RUANG VEKTOR DAN TRANSFORMASI LINEAR

OLEH :

Drs. SYAFRIANDI
Dra. PUTRI YUANITA

FAKULTAS PENDIDIKAN MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
INSTITUT KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN
PADANG
1994

KATA PENGANTAR

Syukur Alhamdullillah Penulis Panjatkan Kehadirat Tuhan Yang Maha Esa, karena atas izinNya penulis telah dapat menyelesaikan buku "Ruang Vektor dan Transformasi Linear".

Buku ini terdiri dari tiga Bab, yaitu : Bab I Ruang Vektor yang berisi tentang ruang Vektor atas Lapangan, ruang Bagian, Bebas linear dan Bergantungan Linear dan Basis, Kernel dan Jangkauan dari sebuah Transformasi Linear, serta Bab III membahas tentang Ruang Enclid dan Ruang Hermit.

Penulis mengucapkan rasa terima kasih kepada semua pihak yang telah sumbangan pikiran baik langsung maupun tidak langsung, sehingga buku ini dapat diselesaikan.

Dengan adanya buku ini penulis berharap agar pembaca dapat mengambil manfaatnya, akhirnya penulis mengharapkan kritik dan saran dari pembaca demi kesempurnaan buku ini.

Padang, Maret 1994

P e n u l i s

DAFTAR ISI

BAB I

RUANG VEKTOR

1.1. Ruang Vektor Atas Lapangan

Definisi 1.1.1 :

Sebuah ruang vektor V atas lapangan F adalah himpunan objek-objek yang dapat merupakan penjumlahan dan perkalian dengan elemen-elemen di F. Dalam hal ini jumlah dua elemen di V juga merupakan elemen di V, hasil kali dari sebuah elemen V dengan semua elemen dari F adalah elemen di V dan memenuhi sifat-sifat berikut :

1. $(u + v) + w = u + (v + w), \forall u,v,w \in V$
2. $\exists\, 0 \in V \ni 0 + u = u + o = u, \forall u \in V$
3. $\exists\, -u \in V \ni u + (-u) = 0 ; \forall u \in V$
4. $u + v = v + u, \forall u, v \in V$
5. $c (u + v) = cu + cv, \forall u, v \in V$ dan $c \in F$
6. $(a + b) u = au + bu, \forall u \in V$ dan $a, b \in F$
7. $(ab) u = a (bu), \forall u \in V$ dan $a, b \in F$
8. $1 . u = u, \forall u \in V$

Lebih lanjut, sebuah sistem $V = \{V, F, +, ., \oplus, \odot\}$ disebut ruang vektor atas F, jika :

I. $\{F, +, .\}$ adalah suatu lapangan dengan elemen netralnya 0 dan elemen satuannya 1.

Yakni :

a. $\{F, +\}$ merupakan grup komutatif, yakni memenuhi sifat-sifa berikut :

1. Tertutup : $\alpha + \beta \in F$, $\forall\ \alpha, \beta \in F$
2. Assosiatif : $(\alpha + \beta) + \psi = \alpha + (\beta + \psi)$, $\forall\ \alpha, \beta, \psi \in F$
3. $\exists\ 0 \in F \ni 0 + \alpha = \alpha + 0 = \alpha$, $\forall\ \alpha \in F$
4. $\exists\ -\alpha \in F \ni \alpha + (-\alpha) = 0$, $\forall\ \alpha \in F$
5. Komutatif : $\alpha + \beta = \beta + \alpha$, $\forall\ \alpha, \beta \in F$

b. $\{F, .\}$ merupakan grup komutatif, yakni memenuhi sifat-sifat berikut :

1. Tertutup : $\alpha . \beta \in F$, $\forall\ \alpha, \beta \in F$
2. Assosiatif : $(\alpha . \beta) . \psi = \alpha . (\rho . \psi)$, $\forall\ \alpha, \beta, \psi \in F$
3. $\exists\ 1 \in F \quad 1 . \alpha = \alpha$, $\forall\ \alpha\ E\ F$
4. Setiap elemen dari F yang tidak nol mempunyai Invers.
5. Komutatif : $\alpha . \beta = \beta . \alpha$, $\forall\ \alpha, \beta \in F$

c. $\{F, +, .\}$ memenuhi sifat distributif yakni :

$\alpha + (\beta . \psi) = (\alpha + \beta) . (\alpha + \psi)$, $\forall\ \alpha, \beta, \psi \in F$.

II. $\{V, \oplus\}$ merupakan grup komutatif, yakni memenuhi sifat-sifat berikut :

1. Tertutup : $u \oplus v \in V$, $\forall\ u, \in V$
2. Assosiatif : $u \oplus (v \oplus w) = (u \oplus v) \oplus w$, $\forall\ u, v, w \in V$

3. $\exists\ \theta \in V \ni u \oplus \theta = u,\ \forall\ u \in V$

4. $\exists\ -v \in V \ni v \oplus (-v) = \theta,\ \forall\ v \in V$

5. Komutatif : $u \oplus v = v \oplus u,\ \forall\ u, v \in V$

III. Untuk semua $\alpha, \beta \in F$ dan semua $u, v \in V$ maka :

$\alpha \cdot v \in V$ dan memenuhi sifat berikut :

1. $(\alpha + \beta) \odot v = (\alpha \odot v) \oplus (\beta \odot v)$

2. $\alpha \odot (v \oplus w) = (\alpha \odot v) \oplus (\alpha \odot w)$

3. $(\alpha \cdot \beta) \odot v = \alpha \odot (\beta \odot v)$

4. $1 \odot v = v$

Ruang vektor $V = \{V, F, +, \cdot, \oplus, \odot\}$ atas lapangan F ditulis $V_{(F)}$

Teorema 1.1.1 : Misalkan θ menunjuk suatu vektor nol, dan $-v$ invers dari v, maka berlaku :

1. $0.v = \theta,\ \forall\ v \in V$

2. $(-1) \cdot v = -v,\ \forall\ v \in V$

3. $\alpha \cdot \theta = \theta,\ \forall\ \alpha \in F$

4. Jika $\alpha \cdot v = \theta$ dan $\alpha \neq 0$ maka $v = \theta$, $\forall\ \alpha \in F$ dan $v \in V$

5. Jika $\alpha \cdot v = \theta$ dan $v \neq \theta$ maka $\alpha = 0$ $\forall\ \alpha \in F$ dan $v \in V$

Bukti :

1. $v = 1.v = (1 + 0)\ v = 1.v + 0.v = v + 0.v$

   dengan menambah $-v$ pada kedua ruas

   diperoleh : $-v + v = -v + v + 0.v$

   $\theta = \theta + 0 \cdot v$

   $\theta = 0 \cdot v$

   jadi terbukti bahwa : $0 \cdot v = \theta,\ \forall\ v \in V$

2. $v + (-1)\ v = 1 \cdot v + (-1)\ v = (1 + (-1))\ v$

   $= 0 \cdot v = \theta$

   diperoleh $v + (-1)\ v = \theta$ sehingga $(-1)\ v$

   $= \theta + (-v) = -v$

   Jadi terbukti bahwa : $(-1) \cdot v = -v,\ \forall\ v \in V$

3. $\alpha \cdot \theta = \alpha\ (v + (-v)) = \alpha\ v + \alpha\ (-v)$

   $= \alpha\ V + \alpha\ (-1.v)$

   $= \alpha\ v + (\alpha \cdot (-1))\ v$

   $= \alpha\ v + (-\alpha)\ v$

   $= (\alpha + (-\alpha))\ v$

   $= 0 \cdot v$

   $= \theta$

4. Andaikan $v = \theta$, karena $\alpha \neq 0$ maka $\alpha \cdot v \neq \theta$,

   kontradiksi dengan $\alpha \cdot v = 0$ haruslah $v = \theta$

   Jadi terbukti bahwa jika $\alpha \cdot v = \theta$ dan $\alpha \neq 0$

   maka $v = \theta$, $v\ \alpha \in F$ dan $v \in V$

5. Andaikan $\alpha \neq 0$, karena $v \neq \theta$ maka $\alpha \cdot v \neq \theta$, kondiksi dengan $\alpha \cdot v = \theta$, haruslah $\alpha = 0$.
   Jadi terbukti bahwa jika $\alpha \cdot v = \theta$ dan $v \neq \theta$ maka $\alpha = 0$, $\forall\, \alpha \in F$ dan $v \in V$

Berikut ini diberikan beberapa contoh ruang vektor atas lapangan bilangan riil.

a. Himpunan R^n yang memuat semua tupel - n bilangan real $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ dengan operasi penambahan.
   $(a_1, a_2, \ldots, a_n) + (b_1, b_2, \ldots b_n) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n)$
   dan
   $\alpha\,(a_1, a_2, \ldots, a_n) = (\alpha a_1, \alpha a_2, \ldots, \alpha a_n)$, $\forall\, \alpha \in R$
   maka R^n ruang vektor atas R.

b. Untuk n tertentu, ambil $V = \{\alpha_o + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \ldots + \alpha_n x^n \mid \alpha_i \in R\}$
   dengan operasi
   $(\alpha_o + \alpha_1 x + \ldots + \alpha_n x^n) + (\beta_o + \beta_1 x + \ldots + \beta_n x^n\} \overset{def}{=} (\alpha_o + \beta_o) + (\alpha_1 + \beta_1)\, x + \ldots + (\alpha_n + \beta_n)\, x^n$ dan
   $k\,(\alpha_o + \alpha_1 x + \ldots + \alpha_n x^n \overset{def}{=} k\,\alpha_o + k\,\alpha_1 x + \ldots + k\,\alpha_n x^n$ merupakan ruang vektor atas R.

c. Himpunan M_{mxn} yang memuat semua matriks berordo mxn dengan entri-entrinya bilangan riil. Dengan operasi penambahan matriks dan perkalian matriks dengan

bilangan- bilangan riil, maka M_{mxn} merupakan ruang vektor atas R.

1.2 Ruang Bagian

Misalkan W suatu himpunan bagian dari ruang vektor V, maka W dinamakan ruang bagian dari V jika W sendiri adalah suatu ruang vektor dibawah operasi yang sama dengan V.

Defenisi 1.2.1: Diberikan ruang vektor $V = \{ V, F, +, \cdot, \oplus, \odot \}$

Himpunan bagian S dari V dikatakan membentuk ruang bagian S dari V jika Sistem bagian $S = \{S, F, +, \cdot, \oplus, \odot \}$ juga merupakan ruang vektor.

Teorema 1.2.1 : Jika V ruang vektor atas lapangan F dan $S \subseteq V$ maka S ruang bagian dari V jika dan hanya jika kondisi-kondisi berikut dipenuhi :

a). $u + v \in S, \forall u.v \in S$

b). $\alpha u \in S, \forall \alpha \in F$ dan $\forall u \in S$

Kondisi a) & b) ini menunjukkan bahwa S tertutup terhadap operasi penambahan vektor dan perkalian vektor dengan skalar.

Bukti :

(i) $\longrightarrow$

Misalkan S ruang bagian dari ruang vektor V, karena $S \subseteq V$, maka aksioma-aksioma ruang vektor didalam V dipenuhi didalam S, khususnya pada S berlaku :

(a). $u + v \in S$, $\forall\, u, v \in S$

(b). $\alpha u \in S$, $\forall\, \alpha \in F$ dan $\forall\, u \in S$,

(terbukti)

(ii) Misalkan S tertutup terhadap operasi-operasi itu maka $(-1)\, v = -v \in S$, $\forall\, v \in S$ dan $v + (-v) = 0 \in S$.

Penjumlahan vektor dalam S sama seperti V sehingga ia assosiatif dan Komutatif.

Sifat-sifat lain dipenuhi oleh S karena $S \subseteq V$ Jadi terbukti bahwa S ruang bagian dari V.

Defenisi 1.2.2: Misalkan V ruang vektor atas lapangan F dan $S \subseteq V$, $T \subseteq V$ maka : $s + T = \{s + t \mid s \in S, t \in T\}$ disebut himpunan jumlah S dan T.

Teorema 1.2.2: Diberikan ruang vektor V atas lapangan F dan S, T masing-masing ruang bagian V, maka :

a). $S \cap T$ ruang bagian V

b) $S + T$ ruang bagian V

Bukti :

a). (i). Misalkan $u, v \in S \cap T$ sebarang berarti :

$u, v \in S$ dan $u, v \in T$.

Karena S ruang bagian V maka $u + v \in S$

karena T ruang bagian V maka $u + v \in T$

dengan demikian $u + v \in S \cap T$.

(ii) Misalkan $u \in S \cap T$ sebarang dan $\alpha \in F$ sebarang.

Karena $u \in S \cap T$ maka $u \in S$ dan $u \in T$

Karena S ruang bagian V maka $\alpha u \in S$

Karena T ruang bagian V maka $\alpha u \in T$

dengan demikian : $\alpha u \in s \cap T$.

Dari (i) & (ii) terbukti bahwa $S \cap T$ ruang bagian dari V.

b). Misalkan $u, v \in S + T$ dengan $u = s_1 + t_1$ untuk suatu $s_1 \in S$ dan $t_1 \in T$, dan $v = s_2 + t_2$ untuk suatu $s_2 \in S$ dan $t_2 \in T$.

(i). Akan ditunjukkan : $u + v \in S + T$

$$u + v = (s_1 + t_1) + (s_2 + t_2)$$
$$= s_1 + (t_1 + s_2) + t_2$$

$= s_1 + (s_2 + t_1) + t_2$

$= (s_1 + s_2) + (t_1 + t_2) \in S + T$

$\therefore u + v \in S + T$

(ii). Akan ditunjukkan $\alpha u \in S + T$, $\forall \alpha \in F$ dan $\alpha u \in S + T$

Ambil sebarang $\alpha \in F$ maka $\alpha u = \alpha (s_1 + t_1)$

$= \alpha s_1 + \alpha t_1 \in S + T$

Dari (i) & (ii) terbukti bahwa $S + T$, ruang bagian V

Definisi 1.2.3 : Misalkan $S = \{a_1, a_2, \ldots, a_r\}$ adalah himpunan vektor-vektor didalam ruang vektor V. Jika setiap vektor didalam V dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear dari vektor-vektor di S, maka dikatakan himpunan S merentang atau membangun V, atau V dibangun oleh S.

Teorema 1.2.3. Misalkan V suatu ruang vektor dan himpunan $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_r\} \subseteq V$, maka :

(a). Himpunan W yang memuat semua kombinasi linear dari vektor-vektor di S adalah sebuah ruang bagian dari V.

