MAKALAH

FUNGSI GAMMA

Oleh

Dra. Jazwinarti

JURUSAN PENDIDIKAN MATEMATIKA

FAKULTAS PENDIDIKAN MATEMATIKA DAN IPA

IKIP PADANG

1999

KATA PENGANTAR

Makalah ini bertujuan untuk menyajikan suatu fungsi yang bernama "fungsi gamma" yang terdefinisi dalam bentuk suatu integral tak wajar. Uraian yang diberikan diusaha - kan sedemikian terinci, agar para pembaca dapat memahami - nya. Penulis juga memberikan beberapa contoh penggunaan fungsi gamma, supaya para pembaca dapat melihat penggunaan fungsi gamma dalam menghitung nilai suatu integral.

Penulis mengucapkan terima kasih kepada Bapak Drs. Khaidir Abizar dan Ibu Dra. Media Rosha, MSi. yang telah bersedia membaca, memberikan saran serta perbaikan menge - nai isi makalah ini.

Semoga makalah ini dapat memberikan manfaat bagi pem- bacanya.

Padang, Januari 1998

Penulis

DAFTAR ISI

I. PENDAHULUAN

Dalam mendefinisikan integral tertentu $\int_a^b f(x)\,dx$, fungsi f diandaikan terdefinisi pada selang tertutup $[a,b]$. Apabila integral tertentu tersebut terdefinisi pada suatu selang pengintegralan tak berhingga, maka integralnya di - namakan integral tak wajar (improper integral).

Definisi dari integral tak wajar sebagai berikut:
Sebuah integral $\int_a^b f(x)dx$ dikatakan tak wajar jika,

i. satu atau kedua batas integrasinya adalah tak berhingga, atau

ii. f menjadi tak berhingga di satu atau lebih titik di dalam selang integrasinya.

(Thomas Finney, hal. 720)

Bila $\int_a^b f(x)dx$ memenuhi (i), maka disebut "integral tak wajar jenis pertama". Bila $\int_a^b f(x)dx$ memenuhi (ii), maka disebut integral takwajar jenis kedua". Bila integral tertentu $\int_a^b f(x)dx$ memenuhi (i) dan (ii), maka disebut integral tak wajar jenis ketiga".

Contoh:

i. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2\,dx}{x^4 + x^2 + 1}$ adalah integral tak wajar jenis per - tama

ii. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}\,(x+1)}$ adalah integral tak wajar jenis kedua

iii. $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\,dx$ adalah integral tak wajar jenis ketiga

Dalam makalah ini integral tak wajar yang dibahas adalah integral tak wajar jenis pertama. Suatu cara untuk menghitung integral tak wajar jenis pertama adalah:

i. $\int_a^{\infty} f(x)\, dx = \lim_{b \to \infty} \int_a^b f(x)\, dx$

ii. $\int_{-\infty}^{b} f(x)\, dx = \lim_{a \to -\infty} \int_a^b f(x)\, dx$

iii. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = \lim_{a \to -\infty} \int_a^c f(x)dx + \lim_{b \to \infty} \int_c^b f(x)dx$

dengan catatan bila limit di atas ada.

Contoh:
$$\begin{aligned}\int_0^{\infty} x\, e^{-x}dx &= \lim_{b \to \infty} \int_0^b x\, e^{-x}\, dx \\ &= \lim_{b \to \infty} (-be^{-b} - e^{-b} + 1) \\ &= -\lim_{b \to \infty} \frac{b}{e^b} - 0 + 1 \\ &= -\lim_{b \to \infty} \frac{1}{e^b} + 1 \\ &= 1\end{aligned}$$

Masalah utama dalam melihat integral tak wajar adalah menentukan kekonvergenan dan kedivergenan integral. Pada bagian ini disajikan teorema tes perbandingan untuk integral tak wajar dengan integrasi tak negatif:

Jika $0 \leq g(x) \leq f(x)$ untuk semua $x > a$

Maka $\int_a^{\infty} g(x)dx$ konvergen, jika $\int_a^{\infty} f(x)dx$ konvergen

$\int_a^{\infty} f(x)dx$ divergen, jika $\int_a^{\infty} g(x)dx$ divergen.

