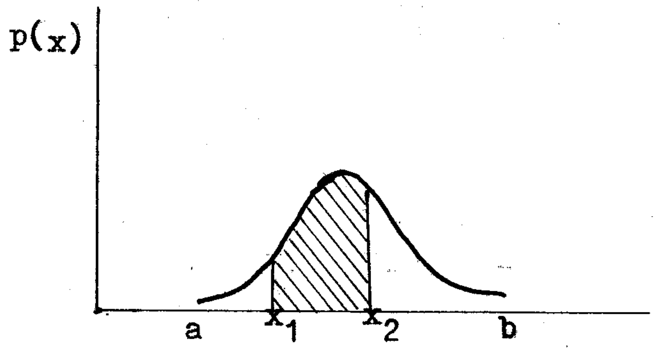
Jika variabel random X menghasilkan nilai-nilai yang diskrit, yaitu : $X_1, X_2, X_3, \ldots X_k$ dengan nilai kemungkinan masing-masingnya $p_1, p_2, \ldots p_k$ dimana $p_1 + p_2 + \ldots + p_k = 1$, maka kita katakan variabel random X telah didefinisikan. Dalam hal ini X disebut variabel random yang diskrit .

Contoh soal :

Pada B.1. dan B.2. termasuk kepada distribusi kemungkinan yang diskrit .

F. DISTRIBUSI KEMUNGKINAN YANG KONTINU

Misalkan variabel random X menghasilkan nilai-nilai yang kontinu, yaitu $a \leq X \leq b$, dimana a dan b dua buah bilangan real. Jika luas daerah yang dibatasi oleh kurva $y = p(X)$, $X = a$, $X = b$ dan sumbu X, sama dengan 1, maka distribusi kemungkinan yang kontinu untuk variabel ran - dom X telah didefinisikan, dengan grafiknya seperti terlihat dibawah ini :



Dalam hal ini X disebut variabel random yang kontinu, dan $p(X)$ disebut fungsi padat kemungkinan.

Luas daerah yang dibatasi oleh kurva $Y = p(X)$, $X = a$, $X = b$ dan sumbu X dituliskan dengan $P(\{a \leq X \leq b\})$.

Dengan demikian $P(\{a \leq X \leq b\}) = 1$.

Contoh soal :

1. Variabel random X yang kontinu dengan $0 \leq X \leq 4$, mempunyai fungsi padat kemungkinan $p(X) = \frac{1}{2} - aX$, dimana a bilangan tetap .

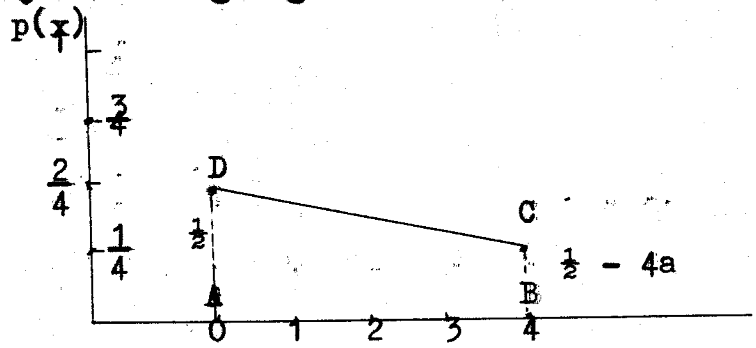
   Pertanyaan :

   a) Hitunglah a

   b) Dapatkanlah $P(\{1 \leq X \leq 2\})$.

   Penyelesaian :

a) Grafik $p(X) = \frac{1}{2} - aX$ adalah sebuah garis lurus yang ditunjukkan dengan gambar dibawah ini .



Untuk mendapatkan a , perhatikan luas daerah yang dibatasi oleh garis $p(X) = \frac{1}{2} - aX$, $X = 0$, $X = 4$, dan sumbu X adalah 1 .

Luas daerah tersebut adalah luas trapesium ABCD .

$$\begin{aligned}\text{Luas trapesium ABCD} &= \tfrac{1}{2}(\overline{AD} + \overline{BC}) \times \overline{AB}\\ &= \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2} + (\tfrac{1}{2}-4a)) \times 4\\ &= 2(1-4a)\end{aligned}$$

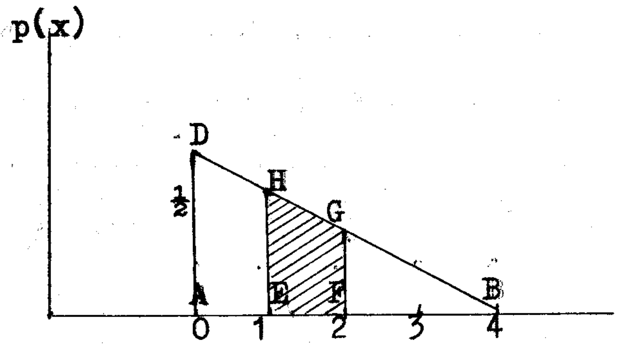
Karena $p(X) = \frac{1}{2} - aX$ merupakan fungsi padat kemungkinan, maka luas daerah yang dibatasi oleh $p(X) = \frac{1}{2} - aX$, $X = 0$, $X = 4$ dan sumbu X , yaitu luas trapesium ABCD = 1 .