Ruang bagian ini disebut ruang linear yang direntang oleh S.

(b). Himpunan W adalah ruang bagian terkecil yang memuat S, yakni jika terdapat ruang bagian yang lain yang memuat S, maka ruang bagian ini memuat W.

Bukti : (a). Untuk menunjukkan bahwa W ruang bagian dari V, kita akan memperlihatkan bahwa W tertutup dibawah penambahan dan perkalian dengan skalar. Misalkan $u,v \in W$ sebarang.

Maka : $u = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \ldots + a_r v_r$, dan $a_1, a_2, \ldots, a_r$ dan $b_1, b_2, \ldots, b_r$ skalar-skalar didapat : $u + v = (a_1 + b_1) v_1 + (a_2 + b_2) v_2 + \ldots + (a_r + b_r) v_r$

dan untuk sebarang skalar k didapat :

$ku = (ka_1) v_1 + (ka_2) V_2 + \ldots + (ka_r) V_r$

Jadi : $u + v \in w$ dan $k u \in w$, $\forall u, v \in w$, $\forall k \in R$

(b). Karena kita dapat menulis : $v_i = ov_1 + ov_2 + V_i + \ldots + ov_r$

$\forall i = 1,2 \ldots r$, maka $v_i \in W$. Akibatnya W memuat S .Misalkan X ruang bagian lain yang memuat S. Karena X tertutup dibawah penambahan dan perkalian skalar, maka X memuat semua kombinasi linear.

$k_1 v_1 + k_2 v_2 + \ldots + k_r v_r$. Jadi X memuat W. Ini menunjukkan bahwa W adalah ruang bagian terkecil yang memuat S.

Perlu dicatat bahwa jika V ruang vektor atas lapangan F, maka V memiliki paling sedikit dua ruang bagian, yaitu dirinya sendiri dan ruang vektor nol. Kedua ruang bagian ini disebut ruang bagian trivial (ruang bagian sejati).

Berikut ini diberikan beberapa contoh ruang bagian dari suatu ruang vektor atas lapangan bilangan riil :

a. Titik-titik pada sebuah garis V yang melalui titik asal pada R^3 memenuhi persamaan parametrik yang berbentuk :

$$X = at$$
$$Y = bt$$
$$Z = ct$$

dimana $a,b,c \in R$, dan $-\infty < t < \infty$ dan membentuk ruang vektor dibawah operasi penambahan standar dan perkalian dengan skalar untuk vektor-vektor di dalam R^3. Jadi V merupakan ruang bagian dari R^3.

b. Misalkan P_2 himpunan semua polinomial berderajat ≤ 2 dan polinomial nol, maka P_2 merupakan himpunan bagian dari P.

anggota-anggota P_2 berbentuk $a_o + a_1 t + a_2 t^2$, dengan a_o , a_1, $a_2 \in R$. Jika $P(t) = a_o + a_1 t + a_2 t^2$ dan $q(t) = b_o + b_1 t + b_2 t^2$, maka : $p(t) = q(t)$ jika $a_i = b_i$ untuk $i = 0,1,2$. Selanjutnya didefinisikan:

$p(t) + q(t) = (a_o + b_o) + (a_1 + b_1) t + (a_2 + b_2) t^2$ dan

$\alpha (p(t)) = \alpha a_o + \alpha a_1 t + \alpha a_2 t^2$,

$\forall\ p(t),\ q(t) \in P_2$ dan $\alpha \in R$.

Maka mudah diperiksa bahwa P_2 merupakan ruang bagian dari P.

Secara umum himpunan P_n yang memuat semua polinomial berderajat $\leq n$ dan polinomial nol merupakan ruang bagian dari P.

c. Misalkan A adalah suau ruang vektor dalam R^3 misalkan $W = \{ B \in R_3 \mid B \cdot A = 0\}$ maka W adalah suatu ruang bagian dari R^3

Bukti :

(i). Ambil sebarang B_1, $B_2 \in W$ berarti $B_1 \cdot A = 0$ dan $B_2 \cdot A = 0$

Akan ditunjukkan $B_1 + B_2 \in W$, yakni akan ditunjukkan

$(B_1 + B_2) \cdot A = 0$

$(B_1 + B_2) A = B_1 A + B_2 A$

$= 0 + 0$

$= 0$

$\therefore B_1 + B_2 \in W$

(ii) Ambil sebarang $\alpha \in F$ dan $B \in W$

berarti $B \cdot A = 0$

Akan ditunjukan $\alpha \cdot B \in W$, yakni

akan ditunjukkan $\alpha B \cdot A = 0$

$(\alpha B) \cdot A = \alpha (B \cdot A)$

$= \alpha \cdot 0$

$= 0$

$\therefore \alpha B \in W$

Dari (i) & (ii) terbukti bahwa W

ruang bagian dari R^3.

d. Misalkan S himpunan dan K lapangan

$K^S = \{f : S \longrightarrow K\}$, dengan operasi pada

K^S didefinisikan sebagai : $(f + q)(s) =$

$f(s) + g(s)$ dan $(k \cdot f)(s) = k \cdot f(s)$.

Untuk sebarang $f, g \in K^S$ dan $k \in K$, $s \in S$

maka K^S suatu ruang vektor atas K.

Misalkan $W = \{f \in K^S \mid f$ kontiniu$\}$ maka W

adalah ruang bagian untuk K^S.

dan juga $U = \{f \in K^S \mid f \text{ terdefinisi}\}$ maka

U adalah ruang bagian untuk K^S

Definisi 1.2.4 : Diberikan ruang vektor $V_{(F)}$ dan S. T masing-masing ruang bagian V.

$V = S + T$ disebut jumlah langsung dari S dan T jika dan hanya jika $S + T = V$ dan $S \cap T = \{\theta\}$.

Teorema 1.2.4 : Diberikan ruang vektor $V_{(F)}$ dan S, T masing-masing ruang bagian V.

$V = S + T$ jika dan hanya jika $\forall\, \mu \in V$, ξ dapat ditulis secara tunggal sebagai $\mu = \xi + \tau$ untuk $\xi \in s$ dan $\tau \in T$.

Bukti : ($\longrightarrow$)

Misalkan $V = S + T$ berarti : $V = S + T$ dan $S \cap T = \{\theta\}$.

Ambil sebarang $\mu \in V$ dengan $\mu = \xi_1 + \tau_1$ untuk suatu $\xi_1 \in S$ dan $\tau, \in T$.

Andaikan μ dapat ditulis sebagai

$\mu = \xi_2 + \xi_2$ untuk suatu $\xi_2 \in S$ dan $\tau_2 \in T$

dengan $\xi_1 = \xi_2$ dan $\tau_1 = \tau_2$.

.). $\mu = \xi_2 + \tau_2 \longleftrightarrow \xi_1 + \tau_1 = \xi_2 + \tau_2$

$\longleftrightarrow \xi_1 - \xi_2 = \tau_2 - \tau_1$

Karena $\xi_1 - \xi_2 \in S$ dan $\tau_2 - \tau_1 \in T$ dengan

$\xi_1 - \xi_2 = \tau_2 - \tau_1$ maka

$\xi_1 - \xi_2 \in S \cap T$ dan $\tau_2 - \tau_1 \in S \cap T$

Karena $S \cap T = \{\theta\}$ maka diperoleh

$\xi_1 - \xi_2 = \theta \longleftrightarrow \xi_1 = \xi_2$ dan

$\tau_2 - \tau_1 = \theta \longleftrightarrow \tau_2 = \tau_1$

Jadi untuk setiap $\mu \in V$ terdapat secara tunggal $\xi \in S$ dan $\tau \in T$ sedemikian sehingga :

$\mu = \xi + \tau$.

($\longrightarrow$)

Misalkan $\forall\, \mu \in V$ dapat ditulis secara tunggal sebagai $\mu = \xi + \tau$ untuk $\xi \in S$ dan $\tau \in T$.

Akan dibukikan : $V = S + T$, yakni

(i) $V = S + T$

(ii) $S \cap T = \{\theta\}$

(i). Karena $\mu = \xi + \tau$ untuk suatu $\xi \in S$ dan $\tau \in T$, maka jelas bahwa $\mu = \xi + \tau \in S + T$, sehingga $V = S + T$.

(ii). Ambil sebarang $\alpha \in S \cap T$, maka $\alpha \in V$ sehingga $\alpha = \alpha + \theta$ dengan $\alpha \in S$ dan $\theta \in T$.

Juga $\alpha = \theta + \alpha$ dengan $\theta \in S$ dan $\alpha \in T$

Karena penulisan $\alpha \in V$ harus

tunggal, maka $\alpha + \theta = \theta + \alpha$,

sehingga diperoleh, $\alpha = \theta$.

Jadi $S \cap T = (\theta)$

1.3 Bebas linear dan Bergantung Linear

Pengertian vektor-vektor bebas linear dan vektor-vektor bergantungan linear merupakan salah satu konsep yang berguna dalam teori ruang vektor.

Definisi 1.3.1 : Misalkan V merupakan ruang vektor atas lapangan F, dan $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$

S disebut himpunan yang bebas linear,, jika $\alpha_1 s_1 + \alpha_2 s_2 + \ldots + \alpha_n s_n = \theta$ hanya dipenuhi oleh $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$ dengan $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in F$ jika tidak demikian, yakni jika ada $a_i = 0$ untuk $i = 1,2,\ldots,n$ maka S disebut himpunan yang bergantungan linear.

Definisi 1.3.2 : Diberikan ruang vektor V atas lapangan F.

$S \cap V$ dan S tak berhingga.

S disebut himpunan yang bebas linear, jika setiap himpunan bagian S yang berhingga merupakan himpunan yang bebas linear.

Teorema 1.3.1 : Diberi $V_{(F)}$, $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_n\} \subseteq V$, S himpunan yang tak bebas linear jika dan hanya jika terdapat s_i $(i = 1,2, \ldots, n)$ yang merupakan kombinasi linear dari $n - 1$ vektor yang lain.

Bukti :

$(\longrightarrow)$

Karena $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$ bergantungan linear, maka $\exists\ \alpha_i \neq o, (i = 1,2, \ldots, n)$ sedemikian sehingga, persamaan : $\alpha_1 s_1 + \alpha_2 s_2 + \ldots + \alpha_n s_n = \theta$ dapat ditulis sebagai :

$$Si = \frac{-\alpha_1}{\alpha_i} s_1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_i} s_2 - \ldots - \frac{\alpha_n}{\alpha_i} s_n$$

Jadi s_i merupakan kombinasi linear dari $n - 1$ vektor yang lain.

$(\longleftarrow)$

Karena ada s_k yang merupakan kombinasi linear dari $n - 1$ vektor yang lain, misalkan

$$s_k = \beta_1 s_1 + \beta_2 s_2 + \ldots + \beta_{k-1} s_{k-1} + \beta_{k+1} s_{k+1} + \ldots + \beta_n s_n$$

maka terdapat skalar-skalar $\beta_1 = -\alpha_1$, $\beta_2 = -\alpha_2$ $\beta_k = 1, \ldots, \beta_n = -\alpha_n$ yang memenuhi :

$$\alpha_1 s_1 + \alpha_2 s_2 + \ldots + \alpha_n s_n = 0$$

Jadi $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$ tak bebas linear.

Lemma 1.3.1 : Diberikan $V_{(F)}$, A,B ruang bagian dari $V_{(F)}$.

$A \subseteq B$, B bebas linear $\longrightarrow$ A bebas linear.

B u k t i : Misalkan $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ untuk suatu $n \in$ Asli. B bebas linear, berarti persamaan $\beta_1 b_1 + \beta_2 b_2 + \ldots + \beta_n b_n = \theta$ hanya dipenuhi oleh : $\beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_n = 0$ untuk suatu $\beta_i \in F$, $i = 1,2,\ldots,n$.

Misalkan $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ karena $A \subseteq B$ maka $m \leq n$.

Pandang persamaan vektor :

$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_m a_m = \theta$

untuk suatu $\alpha_i \in F$, $i = 1,2,\ldots,m$.

Andaikan A tidak bebas linear, berarti $\exists\, \alpha_i \neq \theta$ yang memenuhi persamaan di atas berarti :

$$a_i = \frac{-\alpha_1}{\alpha_i} a_1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_i} a_2 - \quad - \frac{\alpha_m}{\alpha_i} a_m$$

Pandang :

$$a_i = \frac{-\alpha_1}{\alpha_i} a_1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_i} a_2 - \ldots - \frac{\alpha_m}{\alpha_i} a_m +$$

Lemma 1.3.2 : Diberikan $V_{(F)}$, A,B ruang bagian dari $V_{(F)}$.

Jika $A \subseteq B$, dan A bergantungan linear maka B bergantungan linear.

B u k t i : Cara I :

Misalkan $A = \{ a_1 , a_2 , \ldots , a_m \}$

Pandang $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_m a_m = \theta$

untuk suatu $\alpha_i \in F$, $i = 1,2, \ldots , m$.

A bergantungan linear, berarti $\exists\ \alpha_i \neq 0$

sehingga :

$$a_i = \frac{-\alpha_1}{\alpha_i} a_1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_i} a_2 - \ldots - \frac{\alpha_m}{\alpha_i} a_m \quad *)$$

Misalkan $B = \{b_1 , b_2 , \ldots , b_n \}$

dengan $m < n$, karena $A \subseteq B$, maka :

$\{a_1 , a_2 , \ldots , a_m \} \in B$ dengan

demikian :

$B = \{a_1 ,a_2 ,\ldots,a_m, b_1 ,b_2 ,\ldots,b_n \}$

Karena *) dapat ditulis sebagai :

$$ai = \frac{-\alpha_1}{\alpha_i} a_1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_i} a_2 - \ldots - \frac{\alpha_m}{\alpha_i} a_m + Ob_1 + Ob_2 + \ldots + ob_n$$

Yang memperlihatkan bahwa B bergantungan linear.

Cara II :

Dengan menggunakan lemma 1.3.1, dapat dibuktikan sebagai berikut :

Andaikan B bebas linear, karena $A \subseteq B$ maka menurut lemma 1.3.1, A juga bebas linear (Kontradiksi)

Jadi haruslah B bergantungan linear.

Teorema 1.3.2. Diberikan ruang vektor $V_{(F)}$, $S \subseteq V$, S bebas linear dan $J = [S]$.