(Thomas Finney, hal. 725)

Contoh: $\int_0^{\infty} e^{-x}\,dx = \lim_{b \to \infty} \int_0^b e^{-x}dx$

$= \lim_{b \to \infty} (1 - e^{-b})$

$= 1$

Jadi $\int_0^{\infty} e^{-x}\,dx$ konvergen

Karena $\frac{1}{e^x+1} \leqslant \frac{1}{e^x} = e^{-x}$

Maka $\int_0^{\infty} \frac{dx}{e^x+1}$ juga konvergen

Teorema mengenai tes pembagian untuk integral tak wa - jar dengan integran tak negatif:

Misalkan f(x) dan g(x) adalah fungsi yang positif

dan bahwa $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L$

Maka:

i. bila $0<L<\infty$, maka $\int_a^{\infty} f(x)dx$ dan $\int_a^{\infty} g(x)dx$ kedua duanya konvergen atau kedua-duanya divergen

ii. bila L = 0 dan $\int_a^{\infty} g(x)dx$ konvergen, maka $\int_a^{\infty} f(x)dx$ konvergen

iii. bila $L = \infty$ dan $\int_a^{\infty} g(x)\,dx$ divergen, maka $\int_a^{\infty} f(x)dx$ divergen

(Thomas Finney, hal. 726)

Contoh: Ambil $f(x) = \frac{1}{x^2}$ dan $g(x) = \frac{1}{1+x^2}$

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2} = \lim_{b \to \infty} \int_1^{b} \frac{dx}{x^2} = \lim_{b \to \infty} \left(- \frac{1}{b} + 1\right) = 1 \text{ (konv)}$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1+x^2}{x^2} = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{1}{x^2} + 1\right) = 0 + 1 = 1$$

Karena $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2}$ konvergen, maka $\int_1^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ konvergen.

II. PERMASALAHAN

Bentuk integral tak wajar jenis pertama yang berben - tuk $\int_0^\infty e^{-t}\, t^{\alpha-1}\, dt$, didefinisikan sebagai fungsi gamma $\Gamma(\alpha)$. Dari bentuk fungsi gamma diatas, menimbulkan suatu pertanyaan "apakah sumbangan yang dapat diberikan oleh pendefinisian fungsi gamma tersebut".

Pandang fungsi gamma $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-t}\, t^{\alpha-1}\, dt$, fungsi ini terdefinisi untuk $\alpha > 0$. Dari pendefinisian fungsi yang sedemikian rupa oleh Euler, memunculkan permasalahan:

1. Apakah pendefinisian fungsi gamma dapat disajikan dalam bentuk lain?
2. Bagaimana kekonvergenan fungsi gamma?
3. Sifat-sifat apakah yang dimiliki oleh fungsi gamma?
4. Apakah yang dihasilkan oleh fungsi gamma apabila fungsi tersebut dipandang sebagai fungsi faktorial?
5. Bagaimana penggunaan fungsi gamma dalam menghitung ni - lai integral?

III. PEMBAHASAN

A. Definisi Fungsi Gamma

Fungsi Gamma dikemukakan oleh Euler, dituliskan dengan lambang $\Gamma(\alpha)$, didefinisikan oleh integral:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-t}\, t^{\alpha-1} dt \qquad (\alpha > 0) \qquad \ldots\ldots \quad (1)$$

yang hanya konvergen bila $\alpha > 0$ (atau kalau α adalah bilangan kompleks, untuk α yang bagian nyatanya adalah positif).
(Erwin Kreyszig, hal. 860)

Representasi lain dari fungsi gamma adalah:

$$\Gamma(\alpha) = 2 \int_0^\infty e^{-t^2}\, t^{2\alpha-1}\, dt \qquad \ldots\ldots \quad (2)$$

atau

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^1 \left(\ln \frac{1}{t}\right)^{\alpha-1} dt \qquad \ldots\ldots \quad (3)$$

Persamaan (2) diperoleh dengan mensubstitusikan $t^2 = y$ kedalam persamaan (1) yaitu:

$$\begin{aligned}
\Gamma(\alpha) &= \int_0^\infty e^{-y}\, y^{\alpha-1} dy \\
&= \int_0^\infty e^{-t^2} (t^2)^{\alpha-1}\, d(t^2) \\
&= \int_0^\infty e^{-t^2}\, t^{2\alpha-2}\, 2t\, dt \\
&= 2 \int_0^\infty e^{-t^2}\, t^{2\alpha-1}\, dt
\end{aligned}$$

Persamaan (3) diperoleh dengan mensubstitusikan $\ln \frac{1}{t} = y$ kedalam persamaan (1) yaitu:

$$\Gamma(\alpha) = {}_0\int^{\infty} e^{-y}\, y^{\alpha-1}\, dy$$

$$= {}_0\int^{\infty} e^{-\ln \frac{1}{t}} (\ln \tfrac{1}{t})^{\alpha-1}\, d(\ln \tfrac{1}{t})$$

$$= {}_1\int^{0} e^{\ln t} (\ln \tfrac{1}{t})^{\alpha-1}\, t\, \frac{-1}{t^2}\, dt$$

$$= {}_1\int^{0} t.(\ln \tfrac{1}{t})^{\alpha-1}.\frac{-1}{t}\, dt$$

$$= {}_0\int^{1} (\ln \tfrac{1}{t})^{\alpha-1}\, dt$$

B. Kekonvergenan Fungsi Gamma

Fungsi gamma $\Gamma(\alpha)$ adalah fungsi yang konvergen. Tuliskan persamaan (1) sebagai:

$${}_0\int^{1} e^{-t}\, t^{\alpha-1} dt + {}_1\int^{\infty} e^{-t}\, t^{\alpha-1} dt \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

