MAKALAH

KETERKONTROLAN SISTEM LINIER

OLEH:

DRS. HENDRA SYARIFUDDIN, M.Si

FAKULTAS PENDIDIKAN MATEMATIKA DAN IPA

IKIP PADANG

1998

Kata Pengantar

Puji syukur penulis aturkan kepada Tuhan Yang Maha Kuasa karena dengan karuniaNya penulis mampu menyelesaikan makalah dengan judul Keterkontrolan Sistem Linier.

Pengetahuan mengenai sistem linear sangat diperlukan untuk mengetahui kelakuan dari suatu proses dinamik. Walaupun dalam kenyataan pada bidang teknik dan industri sangat sedikit sistem yang dijumpai dalam bentuk linier, tetapi sistem ini sering kali digunakan untuk mendekati model tak linear. Selain itu, pengertian mengenai sistem linear sangat berguna untuk mempelajari sistem nonlinear.

Terima kasih penulis aturkan kepada rekan-rekan sejawat yang telah membaca makalah ini dan memberikan masukan berharga tentang perbaikannya.

Semoga makalah sederhana ini bermanfaat bagi pembaca.

Padang, November 1998

Daftar Isi

Bagian 1

Pendahuluan

1.1 Latar Belakang

Pengetahuan mengenai sistem linear sangat diperlukan untuk mengetahui kelakuan dari suatu proses dinamik. Walaupun dalam kenyataan pada bidang teknik dan industri sangat sedikit sistem yang dijumpai dalam bentuk linier, tetapi sistem ini sering kali digunakan untuk mendekati model tak linear. Selain itu, pengertian mengenai sistem linear sangat berguna untuk mempelajari sistem nonlinear.

Dalam aplikasi, suatu sistem dapat terkontrol atau tak terkontrol, penentuan suatu sistem terkontrol atau tidak sangat diperlukan untuk mengawali penyelesaian terhadap sistem tersebut.

1.2 Permasalahan

Permasalahan yang akan dibahas pada makalah ini adalah apa syarat perlu dan cukup bagi keterkontrolan suatu sistem linier, atau apa syarat perlu dan cukup untuk output yang terkontrol dan state yang dapat dikontrol.

Bagian 2

Pembahasan

Untuk memudahkan pemahaman tentang koterkontrolan sistem linier, perlu terlebih dahulu dibahas tentang; persamaan linier, nilai dan vektor eigen, dan fungsi Delta Dirac. Dianjurkan pada pembaca untuk membaca makalah *Minimisasi Dalam Ruang Hasil Kali Dalam* dan *Masalah Titik Ujung Bebas*, terutama bagian; hasil kali dalam, transformasi linier, transformasi adjoint, dan matriks transisi.

2.1 Persamaan Linier

Definisi 2.1 *Rang matriks adalah banyaknya maksimum baris atau kolom matriks yang bebas linear.*

Teorema 2.1 *Sistem persamaan linear $Ax = b$ mempunyai solusi jika dan hanya jika $rang\,(A) = rang(A \quad b)$.*

Bukti: Perhatikan bahwa $rang\ (A \ \ b)$ sama dengan $rang\ (A)$ atau $rang\ (A)+1$. Misalkan $Ax = b$ mempunyai solusi. Maka b merupakan kombinasi linear dari kolom-kolom dari A. Karena itu $rang(A \ \ b)$ tidak dapat melebihi $rang\ (A)$. Jadi $rang\ (A \ \ b) = rang\ (A)$. Sebaliknya jika $rang\ (A \ \ b) = rang\ (A)$, maka b harus merupakan kombinasi linear dari kolom-kolom A. Karena jika tidak $rang\ (A \ \ b) = rang\ (A) + 1$. Tetapi ini berarti $Ax = b$ mempunyai solusi. $\square$

Teorema 2.2 *Misalkan A adalah matriks $m \times n$. Untuk setiap $y \in F^m$, sistem persamaan linear $Ax = y$ selalu dapat diselesaikan (untuk x) jika dan hanya jika $rang\ (A) = m$.*

Bukti: Misalkan $rang\ (A) = m$, $rang(A \ \ y)$ harus sama dengan $rang\ (A)$. Sehingga menurut Teorema 2.1.1 sistem $Ax = y$ dapat diselesaikan. Sebaliknya andaikan $rang\ (A) < m$. Misalkan R adalah matriks yang diperoleh dari A dengan *operasi baris elementer*, sehingga minimal baris terakhir nol. Maka persamaan $Rx = e_m$ dimana elemen ke-m dari e_m tidak nol, tidak mempunyai solusi. Ini mengakibatkan pasti ada $b \in R^n$ sehingga $Ax = b$ tidak mempunyai solusi. Atau dengan kata lain sistem $Ax = y$ tidak selalu dapat diselesaikan. Jadi Pengandaian salah sehingga $rang\ (A) = m$. $\square$

2.2 Nilai dan Vektor Eigen

Definisi 2.2 *Misalkan $T : V \to V$ adalah transformasi linear. Vektor $x \in V, x \neq 0$ dan memenuhi $Tx = \lambda x$, untuk suatu $\lambda \in F$ disebut vektor eigen dan λ disebut nilai eigen.*

