MAKALAH

MINIMISASI PADA RUANG HASIL KALI DALAM

OLEH:

DRS. HENDRA SYARIFUDDIN, M.Si

FAKULTAS PENDIDIKAN MATEMATIKA DAN IPA

IKIP PADANG

1998

Kata Pengantar

Puji syukur penulis aturkan kepada Tuhan Yang Maha Kuasa karena dengan karuniaNya penulis mampu menyelesaikan makalah dengan judul **Minimisasi pada Ruang Hasil Kali Dalam ini.**

Pemahaman tentang minimisasi dari fungsi-fungsi bernilai skalar akan membantu dan memudahkan pemahaman tentang permasalahan-permasalahan pada kontrol optimum, misalnya tentang pemilihan fungsi kontrol yang meminimumkan "loss function" dari suatu permasalahan teknik dan industri.

Terima kasih penulis aturkan kepada rekan-rekan sejawat yang telah membaca makalah ini dan memberikan masukan berharga tentang perbaikannya.

Semoga makalah sederhana ini bermanfaat bagi pembaca.

Padang, November 1998

Daftar Isi

Bagian 1

Pendahuluan

1.1 Latar Belakang

Topik hasil kali dalam dibahas secara luas pada mata kuliah aljabar linier, namun pada kuliah-kuliah sedikit sekali dibahas tentang materi yang mengarah pada aplikasi dari topik tersebut. Pengetahuan tentang ruang hasil kali dalam terutama minimisasi dalam ruang hasil kali dalam merupakan dasar untuk lebih memahami konsep kontrol optimum.

1.2 Tujuan

Tujuan dari penulisan makalah ini adalah untuk:

1. Menambah referensi mata kuliah aljabar linier dan mata kuliah matematika terapan pada jurusan Pendidikan Matematika IKIP Padang.

2. Untuk mengetahui tentang minimisasi dari fungsi-fungsi bernilai skalar.

1.3 Permasalahan

Permasalahan yang akan dijawab dalam makalah ini adalah bagaimana meminimumkan fungsi-fungsi yang bernilai skalar dan bagaimana meminimumkan jumlah dari suku kuadratik dan suku linier dari suatu fungsi vektor.

1.4 Metode Pembahasan

Metode yang digunakan dalam pembahasan tulisan ini adalah metode analisis standar untuk membuktikan baik lemma maupun teorema, yaitu dengan bukti langsung atau dengan cara kontradiksi.

Bagian 2

Pembahasan

Sebelum membahas hal utama dari makalah ini, yaitu Minimisasi Dalam Ruang Hasil Kali Dalam perlu terlebih dahulu dibahas beberapa definisi dan teorema tentang; Hasil Kali Dalam dan Norm, Transformasi Linier, dan Transformasi Adjoint.

2.1 Hasil Kali Dalam dan Norm

Definisi 2.1 *Hasil kali dalam pada ruang vektor real* V *adalah pemetaan* $\langle\, ,\rangle : V \times V \longrightarrow \mathrm{R}$ *dengan pengaitan* $(x, y) \longmapsto \langle x, y\rangle$ *sehingga untuk setiap vektor* x, y *dan* z *di* V, *dan* $\alpha \in \mathrm{R}$ *berlaku :*

(*a*). $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$

(*b*). $\langle \alpha\, x, y\rangle = \alpha\, \langle x, y\rangle$

(*c*). $\langle x + y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$

(d). $\langle x, x\rangle \geq 0$; $\langle x, x\rangle = 0 \Longleftrightarrow x = 0$.

Definisi 2.2 *Hasil kali dalam dua vektor $x(t)$ dan $y(t) \in \mathrm{R}^n$ yang merupakan fungsi-fungsi kontinu pada interval $t \in [t_1, t_2]$, didefinisikan oleh*

$$\langle x(t), y(t)\rangle = \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} x^T(t)y(t)\, dt$$

$$= \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{n} x_i(t)y_i(t).$$

Misalkan $x \in \mathrm{R}^n$ dengan komponen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ dan A adalah matriks $n \times n$ dengan elemen $a_{ij} \in \mathrm{R}$. Maka

$$\langle x, Ax\rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j = x^T Ax.$$

Fungsi bernilai skalar $f(x) = \langle x, Ax\rangle$ disebut *fungsi kuadratik.*

Definisi 2.3 *Untuk setiap $x \neq 0$, suatu bentuk kuadratik $x^T Ax$ disebut definit positif jika $x^T Ax > 0$, dan matriks simetri A disebut matriks definit positif jika bentuk kuadratik $x^T Ax$ adalah definit positif.*