Tinjau bentuk pertama dalam (4):

$$I_1 = {}_0\int^{1} e^{-t}\, t^{\alpha-1} dt$$

$$= \lim_{M \to 0} {}_M\int^{1} e^{-t}\, t^{\alpha-1}\, dt$$

misalkan $t = \frac{1}{y}$, sehingga $dt = \frac{-1}{y^2}\, dy$

$$I_1 = \lim_{M \to 0} {}_{\frac{1}{M}}\int^{1} e^{-\frac{1}{y}} (\tfrac{1}{y})^{\alpha-1} . \frac{-1}{y^2}\, dy$$

$$= \lim_{M \to 0} {}_1\int^{\frac{1}{M}} e^{-\frac{1}{y}}\, y^{-\alpha-1}\, dy$$

$$= {}_1\int^{\infty} e^{-\frac{1}{y}}\, y^{-\alpha-1}\, dy$$

ambil $f(y) = e^{-\frac{1}{y}}\, y^{-\alpha-1}$

$g(y) = y^{-\alpha-1}$

maka jelas bahwa:

$$f(y) = e^{-\frac{1}{y}}\, y^{-\alpha-1} \leqslant y^{-\alpha-1} = g(y)$$

dan $\int_1^{\infty} y^{-\alpha-1}\, dy$ adalah konvergen,

sebab:

$$\begin{aligned}\int_1^{\infty} y^{-\alpha-1}\, dy &= \lim_{M \to \infty} \int_1^{M} y^{-\alpha-1}\, dy \\ &= \lim_{M \to \infty} \left. \frac{-1}{\alpha}\, y^{-\alpha} \right]_1^M \\ &= \lim_{M \to \infty} \left(\frac{-M^{-\alpha}}{\alpha} + \frac{1^{-\alpha}}{\alpha} \right) \\ &= \lim_{M \to \infty} \left(\frac{1}{M} + \frac{1}{\alpha} \right) \\ &= \frac{1}{\alpha} \quad \text{(konvergen)}\end{aligned}$$

Maka $\int_1^{\infty} e^{-\frac{1}{y}}\, y^{-\alpha-1} dy$ konvergen,

jadi $I_1 = \int_0^1 e^{-t}\, t^{\alpha-1}\, dt$ adalah konvergen.

Tinjau bentuk kedua dalam (4):

$$I_2 = \int_1^{\infty} e^{-t}\, t^{\alpha-1} dt$$

misalkan $f(t) = e^{-t}\, t^{\alpha-1}$

$g(t) = t^{-2}$

dipunyai $\int_1^{\infty} g(t)\, dt$ konvergen,

sebab:

$$\begin{aligned}\int_1^{\infty} g(t)\, dt &= \lim_{M \to \infty} \int_1^{M} t^{-2}\, dt \\ &= \lim_{M \to \infty} \left. -\frac{1}{t} \right]_1^M \\ &= \lim_{M \to \infty} \left(-\frac{1}{M} + 1 \right) \\ &= 1\end{aligned}$$

Dengan menghitung

$$\lim_{t \to \infty} \frac{f(t)}{g(t)} = \lim_{t \to \infty} \frac{e^{-t}\, t^{\alpha-1}}{t^{-2}}$$

$$= \lim_{t \to \infty} e^{-t}\, t^{\alpha+1}$$

$$= \lim_{t \to \infty} \frac{t^{\alpha+1}}{e^{t}} \qquad \text{(menggunakan l'hospital)}$$

$$= 0$$

Memakai teorema Limit Comparison Test sebagai berikut:

Jika $f(x) \geq 0$ dan $g(x) \geq 0$, $x \geq a$

dan $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$

Maka: $\int_a^\infty g(x)\, dx$ konvergen $\Rightarrow$ $\int_a^\infty f(x)\, dx$ konv.

Maka $\int_1^\infty f(t)\, dt$ konvergen, atau $\int_1^\infty e^{-t}\, t^{\alpha-1} dt$ konvergen

Dengan perkataan lain $I_2 = \int_1^\infty e^{-t}\, t^{\alpha-1} dt$ adalah konvergen.

Dari hasil I_1 dan I_2

maka $\Gamma(\alpha)$ adalah fungsi yang konvergen.