Lemma 2.1 *Transformasi linear $T : V \to V$ mempunyai nilai eigen $\lambda = 0$ jika dan hanya jika $Ker(T) \neq 0$.*

Bukti: Misalkan T mempunyai nilai eigen $\lambda = 0$ maka $\exists\ x \neq 0$ yang bersifat $Tx = \lambda x = 0$. Jadi $x \in Ker(T)$ atau $Ker(T) \neq 0$. Sebaliknya misalkan $Ker(T) \neq 0$. Maka $\exists\ x \in Ker(T), x \neq 0$ dan $T(x) = 0$ atau dapat ditulis $T(x) = 0x$. Jadi 0 adalah nilai eigen dari T. □

Lemma 2.2 *Misalkan $T : V \to V$ adalah transformasi linear yang adjoint dengan diri sendiri, dimana V adalah ruang hasil kali dalam dengan $dim(V) = n$. Maka V mempunyai basis ortonormal yang merupakan vektor eigen dari T.*

Bukti: Buktinya menggunakan induksi untuk $dim(V) = n$. Teorema benar untuk $n = 1$. Misalkan Teorema benar untuk $dim(V) = n - 1$. Akan dibuktikan teorema juga benar untuk $dim(V) = n$. Misalkan u_1 adalah vektor eigen dari T dengan nilai eigen λ_1. Asumsikan $\|u_1\| = 1$. Tulis $W = span\{u_1\}$ dan perhatikan bahwa $dim(W^{\perp}) = n - 1$. Misalkan $v \in w^{\perp}$. Maka $\langle u_1, T(v)\rangle = \langle T(u_1), v\rangle = \langle \lambda_1 u_1, v\rangle = \lambda_1 \langle u_1, v\rangle = 0$. Sehingga $T(v) \in W^{\perp}$. Ini menunjukkan bahwa T yang dibatasi untuk $W^{\perp}$ memberikan operator linear $T|_{W^{\perp}} : W^{\perp} \to W^{\perp}$ yang juga operator linear yang adjoint dengan diri sendiri. Dari induksi, $W^{\perp}$ memiliki basis ortonormal yang merupakan vektor-vektor eigen dari $T|_{W^{\perp}}$. Basis ini, bersama-sama dengan u_1, memberikan basis yang diinginkan untuk V. □

Definisi 2.3 *Q matriks $n \times n$ dikatakan definit positif jika* $\langle x, Qx\rangle > 0,\ \forall\ x \in C^n, x \neq 0$.

2.3 Fungsi Delta Dirac

Definisi 2.4 *Fungsi delta Dirac didefinisikan sebagai berikut*

$$\delta(x) = 0 \qquad x \neq 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\, dx = 1.$$

Lemma 2.3 *Misalkan f fungsi kontinu di c. Maka*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(c-x)\, dx = f(c).$$

Bukti: Nilai -nilai dari integran sama dengan 0 kecuali untuk $x = c$ sehingga $f(x)$ dapat diganti dengan $f(c)$. Ini memberikan

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(c-x)\, dx = f(c)\int_{-\infty}^{\infty} \delta(c-x)\, dx = f(c). \qquad \square$$

Lemma 2.4 $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(b-\tau)\delta(\eta-\tau)\, d\tau = \delta(b-\eta)$.

Bukti:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(\eta)\delta(b-\tau)\delta(\eta-\tau)\, d\tau d\eta =$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(b-\tau)d\tau \int_{-\infty}^{\infty} f(\eta)\delta(\eta-\tau)d\eta = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\delta(b-\tau)d\tau$$

$$\equiv \int_{-\infty}^{\infty} f(\eta)\delta(b-\eta)\, d\eta.$$

Oleh karena itu

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\eta)\left[\int_{-\infty}^{\infty} \delta(b-\tau)\delta(\eta-\tau)\, d\tau - \delta(b-\eta)\right] d\eta = 0.$$

Karena berlaku $\forall\ f(n)$, maka diperoleh

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(b-\tau)\delta(\eta-\tau)\, d\tau - \delta(b-\eta) = 0.$$

Atau

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(b-\tau)\delta(\eta-\tau)\, d\tau = \delta(b-\eta). \qquad \square$$

2.4 Ouput yang Terkontrol

Diberikan sistem

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(t)x + B(t)u + E(t)w, \\ y &= C(t)x + D(t)u + F(t)w, \end{aligned} \tag{2.1}$$

dimana A, B, C, D, E, dan F berturut-turut menyatakan matriks $n \times n$, $n \times r$, $m \times n$, $m \times r$, $n \times p$, dan $m \times p$. $x \in C^n$ disebut vektor state, $y \in R^m$ vektor ouput, $u \in R^r$ vektor input (control), dan $w \in R^p$ vektor disturbance.

Ingin diketahui apakah terdapat input $u(t)$ yang mentransfer $y(t)$ dari $y(t_0)$ ke $y(t_1)$.