$\forall\ \xi \in V$, $S \cup \{\xi\}$ bebas linear $\longleftrightarrow$ $\xi \notin J$

Bukti : ($\longrightarrow$)

Ambil sebarang $\xi \in V$, $[S] = [s_1, s_2, \ldots s_m]$

Andaikan $\xi \in J = [S]$ berarti :

$\xi = \alpha_1 s_1 + \alpha_2 s_2 + \ldots + \alpha_m s_m$, $\forall\ \alpha i \in F$ dan

$s_i \in S \quad i = 1,2 \ldots, m$

Kasus (i) : Jika $\forall\ \alpha_i = 0$, maka $\xi = \theta$, akibatnya : $S \cup \{\xi\}$ bergantungan linear.

(ii) : Jika $\exists\ \alpha_i \neq 0$, maka :

$$s_i = \frac{\alpha_i}{\alpha_i}\xi - \frac{\alpha_1}{\alpha_i}s_1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_i}s_2 - \ldots - \frac{\alpha_m}{\alpha_i}s_m$$

Dengan demikian $S \cup \{\xi\}$ bergantungan linear.Jadi terdapat kontradiksi.

Dengan demikian haruslah $\xi \notin J$.

($\longleftarrow$)

Pandang kombinasi Linear

$\beta_1 S_1 + \beta_2 S_2 + \ldots + \beta_m S_m + c\ \xi = \theta$

$\xi \notin J$, andaikan $S \cup \{\xi\}$ bergantungan

linear berarti $\exists\ b_1, b_2, \ldots, b_m, c$ yang tidak nol, misalkan $c = 0$, berarti :

$$\xi = \frac{-\beta_1}{c} s_1 - \frac{\beta_2}{c} s_2 - \ldots - \frac{\beta_m}{c} s_m,$$

yang berarti $\xi \in [S] = J$ (kontradiksi)

Jadi haruslah $S \cup \{\xi\}$ bebas linear.

Teorema 1.3.3: Diberikan ruang vektor $V_{(F)}$, $S \subseteq V$, $s \neq \emptyset$

$S = \{s_1\ s_2, \ldots\ s_m\}$

S bergantungan linear $\longleftrightarrow$ $S_k \in [s_1, s_2, \ldots, s_{k-1}]$ dengan $k \leq m$.

Bukti : ($\longrightarrow$)

Karena S bergantungan linear, misalkan $k \leq m$ adalah bilangan bulat terkecil sehingga $\{s_1, s_2, \ldots, s_k\}$ bergantungan linear, berarti $\exists\ \psi = 0$, sedemikian sehingga :

$\psi_1\ s_1 + \psi_2\ s_2 + \ldots + \psi_x s_k = \theta.$

Andaikan $\psi_k \neq 0$, diperoleh :

$$s_k = \frac{-\psi_1}{\psi_k} s_1 - \frac{\psi_2}{\psi_k} s_2 - \ldots - \frac{\psi_{k-1}}{\psi_k} s_{k-1}$$

dengan kata lain $s_k \in [s_1, s_2 \ldots s_{k-1}]$

($\longleftarrow$)

Jika $s_k \in [s_1, s_2, \ldots, s_{k-1}]$ maka $\{s_1, s_2, \ldots s_{k-1}\}$ bergantungan linear.

$S = \{s_1, s_2, \ldots, s_m\}$ dengan $k \leq m$, berarti

$\{s_1\ s_2, \ldots, s_k\} \subseteq S$

dengan demikian menurut lemma 1.3.2, maka terbukti bahwa S bergantungan linear.

Teorema 1.3.4 : Diberikan ruang vektor $V_{(F)}$ dan $S \subseteq V$, $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_m\}$, $s_j = \theta$, $j = 1, 2, \ldots, m$ Jika $J = [S]$ maka ada himpunan bagian $S' \subseteq S$ dimana S' bebas linear sehingga $J = [S']$

Bukti :

(i). Jika S bebas linear, bukti selesai karena kita dapat memilih $S \subseteq S$ yang bebas linear dan $J = [S]$.

(ii). Jika S bergantung linear, menurut teorema 1.3.3. $\exists\ k \leq m \quad s_k \in [s_1, s_2, \ldots, s_{k-1}]$

Misalkan $s_{k'} \in [s_1, s_2, \ldots, s_{k'-1}]$,

dengan k' Indeks terkecil.

Bentuk $S' = S - \{S_{k'}\}$ maka $J = [S']$

Argumentasi ini diulang untuk S', yakni :

(i). Jika S' bebas linear, bukti selesai.

(ii). Jika S" bergantung linear maka $\exists\ S_{k''} \in [s_1, s_2, \ldots s_{k''-1}]$

Bentuk $S'' = S' - \{S_{k''}\}$ maka $J = [S'']$

Jika proses ini dilanjutkan, akhirnya diperoleh $S' = \{S_e\}$ untuk suatu e dan dan $s_e = \theta$ dan S' bebas linear, sehingga $J = [S']$

Dari proses bukti di atas dapat diturunkan definisi sebagai berikut :

Definisi 1.3.3 : Suatu himpunan bebas linear S yang tidak dapat diperluas menjadi himpunan bebas linear lagi dalam J disebut himpunan bebas linear maksimal.

Corrolary : Setiap himpunan vektor tak nol selalu memuat himpunan bagian yang bebas linear yang maksimal.

Contoh :

R^3 merupakan ruang vektor atas R

misalkan $J = \{e_1, e_2, e_3\}$ dengan $e_1 = (1,0,0)$

$e_2 = (0,1,0)$ dan $e_3 = (0,0,1)$

Ambil sebarang $(x,y,z) \in R^3$, berarti :

$(x,y,z) = x\ e_1 + y\ e_2 + z\ e_3$

Jadi $(x,y,z) \in [e_1, e_2, e_3] = J$

$J \cup \{1,1,0\}$ tidak bebas linear.

Jadi $\{e_1, e_2, e_3\}$ himpunan bebas linear maksimal.

1.4 Basis

Definisi 1.4.1 : Misalkan V suatu ruang vektor dan himpunan $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_r\}$ adalah himpunan bagian berhingga dari V, maka S dinamakan basis untuk V jika :

(a). S merentang V

(b). S bebas linear.

Secara umum basis dapat didefinisikan sebagai berikut :

Definisi 1.4.2 : Diberikan ruang vektor $V_{(F)}$ Himpunan bagian V yang bebas linear maksimal disebut bais V. Jika basis V berhingga, maka V disebut berdimensi berhingga, jika tidak, maka V dikatakan berdimensi tak berhingga.

Definisi 1.4.3 : Dimensi sebuah ruang vektor V yang berdimensi berhingga adalah banyaknya vektor dalam sebarang basis. Jadi jika diberikan ruang vektor $V_{(F)}$, dan $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ merupakan basis V maka dimensi V adalah n, ditulis dengan d(V) = n.

Teorema 1.4.1 : Setiap vektor dari V mempunyai representasi tunggal sebagai kombinasi linear dari vektor-vektor basis untuk V.

Bukti :

Karena basis dari V membangun V, maka $\forall v \in V$ merupakan kombinasi linear dari vektor-vektor basis. Jadi jika dimisalkan $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ basis dari V, dan $v \in V$ sebarang, maka :

$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n$

Andaikan V juga dapat ditulis sebagai :

$v = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \ldots + \beta_n v_n$

maka :

$0 = (\alpha_1 - \beta_1) v_1 + (\alpha_2 - \beta_2) v_2 + \ldots + (\alpha_n - \beta_n) v_n$

karena $S = \{v_i\}_{i=1}^{n}$ basis maka haruslah :

$a_i = b_i = 0, \forall i = 1, 2, \ldots, n$

Dengan demikian $a_i = b_i, \forall i = 1, 2, \ldots n$

Jadi terbukti bahwa representasinya tunggal.

Teorema 1.4.2 : Setiap basis untuk ruang vektor V berdimensi berhingga mempunyai banyak elemen yang sama.

Bukti : Misalkan $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ dan $S' \{w_1, w_2, \ldots, w_m\}$

adalah dua basis untuk ruang vektor V yang

berdimensi berhingga. Karena S adalah sebuah basis dan S' adalah himpunan bebas linear, maka haruslah $m \leq n$. Demikian juga, karena S' adalah sebuah basis dan S bebas linear, maka haruslah $n \leq m$ jadi terbukti bahwa $m = n$.

Teorema 1.4.3 : Diberikan ruang veltor $V_{(F)}$ berdimeni n, maka setiap himpunan bebas linear dalam V dapat diperluas menjadi basis.

Bukti : Misalkan $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ basis V dan $T = \{w_1, w_2, \ldots, w_k\}$ bebas linear, dengan $k \leq n$.

Jika $\forall i = 1, 2, \ldots, n$, $v_i \in T$ maka $V = [T]$ (bukti selesai).

Jika ada v_j dengan $v_j \notin [T]$ maka :

$T' = T \cup \{V_j\}$ bebas linear ... ["." Teorema 1,3,2]

Jika $v_i \in [T']$, $\forall i = 1,2, \ldots, n$, maka $V = [T']$ (Bukti selesai).

Jika ada v_1 dengan $v_1 \notin [T']$, maka

$T'' = T' \cup \{V_1\} = T \cup \{V_j, V_1\}$ bebas linear.

Jika proses dilanjutkan akan diperoleh himpunan bebas linear yang maksimal yang membangun V, yuang merupakan basis.

Teorema 1.4.4. : Diberikan ruang vektor $V_{(F)}$ berdimensi n dan $A = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ himpunan dalam V

(i). A basis V $\longleftrightarrow$ bebas linear

(ii). A basis V $\longleftrightarrow$ [A] = V

Bukti :

(i) ($\longrightarrow$)

Jelas, karena jika A basis V maka A bebas linear.

($\longleftarrow$)

Menurut teorema 1.4.3, Jika A bebas linear, maka A dapat diperluas menjadi basis.

Karena $V_{(F)}$ berdimensi n dan banyak vektor pada A juga n, berarti A himpunan bebas linear yang maksimal. Jadi A basis V.

(ii). ($\longrightarrow$)

Jelas, karena jika A basis V maka [A] = V

($\longleftarrow$)

Andaikan A tidak bebas linear

Jika [A] = V maka ada $S \subset A$ yang bebas linear yang membangun V yang banyak anggotanya kecil dari n. Karena S basis V berarti dimensi V kecil dari n (Kontradiksi).

Jadi haruslah A bebas linear.

Dengan demikian terbukti bahwa A basis V.

Teorema 1.4.5 : Diberikan ruang vektor $V_{(F)}$ dan S, T masing-masing ruang bagian V, maka :

$$d(S + T) + d(S \cap T) = d(S) + d(T)$$

Bukti :

Misalkan $d(S \cap T) = k$, $d(S) = k + p$ dan $d(T) = k + 1$

Misalkan $P = \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ basis $S \cap T$, maka

P dapat diperluas sehingga :

$P = \{v_1, v_2, \ldots, v_k, w_{k+1}, \ldots w_{k+p}\}$ basis S dan

$R = \{v_1, v_2, \ldots, v_{k'+1}, \ldots, s_{k+1}, s_{k+2}, \ldots, s_{k+1}\}$

basis S + T.

(i). Ambil sebarang $\mu \in S + T$ dengan $\mu = \xi + \tau$,

Untuk suatu $\xi \in S$ dan $\tau \in T$, dimana :

$$\xi = \alpha_1 \nu_1 + \alpha_2 \nu_2 + \ldots + \alpha_k \nu_k + \beta_{k+1} s_{k+1} + \ldots + \beta_{k+p} s_{k+p}.$$

dengan $\alpha_j \in F$, $j = 1, 2, \ldots, k + p$

dan

$$\tau = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \ldots + \beta_k v_k + \beta_{k+1} s_{k+1} + \ldots + \beta_{k+1} s_{k+1}$$

dengan $\beta_i \in F$, $i = 1, 2, \ldots, k + 1$.

selanjutnya diperoleh :

$$\xi = (\alpha_1 + \beta_1)\, \nu_1 + (\alpha_2 + \beta_2)\, \nu_2 + \ldots + (\alpha_k + \beta_k)\, \nu_k + \alpha_{k+1} w_{k+1} + \ldots + \alpha_{k+p} w_{k+p} + \beta_{k+1} s_{k+1} + \ldots + \beta_{k+1} s_{k+1}$$

Yang berarti :

$[\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_k, w_{k+1}, \ldots, w_{k+p}, S_{k+1}, \ldots, S_{k+l}]$
$= S + T.$

(ii). Akan ditunjukan $P \cup R$ bebas linear :

Andaikan $P \cup R$ tak bebas linear, berarti ada $C_s \in F$ atau α_i yang tidak semuanya nol, dengan $s = 1, 2, \ldots, k + 1, \ldots k + p$ dan $i = 1, 2, \ldots, k+1, \ldots k + l$.

Sehingga :

$c_1 \nu_1 + c_2 \nu_2 + \ldots c_k v_k + c_{k+1} w_{k+1} + \ldots + c_{k+p} w_{k+p}$
$+ d_{k+1} s_{k+1} + \ldots + d_{k+l} s_{k+l} = \theta$

*). Andaikan semua $d_i = 0$, maka $\exists\, c_s = 0 \in F$, untuk $s = 1, 2, \ldots, k+1, \ldots, k+p$, sehingga :
$P = \{v_1, v_2, \ldots, v_k, w_{k+1}, \ldots, w_{k+p}\}$ tak bebas linear
Kontradiksi dengan P basis.

*). Jika ada $d_r \in F$ yang tidak semuanya nol dan yang lainnya nol, sebut $d_{k+1} = 0$, maka $s_{k+1} \in [v_1, v_2, \ldots, v_k]$.
Ini berarti bahwa : $\{v_1, v_2, \ldots, v_k, s_{k+1}\}$ tak bebas linear, pada hal menurut lemma 1.3.1 $\{v_1, v_2 \ldots, v_k\ s_{k+1}\}$ harus bebas linear, jadi terdapat kontradiksi.

*). Misalkan $d_{k+1} = 0$, $d_{k+2} = 0$ dan yang lain semuanya nol, maka :

$d_{k+1}\ s_{k+1} + d_{k+2}\ s_{k+2}$ merupakan kombinasi linear dari $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ sehingga $\{v_1, v_k\}$ sehingga $\{v_1, v_2, \ldots, v_{k+2}]$ tak bebas linear, pada hal menurut lemma 1.3.1 : $\{v_1, v_2, \ldots v_k, s_{k+1}, s_{k+2}\}$ bebas linear, jadi terdapat kontradiksi.

Jika proses dilanjutkan akhirnya diperoleh bahwa :

$\{v_1, v_2, \ldots v_k, s_{k+1}, \ldots, s_{k+l}\}$ tak bebas linear.