C. Hubungan Fungsional Fungsi Gamma

Dari definisi pertama dan dengan melakukan penginteg - ralan parsial diperoleh:

$$\Gamma(\alpha+1) = \int_0^\infty e^{-t}\, t^{\alpha}\, dt$$

$$= \lim_{M \to \infty} -e^{-t}\, t^{\alpha} \Big]_0^M + \alpha \int_0^\infty e^{-t}\, t^{\alpha-1}\, dt$$

$$= 0 + \alpha\Gamma(\alpha)$$

$$= \alpha\Gamma(\alpha) \qquad \ldots\ldots \quad (5)$$

bentuk (5) ini merupakan hubungan fungsional yang dipenuhi oleh fungsi gamma.

Tampak jelas dari hubungan ini bahwa jika nilai $\Gamma(\alpha)$ diketahui untuk α antara dua bilangan bulat positif berurutan, nilai $\Gamma(\alpha)$ untuk sebarang nilai positif α dapat diperoleh dengan menerapkan (5) berulang kali.

Melalui penerapan secara berulang-ulang, kita memperoleh:

$$
\begin{aligned}
\Gamma(\alpha) &= \frac{(\alpha+1)}{\alpha} \\
&= \frac{\Gamma(\alpha+2)}{\alpha(\alpha+1)} \\
&\;\vdots \\
&= \frac{\Gamma(\alpha+k+1)}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots(\alpha+k)}
\end{aligned}
$$

Sehingga diperoleh hubungan berikut:

$$\Gamma(\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha+k+1)}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots(\alpha+k)}\ , \quad \alpha (\neq 0, -1, -2, \ldots)$$

Jadi dengan (1) dan (5) kita mempunyai definisi selengkapnya, untuk $\Gamma(\alpha)$ yakni untuk semua nilai α kecuali $\alpha = 0, -1, \ldots$

Dari definisi (2) diperoleh:

$$\Gamma(\tfrac{1}{2}) = 2 \int_0^{\infty} e^{-t^2}\,dt$$

Untuk menghitung integral yang terakhir ini, pandang integral

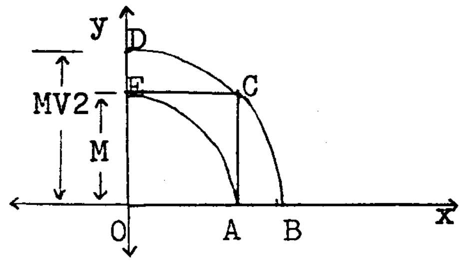
$$I_M = \int_0^M e^{-t^2}\,dt = \int_0^M e^{-s^2}\,ds, \text{ dan } I = \lim_{M \to \infty} I_M$$

Maka

$$
\begin{aligned}
I_M^2 &= \int_0^M e^{-t^2}\,dt \cdot \int_0^M e^{-s^2}\,ds \\
&= \int_0^M \int_0^M e^{-(t^2+s^2)}\,dt\,ds
\end{aligned}
$$

$$I_M^2 = \iint_{R_M} e^{-(t^2+s^2)}\, dt\, ds$$

dimana R_M adalah bidang bujur sangkar OACE dengan sisi M, seperti yang terlihat pada gambar.



Misalkan R_1 adalah bidang seperempat lingkaran OAC yang berjari-jari M, dan R_2 adalah bidang seperempat lingkaran OBD yang berjari-jari MV2.

Karena

$$e^{-(t^2+s^2)} > 0$$

Maka

$$\iint_{R_1} e^{-(t^2+s^2)}\, dt\, ds \leqslant I_M^2 \leqslant \iint_{R_2} e^{-(t^2+s^2)}\, dt\, ds$$

Dengan merobah kedalam koordinat polar (ρ, ϕ) dimana

$$t = \rho \operatorname{Cos}\phi \quad , \quad s = \rho \operatorname{Sin}\phi$$

diperoleh $dt\, ds = \rho\, d\rho\, d\phi$ dengan $t^2+s^2 = \rho^2$

Ketidaksamaan diatas menjadi,

$$\int_{\phi=0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{\rho=0}^{M} e^{-\rho^2} \rho\, d\rho\, d\phi \leqslant I_M^2 \leqslant \int_{\phi=0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{\rho=0}^{M} e^{-\rho^2} \rho\, d\rho\, d\phi$$

atau

$$\frac{\pi}{4}\,(1 - e^{-M^2}) \leqslant I_M^2 \leqslant \frac{\pi}{4}\,(1 - e^{-2M^2})$$

Dengan mengambil limit untuk $M \to \infty$, diperoleh

$$I^2 = \lim_{M \to \infty} I_M^2 = \frac{\pi}{4}$$

dan $$I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Karena
$$\begin{aligned}\Gamma(\tfrac{1}{2}) &= 2 \int_0^{\infty} e^{-t^2} dt \\ &= 2 \lim_{M \to \infty} I_M \\ &= 2\, I\end{aligned}$$