Definisi 2.5 *Untuk suatu $w(t)$ yang ditentukan sebarang, sistem 2.1 dikatakan mempunyai output terkontrol pada saat t_0 jika untuk setiap y_0 dan y_1 sebarang, terdapat $u(t)$ dan t_1, $t_0 \leq t \leq t_1 < \infty$, sehingga output $y(t)$ yang berkaitan dengan $u(t)$ memenuhi $y(t_0) = y_0$, $y(t_1) = y_1$.*

Misalkan $\Phi(t, \tau)$ adalah matriks transisi dari sistem persamaan diferensial $\dot{x} = A(t)x$ dan rang $[C(t_0), D(t_0)] = m$. Maka kita punyai teorema berikut.

Teorema 2.3 *Sistem 2.1 mempunyai output terkontrol pada saat* t_0 *jika dan hanya jika nol bukan nilai eigen dari* $Y(t_0, t_1)$ *untuk suatu* $t_1 > t_0$ *dimana*

$$Y(t_0, t_1) \stackrel{def}{=} \int_{t_0}^{t_1} G(\tau)\overline{G}^T(\tau)\, d\tau \tag{2.2}$$

$$G(\tau) \stackrel{def}{=} C(t_1)\Phi(t_1, \tau)B(\tau) + D(t_1)\delta(t_1 - \tau).$$

Bukti: Perhatikan hubungan berikut

$$\begin{aligned} y(t_1) =& C(t_1)\Phi(t_1, t_0)x(t_0) + D(t_1)u(t_1) + F(t_1)w(t_1) \\ &+ \int_{t_0}^{t_1} C(t_1)\Phi(t_1, \tau)[B(\tau)u(\tau) + E(\tau)w(\tau)]\, d\tau \end{aligned}$$

Dengan menggunakan Lemma Dirac delta, diperoleh

$$\begin{aligned} y(t_1) =& C(t_1)\Phi(t_1, t_0)x(t_0) + F(t_1)w(t_1) \\ &+ \int_{t_0}^{t_1} C(t_1)\Phi(t_1, \tau)E(\tau)w(\tau)d\tau \\ &+ \int_{t_0}^{t_1} [C(t_1)\Phi(t_1, \tau)B(\tau) + D(t_1)\delta(t_1 - \tau)]u(\tau)\, d\tau. \end{aligned}$$

Untuk mencari solusi $u(t)$, mula-mula dihitung $x(t_0)$

$$y(t_0) = C(t_0)x(t_0) + D(t_0)u(t_0) + F(t_0)w(t_0)$$

$$\begin{bmatrix} C(t_0) & D(t_0) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x(t_0) \\ \\ u(t_0) \end{pmatrix} = y(t_0) - F(t_0)w(t_0).$$

Karena rang dari $[C(t_0), D(t_0)] = m$, maka $[C(t_0) \quad D(t_0)]$ mempunyai invers kanan. Ini mengakibatkan adanya solusi, untuk $x(t_0)$ dan $u(t_0)$. Selanjutnya definisikan transformasi linier

$$T(u) = \int_{t_0}^{t_1} [C(t_1)\Phi(t_1, \tau)B(\tau) + D(t_1)\delta(t_1 - \tau)]u(\tau)\, d\tau$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} G(\tau)u(\tau)\, d\tau$$

dimana

$$G(\tau) \stackrel{\text{def}}{=} C(t_1)\Phi(t_1, \tau)B(\tau) + D(t_1)\delta(t_1 - \tau)$$

dan tulis

$$\mathcal{Y} = y(t_1) - C(t_1)\Phi(t_1, t_0)x(t_0) - F(t_1)w(t_1)$$

$$- \int_{t_0}^{t_1} C(t_1)\Phi(t_1, \tau)E(\tau)w(\tau)\, d\tau$$

maka diperoleh $T(u) = \mathcal{Y}$. Untuk menentukan transformasi adjoint dari T, perhatikan

$$\langle v, T(u)\rangle = \langle T^*(v), u\rangle = \int_{t_0}^{t_1} \overline{v}^T G(\tau)u(\tau)\, d\tau$$

Sehingga

$$T^*(v) = \overline{G}^T(t)v \qquad \text{dan}$$

$$TT^*(v) = \int_{t_0}^{t_1} G(\tau)\overline{G}^T(\tau)\, d\tau\, v.$$

Transformasi TT^* adalah matriks $n \times n$, nyatakan sebagai $Y(t_0, t_1)$ yaitu

$$Y(t_0, t_1) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{t_0}^{t_1} G(\tau)\overline{G}^T(\tau)\, d\tau.$$

Sistem 2.1 outputnya terkontrol

$\iff T(u) = \mathcal{Y}$ punya solusi $u(t)$ untuk $\mathcal{Y}$ sebarang.

$$\iff Ker(T^*) = 0 \tag{2.3}$$

$$\iff Ker(TT^*) = 0 \tag{2.4}$$

$\iff TT^* = Y(t_0, t_1)$ tidak mempunyai nilai eigen

yang sama dengan nol. □

Jika didefinisikan

$$X(t_0, t_1) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1, \tau)B(\tau)\overline{B}^T(\tau)\overline{\Phi}^T(t_1, \tau)\, d\tau \tag{2.5}$$

dan dengan menggunakan Lemma Dirac delta, yaitu Lemma 2.4, maka 2.2 dapat dinyatakan dalam bentuk

$$\begin{aligned} Y(t_0, t_1) = {} & D(t_1)\overline{D}^T(t_1)\delta + D(t_1)\overline{B}^T(t_1)\overline{C}^T(t_1) \\ & + C(t_1)B(t_1)\overline{D}^T(t_1) + C(t_1)X(t_0, t_1)\overline{C}^T(t_1) \end{aligned} \tag{2.6}$$

dimana δ menyatakan bilangan positif besar sebarang yang merupakan indeks nilai fungsi delta Dirac di nol.