Jadi pengendaian salah, dengan demikian $P \cup R$ bebas linear.

Dari (i) & (ii) terbukti bahwa :

$P \cup R = \{v_1, v_2, \ldots, v_k, w_{k+1}, \ldots, w_{k+p}, s_{k+1}, \ldots, s_{k+p}\}$ basis dari $S + T$, dengan demikian diperoleh :

$$\begin{aligned} d\ (S + T) &= k + p + 1 \\ &= (k + p) + (k + 1) - k \\ &= d\ (s) + d\ (T) - d\ (s \cap T) \end{aligned}$$

Jadi terbukti bahwa :

$d\ (S + T) + (S \cap T) = d\ (S) + d\ (T)$.

BAB II

TRANSFORMASI LINEAR

2.1 Pengantar Transformasi Linear

Transformasi linear merupakan suatu fungsi bernilai vektor, yakni fungsi yang berbentuk $w = F(v)$ dengan v dan w masing-masing merupakan vektor. Jika V dan W merupakan ruang vektor atas lapangan K dan T adalah fungsi yang menghubungkan vektor unik di W dengan setiap vektor di V, maka dikatakan T memetakan V kedalam W dan ditulis $T : V \longrightarrow W$.

Definisi 1.1.1 : Diberikan ruang vektor $V_{(F)}$ dan $W_{(F)}$ Pemetaan T dari V ke W disebut transformasi linear, jika $\forall\ v,w \in V$ dan $\alpha, \beta \in F$ berlaku :

(i) $T(v + w) = T(v) + T(w)$

(ii) $T(\alpha v) = \alpha T(v)$

Definisi 2.1.2 : Diberikan ruang vektor $V_{(F)}$ dan $W_{(F)}$

Pemetaan T dari V ke W disebut Transformasi linear, jiak $\forall v,w \in V$ dan $\alpha, \beta \in F$ berlaku :

$T(\alpha v + \beta w) = \alpha T(v) + \beta T(w)$.

Kedua definisi di atas adalah ekivalen

Bukti :

Definisi 2.1.1. $\longrightarrow$ 2.1.2.

Misalkan $v, w \in V$ sebarang, dan $\alpha, \beta \in F$ sebarang menurut definisi 2.1.1. (ii), maka $T(\alpha v) = \alpha T(v)$ dan $T(\beta w) = \beta T(w)$, dan menurut definisi 2.1.1 (i) diperoleh :

$$T(\alpha v + \beta w) = T(\alpha v) + T(\beta w)$$
$$= \alpha T(v) + \beta T(w) \text{ (terbukti)}$$

Definisi 2.1.2. $\longrightarrow$ Definisi 2.1.1. :

Ambil $\alpha = \beta = 1 \in F$, maka menurut definisi 2.1.2 :

$T(v + w) = T(1.v + 1.w) = 1.T(v) + 1.T(w)$

$= T(v) + T(w)$ dan

ambil $\beta = 0 \in F$ maka menurut definisi 2.1.2 :

$T(\alpha u) = T(\alpha u + ow) = \alpha T(u) + o\, T(w) = \alpha T(u)$

Teorema 2.1.1 : Misalkan V dan W ruang vektor atas F $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ merupakan basis dari V, dan $w_1, w_2, \ldots, w_n$ elemen-elemen sebarang dari W, maka terdapat sebuah pemetaan linear unik $T : V \longrightarrow W$ sehingga $T(v_i) = w_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

dan jika $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in F$ maka :

$T(\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n) = \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2$

$+ \ldots + \alpha_n w_n$

Bukti :

Kita akan tunjukkan bahwa T merupakan transformasi linear.

(i). Misalkan $v \in V$ sebarang dan $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in F$

Sehingga $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n$ dan misalkan

$$T(v) = \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \ldots + \alpha_n w_n$$

Misalkan $v' \in V$ dan $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n \in F$ sehingga

$$v' = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \ldots + \beta_n v_n, \text{ dan}$$

$$T(v') = \beta_1 w_1 + \beta_2 w_2 + \ldots + \beta_n w_n$$

Sehingga diperoleh :

$$\begin{aligned} T(v + v') &= (\alpha_1 + \beta_1) w_1 + (\alpha_2 + \beta_2) w_2 + \\ &\quad \ldots + (\alpha_n + \beta_n) w_n \\ &= \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \ldots + \alpha_n w_n + \beta_1 w_1 \\ &\quad \beta_2 w_2 + \ldots + \beta_n w_n \\ &= T(v) + T(v') \end{aligned}$$

Dari (i) & (ii) terbukti bahwa T linear, karenanya terdapat pemetaan linear unik

$T: V \longrightarrow W$.

Jadi sebuah pemetaan adalah unik, karena untuk sebarang elemen $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n \in V$ terdapat pemetaan linear $T : V \longrightarrow W$ sehingga :

$T(v_i) = w_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, dan haruslah memenuhi :

$$T(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n) = \alpha_1 T(v_1) + \alpha_2 T(v_2) + \alpha_n T(v_n)$$
$$= \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \ldots + \alpha_n w_n$$

(Terbukti).

Teorema 2.1.2 : Jika $T : V \longrightarrow W$ adalah transformasi linear, maka :

a. $T(\bar{o}) = \bar{o}$

b. $T(-v) = -T(v), \forall v \in V$

c. $T(v - w) = T(v) - T(w), \forall v, w \in V$

Bukti :

a. Misalkan $v \in V$ sebarang, karena $o\, v = \bar{o}$, maka

$T(\bar{o}) = T(ov) = o.T(v) = \bar{o}$

b. Misalkan $v \in V$ sebarang, maka :

$T(-v) = T(-1v) = (-1)\, T(v) = -T(v)$

c. $T(v - w) = T(v + (-1)\, w) = T(v) + T((-1)w)$

$= T(v) + (-1)\, T(w)$

$= T(v) - T(w), \forall v, w \in V$

Definisi 2.1.3 : Diberikan ruang vektor $V_{(F)}$ dan $W_{(F)}$

Misalkan $T_1 : V \longrightarrow W$ dan $T_2 : V \longrightarrow W$ masing-masing transformasi linear, maka :

a. $T_1 = T_2 \longleftrightarrow T_1(v) = T_2(v), \forall v \in V$

b. Jumlah T_1 dan T_2 ditulis $T_1 \boxplus T_2$ didefinisikan sebagai $(T_1 \boxplus T_2)(v) = T_1(v) + T_2(v)$, $\forall\, v \in V$

c. Pergandaan skalar dengan T, ditulis $\alpha \boxdot T_1$ didefinisikan sebagai $(\alpha \boxdot T_1)(v) = \alpha\, T_1(\nu)$, $\forall\, \alpha \in F$, $\nu \in V$

Teorema 2.1.3 : Misalkan $L = \{T : V \longrightarrow W\}$ maka $(L, F, +, \cdot, \boxplus, \boxdot)$ merupakan ruang vektor F.

Bukti :

Akan ditunjukkan $(L, F, +, \cdot, \boxplus, \boxdot)$ ruang vektor atas F, yakni :

1. $(L, \boxplus)$ grup abelian, yakni :

   Misalkan T_1, T_2, T_3 masing-masing transformasi linear dari V ke W, maka memenuhi :

   (i). Sifat tertutup, yakni :

   $T_1, T_2 \in L \longrightarrow T_1 \boxplus T_2 \in L$

   Bukti :

   Misalkan u, v $\in$ V sebarang dan $\alpha, \beta \in F$ sebarang.

   Maka :

$$
\begin{aligned}
(T_1 \boxplus T_2)(\alpha u + \beta v) &= T_1(\alpha u + \beta v) + T_2(\alpha u + \beta v) \\
&= \alpha T_1(u) + \beta T_1(v) + \alpha T_2(u) + \beta T_2(v)
\end{aligned}
$$

$$= \alpha\ (T_1 \boxplus T_2)\ (u) + \beta\ (T_1 \boxplus T_2)\ (v)$$

Jadi $T_1 \boxplus T_2$ juga transformasi linear dari V ke W, berarti $T_1 \boxplus T_2 \in L$

(ii). Sifat Assosiatif, yakni : $T_1 \boxplus (T_2 \boxplus T_3) = (T_1 \boxplus T_2) \boxplus T_3$

Bukti :

Misalkan $v \in V$ sebarang, maka :

$$\begin{aligned} T_1 \boxplus (T_2 \boxplus T_3)\ (v) &= T_1\ (v) + (T_2 \boxplus T_3)\ (v) \\ &= T_1\ (v) + (T_2(v) + T_3\ (v)) \\ &= (T_1(v) + T_2(v)) + T_3(v) \\ &= (T_1 \boxplus T_2)(v) + T_3(v). \\ &= ((T_1 \boxplus T_2) \boxplus T_3)(v) \end{aligned}$$

Jadi terbukti bahwa :

$$T_1 \boxplus (T_2 \boxplus T_3) = (T_1 \boxplus T_2) \boxplus T_3$$

(iii). $\exists$ elemen nol, yakni $T_o \in L \ni T_o\ (v) = \theta_w,\ \forall\ v \in V$

(iv). $\forall\ T \in L,\ \exists\ -T \in L \ni T \boxplus (-T) = T_o$,

$-T$ disebut inves dari T.

Bukti :

Misalkan $v \in V$ sebarang, maka :

$$\begin{aligned} (T + (-T))\ \alpha &= T\ (\alpha) + (-1\ .\ T)\ (\alpha) \\ &= T\ (\alpha) - T\ (\alpha) \\ &= \theta\ w = T_o(\alpha) \end{aligned}$$

$\therefore (T \boxplus (-T)) = T_o$

(v). Sifat komutatif, yakni : $T_1 \boxplus T_2 = T_2 \boxplus T_1$

Bukti :

Misalkan $v \in V$ sebarang, maka :

$$(T_1 \boxplus T_2)\ v = T_1\ (v) + T_2\ (v)$$
$$= T_2\ (v) + T_1\ (v)$$
$$= (T_2 \boxplus T_1)(v)$$

$\therefore T_1 \boxplus T_2 = T_2 \boxplus T_1$

II. Untuk setiap T_1, $T_2 \in L$ dan α, $\beta \in F$ berlaku :

(i). $\alpha \boxdot T \in L$

Bukti :

Misalkan α, β, ψ F sebarang dan $u,v \in V$,

maka :

$$(\alpha \boxdot T)\ (\beta u + \psi v) = \alpha\ (T\ (\beta u + \psi v))$$
$$= \alpha\ (\beta.T(u) + \psi.T(v))$$
$$= \alpha\ \beta\ T\ (u) + \alpha\ \psi\ T\ (v)$$
$$= \beta\ \alpha\ T\ (u) + \psi\ \alpha\ T\ (v)$$
$$= \beta.(\alpha \boxdot T)(u) + \psi\ (\alpha \boxdot T)(v)$$

Jadi terbukti bahwa $\forall\ \alpha \in F$, $T \in L$ maka

$\alpha \boxdot T \in L$

(ii). $(\alpha + \beta) \boxdot T_1 = (\alpha \boxdot T_1) \boxplus (\beta \boxdot T_1)$

Bukti :

Misalkan $v \in V$ sebarang, maka :

$$((\alpha + \beta) \boxdot T_1)(v) = (\alpha + \beta)T_1(v)$$

$$= \alpha\, T_1(v) + \beta\, T_1(v)$$

$$= (\alpha \boxdot T_1)(v) + (\beta \boxdot T_1)(v)$$

$$= ((\alpha \boxdot T_1) \boxplus (\beta \boxdot T_1))(v)$$

Jadi terbukti bahwa :

$$(\alpha \boxplus \beta) \boxdot T_1 = (\alpha \boxdot T_1) \boxplus (\beta \boxdot T_1)$$

(iii). $\alpha \boxdot (T_1 \boxplus T_2) = (\alpha \boxdot T_1) \boxplus (\alpha \boxdot T_2)$

Bukti :

Misalkan $v \in V$ sebarang, maka

$$(\alpha \boxdot (T_1 \boxplus T_2))(v) = \alpha\, (T_1 \boxplus T_2)\ (v)$$

$$= \alpha\, (T_1\ (v) + T_2\ (v))$$

$$= \alpha\, T_1\ (v) + \alpha\, T_2\ (v)$$

$$= (\alpha \boxdot T_1)\ (v) + (\alpha \boxdot T_2)\ (v)$$

$$= ((\alpha \boxdot T_1) \boxplus (\alpha \boxdot T_2))\ (v)$$

Jadi terbukti bahwa :

$$\alpha \boxdot (T_1 \boxplus T_2) = (\alpha \boxdot T_2) \boxplus (\alpha \boxdot T_2)$$

(iv). $(\alpha \cdot \beta) \boxdot T_1 = \alpha \boxdot (\beta \boxdot T_1)$

Bukti :

Misalkan $v \in V$ sebarang, maka :

$$((\alpha \cdot \beta) \boxdot T_1)\ (v) = (\alpha \cdot \beta)\ T_1\ (v)$$

$$= \alpha\, (\beta\, T_1(v)$$

$$= \alpha\, (\beta \boxdot T_1)\ (v)$$

$$= (\alpha \boxdot (\beta \boxdot T_1))\ (v)$$

Jadi terbukti bahwa :

$$(\alpha + \beta) \cdot T_1 = (\alpha \cdot T_1) + (\beta \cdot T_1)$$

V. $1 \boxdot T_1 = T_1$

Bukti :

Misalkan $v \in T$, sebarnag, maka :

$(1 \boxdot T_1)\ (v) = 1\ .\ T_1\ (v)$

$= T_1\ (v)$

Jadi terbukti bahwa $1 \boxdot T_1 = T_1$.

Dari I dan II terbukti bahwa $(L, F, +, .\ , \boxplus, \boxdot)$ merupakan ruang vektor atas lapangan F.

Berikut ini akan diberikan beberapa contoh Transformasi linear.

1). Misalkan $V = R^3$ merupakan ruang vektor atas R dan $W = R^2$ merupakan ruang vektor atas R

Suatu pemetaan $T : V \longrightarrow W$ difinisikan dengan

$T(x\ , y, z) = (x\ , y)$

Tunjukkan bahwa $T : V \longrightarrow W$ suatu transformasi linear atas R.