Maka diperoleh:

$$\Gamma(\tfrac{1}{2}) = \sqrt{\pi} \qquad \text{..... (6)}$$

Dari hasil diatas dan (5) diperoleh:

$$\Gamma(-\tfrac{1}{2}) = \frac{\Gamma(+\frac{1}{2})}{-\frac{1}{2}} = -2\sqrt{\pi}$$

$$\Gamma(-\tfrac{3}{2}) = \frac{\Gamma(-\frac{1}{2})}{-\frac{3}{2}} = -\tfrac{2}{3}\,(-2\sqrt{\pi}) = \frac{4\sqrt{\pi}}{3}$$

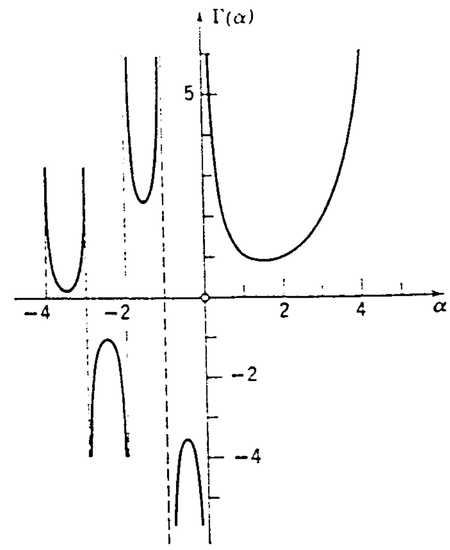
$\vdots$

dst

Untuk beberapa nilai α antara lain: $\frac{1}{2}$, 1 , 2 , ... kita dapat dengan mudah menghitung nilai fungsi gamma secara tepat. Tetapi untuk nilai α yang lain kita mendapat kesulitan menghitung nilai fungsi gamma secara tepat. Dengan bantuan komputer kita dapat menghitung nilai fungsi gamma, tabel berikut memberikan nilai-nilai fungsi gamma di titik-titik $1 \leqslant \alpha \leqslant 2$.

Tabel Fungsi Gamma

α	$\Gamma(\alpha)$
1,00	1,0000
1,10	0,9514
1,20	0,9182
1,30	0,8975
1,40	0,8873
1,50	0,8862
1,60	0,8935
1,70	0,9086
1,80	0,9314
1,90	0,9618
2,00	1,0000



Grafik Fungsi Gamma $\Gamma(\alpha)$

D. <u>Fungsi Gamma Sebagai Fungsi Faktorial</u>

Menggunakan persamaan (1), dengan pengintegralan langsung maka:

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t}\, dt = 1 \qquad \ldots\ldots (7)$$

Dengan menerapkan (5) diperoleh:

$$\Gamma(2) = 1.\Gamma(1) = 1.1 = 1$$

$$\Gamma(3) = 2.\Gamma(2) = 2 \times 1$$

$$\Gamma(4) = 3.\Gamma(3) = 3 \times 2 \times 1$$

$$\vdots$$

$$\Gamma(n+1) = n! \quad \text{, asalkan n bilangan bulat positif} \qquad \ldots\ldots (8)$$

Mengingat hal ini sangat tepat apabila didefinisikan 0! dalam bentuk:

$$0\,! = \Gamma(1) = 1 \qquad \ldots\ldots \quad (9)$$

Apabila diambil $\alpha = 0$, maka kita mempunyai

$$\Gamma(0) = \infty$$

Dengan menuliskan

$$\Gamma(-m) = (-m-1)!$$

Kita dapatkan

$$(-1)! = -\infty$$

$$(-2)! = +\infty$$

$$(-3)! = -\infty$$

$$(-4)! = +\infty$$

Atau secara umum:

$$m! = (-1)^m \infty \text{, untuk } m<0 \qquad \ldots\ldots \quad (10)$$

Sebagai fungsi faktorial, fungsi gamma dengan jelasnya menyatakan:

$$0! = 1$$

$$m! = (-1)^m \infty \text{ , untuk } m<0$$

E. Keterpakaian Fungsi Gamma Dalam Statistika

Dalam statistika matematika kita akan menemukan suatu distribusi yang menggunakan fungsi gamma. Distribusi yang dimaksud disini bernama "distribusi gamma".