Lemma 2.5 *Misalkan* $Y(t_0, t_1) \stackrel{def}{=} \int_{t_0}^{t_1} G(\tau)\overline{G}^T(\tau)\, d\tau$, *dimana* $G(\tau)$ *adalah matriks* $n \times m$ *sebarang. Maka pernyataan berikut ekivalen.*

1. *Nol bukan nilai eigen dari* $Y(t_0, t_1)$

2. $|Y(t_0, t_1)| \neq 0$

3. $Y(t_0, t_1) > 0$ *(definit positif)*

Bukti: 1.$\Longrightarrow$ 2. Definisikan $\Theta(\lambda) = |(Y - \lambda I)|$. Jika $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ adalah nilai eigen dari Y maka

$$\Theta(\lambda) = |(Y - \lambda I)| = (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda)\cdots(\lambda_n - \lambda)$$

$$\Phi(0) = |Y| = \lambda_1\lambda_2 \cdots, \lambda_n.$$

Jika diketahui nol bukan nilai eigen dari Y maka $\lambda_i \neq 0 \; \forall \; i$, jadi $|Y| \neq 0$. □

2.$\Longrightarrow$ 3. Diketahui $|Y| \neq 0$ akan ditunjukkan $Y > 0$

Karena Y adjoint dengan diri sendiri, maka terdapat himpunan ortonormal $e_1, e_2, \cdots, e_n$, yang merupakan vektor eigen dari Y, yang berturut-turut berkorespondensi dengan nilai eigen $\lambda_1\lambda_2, \cdots, \lambda_n$. Selanjutnya karena

$$|Y| = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i \neq 0 \quad \Longrightarrow \lambda_i \neq 0 \;\; \forall \; i.$$

Maka diperoleh

$$\lambda_i = \overline{e_i}^T Y e_i \neq 0 \quad \text{dimana} \quad Y e_i = \lambda_i e_i, \quad \overline{e_i}^T e_i = 1$$

$$\lambda_i = \overline{e_i}^T \left(\int_{t_0}^{t_1} G(\tau)\overline{G}^T(\tau) d\tau \right) e_i$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \|\overline{G}^T(\tau) e_i\|^2 \, d\tau > 0.$$

Tetapi karena vektor eigen $e_1, e_2, \cdots, e_n$ merupakan basis dari C^n, maka untuk sebarang vektor $x \in C^n$ dapat dinyatakan sebagai $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i$. sehingga

$$\overline{x}^T Y x = \sum_{i=1}^n \lambda_i |\alpha_i|^2.$$

Tetapi karena semua λ_i positif, maka $\sum_{i=1}^n \lambda_i |\alpha_i|^2 \geq 0$ dan ini sama dengan nol jika semua α_i sama dengan nol, yaitu jika $x = 0$. Jadi $Y > 0$. □

3.$\Longrightarrow$ 1. Misalkan λ nilai eigen dari Y maka

$$Y x = \lambda x, \qquad x \neq 0$$

$$\overline{x}^T Y x = \overline{x}^T \lambda x = \lambda \|x\|^2$$

$$\lambda = \frac{\overline{x}^T Y x}{\|x\|^2}$$

Karena diketahui Y definit positif maka λ positif. Jadi nol bukan nilai eigen dari Y. □

Sistem Invarian terhadap Waktu

Jika matriks A, B, C, D, E, dan F konstan maka dari (2.3) dan (2.4) diperoleh

$$X(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} e^{A(t_1-\tau)} B\overline{B}^T e^{\overline{A}^T(t_1-\tau)}\, d\tau \tag{2.7}$$

$$Y(t_0, t_1) = D\overline{D}^T\delta + D\overline{B}^T\overline{C}^T + CB\overline{D}^T + CX(t_0, t_1)\overline{C}^T. \tag{2.8}$$

Sehingga, dari Teorema 2.1 dan Lemma 2.1, diperoleh hal berikut.
Sistem invarian terhadap waktu outputnya terkontrol pada saat t_0 jika dan hanya jika

$$Y(t_0, t_1) > 0. \tag{2.9}$$

Teorema 2.4 *Sistem invarian terhadap waktu*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{aligned} \tag{2.10}$$

outputnya terkontrol jika dan hanya jika

$$CX\overline{C}^T > 0 \tag{2.11}$$

atau ekivalen dengan

$$P \stackrel{def}{=} [CB \;\; CAB \;\; \cdots \;\; CA^{n-1}B] \tag{2.12}$$

mempunyai **rang** m.