Jadi $2(1-4a) = 1$

$$\begin{aligned}2 - 8a &= 1\\ a &= \tfrac{1}{8}\end{aligned}$$

Dengan demikian $\overline{BC} = 0$

b)



$P(\{1 \leqslant X \leqslant 2\})$ = Luas trapesium EFGH

$= \frac{1}{2}(\overline{EH} + \overline{FG}) \times \overline{EF}$.

$\overline{EH} : \overline{AD} = \overline{EB} : \overline{AB}$

$\overline{EH} : \frac{1}{2} = 3 : 4$

Jadi $\overline{EH} = \frac{3}{8}$

$\overline{FG} : \overline{AD} = \overline{FB} : \overline{AB}$

$\overline{FG} : \frac{1}{2} = 2 : 4$

Jadi $\overline{FG} = \frac{1}{4}$

$\overline{EF} = 1$.

$P(\{1 \leqslant X \leqslant 2\})$ = Luas trapesium EFGH

$= \frac{1}{2}(\overline{EH} + \overline{FG}) \times \overline{EF}$

$= \frac{1}{2}(\frac{3}{8} + \frac{1}{4}) \times 1$

$= \frac{5}{16}$.

G. SOAL - SOAL

1. Dari 160 keluarga beranak tiga, diasumsikan kemungkinan seorang anak laki-laki dan wanita sama .

   Misalkan variabel randem X adalah banyak anak laki -

laki pada setiap keluarga tersebut.

Pertanyaan :

a) Tentukanlah nilai-nilai variabel random X

b) Berapakah kemungkinannya suatu keluarga mempunyai anak pertama laki-laki, anak kedua laki-laki dan anak ketiga wanita .

c) Hitunglah kemungkinan suatu keluarga mempunyai dua orang anak laki-laki .

d) Hitunglah kemungkinan suatu keluarga mempunyai anak paling sedikit satu orang laki-laki.

e) Buatkanlah tabel distribusi kemungkinan untuk variabel random X .

f) Apakah distribusi kemungkinan X diskrit ?

g) Gambarkanlah grafik distribusi kemungkinan X .

h) Berapa keluargakah yang mempunyai dua orang anak laki-laki ?

i) Hitunglah E (X) .

2. Apakah distribusi dibawah ini merupakan distribusi kemungkinan ? Jelaskan jawaban saudara .

a)

X	1	2	3	4
p(X)	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

b)

X	3	4	5	6
p(X)	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{1}{8}$

3. Sebuah dadu ditoss, dimana semua mata dadu mempunyai kesempatan yang sama untuk keluar .

Variabel random X menyatakan dua kali bilangan pada mata dadu dan variabel random Y adalah 1 atau 3 nilainya, dimana jika mata dadu yang keluar ganjil maka nilai Y = 1 dan jika mata dadu yang keluar genap maka nilai Y = 3 .

Pertanyaan :

a) Tentukanlah nilai-nilai variabel random X .
b) Tentukanlah nilai-nilai variabel random Y .
c) Buatkanlah tabel distribusi kemungkinan X .
d) Buatkanlah tabel distribusi kemungkinan Y .
e) Apakah distribusi kemungkinan X diskrit ?
f) Gambarkanlah grafik distribusi kemungkinan X .
g) Gambarkanlah grafik distribusi kemungkinan Y .
h) Tentukanlah nilai variabel random (X + Y) .
i) Buatkanlah tabel distribusi kemungkinan (X + Y) .
j) Jika dadu tersebut ditoss sebanyak 60 kali, hitunglah frekwensi harapan terjadinya X + Y = 11 .
k) Hitunglah E(X), E(Y) dan E(X + Y) .

4. Sebuah variabel random X yang kontinu dalam interval $2 \leqslant X \leqslant 8$ mempunyai fungsi padat kemungkinan $p(X) = a(X + 3)$, dimana a bilangan tetap .

Pertanyaan :

a) Dapatkanlah a .

b) Gambarkanlah grafik fungsi padat kemungkinan tersebut .

c) Hitunglah $P(\{3 < X < 5\})$.

d) Hitunglah $P(\{X \geq 4\})$.

e) Hitunglah $P(\{|X - 3| < 0,5\})$.

DAFTAR BACAAN

Abdul Kodir M. dkk , Matematika 3 untuk SMP, PT.Intermasa , Jakarta, 1981

Abdul Kodir M. dkk, Matematika SMA, Jilid 2, PT. Intermasa, Jakarta, 1977

Lipschutz Seymour, Theory and Problems of Probability , Schaum's Outline Series, New York, 1968

Spiegel Murray R , Theory and Problems of Statistics , Schaum Publishing Company, New York, 1961

Tjanthayan, Teori Probability dan Analisa Statistics , Yayasan Badan Penerbit, Fakultas Ekonomi Universitas Indonesia, Jakarta, 1968

____________________ , Kurikulum Sekolah Menengah Pertama (SMP) 1975 , Departemen Pendidikan dan Kebudayaan Indonesia, Jakarta 1975

____________________ , Kurikulum SMA 1975 Buku II, G Departemen Pendidikan dan Kebudayaan Indonesia, Jakarta, 1975