Jawab :

Jelas bahwa R merupakan lapangan

(i). Misalkan $u = (x_1, y_1, z_1)$ dan $v = (x_2, y_2, z_2)$ dengan $u, \nu \in V$ sebarang, maka :

$$\begin{aligned} T\ (u + \nu) &= T\ (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) \\ &= (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \\ &= (x_1\ , y_1) + (x_2\ , y_2) \\ &= T\ (x_1, y_1, z_1) + T\ (x_2, y_2\ z_2) \\ &= T\ (u) + T\ (\nu) \end{aligned}$$

(ii). Misalkan $u = (x, y, z) \in V$ sebarang dan $\alpha \in R$, maka :

$$T(\alpha u) = T(\alpha x_1, \alpha y_1, \alpha z_1)$$
$$= (\alpha x_1, \alpha y_1)$$
$$= \alpha (x_1, y_1)$$
$$= \alpha T(x_1, y_1, z_1)$$
$$= \alpha T(u).$$

Dari (i) & (ii) terbukti bahwa : $T : V \longrightarrow W$ adalah transformasi linear atas R.

2). Misalkan V dan W adalah sebarang dua ruang vektor atas lapangan K. Pemetaan $T : V \longrightarrow W$ dengan $T(\nu) = \theta$ $\forall\ \nu \in V$ adalah sebuah transformasi linear, tunjukkan !.

Jawab :

Misalkan $u, \nu \in V$ sebarang dan $\alpha \in K$ sebarang, maka :

$u + \nu \in V$, dan $\alpha u \in V$, selanjutnya :

(i) $T(\upsilon + \nu) = \theta$

$$= \theta + \theta$$
$$= T(u) + T(\nu)$$

(ii) $T(\alpha u) = \theta$

$$= \alpha \cdot \theta$$
$$= \alpha T(u)$$

Dari (i) & (ii) terbukti bahwa $T : V \longrightarrow W$ merupakan transformasi linear. Transformasi linear seperti ini disebut transformasi nol.

3. Misalkan V adalah sebarang ruang vektor atas lapangan K. Pemetaan $T : V \longrightarrow V$ dengan $T(v) = v, \forall\, v \in V$ adalah sebuah transformasi linear, tunjukkan !.

Jawab :

Misalkan $u, \nu \in V$ sebarang dan $\alpha \in K$ sebarang, maka $u + \nu \in V$ dan $\alpha u \in V$, selanjutnya :

(i) $T(u + \nu) = u + \nu$

$= T(u) + T(\nu)$

(ii) $T(\alpha u) = \alpha u$

$= \alpha T(u)$

Dari (i) & (ii) terbukti bahwa $T : V \longrightarrow W$ merupakan transformasi lienar. Transformasi linear seperti ini disebut transformassi linear identitas.

4. Misalkan V dan W ssebarang dua ruang vektor atas lapangan K Pemetaan $T : V \longrightarrow W$ dan $F : V \longrightarrow W$ merupakan dua transformasi linear.

$T + F$ didefinisikan dengan $(T + F)(u) = T(u) + F(u)$ $\forall\, u \in V$.

Tunjukkan bahwa $T + F$ merupakan transformassi linear.

Jawab :

Misalkan $u, \nu \in V$ sebarang dan $\alpha \in K$ sebarang maka :

(i) $(T + F)(u + \nu) = T(u + \nu) + F(u + \nu)$

$= T(u) + T(\nu) + F(u) + F(\nu)$

$= T(u) + F(u) + T(\nu) + F(\nu)$

$= (T + F)(u) + (T+F)(v)$

(ii) $(T + F)(\alpha u) = T(\alpha u) + F(\alpha u)$

$= \alpha T(u) + \alpha F(u)$

$= \alpha (T(u) + F(u)$

$= \alpha (T + F)(u)$

Dari (i) & (ii) terbukti bahwa $(T + F)$ adalah transformasi linear.

5. Misalkan $T : R^2 \longrightarrow R^2$ didefinisikan dengan $T(x,y) = (x \cos \varphi - y \sin \varphi,\ x \sin \varphi + y \cos \varphi)$ adalah suatu transformasi linear yang memuat tiap titik dari bidang datar sekeliling titik pangkal koordinator dan melalui sudut φ .

6. Dalam ruang suku banyak P_m dengan derajat $m \leq n$, misalkan $D\{P_m(x)\} = \frac{d}{dx} P_m(x)$
Sifat-sifat derivatif menunjukan bahwa D adalah Linear.

2.2 Komposisi dan Invers dari Transformasi linear

Definisi 2.2.1 : Misalkan U, V, W merupakan ruang vektor atas lapangan K.

$F : U \longrightarrow V$ dan $T : V \longrightarrow W$ merupakan Transformasi linear, maka komposisi T o F didefinisikan dengan $(T \circ F)(u) = T(F(u)), \forall u \in U$

Teorema 2.2.1 : Misalkan U,V,W merupakan ruang vektor atas lapangan K.

$F : U \longrightarrow V$ dan $T : V \longrightarrow W$ merupakan transformasi linear maka T o F juga transformasi linear.

Bukti : Misalkan $u, v \in U$ sebarang, dan $\alpha, \beta \in K$ sebarang. Karena F merupakan transformasi linear, maka $F(\alpha u + \beta v) = \alpha F(u) + \beta F(v)$, karenanya :

$$(T \circ F)(\alpha u + \beta v) = T(F(\alpha u + \beta v))$$
$$= T(\alpha F(u) + \beta F(v))$$

Karena T linear diperoleh :

$$(T \circ F)(\alpha u + \beta v) = T(\alpha F(u) + \beta F(v))$$
$$= \alpha T(F(u)) + \beta T(F(v))$$
$$= \alpha (T \circ F)(u) + \beta (T \circ F)(v)$$

Jadi T o F suatu transformasi linear.

Teorema 2.2.2 : Misalkan U,V,W merupakan ruang vektor atas lapangan K.

Misalkan $F : U \longrightarrow V$ merupakan transformasi linear, dan misalkan G dan H dua transformasi linear dari V into W.

(i) $(G + H) \circ F = (G \circ F) + (H \circ F)$

(ii) Jika $\alpha \in K$ maka

$(\alpha G) \circ F = \alpha (G \circ F)$

(iii) Jika $T : U \longrightarrow V$ adalah pemetaan linear dari U into V maka :

$G \circ (F + T) = (G \circ F) + (G \circ T)$

Bukti :

(i). Misalkan $u \in U$ sebarang, maka :

$$\begin{aligned}((G + H) \circ F)(u) &= (G + H) F(u) \\ &= G(F(u)) + H(F(u)) \\ &= (G \circ F)(u) + (H \circ F)(u) \\ &= ((G \circ F) + (H \circ F))(u)\end{aligned}$$

Jadi : $(G + H) \circ F = (G \circ F) + (H \circ F)$

(ii) Misalkan $u \in U$ sebarang maka :

$$\begin{aligned}((c\,G) \circ F))(u) &= (c\,G) F(u) \\ &= c\,(G\,F)(u) \\ &= c\,(G \circ F)(u)\end{aligned}$$

jadi : $(c\,G) \circ F = c\,(G \circ F)$

(iii) Misalkan $u \in U$ sebarang, maka :

$$(G \circ (F + T)(u)) = G((F + T)(u))$$
$$= G(F(u) + T(u))$$
$$= G(F(u)) + G(T(u))$$
$$= (G \circ F)(u) + (G \circ T)(u)$$
$$= ((G \circ F) + (G \circ T))(u)$$

$\therefore$ $G \circ (F + T) = (G \circ F) + (G \circ T)$

Teorema 2.2.3: Misalkan $F : U \longrightarrow V$ merupakan pemetaan linear, dan anggap bahwa pemetaan ini mempunyai pemetaan invers $G : V \longrightarrow U$, maka G adalah pemetaan linear.

Bukti : Misalkan $v_1, v_2 \in V$ sebarang, dan c konstanta

(i). Akan ditunjukkan :

$G(v_1 + v_2) = G(v_1) + G(v_2)$

Misalkan $G(v_1) = u_1$ dan $G(v_2) = u_2$

dengan sifat Invers, berarti :

$F(u_1) = v_1$ dan $F(u_2) = v_2$ karena

F pemetaan linear, maka :

$$F(u_1 + u_2) = F(u_1) + F(u_2)$$
$$= v_1 + v_2$$

dengan sifat invers, terbukti bahwa :

$$G(v_1 + v_2) = u_1 + u_2$$
$$= G(v_1) + G(v_2)$$

(ii). akan ditunjukkan :

$G(c\,v_1) = c\,G(v_1)$

Misalkan : $G(v_1) = u_1$ dengan sifat invers,

berarti : $F(u_1) = v_1$

Karena F pemetaan linear, maka :

$F(cu_1) = c\,F(u_1)$

$= c\,v_1$

Dengan definisi invers terbukti bahwa :

$G(cv_1) = c\,u_1$

$= c\,G(v_1)$

Dari (i) & (ii) terbukti bahwa $G : V \longrightarrow U$ adalah pemetaan linear.

2.3 Kernel dan Jangkauan dari sebuah Transformasi Linear

Definisi 2.3.1 : Misalkan V, W merupakan ruang vektor atas lapangan K dan misalkan $F : V \longrightarrow W$ merupakan transformasi linear, maka :

(i) Himpunan dari elemen-elemen $\nu \in V$ sehingga $F(\nu) = 0$ disebut kernel dan F atau ruang nol dari F.

Dimensi dari kernel F disebut nulitas F.

(ii) Himpunan elemen-elemen $w \in W$ sehingga $F(v) \in W$ disebut image (Jangkauan) dari F.

Dimensi dari jangkauan F disebut Rank F.

Contoh : Misalkan $T : V \longrightarrow W$ adalah transformasi nol. Karena T memetakan setiap vektor di V kedalam nol, maka kernel T = V

Karena $\bar{0}$ adalah satu-satunya bayangan yang mungkin dibawah T, maka jangkauan T terdiri dari vektor nol.

Sedangkan nulitas T = dimensi V dan

Rank T = dimensi W

Teorema 2.3.1 : Kernel dari Transformai Linear $F : V \longrightarrow W$ atas K adalah sub ruang dari V.

Bukti : (i) Karena $F(0) = 0$, berarti $0 \in$ kernel F

Jadi kernel $F \neq \emptyset$

(ii) Misalkan $\nu, w \in$ kernel F sebarang akan ditunjukkan $\nu + w \in$ Kernel F.

$\nu \in$ Kernel F berarti : $F(\nu) = 0$

$w \in$ Kernel F berarti : $F(w) = 0$

sehingga :

$$F(\nu + w) = F(u) + F(w)$$
$$= 0 + 0$$
$$= 0$$

Jadi terlihat bahwa $v + w \in$ Kernel F,

$\forall\ v,w \in$ Kernel F

(iii) Misalkan $c \in K$ sebarang dan $\nu \in V$ sebarang,

maka $F(c\ \nu) = c\ F(\nu) = c\ .\ 0 = 0$

Jadi $c\ \nu \in$ Kernel F

Dari (i) - (iii) terbukti bahwa Kerneal dari transformasi linear $F : V \longrightarrow W$ adalah sub ruang dari V.

Dari (i) - (iii) terbukti bahwa Kernel dari transformasi linear $F : V \longrightarrow W$ adalah sub ruang dari V.

Teorema 2.3.2 : Jika $F : V \longrightarrow W$ merupakan transformasi linear, maka dua kondisi berikut equivalen.

(i) Kernel dari F adalah {0}

(ii) Jika $\nu, w \in V$ sehingga $F(\nu) = F(w)$ maka $\nu = w$

(Dalam hal ini F disebut injektif)

Bukti :

(i) $\longrightarrow$ (ii)

Anggap bahwa F memenuhi kondisi pertama,

Akan dibuktikan kondisi kedua :

Misalkan ν, $w \in V$ sebarang, sehingga $F(v) = F(w)$,

maka $F(\nu - w) = F(\nu) - F(w) = 0$

Karena Kernel dari F adalah {0}, maka $v - w = 0$

Sehingga terbukti $\nu = w$

(ii) $\longrightarrow$ (i)

Anggap bahwa F memenuhi kondisi kedua

Akan dibuktikan kondisi pertama :

Misalkan ν, w $\in$ V sebarang, sehingga $F(\nu - w)$

$$= F(\nu) - F(w)$$

$$= 0$$

Jadi $v - w \in$ Kernel

Akan ditunjukkan $v - w \in \{0\}$

Dari kondisi dua, karena $\nu = w$ maka $\nu - w = 0 \in \{0\}$

Jadi terbukti bahwa :

Jika v, w $\in$ V yang memenuhi $F(\nu) = F(w)$ shy $\nu = w$

Maka Kernel dari F adalah {0}

Teorema 2.3.3: Misalkan $F : V \longrightarrow W$ merupakan pemetaan linear atas K yang kernelnya adalah {0} jika $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$ yang bebas linear, maka:

$F(v_1), F(v_2), \ldots, F(v_n)$ adalah anggota W juga bebas linear.

Bukti : Misalkan $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in K$ sebarang sehingga :

$$\alpha_1 F(v_1) + \alpha_2 F(v_2) + \ldots + \alpha_n F(v_n) = 0$$

Dengan kelineran F diperoleh :

$$F(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n) = 0$$

Karena $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$ bebas linear, maka :

$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n = 0$ hanya dipenuhi oleh

$\alpha_i = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$

Dengan demikian :

$\alpha_1 F(v_1) + \alpha_2 F(v_2) + \ldots + \alpha_n F(v_n) = 0$ hanya dipenuhi oleh $\alpha_i = 0$, $(i = 1,2,\ldots,n)$

Jadi $F(v_1), F(v_2), \ldots, F(v_n) \in W$ juga bebas linear.

Teorema 2.3.4 : Image dari Transformasi linear $T : V \longrightarrow W$ atas K adalah sub ruang dari W.

Bukti : (i) Karena $F(0) = 0$, dan $0 \in W$, jelas bahwa Image $T \neq \emptyset$

(ii) Misalkan $w_1, w_2 \in$ image W sebarang.

Akan ditunjukkan $w_1 + w_2 \in$ Image W

$w_1 \in$ image W, berarti $\exists\, v_1 \in V \ni F(v_1) = w_1$

w_2 image w, berarti $\exists\, v_2 \in V \ni F(v_2) = w_2$

Karena $F(v_1 + v_2) = F(v_1) + F(v_2)$

$= w_1 + w_2$

Jadi terbukti bahwa $w_1 + w_2$ image F

(iii) Misalkan w, $\in$ image W sebarang, dan $\alpha \in K$ sebarang.