Bukti: Dari (2.7) dan dengan mensubstitusikan $D = 0$ ke (2.6) diperoleh (2.9). Selanjutnya akan dibuktikan (2.10). Untuk itu definisikan

$$\mathcal{Y} \stackrel{\text{def}}{=} y(t_1) - C\Phi(t_1, t_0)x(t_0)$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} C\Phi(t_1, \tau)Bu(\tau)\, d\tau = \int_{t_0}^{t_1} Ce^{A(t_1-\tau)}Bu(\tau)\, d\tau$$

Dengan menggunakan

$$e^{A\tau} = \alpha_0(\tau)I + \alpha_1(\tau)A + \alpha_2(\tau)A^2 + \cdots + \alpha_{n-1}(\tau)A^{n-1}$$

diperoleh

$$\mathcal{Y} = \sum_{j=0}^{n-1} CA^jB \int_{t_0}^{t_1} \alpha_j(t_1 - \tau)u(\tau)\, d\tau.$$

Definisikan

$$v_j = \int_{t_0}^{t_1} \alpha_j(t_1 - \tau)u(\tau)\, d\tau$$

Maka

$$\mathcal{Y} = \begin{bmatrix} CB & CAB & \cdots & CA^{n-1}B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_0 \\ v_1 \\ \vdots \\ v_{n-1} \end{bmatrix} \qquad (*)$$

Misalkan sistem (2.8) outputnya terkontrol maka untuk $\mathcal{Y}$ sebarang, persamaan (*) dapat diselesaikan (untuk v). Sehingga menurut Teorema 2.2 $rang\ P = m$. Sebaliknya misalkan $rang\ P = m$ maka menurut Teorema 2.2 sistem (*) selalu dapat diselesaikan (untuk v). Jadi terdapat u yang memenuhi persamaan tersebut. Dengan kata lain sistem terkontrol. □

2.5 State yang Dapat Dikontrol

Tinjau sistem persamaan diferensial

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u + E(t)w \tag{2.13}$$

Definisi 2.6 *Untuk suatu $w(t)$ yang ditentukan sebarang, sistem 2.13 dikatakan mempunyai state terkontrol pada saat t_0 jika untuk setiap $x(t_0)$ dan $x(t_1)$ sebarang, terdapat $u(t)$ dan t_1, $t_0 \leq t \leq t_1 < \infty$, sehingga solusi $x(t)$ yang berkaitan dengan $u(t)$ memenuhi $x(t_0) = x_0$, $x(t_1) = x_1$. Yaitu, terdapat $u(t)$ yang membawakan x_0 ke x_1 dalam waktu t_1.*

Teorema 2.5 *Sistem 2.13 mempunyai state terkontrol pada saat t_0 jika dan hanya jika $X(t_0, t_1) > 0$ untuk suatu $t_1 > t_0$ dimana $X(t_0, t_1)$ didefinisikan oleh (2.3).*

Bukti ini diperoleh dengan mensubstitusikan $C = I, D = 0$ dan $F = 0$ ke Teorema 2.3 dan dengan menggunakan Lemma 2.5

Teorema 2.6 *Sistem invarian terhadap waktu $\dot{x} = Ax + Bu$ mempunyai state terkontrol jika dan hanya jika $X(t_0, t_1) > 0$ atau ekivalen dengan*

$$P \stackrel{def}{=} [B \;\; AB \;\; \cdots \;\; A^{n-1}B] \tag{2.14}$$

mempunyai rang n. Bukti dari teorema ini diperoleh dengan mensubstitusikan $C = I, D = 0$ dan $F = 0$ ke Teorema 2.2.

Keterkontrolan dari Transformasi Koordinat

Perhatikan Sistem linier

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du \end{aligned} \qquad (2.15)$$

Jika dilakukan transformasi koordinat $x = Mq$, dimana M adalah matriks tak singulir, maka diperoleh

$$M\dot{q} = AMq + Bu$$

$$y = CMq + Du$$

atau

$$\begin{aligned} \dot{q} &= \Lambda q + \mathfrak{B}u \\ y &= \mathfrak{C}q + Du \end{aligned} \qquad (2.16)$$

dimana $\Lambda \stackrel{def}{=} M^{-1}AM, \quad \mathfrak{B} \stackrel{def}{=} M^{-1}B, \quad \mathfrak{C} \stackrel{def}{=} CM.$

Teorema 2.7 *Transformasi koordinat dari state tidak mengubah keterkontrolan dari state atau output dari sistem linier.*

Bukti: Dari (2.4) diperoleh

$$Y(t_0, t_1) = D\overline{D}^T\delta + D\overline{(M^{-1}B)}^T\overline{(CM)}^T + CMM^{-1}B\overline{D}^T$$

$$+ CMM^{-1}X(t_0, t_1)\overline{M^{-1}}^T\,\overline{M}^T\overline{C}^T$$

$$= D\overline{D}^T\delta + D\overline{B}^T\overline{C}^T + CB\overline{D}^T + CX(t_0, t_1)\overline{C}^T$$