Definisi 2.4 *Misalkan V ruang vektor atas lapangan F. Suatu pemetaan $\| \; \| : V \longrightarrow \mathrm{R}$ dengan pengaitan $x \longmapsto \|x\|$ dinamakan norm pada V jika memenuhi :*

a. $\|x\| \geq 0, \quad \forall x \in V$

b. *Untuk semua $x \in V$ berlaku $\|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$*

c. $\|\alpha x\| = |\alpha|\,\|x\|, \quad \forall x \in V$ *dan* $\alpha \in K$

d. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \quad \forall x, y \in V.$

Definisi 2.5 *Misalkan V suatu ruang hasil kali dalam, maka* **norm** *dari setiap $v(t) \in V$ yang merupakan fungsi kontinu pada interval $t \in [t_1, t_2]$ didefinisikan oleh*

$$\|v(t)\| = \sqrt{\langle v(t), v(t)\rangle}.$$

Definisi 2.6 *Vektor x dan y dikatakan ortogonal jika $\langle x, y\rangle = 0$.*

Definisi 2.7 *Himpunan bagian $X = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ dari ruang hasil kali dalam V dikatakan ortonormal jika*

$$\langle x_i, x_j\rangle = \begin{cases} 1 & \text{jika } i = j, \\ 0 & \text{jika } i \neq j. \end{cases}$$

Teorema 2.1 *Jika $X = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ himpunan ortonormal dari ruang hasil kali dalam V dan y adalah vektor sebarang di V maka $y - \sum_{j=1}^{n}\langle y, x_j\rangle x_j$ ortogonal pada semua $x_i \in X$.*

Bukti: $\langle y - \sum_{j=1}^{n}\langle y, x_j\rangle x_j, x_i\rangle = \langle y, x_i\rangle - \sum_{j=1}^{n}\langle y, x_j\rangle\langle x_j, x_i\rangle$
$= \langle y, x_i\rangle - \langle y, x_i\rangle = 0.$ ■

Misalkan V ruang hasil kali dalam dan $M \subseteq V$, $M \neq 0$. Himpunan ortogonal dari M, dinyatakan dengan $M^{\perp}$, adalah himpunan semua vektor di V yang ortogonal pada semua vektor di M yaitu $M^{\perp} = \{y \in V \mid \langle x, y\rangle = 0$ untuk semua $x \in M\}$.

Lemma 2.1 *Misalkan V suatu ruang hasil kali dalam dan M suatu himpunan bagian dari V, $M \neq \emptyset$, maka berlaku hal berikut.*

1. $M^{\perp}$ suatu ruang bagian dari V,

2. Jika K ruang bagian yang dibangun oleh M maka K dan $M^{\perp}$ saling ortogonal.

Bukti: Misalkan V adalah ruang hasil kali dalam kompleks.

1. Misalkan x dan $y \in M^{\perp}$. Maka untuk $z \in M$ diperoleh $\langle z, \alpha x + \beta y\rangle = \overline{\alpha}\langle z, x\rangle + \overline{\beta}\langle z, y\rangle = 0$, untuk $\alpha, \beta \in C$. Jadi diperoleh $\alpha x + \beta y \in M^{\perp}$ dan ini berarti $M^{\perp}$ suatu ruang bagian.

2. Misalkan $x \in K$ dan $y \in M^{\perp}$. Maka $x = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i m_i$, dimana $\alpha_i \in C$ dan $m_i \in M$. Akibatnya

$$\langle x, y\rangle = \langle \sum_{i=1}^{m} \alpha_i m_i, y\rangle = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \langle m_i, y\rangle = 0.$$

Ini membuktikan $M^{\perp}$ ortogonal dengan K. ■

Lemma 2.2 *Jika M adalah ruang bagian dari ruang hasil kali dalam V maka berlaku $V = M \oplus M^{\perp}$.*

Bukti: Misalkan $E = \{x_1, x_2, \cdots, x_m\}$ suatu basis ortonormal dari M dan z vektor sebarang di V. Tulis $x = \sum_{i=1}^{m} \langle z, x_i\rangle x_i$ maka menurut Teorema 2.3.1 $y = z - x$ ortogonal pada semua vektor $x_1 \in E$. Ini menunjukkan $y \in E^{\perp}$. Jadi menurut Lemma 2.3.1 $E^{\perp} = M^{\perp}$. Sehingga $z = x + y$ dimana $x \in M$ dan $y \in M^{\perp}$. Selanjutnya akan dibuktikan $M \cap M^{\perp} = 0$. Ambil $v \in M \cap M^{\perp}$ maka $\langle v, v\rangle = 0$. Jadi diperoleh $v = 0$. Dengan demikian telah dibuktikan $V = M \oplus M^{\perp}$. ■