Akan ditunjukkan $\alpha w_1 \in$ image F

$w_1 \in$ image F berarti $\exists\, v_1 \in V \ni F(v_1) = w_1$

Karena $F(c\, v_1) = c\, F(v_1)$

$= c\, w_1$

Berarti $cw_1 \in$ image F

Dari (i) - (iii) terbukti bahwa image dari transformasi linear $T : V \longrightarrow W$ sub ruang dari W.

Teorema 2.3.5 : Misalkan V merupakan ruang vektor atas lapangan K, dan $T : V \longrightarrow W$ merupakan transformasi linear.

Misalkan n dimensi dari V, q dimensi dari Kernel T dan s dimensi dari image T.

Maka : dim V = dim Ker T + dim Im T

atau : $n = q + s$

Bukti :

Karena dim Ker T = q, maka misalkan :

$v_1, v_2, \ldots, v_q$ adalah basis untuk kernel tersebut. Karena $\{v_1, v_2, \ldots, v_q\}$ bebas linear, maka terdapat $n - q$ vektor $v_{r+1}, \ldots, v_n$ sehingga $\{v_1, \ldots, v_r, v_{r+1}, \ldots, v_n\}$ adalah sebuah basis untuk V. Untuk melengkapi bukti tersebut, kita akan memperlihatkan

bahwa vektor ke $n - q$ dalam himpunan $S = \{T(v_{r+1}), \ldots, T(v_n)\}$ membentuk sebuah basis untuk kernel T, maka jelas bahwa :

dim V = dim Ker T + dim Im T.

Teorema 2.3.6. : Misalkan $F : U \longrightarrow V$ merupakan transformasi linear yang mempunyai kernel $\{0\}$ dan surjektif maka F mempunyai transformasi linear invers.

Bukti : Jika kernel dari F adalah $\{0\}$ maka F injektive, dengan demikian F injektif dan surjektif sehingga pemetaan inversnya ada. Menurut teorema 2.2.3. pemetaan inves tersebut merupakan pemetaan linear.

Selanjutnya, sebuah pemetaan linear $F : U \longrightarrow V$ yang mempunyai pemetaan invers $G : V \longrightarrow U$ disebut isomorfisma.

Teorema 2.3.7 : Diberikan ruang vektor $V_{(F)}$ dan $\dim (V_{(F)}) = n$ maka V isomorfisma dengan F^n, dengan F^n adalah himpunan yang anggota-anggotanya $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Bukti :

Buat relasi $\varphi : V_{(F)} \longrightarrow F^n$ dengan pengaitan $\xi_j \in V \longrightarrow a_{ij} \in F$ $(i = 1,2, \ldots, n)$

Karena $\dim (V_{(F)}) = n$, maka misalkan :

$S = \{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$ basis V

(i) Karena $\forall\ \xi \in V$ mempunyai representasi tunggal sebagai kombinasi linear dari S_i, yakni :

$\xi = a_1 s_1 + a_2 s_2 + \dots + a_n s_n$

Jadi $\forall\ \xi \in V$ menentukan dengan tunggal

$(a_1, a_2, \dots, a_n) \in F^n$

$\therefore$ φ adalah surjektif (Pemetaan dari V into F^n)

(ii) φ adalah injektif, karena untuk $\xi_j \neq \xi_k$ maka $\exists\ i \ni a_{ij} \neq a_{ik}$, yakni : setiap vektor yang berbeda dari V memetakan ke vektor yang berbeda dari F^n.

Dari (i) & (ii) terbukti bahwa φ bijektif.

Selanjutnya akan diperlihatkan φ Homomorfisma.

(iii) Misalkan $\xi = \sum_{i=1}^{n} a_i s_i$ dan $\eta = \sum_{i=1}^{n} b_i s_i$, maka :

$$\xi + \eta = \sum_{i=1}^{n} a_i s_i + \sum_{i=1}^{n} b_i s_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) s_i \longrightarrow (a_1+b_1, a_2+b_2, + \dots + a_n + b_n)$$

$$= (a_1, a_2, \dots, a_n) + (b_1, b_2, \dots, b_n)$$

Dari sini terlihat bahwa :

$$\varphi(\xi + \eta) = \varphi(\xi) + \varphi(\eta) \text{ dan } \varphi(k\xi) = k\,\varphi(\xi)$$

$\therefore$ φ Homomorfisma

Dari (i), (ii) dan (iii) terbukti bahwa φ isomorfisma

BAB III

RUANG EUCLID DAN RUANG HERMIT

3.1 Ruang Euclid

Definisi 3.1.1 : Misalkan V merupakan ruang vektor atas lapangan R (R = himpunan semua bilangan riil). Sebuah hasil kali skalar pada V adalah fungsi yang berbentuk $F : V \times V \longrightarrow R$ yakni $(v,w) \longrightarrow \langle v,w\rangle \in R$, $\forall\, v,\ w \in V$ yang memenuhi sifat-sifat berikut :

(i) $\langle u,v\rangle = \langle v,u\rangle$, $\forall\, u,u,w \in V$

(ii) $\langle u, v+w\rangle = \langle u,v\rangle + \langle u,w\rangle$
$\forall\, u,v,w \in V$

(iii) $\langle \alpha\, u,\nu\rangle = \alpha\, \langle u,\nu\rangle = \langle u,\alpha v\rangle$
$\forall\, \alpha \in R$ dan $\forall\, \nu \in V$

Definisi 3.1.2 : Misalkan V merupakan ruang vektor atas lapangan R, dengan sebuah hasil kali skalar, hasil kali skalar ini disebut definit positif, jika memenuhi sifat.

(i) $\langle v,v\rangle \geq 0, \forall\, v \in V$

(ii) $\langle v,v\rangle = 0 \longleftrightarrow v = 0\ \forall\, v \in V$

Definisi 3.1.3 : Hasil kali skalar pada V disebut non degenerate jika memenuhi sifat

$\forall\ v \in V$ dan $\langle v,w\rangle = 0,\ \forall\ w \in V \longrightarrow$

$v = 0$

Teorema 3.1.1 : Hasil kali skalar yang definit positif, pasti non degenerate.

Bukti : Diketahui hasil kali skalar definit positif, berarti :

(i) $\langle v,v\rangle \geq 0,\ \forall\ v \in V$

(ii) $\langle v,v\rangle = 0 \longleftrightarrow v = 0,\ \forall\ v \in V$

akan dibuktikan hasil kali skalar non degerate, yakni $\langle v,w\rangle = 0,\ \forall\ w \in V \longrightarrow v = 0$ $\forall\ v \in V$

$\langle v,w\rangle = 0,\ \forall\ w \in V$, selanjutnya karena $v \in V$ maka $\langle v,v\rangle = 0$, karena definit positif maka haruslah $v = 0,\ \forall\ v \in V$

Jadi : $\langle v,w\rangle = 0,\ \forall\ w \in V \longrightarrow v = 0,$ $\forall\ v \in V$ (terbukti).

Definisi 3.1.4 : Ruang vektor V atas lapangan bilangan riil dengan produk skalar (hasil kali skalar) yang definit positif disebut ruang Enclid (Enclidean Space).

Contoh :

1. Tunjukkan bahwa ruang vektor $V = \left[\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \middle| x_i \in R \right]$

$$\left\{ \langle x_i \rangle_{i=i}^{n} \mid x_i \in R \right\} = \mathbb{R}^n$$

dengan $\langle \nu, w \rangle \overset{def}{\approx} \nu . w$, merupakan ruang euclid.

Jawab :

*). Jelas bahwa V merupakan ruang vektor atas lapangan R.

*). Akan ditunjukkan bahwa V memenuhi semua sifat dari ruang Enclid.

Misalkan : $U = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in V$ dan $\nu = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in V$

maka :

$$w = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \in V \ , \ x_i, \ y_i, \ z_i \in R$$

$i = 1,2, \ldots,n$, maka

(i). $\langle u, \nu \rangle = \begin{pmatrix} x1 \\ x2 \\ \vdots \\ xn \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y1 \\ y2 \\ \vdots \\ yn \end{pmatrix} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n$

$$= y_1 x_1 + y_2 x_2 + \ldots + y_n x_n$$

$$= \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$= \langle v, u \rangle$$

$\therefore \langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$ untuk setiap $u, v \in V$

(ii). $\langle u, v+w \rangle = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 + z_1 \\ y_2 + z_2 \\ \vdots \\ y_n + z_n \end{pmatrix}$

$$= x_1(y_1+z_1) + x_2 (y_2+z_2) + \ldots + x_n (y_n + z_n)$$

$$= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$$

$$= \langle u, v \rangle + \langle u, w \rangle$$

(iii). Untuk $\alpha \in R$ sebarang dan $\forall\, u, v \in V$, maka :

$$\langle \alpha u, v \rangle = \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \\ \vdots \\ \alpha x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$= \alpha (\alpha x_1) y_1 + (\alpha x_2) y_2 + \ldots + (\alpha x_n) y_n$$

$$= \alpha (x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n)$$

$$= \alpha \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \\ \vdots \\ \alpha x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \alpha \langle u\ v \rangle$$

dengan cara yang sama diperoleh :

$\langle u, \alpha v\rangle = \alpha \langle u , v\rangle$

(iv). Untuk Setiap $v \in V$, maka :

$$\langle v,v\rangle = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$= x_1x_1 + x_2x_2 + \ldots + x_nx_n$$

$$= x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 \geq 0$$

dan :

$$\langle v,v\rangle = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = 0 \longleftrightarrow$$

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$$

$\therefore$ $\forall\, v \in V$ maka $\langle v , v\rangle \geq 0$ dan

$$\langle v,v\rangle = 0 \longleftrightarrow v = 0$$

Karna (i) - (iv) terpenuhi maka jelas bahwa V merupakan ruang Euclid.

2. Tunjukkan bahwa :

$$m = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| \; ad - bc = 0,\ a,b,c,d \in R \right\}$$

dengan $\langle A,B\rangle \overset{def}{\approx} a_1 a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 + d_1d_2$, untuk sebarang :

$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & c_2 \end{pmatrix} \in M$ merupakan

Ruang Euclid.

<u>Jawab :</u>

*). Jelas bahwa M ruang vektor atas R

*). Misalkan $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} a_3 & b_3 \\ a_3 & d_3 \end{pmatrix}$

Sebarang anggota M dan $\alpha \in R$ sebarang,

maka :

(i). $\langle A,B \rangle = a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 + d_1d_2$

$= a_2a_1 + b_2b_1 + c_1c_1 + d_2d_1$

$= \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} = \langle B , A \rangle$

(ii). $\langle A,B + C \rangle = a \quad (a \quad + a \quad) + (b \quad + b \quad)$

$+ c \quad (c \quad + c \quad) + (d \quad + d \quad)$

$= (a_1 \; a_2 + b_1 \; b_2 + c_1 \; c_2 +$

$d_1 \; d_2 \;) + (a_1 \; a_3 + b_1 \; b_3$

$+ c_1 \; c_3 + d_1 \; d_3 \;)$

$= \langle A,B \rangle + \langle A,C \rangle$

(iii). $\langle \alpha A, B \rangle = (\alpha a_1)a_2 + (\alpha b_1)b_2 +$

$(\alpha c_1) \; c_2 + (\alpha d_1)d_2$

$= \alpha \; (a_1a_2) + \alpha \; (b_1b_2) +$

$\alpha \; (c_1c_2) + \alpha \; (d_1d_2)$

$$= \alpha\ (a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 + d_1d_2)$$

$$= \alpha \langle A\ ,\ B\rangle$$

$$\therefore \langle \alpha A, B\rangle = a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 + d_1^2 \geq 0$$

(iv). $\langle A,A\rangle = a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 + d_1^2 \geq 0$

dan

$$\langle A,A\rangle = a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 + d_1^2 = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$a_1 = b_1 = c_1 = d_1 = 0$$

$$\therefore = A = 0$$

$\therefore \langle A\ ,\ A\rangle \geq 0,\ \forall\ A \in M$ dan

$$\langle A,A\rangle = 0 \longleftrightarrow A = 0$$

Karena (i) – (iv) terpenuhi jelas bahwa M ruang euclid.

3. Tunjukkan bahwa : $V = \{f : [0,1] \longrightarrow R \mid f$ kontiniu$\}$

dengan :

$$(f + g)\ (x) \overset{def}{\approx} f(x) + g(x),\ \forall x \in [0,1],$$

$$f,q \in V$$

dan

$$\langle f\ ,\ g\rangle \overset{def}{\approx} \int_0^1 f\ (t)\ g(t)\ dt$$

merupakan Ruang Euclid.

Jawab :

*). Jelas bahwa V ruang vektor atas R

*). Misalkan f(t), g(t), h(t) $\in$ V sebarang

dan $\alpha \in$ R sebarang, maka :

(i). $\langle f,q\rangle = \int_0^1 f(t)\ g(t)\ dt = \int_0^1 g(t)\ f(t)\ dt$

$= \langle g\ ,\ f\rangle$

(ii). $\langle f\ ,\ g+h\rangle = \int_0^1 f(t)\ (g+h)(t)\ dt$

$= \int_0^1 f(t)\ [g(t) + h(t)]dt$

$= \int_0^1 f(t)\ g(t)\ dt + \int_0^1 f(t)\ h(t)\ dt$

$= \langle f,g\rangle + \langle f,h\rangle$

(iii). $\langle \alpha\ f,\ g\rangle = \int_0^1 \alpha f(t)\ .\ g(t)\ dt$

$= \alpha \int_0^1 f(t)\ g(t)\ dt$

$= \alpha \langle f,g\rangle$

dan

$\langle \alpha f,q\rangle = \int_0^1 \alpha f\ (t)\ .\ g(t)\ dt =$

$\int_0^1 f(t)\ \alpha\ g(t)\ dt$

$= \langle f\ ,\ \alpha g\rangle$

$\therefore\ \langle \alpha f\ ,\ g\rangle = \alpha \langle f\ ,\ g\rangle = \langle f\ ,\ \alpha\ g\rangle$

(iv). $\langle f\ ,\ f\rangle = \int_0^1 f(t)\ .\ f(t)\ dt = \int_0^1 f^2(t)\ dt \geq 0$

dan

$\langle f,f\rangle = \int_0^1 f(t)\ .\ f(t)\ dt = \int_0^1 f^2(t)dt = 0$

$\Updownarrow$

$f(t) = 0$

Karena (i) - (iv) terpenuhi jelas bahwa V ruang Euclid.