Jadi uji keterkontrolan, $Y(t_0, t_1)$, tidak berubah. Hal ini menunjukkan bahwa keterkontrolan dari output tidak berubah jika dilakukan transformasi koordinat. Selanjutnya, dengan mensubstitusikan $C = I, D = 0$ diperoleh bahwa uji keterkontrolan dari state, yaitu $X(t_0, t_1)$, juga tidak berubah. □

Teorema 2.8 *Misalkan A mempunyai nilai eigen yang saling berbeda dan $M \stackrel{def}{=} [v_1\ v_2\ \cdots v_n]$, dimana $v_1, v_2, \cdots, v_n$ adalah vektor eigen dari A. Maka sistem (2.16) mempunyai state yang terkontrol jika dan hanya jika $\mathfrak{B} = M^{-1}B$ tidak mempunyai baris nol.*

Bukti: Dari (2.16) diperoleh

$$\dot{q} = \Lambda q + \mathfrak{B}u$$

dimana $\Lambda = M^{-1}AM$ dan $\mathfrak{B} = M^{-1}B$.
Andaikan baris dari $\mathfrak{B}$ ada yang sama dengan nol, misalkan baris ke-i, maka $\dot{q}_i = \lambda_i q_i$, dimana λ_i adalah nilai eigen yang berkorespondensi dengan vektor eigen v_i. Dalam kasus ini komponen ke-i dari solusi, yaitu q_i berbentuk $q_i = ce^{\lambda_i t}$. Untuk $c \neq 0, q_i$ tidak dapat dibawa ke nol didalam waktu hingga, karena untuk $\lambda_i > 0 \quad e^{\lambda_i t} \rightarrow \infty$ atau untuk $\lambda_i < 0 \quad e^{\lambda_i t} \rightarrow \infty$, jika $t \rightarrow \infty$. Ini berarti komponen ke-i tidak terkontrol. Sehingga solusi tak terkontrol, bertentangan dengan sitem mempunyai state terkontrol. Ini membuktikan bahwa jika statenya terkontrol maka $\mathfrak{B}$ tidak mempunyai baris nol. Sebaliknya, misalkan $\mathfrak{B}$ tidak mempunyai baris nol. Solusi di t_1 dari $\dot{q} = \Lambda q + \mathfrak{B}u$ adalah

$$q(t_1) = e^{\Lambda t_1}q(0) + \int_0^{t_1} e^{\Lambda t_1}e^{-\Lambda\tau}\mathfrak{B}u(\tau)\,d\tau$$

Misalkan b_i adalah baris ke-i dari $\mathfrak{B}$ dan $u(t) = \sum_{j=1}^{n} \beta_j e^{-\overline{\lambda}_j t} \overline{b}_j^T$ dimana β_j adalah konstanta yang tidak diketahui. Maka komponen ke-i dari $q(t_i)$ adalah

$$q_i(t_1) = e^{\lambda_i t_1} q_i(0) + \sum_{j=1}^{n} e^{\lambda_i t_1} \int_0^{t_1} e^{\lambda_i \tau} b_i \overline{b}_j^T e^{-\overline{\lambda}_j \tau} \, d\tau \beta_j$$

atau

$$e^{-\lambda_i t_1} q_i(t_1) - q_i(0) = \sum_{j=1}^{n} \langle \theta_i, \theta_j \rangle \beta_j$$

dimana $\quad \theta_i(t) = e^{-\lambda_i t} b_i \quad$ dan

$$\langle \theta_i, \theta_j \rangle \stackrel{def}{=} \int_0^{t_1} \theta_i(\tau) \overline{\theta_j(\tau)}^T \, d\tau.$$

Dalam bentuk matriks, setelah digabung, didapat

$$\begin{bmatrix} q_1(t_1)e^{-\lambda_1 t_1} - q_1(0) \\ q_2(t_1)e^{-\lambda_2 t_1} - q_2(0) \\ \vdots \\ q_n(t_1)e^{-\lambda_n t_1} - q_n(0) \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \langle \theta_1, \theta_1 \rangle & \langle \theta_1, \theta_2 \rangle & \dots & \langle \theta_1, \theta_n \rangle \\ \langle \theta_2, \theta_1 \rangle & \langle \theta_2, \theta_2 \rangle & \dots & \langle \theta_2, \theta_n \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \theta_n, \theta_1 \rangle & \langle \theta_n, \theta_2 \rangle & \dots & \langle \theta_n, \theta_n \rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix}$$

atau

$$[e^{-\Lambda t_1 q(t_1)} - q(0)] = [\langle\theta_i, \theta_j\rangle]\beta, \quad \beta = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix} \qquad (*)$$

Untuk menunjukkan bahwa invers dari $[\langle\theta_i(\tau), \theta_j(\tau)\rangle]$ ada perhatikan hal berikut. Dari asumsi diketahui $b_i \neq 0 \;\forall\, i$ dan λ_i berbeda. Ini mengakibatkan $\{\theta_j(t)\}, j = 1, 2, \ldots, n$ bebas linier. Misalkan $G(t) = [\theta_1(t)\, \theta_2(t)\, \ldots\, \theta_n(t)]$ dan definisikan

$$||G(t)x||^2 = \frac{1}{t_1} x^T \left[\int_0^{t_1} \overline{G}^T(\tau) G(\tau)\, d\tau\right] x, \quad x \in C^n$$