Definisi distribusi gamma sebagai berikut:

Suatu peubah acak kontinu X berdistribusi gamma, dengan parameter α dan β, bila fungsi densitasnya diberikan oleh:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)}\, x^{\alpha-1}\, e^{-\frac{x}{\beta}} & , x>0 \\ 0 & , \text{untuk } x \text{ lainnya} \end{cases}$$

bila $\alpha>0$ dan $\beta>0$

(Ronald E Walpole, hal. 140)

Dari definisi diatas jelas $f(x)\geqslant 0$

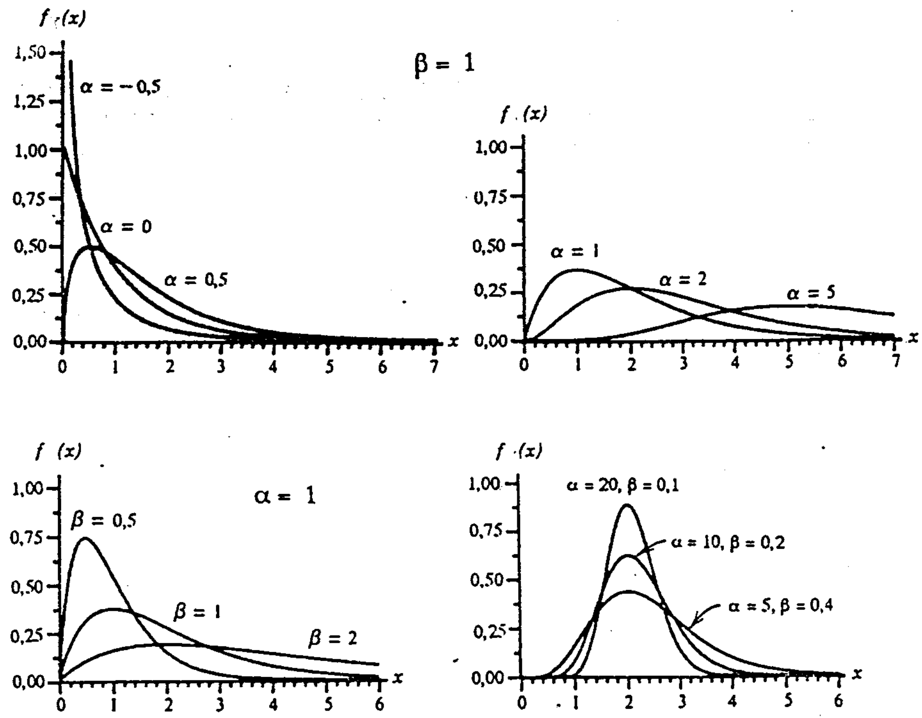
Apabila kita menghitung:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)}\, x^{\alpha-1}\, e^{-x/\beta}\, dx \\ &= \int_{0}^{\infty} \frac{1}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)}\, x^{\alpha-1}\, e^{-x/\beta}\, dx \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{0}^{\infty} (x/\beta)^{\alpha-1}\, e^{-x/\beta}\, d(x/\beta) \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\, \Gamma(\alpha) \\ &= 1\end{aligned}$$

Jadi, sebagai fungsi densitas f(x) mempunyai sifat:

1. $f(x)\geqslant 0$
2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1$

Grafik distribusi gamma untuk harga-harga α dan β tertentu sebagai berikut:



Grafik Distribusi Gamma

Mean dan Variansi dari Distribusi Gamma dapat dipero - leh sebagai berikut:

Mean,

$$\mu = E\ (X)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x\ f(x)\ dx$$

$$= \int_{0}^{\infty} x\ \frac{1}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)}\ x^{\alpha-1}\ e^{-x/\beta}\ dx$$

$$= \frac{1}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)} \int_{0}^{\infty} x^{\alpha}\ e^{-x/\beta}\ dx$$

$$= \frac{\beta}{\Gamma(\alpha)} \int_{0}^{\infty} (x/\beta)^{\alpha}\ e^{-x/\beta}\ d(x/\beta)$$

$$= \frac{\beta}{\Gamma(\alpha)}\ \Gamma\ (\alpha+1)$$

$$\mu = \frac{\beta}{\Gamma(\alpha)} \alpha\Gamma(\alpha)$$

$$= \alpha\beta$$

Variansi,

$$\sigma^2 = E\ (X^2) - \mu^2$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x^2\ f(x)\ dx - \alpha^2\beta^2$$

$$= \int_{0}^{\infty} x^2\ \frac{1}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)}\ x^{\alpha-1}\ e^{-x/\beta}\ dx - \alpha^2\beta^2$$

$$= \frac{1}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)} \int_{0}^{\infty} x^{\alpha+1}\ e^{-x/\beta} dx - \alpha^2\beta^2$$

$$= \frac{\beta^2}{\Gamma(\alpha)} \int_{0}^{\infty} (x/\beta)^{\alpha+1}\ e^{-x/\beta}\ d(x/\beta) - \alpha^2\beta^2$$

$$= \frac{\beta^2}{\Gamma(\alpha)}\ \Gamma(\alpha+2) - \alpha^2\beta^2$$

$$= \frac{\beta^2}{\Gamma(\alpha)} \cdot \alpha(\alpha+1)\Gamma(\alpha) - \alpha^2\beta^2$$

$$= \beta^2 \cdot \alpha(\alpha+1) - \alpha^2\beta^2$$

$$= \alpha\beta^2$$

Dari hasil diatas, distribusi gamma mempunyai:

Mean $= \mu = \alpha\beta$

Variansi $= \sigma^2 = \alpha\beta^2$

F. Penerapan Fungsi Gamma Dalam Menghitung Nilai Integral

1. Hitunglah $\int_0^\infty x\sqrt{x}\, e^{-x}\, dx$

Penyelesaian

$$\int_0^\infty x\sqrt{x}\, e^{-x}\, dx = \int_0^\infty x^{\frac{5}{2}-1}\, e^{-x}\, dx$$

bentuk terakhir sama dengan bentuk (1) fungsi gamma ,

sehingga:

$$\int_0^\infty x\sqrt{x}\, e^{-x}\, dx = \Gamma(\tfrac{5}{2}) = \tfrac{3}{2}\Gamma(\tfrac{3}{2}) = \tfrac{3}{2}\,\tfrac{1}{2}\,\Gamma(\tfrac{1}{2})$$

$$= \tfrac{3}{4}\sqrt{\pi}$$

2. Hitunglah $\int_0^\infty t^5\, e^{-4t^2}\, dt$

Penyelesaian

Misalkan u = 2t, sehingga diperoleh:

$$\int_0^\infty t^5\, e^{-4t^2}\, dt = \frac{1}{32}\int_0^\infty u^5\, e^{-u^2}\, \frac{1}{2}\, du$$

$$= \frac{1}{128}\cdot 2\int_0^\infty e^{-u^2}\, u^{2.3-1}\, du$$

bentuk terakhir ini sama dengan bentuk (2) fungsi gamma

jadi:

$$\int_0^\infty t^5\, e^{-4t^2}\, dt = \frac{1}{128}\Gamma(3) = \frac{1}{128}\cdot 2!$$

$$= \frac{1}{64}$$

3. Hitunglah $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{-\ln x}}$

Penyelesaian

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{-\ln x}} = \int_0^1 (\ln \tfrac{1}{x})^{-\frac{1}{2}}\, dx$$

$$= \int_0^1 (\ln \tfrac{1}{x})^{\frac{1}{2}-1}\, dx$$

bentuk terakhir sama dengan bentuk (3) fungsi gamma , sehingga:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{-\ln x}} = \Gamma(\tfrac{1}{2})$$

$$= \sqrt{\pi}$$

4. Buktikan bahwa $\int_0^1 t^m (\ln t)^n\, dt = \frac{(-1)^n n!}{(m+1)^{n+1}}$

bila n bilangan bulat positif dan m bilangan bulat dengan $m > -1$

Bukti

Misalkan $\ln t = -x$

Maka: $t = e^{-x}$, $dt = -e^{-x}dx$

$$\int_0^1 t^m(\ln t)^n dt = -\int_\infty^0 e^{-mx}\, (-x)^n\, e^{-x}\, dx$$

$$= \int_0^\infty e^{-(m+1)x}\, (-x)^n\, dx$$

$$= (-1)^n \int_0^\infty e^{-(m+1)x}\, x^n\, dx$$

misalkan $u = (m+1)x$

maka $du = (m+1)\, dx$

$$\int_0^1 t^m(\ln t)^n dt = (-1)^n \int_0^\infty e^{-u} \left(\frac{u}{m+1}\right)^n \frac{du}{m+1}$$

$$= \frac{(-1)^n}{(m+1)^{n+1}} \int_0^\infty e^{-u}\, u^n\, du$$

$$= \frac{(-1)^n}{(m+1)^{n+1}}\, \Gamma(n+1)$$

$${}_0\int^1 t^m (\ln t)^n \, dt = \frac{(-1)^n \, n!}{(m+1)^{n+1}}$$

$\blacksquare$

5. Buktikan ${}_0\int^{\infty} e^{-\alpha\lambda^2} \cos\beta\lambda \, d\lambda = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \; e^{-\beta^2/4\alpha}$