3.1.1 Vektor-vektor Tegak Lurus di ruang Euclid

Definisi 3.2.1 : Misalkan V merupakan ruang euclid, $v, w \in V$ dikatakan tegak lurus (ortogonal) ditulis $v \perp w$ jika dan hanya jika $\langle v , w\rangle = 0$

Definisi 3.2.2 : Misalkan V merupakan ruang Euclid dan S himpunan bagian dari V. Himpunan semua elemen $w \in V$ yang tegak lurus dengan semua elemen $s \in S$ dinyatakan dengan $S^{\perp}$, yakni:

$$S^{\perp} = \{w \in V \mid \langle w, s\rangle = 0, \forall s \in S\}$$

Teorema 3.2.1 : $S^{\perp}$ merupakan ruang bagian dari V (disebut ruang ortogonal dari S).

Bukti : (i). Misalkan 0 vektor nol di V,

$0 = v - v$, $\forall v \in V$, maka

$$\begin{aligned}\langle 0,s\rangle &= \langle v - v, s\rangle, \ \forall s \in S, \ v \in S^{\perp} \\ &= \langle v,s\rangle - \langle v,s\rangle \\ &= 0 - 0 \\ &= 0\end{aligned}$$

$\therefore 0 \in V \longrightarrow 0 \in S^{\perp}$

$\therefore S^{\perp} \neq \emptyset$

(ii) Missalkan v_1 $v_2 \in S^{\perp}$ sebarang, berarti :

$v_1 \in S^{\perp} \longrightarrow \langle v_1, s \rangle = 0, \forall s \in S$

$v_2 \in S^{\perp} \longrightarrow \langle v_2, s \rangle = 0, \forall s \in S$

$$\langle v_1+v_2, s\rangle = \langle v_1,s\rangle + \langle v_2 , s\rangle , \forall s \in S$$
$$= 0 + 0$$
$$= 0$$
$$\therefore v_1, v_2 \in S^{\perp} \longrightarrow v_1 + v_2 \in S^{\perp}$$

(iii) Misalkan $v \in S^{\perp}$ sebarang dan $k \in R$, berarti

$\nu \in S^{\perp} \longrightarrow \langle v, s\rangle = 0, \forall s \in S$, sehingga :

$\langle kv,s\rangle = k \langle v , s\rangle = k . 0 = 0 , \forall s \in S$

$\therefore \nu \in s^{\perp} k \in R \longrightarrow k \nu \in S^{\perp}$

Dari (i) - (iii) terbukti bahwa $s^{\perp}$ ruang bagian dari V.

Misalkan U ruang vektor dari V yang dibangun oleh elemen-elemen dari S,jika w tegak lurus pada S dan jika $v_1,v_2 \in S$ maka : $\langle w , v_1 + v_2\rangle = \langle w , v_1\rangle + \langle w_1 v_2\rangle = 0$

Jika α skalar, maka :

$$\langle w , \alpha v_1\rangle = \alpha \langle w,v_1\rangle.$$

Sehingga w tegak lurus dengan kombinasi linear elemen-elemen S, jadi w tegak lurus pada U.

$\therefore w \perp S \longrightarrow w \perp U$

Contoh :

Misalkan (a_{ij}) matriks berukuran m x n di K dan $A_1, A_2, \ldots, A_m$ merupakan vektor baris.

Misalkan $X = (x_1 , x_2, \ldots , x_n)$

Sistem persamaan linear homogen

$$a_{11} x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n} x_n = 0$$
$$a_{21} x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n} x_n = 0$$
$$\vdots$$
$$a_{m1} x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn} x_n = 0$$

yang dapat ditulis dengan :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \text{ atau}$$

$$\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

atau : $A_1\ x = 0,\ A_2\ x = 0, \ldots,\ A_{m1}\ x = 0$

Himpunan penyelesaian dari sistem persamaan diatas adalah ruang vektor atas K.

Selanjutnya :

Misalkan $W = [A_1,\ A_2,\ \ldots\ ,A_m]$ yakni ruang bagian yang dibangun oleh $A_1, A_2, \ldots, A_m$ dan

$U = \{x \in K^n \mid x \cdot A_1 = 0,\ i = 1,2,\ldots,m\}$

$= \{x \in K^n \mid x \perp A_1,\ i = 1,2,\ \ldots,m\}$

*). Ambil sebarang $w \in W$ maka :

$w = \beta_1\ A_1 + \beta_2\ A_2 + \ldots + \beta_m A_m$, untuk suatu β_i

*). Ambil sebarang $x \in U$ maka :

$x\ A_i = 0,\ i = 1,2,\ \ldots,\ m$ shg

$x.w = x\ (\beta_1 A_1 + \beta_2 A_2 + \ldots + \beta_m A_m)$

$= \beta_1\ x.A_1 + \beta_2\ x \cdot A_2 + \ldots + \beta_m\ x \cdot A_m$

$= 0$

Jadi $x \perp w$ dengan demikian $x \in W \perp$

karena $x \in U$ dan $x \in W^{\perp}$ maka $U \subseteq W \perp$

*). Ambil sebarang $\nu \in W \perp$ maka $\langle v,w \rangle = 0$, $\forall\ w \in W$

Karena : $A_1 = [A_1, A_2, \ldots, A_m]$

$A_2 = [A_1, A_2, \ldots, A_m]$

$\vdots$

$A_m = [A_1, A_2, \ldots, A_m]$

Maka $A_i \in W_1$ $i = 1, 2, \ldots, m$

Karena $\nu \in W \perp$ dan $A_i \in W$, $1 = 1, 2, \ldots m$ maka

$\langle \nu, A_1 \rangle = 0$

$\langle \nu, A_2 \rangle = 0$

$\vdots$

$\langle v, A_m \rangle = 0$

Berarti : $\nu \in U$

$\therefore$ $\nu \in W \perp$, $v \in U \longrightarrow W \perp \subseteq U$

Jadi $U = W \perp$

Karena $W \perp$ ruang bagian dari ruang Euclid V maka U juga ruang bagian dari V, yang disebut ruang penyelesaian dari sistem persamaan linear homogen di atas.

3.1.2 Norm dari suatu vektor di Ruang Euclid

Definisi 3.3.1 :Misalkan V ruang enclid, panjang (Norm) dari suatu elemen $\nu \in V$ adalah $||v|| = \sqrt{\langle v,v\rangle}$.

Jika $||v|| = 1$ maka $v \in V$ disebut vektor satuan.

Sifat 1 : Jika $c \in R$ sebarang dan $\nu \in V$ sebarang dengan V ruang Euclid maka berlaku $||c\nu|| = |c|\ ||\nu||$

Bukti :
$$\begin{aligned} ||cv|| &= \sqrt{\langle cv,\ cv\rangle} \\ &= \sqrt{c\ \langle v,\ cv\rangle} \\ &= \sqrt{c^2\ \langle v\ ,\ v\rangle} \\ &= \sqrt{c^2}\ \sqrt{\langle v\ ,\ v\rangle} \\ &= |c|\ ||v|| \end{aligned}$$

Sifat 2 : Jika $\nu \in V$ dan $\nu = 0$ maka $\frac{\nu}{||\nu||}$ merupakan vektor satuan.

Bukti :
$$\begin{aligned} ||\tfrac{\nu}{||\nu||}|| &= \sqrt{\langle \tfrac{\nu}{||\nu||},\ \tfrac{\nu}{||\nu||}\rangle} \\ &= \sqrt{\frac{1}{||\nu||^2}\ \langle \nu\ ,\ \nu\rangle} \\ &= \frac{1}{||\nu||}\ \sqrt{\langle \nu,\nu\rangle} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{||v||} \, || v ||$$

$= 1$ (terbukti)

Teorema Phytagoras : Jika $\nu \perp w$ mama $||\nu + w||^2 = ||\nu||^2 + ||w||^2$

Bukti : $||v + w||^2 = \langle v + w, v + w\rangle$

$= \langle v, \varphi + w\rangle + \langle w , v + w\rangle$

$= \langle v , v\rangle + \langle v , w\rangle + \langle w , v\rangle + \langle w , w\rangle$

$= \langle v , v\rangle + 0 + \langle w , w\rangle$

$[\because v \perp w \longrightarrow \langle v,w\rangle = 0]$

$= ||v||^2 + ||w||^2$ (Terbukti)

Hukum Parallelogram :

Misalkan V ruang enclid

Untuk sebarang $u, \nu \in V$ berlaku

$$|| u + \nu ||^2 + || u - \nu ||^2 = 2 \, ||u||^2 + 2 \, ||\nu||^2$$

Bukti :

$||u + \nu||^2 + ||u-v||^2 = \langle u + \nu, u + \nu\rangle + \langle u - \nu, u - \nu\rangle$

$= \langle u, u + \nu\rangle + \langle \nu, u + \nu\rangle +$

$\langle u, u - \nu\rangle - \langle \nu, u - \nu\rangle$

$- \langle u , \nu\rangle - \langle \nu,u\rangle + \langle \nu,\nu\rangle$

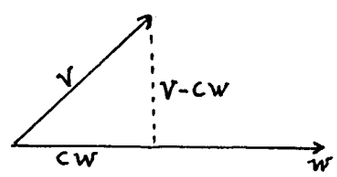
$= \langle u, u\rangle + \langle \nu , \nu\rangle + \langle u , u\rangle +$

$\langle \nu , \nu\rangle$

$$= ||u||^2 + ||\nu||^2 + ||u||^2 + ||\nu||^2$$
$$= 2\ ||u||^2 + 2\ ||\nu||^2 \text{ (Terbukti)}$$

Sifat 3 : Misalkan V ruang Euclid, $w \in V$ denan $w = 0$, maka untuk setiap vektor $\nu \in V$ ada c sedemikian sehingga $(\nu - c\ w) \perp w$

Bukti :



Akan dicari nilai c

$(\nu - cw) \perp w$ berarti $\langle \nu - cw, w \rangle = 0$

sehingga diperoleh :

$$\langle \nu - cw, w \rangle = \langle \nu , w \rangle - \langle c\ w, w \rangle$$
$$= \langle \nu , w \rangle - c \langle w , w \rangle = 0$$
$$c \langle w , w \rangle = \langle \nu , w \rangle$$
$$c = \frac{\langle \nu , w \rangle}{\langle w , w \rangle}$$

Jadi ada $c = \dfrac{\langle \nu , w \rangle}{\langle w , w \rangle} \ni (\nu - cw) \perp w$

*). c disebut komponen dari v sepanjang w atau koefisien Fourier v terhadap w.

*). cw disebut proyeksi dari ν pada w

1). Misalkan $V = R^n$ dengan produk skalar biasa (dot Product).

Jika E_i adalah satuan ke i dan

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in R^n$$

maka komponen dari x sepanjang E_i adalah :

$x \cdot E_i = x_i$, yaitu komponen ke i dari x

Bukti :

$$c = x_i = \frac{\langle x, E_i \rangle}{\langle E_i, E_i \rangle} = \frac{x \cdot E_i}{E_i \cdot E_i} = \frac{X \cdot E_i}{1}$$

$$= x_i . E_i$$

2). Misalkan $V = \{f : [-\pi , \pi] \longrightarrow R \mid f \text{ kontiniu}\}$

dengan $\langle f , g \rangle \overset{def}{\sim} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, g(x)\, dx$

Misalkan f merupakan fungsi dengan

$f(x) = \sin kx$, $k \in Z$ maka :

$$||f|| = \sqrt{\langle f,f \rangle} = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, f(x)\, dx}$$

$$= \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 (kx)\, dx}$$

$$= \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} (1/2 - 1/2 \cos 2\, k\, x)\, dx}$$

$$= \sqrt{(1/2\pi - 1/4k \sin 2k\pi) - (-1/2\, \pi + 1/4k \sin 2k\pi)}$$

$$= \sqrt{1/2\ \pi - 0 + 1/2\ \pi + 0}$$

$$= \sqrt{\pi}$$

Jika $g \in V$ maka koefisien Fourier dari g terhadap f

$$= \frac{\langle g\ ,\ f\rangle}{\langle f\ ,\ f\rangle} = \frac{\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\ f(x)\ dx}{\pi} = 1/\pi \int_{-\pi}^{\pi} g(x)\ \sin\ (kx)\ dx$$

Ketidaksamaan Schwarz :

Misalkan V ruang Euclid

$\forall\ \nu,\ w \in V$ berlaku $|\langle \nu\ ,\ w\rangle| \leq ||\nu||\ ||w||$

Bukti :

*). Jika w=0 maka $|\langle \nu,w\rangle = |\langle \nu,0\rangle| = ||\nu||\ ||0||$

*). Jika w = e dengan $||e|| = 1$ dan jika c adalah komponen ν sepanjang e maka : $(\nu - ce) \perp e$ dan $(\nu - ce) \perp ce$

menurut teorema phytagoras :

$$||\nu||^2 = ||\nu - ce + ce\ ||^2 = ||\nu - ce||^2 + ||ce||^2$$
$$= ||\nu - ce||^2 + c^2$$

Maka $c^2 \leq ||\nu||^2$ shg $|c|| \leq ||\nu||$

*). Jika w sebarang di V dengan w = 0 maka $e = \frac{w}{||w||}$

maka :

c = komponen ν sepanjang e adalah :

$$c = \frac{\langle \nu, e\rangle}{\langle e, e\rangle} = \frac{\langle \nu, \frac{w}{||w||}\rangle}{\langle \frac{w}{||w||}, \frac{w}{||w||}\rangle} = \frac{\langle \nu, \frac{w}{||w||}\rangle}{\frac{w}{||w||}^{2}}$$

$$= \frac{\langle \nu, \frac{w}{||w||}\rangle}{1}$$

$$\therefore c = \langle \nu , \frac{w}{||w||} \rangle$$

Karena : $|c| \leq ||\nu||$ maka :

$$|\langle \nu, \frac{w}{||w||}| \leq ||\nu|| \ , \ \forall \ \nu \in V$$

$$| \frac{1}{||w||} \langle \nu, w\rangle| \leq ||\nu||$$

$$\therefore |\langle \nu, w\rangle| \leq ||\nu| \ ||w|| \text{ (terbukti)}$$

Teorema 3 : Misalkan V ruang Euclid

Jika ν , w $\in$ V maka $||\nu + w|| \leq ||\nu|| + ||w||$

Bukti :

$$\begin{aligned}
\langle \nu + w, \nu \ \nu + w\rangle &= \langle \nu, \nu\rangle + 2 \langle \nu, w\rangle + \langle w, w\rangle \\
&= ||\nu||^2 + 2 \langle \nu, w\rangle + ||w||^2 \\
&= ||\nu||^2 + 2 \ |\langle \nu, w\rangle| = ||w||^2 \\
&= ||\nu||^2 + 2||\nu|| \ ||w|| + ||w||^2 \\
&= (||\nu|| + ||w||)^2
\end{aligned}$$

$$\therefore ||v + w|| = \sqrt{\langle v+w, v+w\rangle} \leq \sqrt{(||v|| + ||w||)^2}$$

$$\therefore ||v + w|| \leq ||v|| + ||w|| \quad \text{(terbukti)}$$

Sifat 4 : Jika v_1 , $v_2, \ldots, v_n$ Vektor-vektor yang saling tegak lurus.