Jelas bahwa , $||G(t)x||^2 = 0 \Longleftrightarrow G(t)x = 0$. Karena $\{\theta_j(t)\}$ bebas linier maka persamaan $G(t)x = 0$ hanya dipenuhi oleh $x = 0$. Ini berarti matriks $\int_0^{t_1} \overline{G}^T(\tau) G(\tau)\, d\tau$ definit positif. Sehingga menurut Lemma 2.5 matriks ini tak singulir. Oleh karena itu

$$\begin{aligned} [\langle\theta_i, \theta_j\rangle] &= \int_0^{t_1} e^{-\Lambda\tau} \mathfrak{B} \overline{\mathfrak{B}}^T e^{-\overline{\Lambda}\tau}\, d\tau \\ &= \int_0^{t_1} \overline{G}^T(\tau) G(\tau)\, d\tau \end{aligned}$$

adalah matriks tak singulir. Dari $(*)$ didapat

$$\beta = [\langle\theta_i(\tau), \theta_j(\tau)\rangle]^{-1} [e^{-\Lambda t_1} q(t_1) - q(0)]$$

Jadi fungsi inputnya adalah

$$
\begin{aligned}
u(t) &= \overline{\mathfrak{B}}^T e^{-\overline{\Lambda}t}\beta \\
&= \overline{\mathfrak{B}}^T e^{-\overline{\Lambda}t}\left[\int_0^{t_1} e^{-\Lambda\tau}\mathfrak{B}\overline{\mathfrak{B}}^T e^{-\overline{\Lambda}\tau}\, d\tau\right]^{-1} \\
&\times [e^{-\Lambda t_1}q(t_1) - q(0)]. \qquad \square
\end{aligned}
$$

Teorema 2.9 *Sistem dalam bentuk Jordan*

$$
\dot{x} = \begin{bmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_p \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_p \end{bmatrix} u \tag{2.17}
$$

mempunyai state terkontrol jika dan hanya jika

1. $\{b_{it}, b_{jt}, \ldots, b_{kt}\}$ *adalah himpunan bebas linier, dimana* $J_i, J_j, \ldots, J_k$ *adalah blok Jordan dengan nilai eigen sama* λ_i *dan* b_{it}^T *adalah baris terakhir dari* B_i.

2. $b_{pt} \neq 0$ *jika* J_p *adalah satu-satunya blok Jordan dengan nilai eigen* λ_p.

Bukti: Untuk menyederhanakan pembuktian, asumsikan hanya ada tiga blok.

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \lambda_3 & 1 \\ 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$$

dengan $B^T = [b_{11} \;\; b_{12} \;\; b_{13} \mid b_{21} \;\; b_{22} \mid b_{31} \;\; b_{32}]$. Menurut Teorema 3.2.2 dan dari (3.15) diperoleh

$$P = [B \;\; AB \;\; A^2B \;\; A^3B \;\; A^4B \;\; A^5B \;\; A^6B]$$

$$= \begin{bmatrix} B_1 & J_1B_1 & J_1^2B_1 & J_1^3B_1 & J_1^4B_1 & J_1^5B_1 & J_1^6B_1 \\ B_2 & J_2B_2 & J_2^2B_2 & J_2^3B_2 & J_2^4B_2 & J_2^5B_2 & J_2^6B_2 \\ B_3 & J_3B_3 & J_3^2B_3 & J_3^3B_3 & J_3^4B_3 & J_3^5B_3 & J_3^6B_3 \end{bmatrix}$$

Dengan induksi matematika dapat dibuktikan bahwa

$$J_1^kB_1 = \begin{bmatrix} \lambda_1^k b_{11}^T + k\lambda_1^{k-1}b_{12}^T + \frac{1}{2}k(k-1)\lambda_1^{k-2}b_{13}^T \\ \lambda_1^k b_{12}^T + k\lambda_1^{k-1}b_{13}^T \\ \lambda_1^k b_{13}^T \end{bmatrix}$$

$$J_2^k B_2 = \begin{bmatrix} \lambda_1^k b_{21}^T + k\lambda_1^{k-1} b_{22}^T \\ \\ \lambda_1^k b_{22}^T \end{bmatrix}$$

$$J_3^k B_3 = \begin{bmatrix} \lambda_3^k b_{31}^T + k\lambda_3^{k-1} b_{32}^T \\ \\ \lambda_3^k b_{32}^T \end{bmatrix}$$

Syarat perlu dari (2) cukup jelas karena, sebagai contoh, jika $b_{32} = 0$ maka baris ke-7 dari P adalah baris nol dan $rang\ P < n$. Untuk melihat syarat perlu dari (1), misalkan $b_{22} = \alpha b_{13}$. Maka dengan melakukan operasi baris elementer (kalikan baris ke-3 dengan α lalu tambahkan ke baris ke-5) diperoleh baris ke-5 menjadi baris nol. Ini berarti $rang\ P < n$, sehingga sistem tidak terkontrol.