<u>Bukti</u>

Misalkan $I(\alpha,\beta) = {}_0\int^{\infty} e^{-\alpha\lambda^2} \cos\beta\lambda \, d\lambda$

$$\frac{\partial I}{\partial \beta} = - {}_0\int^{\infty} \lambda \, . \, e^{-\alpha\lambda^2} \sin\beta\lambda \, d\lambda$$

$$= \frac{1}{2\alpha} \; {}_0\int^{\infty} \sin\beta\lambda \; d(e^{-\alpha\lambda^2})$$

$$= \frac{1}{2\alpha} \left[e^{-\alpha\lambda^2} \sin\beta\lambda \Big|_0^{\infty} - {}_0\int^{\infty} e^{-\alpha\lambda^2} \, d(\sin\beta\lambda) \right]$$

$$= \frac{1}{2\alpha} \left[-\beta \, {}_0\int^{\infty} e^{-\alpha\lambda^2} \cos\beta\lambda \; d\lambda \right]$$

$$= \frac{-\beta}{2\alpha} \; {}_0\int^{\infty} e^{-\alpha\lambda^2} \cos\beta\lambda \; d\lambda$$

$$= \frac{-\beta}{2\alpha} \; I$$

diperoleh $\frac{dI}{I} = - \frac{\beta}{2\alpha} \, d\beta$

dengan mengintegralkan, maka:

$$\ln I = \frac{-\beta^2}{4\alpha} + \ln C$$

$$I = C \, e^{-\beta^2/4\alpha}$$

$$I(\alpha, 0) = C \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (*)$$

Karena $I(\alpha,\beta) = {}_0\int^{\infty} e^{-\alpha\lambda^2} \cos\beta\lambda \; d\lambda$

Maka $I(\alpha, 0) = {}_0\int^{\infty} e^{-\alpha\lambda^2} \, d\lambda$

misalkan $x = \alpha\lambda^2$, maka $dx = 2\alpha\lambda \; d\lambda$

Jadi $I(\alpha,0) = \int_0^{\infty} e^{-x} \cdot \frac{dx}{2\alpha\lambda}$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \lambda \cdot x^{-1} e^{-x} dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2}} x^{-1} e^{-x} dx$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\alpha}} \int_0^{\infty} x^{-\frac{1}{2}} e^{-x} dx$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\alpha}} \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

Dari hasil terakhir dan (*) diperoleh:

$$C = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

Karena $I = C\, e^{-\beta^2/4\alpha}$

Maka diperoleh:

$$I(\alpha,\beta) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\; e^{-\beta^2/4\alpha}$$

atau

$$\int_0^{\infty} e^{-\alpha\lambda^2} \cos\beta\lambda \; d\lambda = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\; e^{-\beta^2/4\alpha}$$

∎

IV. KESIMPULAN

Fungsi Gamma didefinisikan oleh integral,

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-t}\, t^{\alpha-1}\, dt \quad , \alpha > 0$$

Representasi lain dari fungsi gamma adalah:

$$\Gamma(\alpha) = 2 \int_0^{\infty} e^{-t^2}\, t^{2\alpha-1}\, dt$$

atau

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{1} (\ln \tfrac{1}{t})^{\alpha-1}\, dt$$

Fungsi Gamma $\Gamma(\alpha)$ adalah fungsi yang konvergen

Hubungan fungsional fungsi gamma,

$$\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$$

Apabila sifat $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$ dilakukan berulang kali, di - peroleh:

$$\Gamma(\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha+k+1)}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\ \ldots\ (\alpha+k)} \quad , \alpha (\neq 0,-1,-2, \ldots)$$

Nilai fungsi gamma pada $\alpha = \frac{1}{2}$ adalah,

$$\Gamma(\tfrac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$$

Dari fungsi gamma sebagai fungsi faktorial diperoleh:

$$\Gamma(n+1) = n! \quad , \text{ asalkan n bilangan bulat positif}$$

Sebagai fungsi faktorial, fungsi gamma memberikan,

$$0! = \Gamma(1) = 1$$

$$m! = (-1)^m \infty, \text{ untuk } m < 0$$

Suatu peubah acak kontinu X mempunyai "Distribusi Gamma" dengan parameter α dan β, bila fungsi densitasnya:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)}\, x^{\alpha-1}\, e^{-x/\beta} & , x>0 \\ 0 & , x\leq 0 \end{cases}$$

bila $\alpha>0$ dan $\beta>0$.

Distribusi Gamma ini mempunyai mean $\alpha\beta$ dan variansi $\alpha\beta^2$.

Fungsi gamma dapat membantu kita menyelesaikan hitung integral, yang secara elementer sulit dicari solusinya.

DAFTAR KEPUSTAKAAN

1. Erwin, Kreyszig. (1993). Matematika Teknik Lanjutan , Buku 1. Jakarta: Gramedia

2. Murray, R Spiegel. (1990). Kalkulus Lanjutan , Jakarta: Erlangga

3. Ronald, E Walpole. (1986). Ilmu Peluang dan Statistika Untuk Insinyur dan Ilmuwan , Bandung: ITB

4. Thomas, Finney. (1986). Kalkulus dan Geometri Analitik, Jilid 1. Jakarta: Erlangga