Misalkan $v \in V$ sebarang dengan V ruang Enclid,

dan C_i = komponen v sepanjang v_i

maka : $v - c_1v_1 - c_2v_2 - \ldots - c_nv_n \perp v_i$,

$i = 1, 2, \ldots, n$

Bukti :

*). $\langle v - c_1v_1 - c_2v_2 - \ldots c_nv_n, v_1\rangle$

$$= \langle v,v_1\rangle - c_1 \langle v_1v_1\rangle - \ldots - c_n \langle v_n,v_n\rangle$$

$$= \langle v,v_1\rangle - \frac{\langle v,v_1\rangle}{\langle v_1,v_1\rangle} \langle v_1 , v_1\rangle$$

$$= \langle v,v_1\rangle - \langle v,v_1\rangle$$

$$= 0$$

*). $\langle v - c_1v_1 - c_2v_2 - \ldots - c_nv_n , v_2\rangle =$

$$\langle v,v_2\rangle - c_1 \langle v_1,v_2\rangle - \ldots - c_n\langle v_n,v_2\rangle$$

$$= \langle v,v_2\rangle - c_2 \langle v_2,v_2\rangle$$

$$= \langle v,v_2\rangle - \frac{\langle v,v_2\rangle}{\langle v_2,v_2\rangle} \langle v_2,v_2\rangle$$

$= \langle \nu, \nu_2 \rangle - \langle \nu, \nu_2 \rangle$

$= 0$

Jika proses ini dilanjutkan maka diperoleh :

*). $\langle \nu - c_1\nu_1 - c_2\nu_2 - \ldots - c_n\nu_n, \nu_n \rangle =$

$$\langle \nu, \nu_n \rangle - c_1\langle \nu_1, \nu_n \rangle - \ldots - c_n \langle \nu_n, \nu_n \rangle$$

$$= \langle \nu, \nu_n \rangle - \frac{\langle \nu, \nu_n \rangle}{\langle \nu_n, \nu_n \rangle} \langle \nu_n , \nu_n \rangle$$

$= \langle \nu, \nu_n \rangle - \langle \nu, \nu_n \rangle$

$= 0$

Jadi terbukti bahwa : $\nu - c_1\nu_1 - c_n\nu_n \perp \nu_i$,

$i = 1, 2, \ldots, n$

Teorema 4 : Misalkan $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n$ Vektor-vektor yang saling tegak lurus dan $||\nu_i|| = 0$, $\forall i = 1, 2, \ldots, n$

Misalkan $\cap \in V$ sebarang dan C_i komponen dari ν sepanjang ν_i.

Misalkan : $a_1, a_2, \ldots, a_n$ konstanta-konstanta

maka :

$$||\nu - \sum_{k=1}^{n} c_k \ \nu_k \ || \leq || \ \nu - \sum_{k=1}^{n} a_k \ \nu_k ||$$

Bukti :

Menurut sifat 4 : $(\nu - \sum_{k=1}^{n} c_k \ \nu_k) \perp \nu_i$, $i=1,2,\ldots,n$

Karenanya tegak lurus dengan sebarang kombinasi linear dari $v_1, \nu_2, \ldots, \nu_n$

Selanjutnya :

$$||\nu - \Sigma\, a_k \nu_k\, ||^2 = ||\nu - \Sigma\, c_k \nu_k + \Sigma\, c_k \nu_k - \Sigma\, a_k \nu_k||^2$$

$$= ||\nu - \Sigma\, c_k \nu_k + \Sigma\, (c_k - a_k)\, v_k||^2$$

$$= ||\nu - \Sigma\, c_k \nu_k||^2 + ||\Sigma\, (c_k - a_k)\, \nu_k||^2$$

(Teorema Phytagoras)

dengan demikian :

$$||\nu - \Sigma\, a_k \nu_k||^2 = ||\nu - \Sigma\, c_k \nu_k||^2 + ||\Sigma (c_k - a_k)\, \nu_k||^2 \geq$$

$$||\nu - \Sigma\, c_k \nu_k||^2$$

Jadi :

$$||\nu - \Sigma\, c_k \nu_k\, ||^2 \leq ||\nu - \Sigma\, a_k \nu_k||^2$$

atau

$$||\nu - \Sigma\, c_k\, \nu_k\, || \leq ||\nu - \Sigma\, a_m \nu_k||$$

Teorema 5 : Jika ν_1 , ν_2, ..., ν_n adalah vektor satuan yang saling tegak lurus dan jika c_i adalah koefisien Fourier dari ν terhadap ν_i, maka :

$$\sum_{i=1}^{n} c_i^2 \leq ||\nu||^2$$

Bukti :

Diketahui bahwa : $c_i = \dfrac{\langle v, v_i \rangle}{\langle v_i, v_i \rangle} = \dfrac{\langle v, v_i \rangle}{||v||^2} = \langle v, v_2 \rangle$

Selanjutnya :

$$0 \leq \langle v - \Sigma\, c_i v_i \;,\; v - \Sigma\, c_i v_i \rangle$$
$$= \langle v, v \rangle - \Sigma\, 2\, c_i \langle v_i v_i \rangle + \Sigma\, c_i^2$$
$$= \langle v, v \rangle - \Sigma\, 2c_i \,.\, c_i + \Sigma\, c_i^2$$
$$= \langle v, v \rangle - \Sigma\, 2\, c_i^2 + \Sigma\, c_i^2$$
$$= \langle v, v \rangle - \Sigma\, c_i^2$$

Jadi : $\langle v, v \rangle - \Sigma\, c_i^2 \geq 0$ yakni : $\Sigma\, c_i^2 \leq ||v||^2$

(terbukti)

3.2 Ruang Hermit

Berbicara tentang ruang Hermit, hampir sama dengan ruang Euclid, yakni :

(i). Pada ruang Euclid, kita berbicara dengan ruang vektor atas lapangan R (bilangan Riil).

(ii). Pada ruang Hermit, kita berbicara dengan ruang vektor atas lapangan C (bilangan komplek).

Definisi 3.2.1 : Misalkan V ruang vektor atas lapangan C Sebuah produk Hermit pada V adalah sebuah fungsi yang berbentuk

$F : V \times V \longrightarrow C$ dengan pengertian

$(v\ ,\ w) \longrightarrow \langle v\ ,\ w \rangle \in C,\ \forall\ v,\ w \in V$

yang memenuhi sifat-sifat berikut :

(i) $\langle v,w\rangle = \overline{\langle w,v\rangle}$, $\forall\ v,w \in V$ dengan :

$\overline{\langle v,w\rangle}$ = bilangan kompleks sekawan

(ii) $\langle u,v+w\rangle = \langle u,v\rangle + \langle u,w\rangle, \forall\ u,v,w \in V$

(iii) $\langle \alpha\ v,w\rangle = \alpha\ \langle v,w\rangle$, dan $\langle v,\alpha w\rangle = \bar{\alpha}\langle v,w\rangle$

$\forall\ v,w \in V$, $\alpha \in C$ dengan $\bar{\alpha} \in R$.

Definisi 3.2.2 : Produk Hermit disebut definit positif, jika :

(i) $\langle v\ ,\ v\rangle \geq 0$, $\forall\ v \in V$

(ii) $\langle v,v\rangle = 0 \longleftrightarrow v = 0, \forall v \in V$

Definisi 3.2.3 : Ruang Vektor V atas lapangan C disebut ruang Hermit, jika fungsi :

$F : V \longrightarrow C$ memenuhi sifat-sifat berikut :

I. Sifat Produk Hermit, yakni :

(i) $\langle u,v\rangle = \overline{\langle v,u\rangle}$, $\forall\ u,\ v \in V$

(ii) $\langle u,v+w\rangle = \langle u,v\rangle + \langle u,w\rangle$,

$\forall\ u,v,w \in V$

(iii) $\langle \alpha u,v\rangle = \alpha\ \langle u,v\rangle$ dan

$\langle u,\alpha v\rangle = \bar{\alpha}\ \langle u,v\rangle$, $\forall\ u,v \in V$ dan

$\alpha \in C$

II. Sifat Definit Positif, yakni :

(i) $\langle v,v\rangle \geq 0$, $\forall\ v \in V$

(ii) $\langle v,v\rangle = 0 \longleftrightarrow v = 0$, $\forall\ v \in V$

Contoh-contoh :

1). Tunjukkan bahwa $V = C^n$ dengan

$\langle x , y\rangle \overset{def}{\approx} x_1 \bar{y}_1 + x_2 \bar{y}_2 + \dots + x_n\bar{y}_n$, dimana :

$x = (x_1 , x_2, \dots,x_n)$, $y = (y_1\ y_2,\dots,y_n) \in C^n$ sebarang

adalah Ruang Hermit.

Jawab :

Akan ditunjukkan bahwa C^n denagn produk Hermitnya memenuhi sifat-sifat ruang Hermit.

Misalkan :

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$$

$$Z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$$

$x,y,z \in C^n$ sebarang

dan $\alpha \in C$ sebarang, maka

(i). $\langle x , y\rangle = x, \bar{y}_1 + x_2 \bar{y}_2 + \dots + x_n\bar{y}_n$

$= \bar{y}_1 x_1 + \bar{y}_2 x_2 + \dots + \bar{y}_n x_n$

$= \overline{y_1 \bar{x}_1 + y_2 \bar{x}_2 + \dots + y_n\bar{x}_n}$

$= \overline{\langle y , x\rangle}$

(ii). $\langle x , y + z\rangle = x_1(\overline{y_1 + z_1}) + x_2(\overline{y_2 + z_2}) + \dots$

$+ x_n (\overline{y_n + z_n})$

$= x_1 (\bar{y}_1 + \bar{z}_1) + x_2 (\bar{y}_2 + \bar{z}_2)$

$+ \dots + x_n (\bar{y}_n + \bar{z}_n)$

$= (x_1\bar{y}_1 + x_2\bar{y}_2 + \dots + x_ny_n) +$

$$+ (x_1\bar{z}_1 + x_2\bar{z}_2 + ..+_n \bar{z}_n)$$
$$= \langle x , y\rangle + \langle x , z\rangle$$

(iii). $\langle \alpha x,y\rangle = \alpha x_1\bar{y}_1 + \alpha x_2 \bar{y}_2 + .. + \alpha x_n\bar{y}_n$

$$= \alpha (x_1 \bar{y}_1 + x_2 \bar{y}_2 + ... + x_n \bar{y}_n)$$
$$= \alpha \langle x , y\rangle$$

dan

$$\langle x, \alpha y\rangle = x_1 \overline{\alpha y_1} + x_2 \overline{\alpha y_2} + ... + x_n \overline{\alpha y_n}$$
$$= x_1 \bar{\alpha} \bar{y}_1 + x_2 \bar{\alpha} \bar{y}_2 + ... + x_n \bar{\alpha} \bar{y}_n$$
$$= \bar{\alpha} (x_1 \bar{y}_1 + x_2 \bar{y}_2 + ... + x_n \bar{y}_n)$$
$$= \bar{\alpha} \langle x , y\rangle$$

(iv). $\langle x , x\rangle = x_1\bar{x}_1 + x_2 \bar{x}_2 + ... + x_n x_n \geq 0$ (jelas)

dan

$\langle x,x\rangle = x_1\bar{x}_1 + x_2\bar{x}_2 + ... + x_n\bar{x}_n = 0$, haruslah

$$x_1 = x_2 = ... = x_n = 0$$

Jadi $x = 0$

Karena (i) – (iv) terpenuhi maka jelas bahwa C^n merupakan ruang Hermit.

2. Tunjukkan bahwa $V = \{f : [-\pi,\pi] \longrightarrow C \mid f$ kontiniu$\}$ dengan :

$(f + g) \overset{def}{\sim} f(x) + g(x), \forall x \in [-\pi,\pi], f,g \in V$,dan

$$\langle f , g\rangle \overset{def}{\approx} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, g(t)\, dt$$

merupakan Ruang Hermit

Jawab :

Akan ditunjukan bahwa V dengan produk Hermitnya memenuhi sifat-sifat Ruang Hermit.

(i). $\langle f,g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, \overline{g(t)}\, dt$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \overline{g(t)}\, f(t)\, dt$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \overline{g(t)\, \overline{f(t)}}\, dt$$

$$= \overline{\langle g , f\rangle} , \forall f, g \in V$$

(ii). Misalkan $f,g,h \in V$ sebarang maka :

$$\langle f , g + h\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, \overline{(g + h)\ (t)}\, dt$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, [\overline{g(t)} + \overline{h(t)}\, dt$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, \overline{g(t)}\, dt + \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, \overline{h(t)}\, dt$$

$$= \langle g , g\rangle + \langle f , h\rangle$$

(iii). Misalkan $f,g \in V$ sebarang dan $\alpha \in C$ sebarang,

maka :

$$\langle \alpha f, g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \alpha f(t) \overline{g(t)}\, dt$$

$$= \alpha \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \overline{g(t)}\, dt$$

$$= \alpha \langle f,g\rangle$$

dan

$$\langle f , \alpha g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \overline{(\alpha g)(t)}\, dt$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \bar{\alpha}\, \bar{g}(t)\, dt$$

$$= \bar{\alpha} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \overline{g(t)}\, dt$$

$$= \bar{\alpha} \langle f , g\rangle$$

(iv). $\langle f , f\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \overline{f(t)}\, dt \geq 0$, jelas

dan

$$\langle f,f\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \overline{f(t)}\, dt = 0 \longleftrightarrow f(t) = 0, \forall f \in V$$

Karena (i) - (iv) terpenuhi maka jelas bahwa V merupakan Ruang Hermit.

DAFTAR PUSTAKA

Agnew, Jeane L & Knapp, Robert C, Linear Algebra With Applications, Cole Publishing Company, California, 1988.

Anton, Howard, Elementary Linear Algebra, Jhon Wiley & Sons, Singapura, 1984.

Finkbeiner, Daniel T, Introduction to Matrices and Linear Transformations, D.B. Taraporevala Sons & Co Private LTD, Bombay, 1965.

Lang, Serge, Linear Algebra, Addiso - wesley Publisting Company, New York, 1970.