Sebaliknya, akan ditunjukkan sistem (3.15) mempunyai state yang terkontrol. Dengan melakukan operasi kolom elementer pada P diperoleh $P' =$

$$\begin{bmatrix} b_{11}^T & b_{12}^T & b_{13}^T & \\ b_{12}^T & b_{13}^T & 0 & \cdots \\ b_{13}^T & 0 & 0 & \\ b_{21}^T & b_{22}^T & 0 & \cdots \\ b_{22}^T & 0 & 0 & \\ b_{31}^T & (\lambda_3-\lambda_1)b_{31}^T + b_{32}^T & (\lambda_3^2-\lambda_1^2)b_{31}^T + 2(\lambda_3-\lambda_1)b_{32}^T - 2\lambda_1(\lambda_3-\lambda_1)b_{31}^T & \cdots \\ b_{32}^T & (\lambda_3-\lambda_1)b_{32}^T & (\lambda_3^2-\lambda_1^2)b_{32}^T - 2\lambda_1(\lambda_3-\lambda_1)b_{32}^T & \end{bmatrix}$$

Dua baris terakhir dari P' terdiri dari B_3, $(J_3 - \lambda_1 I)B_3$, $(J_3 - \lambda_1 I)^2 B_3$, $(J_3 - \lambda_1 I)^3 B_3, \ldots$. Akhirnya dengan melakukan operasi baris elementer (pertukaran baris) diperoleh

$$P'' = \begin{bmatrix} \boldsymbol{b}_{13}^T & & & & & \\ \boldsymbol{b}_{22}^T & & & \mathbf{0} & & \\ \boldsymbol{b}_{12}^T & \boldsymbol{b}_{13}^T & & & & \\ \boldsymbol{b}_{21}^T & \boldsymbol{b}_{22}^T & & & & \\ \boldsymbol{b}_{11}^T & \boldsymbol{b}_{12}^T & \boldsymbol{b}_{13}^T & & & \\ B_3 & (J_3-\lambda_1 I)B_3 & (J_3-\lambda_1 I)^2 B_3 & (J_3-\lambda_1 I)^3 B_3 & (J_3-\lambda_1 I)^4 B_3 & \cdots \end{bmatrix}$$

Menurut syarat (1), $\boldsymbol{b}_{13}, \boldsymbol{b}_{22}$ bebas linier sehingga rang dari $\begin{bmatrix} \boldsymbol{b}_{13}^T \\ \boldsymbol{b}_{22}^T \end{bmatrix}$ adalah 2. Oleh karena itu determinan tak nol 2×2 dapat dibentuk dengan menghapuskan kolom-kolom. Dari syarat (1), yaitu sifat kebebas linierannya, diperoleh $\boldsymbol{b}_{13} \neq 0$. Selanjutnya karena $\boldsymbol{b}_{32} \neq 0$ maka determinan tak nol 2×2 dapat diperoleh dari $[(J_3 - \lambda_1 I)^3 B_3 \ \ (J_3 - \lambda_1 I)^4 B_3]$. Jadi matriks segitiga blok bawah dapat dibentuk dari P'' dan rang P'' = rang $P = n$. Ini berarti sistem (3.15) mempunai state terkontrol.

Bagian 3

Kesimpulan

Sistem

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u + E(t)w\,; \qquad y = C(t)x + D(t)u + F(t)w$$

mempunyai output terkontrol pada saat t_0 jika dan hanya jika $Y(t_0, t_1) > 0$ untuk suatu $t_1 > t_0$ dimana

$$Y(t_0, t_1) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{t_0}^{t_1} G(\tau)\overline{G}^T(\tau)\, d\tau$$

$$G(\tau) \stackrel{\text{def}}{=} C(t_1)\Phi(t_1, \tau)B(\tau) + D(t_1)\delta(t_1 - \tau).$$

Sistem

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u + E(t)w$$

mempunyai state terkontrol pada saat t_0 jika dan hanya jika $X(t_0, t_1) > 0$ untuk suatu $t_1 > t_0$ dimana

$$X(t_0, t_1) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1, \tau)B(\tau)\overline{B}^T(\tau)\overline{\Phi}^T(t_1, \tau)\, d\tau.$$

Daftar Pustaka

[1] Arifin, A., *Aljabar Linier*, Penerbit ITB, Bandung, 1985.

[2] Brockett, R.W., *Finite Dimensional Linear Systems*, John Wiley & Sons, New York, 1970.

[3] Brogan, W.L., *Modern Control Theory*, Quantum Publishers, New York, 1974.

[4] Coddington, E.A. and N. Levinson, *Theory of Ordinary Differential Equations*, McGraw-Hill, New York, 1955.

[5] Halmos, P.R., *Finite Dimensional Vector Spaces*, 2nd Ed., D. Van Nostrand, Princeton, New Jersey, 1958.

[6] Jacob, B., *Linear Algebra*, W.H. Freeman and Company, New York, 1990.

[7] Schwarz, R.J and Friedland., *Linear Systems*, McGraw-Hill, New York, 1965.

[8] Skelton, R.E., *Dynamic Systems Control*, John Wiley & Sons, New York, 1988.