Lemma 2.3 *Misalkan M suatu ruang bagian dari V. Maka berlaku $M^{\perp\perp} = M$.*

Bukti: Misalkan $z \in M^{\perp\perp}$. Karena $V = M \oplus M^{\perp}$ maka z dapat ditulis sebagai hasil tambah, $z = x + y$ dengan $x \in M$ dan $y \in M^{\perp}$. Sehingga

$$\langle z, y \rangle = \langle x + y, y \rangle = \langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle = ||y||^2.$$

Karena $z \in M^{\perp\perp}$ maka $\langle z, y \rangle = 0$, akibatnya $||y||^2 = 0$. Jadi $z = x \in M$. Sebaliknya jika $z \in M$, maka $\langle v, z \rangle = 0$, $\forall v \in M^{\perp}$. Ini membuktikan $z \in M^{\perp\perp}$. Dengan demikian telah dibuktikan $M^{\perp\perp} = M$. ■

2.2 Transformasi Linier

Definisi 2.8 *Misalkan V dan W ruang vektor atas lapangan F, $T : V \longrightarrow W$ suatu fungsi dari V ke W, T disebut transformasi linier dari V ke W, $T \in \alpha(V, W)$ jika untuk setiap vektor u dan $v \in V$ dan setiap $c \in F$ berlaku:*

(a). $T(u + v) = T(u) + T(v)$

(b). $T(cu) = cT(u)$.

Dalam kasus dimana $V = W$, trasformasi linier $T : V \longrightarrow W$ disebut operator linier pada V.

Teorema 2.2 *Jika $T : V \longrightarrow W$ adalah suatu transformasi linier, maka:*

(a). $T(0) = 0$

(b). $T(-v) = -T(v)$

(c). $T(v - w) = T(v) - T(w)$, $\forall x \in V$.

Definisi 2.9 *Himpunan bagian* $K, K \neq 0$ *dari ruang vektor* V *adalah ruang bagian jika* $\alpha x + \beta y \in K$, $\forall \alpha, \beta \in F$ *dan* $\forall x, y \in K$.

Lemma 2.4 *Misalkan* V *dan* W *adalah ruang vektor atas* F *dan* $T : V \to W$ *adalah transformasi linear, maka* $Ker(T)$ *adalah ruang bagian dari* V.

Bukti: Misalkan x_1 dan $x_2 \in Ker(T)$ yaitu, $T(x_1) = 0$ dan $T(x_2) = 0$. Maka $T(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha T(x_1) + \beta T(x_2) = 0 \quad \forall \alpha, \beta \in$ F. Jadi $\alpha x_1 + \beta x_2 \in Ker(T)$. Ini membuktikan $Ker(T)$ adalah ruang bagian dari V. ■

2.3 Transformasi Adjoint

Definisi 2.10 *Misalkan* $T : V \to W$ *adalah transformasi linear, dimana* V *dan* W *adalah ruang hasil kali dalam dengan hasil kali dalam berturut-turut* $\langle \, , \, \rangle_v$ *dan* $\langle \, , \, \rangle_w$. *Transformasi adjoint* $T^* : W \to V$ *didefinisikan oleh*

$$\langle y, T(x) \rangle_w = \langle T^*(y), x \rangle_v$$

dimana $x \in V$ *dan* $y \in W$.

Jika $A = (a_{ij})$ adalah suatu matriks atas F, maka $A^* = (\overline{a}_{ij})^T$ adalah konjugate transpose dari A. (Jika $F = R$, maka $A^* = A^T$).

Teorema 2.3 *Misalkan* $T \in \alpha(V, W)$, *dimana* V *dan* W *adalah ruang vektor berdimensi hingga. Jika* B *suatu basis ortonormal untuk* V, C *suatu* *basis ortonormal untuk W. Maka*

$$[T^*]_{C,B} = ([T]_{B,C})^*$$

atau, matriks adjoint T^* adalah matriks conjugate transpose dari T.

Bukti : Misalkan $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ adalah suatu basis ortonormal untuk V dan $C = \{c_1, c_2, \ldots, c_m\}$suatu basis ortonormal untuk W, jika dimisalkan

$$T(b_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} c_i$$

(a_{ij}) adalah koordinat dari c_i, maka kita dapat menulis matrik

$$[T]_{B,C} = (a_{ij}).$$

Karena C suatu basis ortonormal, maka kita dapat menulis

$$(a_{ij}) = \langle T(b_j), c_i \rangle.$$

Sebaliknya, jika

$$T^*(c_j) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij}(b_i),$$

(α_{ij}) adalah koordinat dari b_i, maka kita dapat menulis matriks

$$[T^*]_{C,B} = (\alpha_{ij}).$$

Karena B suatu basis ortonormal untuk V, maka

$$\begin{aligned}(\alpha_{ij}) &= \langle T^*(c_j), b_i \rangle = \overline{\langle b_i, T^*(c_j) \rangle} \\ &= \overline{\langle T(b_i), c_j \rangle} = \overline{a}_{ij} = ([T]_{B,C})^*.\end{aligned}$$

Jadi,

$$[T^*]_{C,B} = ([T]_{B,C})^*. \qquad \blacksquare$$

2.4 Minimisasi pada Ruang Hasil Kali Dalam

Pada bagian ini akan dibahas beberapa teorema tentang minimisasi pada ruang hasil kali dalam, sebelumnya perlu terlebih dahulu dibahas suatu lemma yang akan banyak membantu dalam pembuktian teorema-teorema yang akan dibahas.

Lemma 2.5 *Misalkan V suatu ruang hasil kali dalam atas lapang- an real* $\mathbf{R}$. *Maka untuk setiap x_1 dan x_2 di V berlaku ketaksamaan*

$$(\langle x_1, x_2\rangle)^2 \leq \langle x_1, x_1\rangle\langle x_2, x_2\rangle$$

yang disebut ketaksamaan Schwartz. Persamaan dipenuhi jika dan hanya jika x_1 dan x_2 tidak bebas linier.

Bukti: Untuk setiap μ dan λ bilangan real berlaku

$$\begin{aligned} 0 &\leq \langle \mu x_1 + \lambda x_2, \mu x_1 + \lambda x_2\rangle \\ &= \mu^2\langle x_1, x_1\rangle + 2\mu\lambda\langle x_1, x_2\rangle + \lambda^2\langle x_2, x_2\rangle \\ &= \begin{bmatrix} \mu & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \langle x_1, x_1\rangle & \langle x_1, x_2\rangle \\ \langle x_1, x_2\rangle & \langle x_2, x_2\rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu \\ \lambda \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Jadi,

$$\begin{bmatrix} \langle x_1, x_1\rangle & \langle x_1, x_2\rangle \\ \langle x_1, x_2\rangle & \langle x_2, x_2\rangle \end{bmatrix}$$

adalah matriks definit nonnegatif, sehingga determinannya nonnegatif, yaitu

$$(\langle x_1, x_2\rangle)^2 \leq \langle x_1, x_1\rangle\ \langle x_2, x_2\rangle.$$

Selanjutnya akan ditunjukan, persamaan dipenuhi jika dan hanya jika x_1 dan x_2 tidak bebas linier. Misalkan persamaan dipenuhi, maka

$$\begin{aligned} 0 &= (\langle x_1, x_2\rangle)^2 - \langle x_1, x_1\rangle\langle x_2, x_2\rangle \\ &= \begin{vmatrix} \langle x_1, x_1\rangle & \langle x_1, x_2\rangle \\ \langle x_1, x_2\rangle & \langle x_2, x_2\rangle \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Jadi ada $\alpha, \beta \in \boldsymbol{R}$ yang tidak keduanya nol sehingga,

$$\begin{aligned} 0 &= \begin{bmatrix} \alpha & \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \langle x_1, x_1\rangle & \langle x_1, x_2\rangle \\ \langle x_1, x_2\rangle & \langle x_2, x_2\rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \\ &= \alpha^2\langle x_1, x_1\rangle + 2\alpha\beta\langle x_1, x_2\rangle + \beta^2\langle x_2, x_2\rangle \\ &= \langle \alpha x_1 + \beta x_2, \alpha x_1 + \beta x_2\rangle. \end{aligned}$$

Kesamaan ini hanya dipenuhi oleh $\alpha x_1 + \beta x_2 = 0$. Karena α dan β tidak keduannya nol, maka x_1 dan x_2 tidak bebas linier. Sebaliknya, Jika x_1 dan x_2 tidak bebas linier maka ada $\alpha \neq 0 \in \boldsymbol{R}$ sehingga $x_1 = \alpha x_2$, ini memberikan

$$\begin{aligned} (\langle x_1, x_2\rangle)^2 &= (\langle \alpha x_2, x_2\rangle)^2 \\ &= \alpha^2\langle x_2, x_2\rangle\langle x_2, x_2\rangle \\ &= \langle \alpha x_2, \alpha x_2\rangle\langle x_2, x_2\rangle \\ &= \langle x_1, x_1\rangle\langle x_2, x_2\rangle. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Jika x_2 diketahui, maka ketidaksamaan Schwartz dapat digunakan untuk menjawab pertanyaan bagaimana meminimumkan $\langle x_1, x_1\rangle$ terhadap batas

$$\langle x_1, x_2\rangle = a.$$

Jawabannya adalah dengan memisalkan x_1 tidak bebas linier dengan x_2 dan dengan mengambil suatu konstanta sedemikian sehingga x_1 memenuhi batas. Teorema berikut mengambarkan hal ini.

Teorema 2.4 *Misalkan $x_2 \neq 0$ suatu vektor di ruang hasil kali dalam V dan misalkan a suatu skalar. Maka nilai dari $x \in V$ yang meminimumkan $\langle x, x\rangle$ terhadap batas $\langle x, x_2\rangle = a$ adalah $x_1 = a\langle x_2, x_2\rangle^{-1}x_2$.*

Bukti: Pertama perhatikan bahwa x_1 memenuhi syarat batas. Ambil $x \in V$ sebarang vektor yang memenuhi $\langle x, x_2\rangle = a$, maka

$$\langle x, x_2\rangle = \langle x_1, x_2\rangle = a.$$

Jadi,

$$\langle x - x_1, x_2\rangle = 0. \tag{2.1}$$

Akan ditunjukan

$$\langle x_1, x_1\rangle \leq \langle x, x\rangle, \quad \forall\, x \in V.$$

Kalikan (2.1) dengan $a\langle x_2, x_2\rangle^{-1}$, sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} 0 &= a\langle x_2, x_2\rangle^{-1}\langle x - x_1, x_2\rangle \\ &= \langle x - x_1, a\langle x_2, x_2\rangle^{-1}x_2\rangle \\ &= \langle x - x_1, x_1\rangle \\ &= \langle x, x_1\rangle - \langle x_1, x_1\rangle. \end{aligned}$$

Dengan menggunakan ketaksamaan Schwartz, dihasilkan

$$\sqrt{\langle x, x\rangle\langle x_1, x_1\rangle} - \langle x_1, x_1\rangle \geq \langle x, x_1\rangle - \langle x_1, x_1\rangle = 0$$

atau dengan menggunakan definisi norm,

$$\|x\|\|x_1\| - \|x_1\|^2 \geq 0.$$

Jika $x_1 \neq 0$, maka $\|x_1\| \neq 0$, dan diperoleh

$$\|x_1\| \leq \|x\|,$$

dan jika $x_1 = 0$, jelas $\|x_1\| = 0$ dan

$$\|x_1\| \leq \|x\|, \quad \forall x \in V.$$

Jadi diperoleh

$$\langle x_1, x_1\rangle \leq \langle x, x\rangle. \quad \blacksquare$$

Jika X dan Y merupakan ruang hasil kali dalam, L suatu transformasi linier dari X ke Y dan L^* adalah adjoin dari L. Maka untuk setiap $x \in X$ dan $y \in Y$ berlaku:

$$\langle y, L(x)\rangle = \langle L^*(y), x\rangle.$$

Teorema berikut merupakan generalisasi dari teorema 3.1

Teorema 2.5 *Misalkan $L : X \rightarrow Y$ adalah suatu pemetaan linier dari suatu ruang hasil kali dalam X ke ruang hasil kali dalam Y yang berdimensi hingga. Jika pemetaan komposisi $LL^* : Y \rightarrow Y$ invertible, maka persamaan $L(x) = y_0$ mempunyai solusi*

$$x_0 = L^*(LL^*)^{-1}(y_0).$$

Selanjutnya, jika x_1 adalah sebarang solusi lain dari persamaan $L(x) = y_0$ maka

$$||x_0|| \leq ||x_1||.$$

Bukti: Misalkan $LL^*(y_1) = y_0$, y_1 ada karena LL^* invertible, sebut $L^*(y_1) = x_0$, maka

$$\begin{aligned} L(x_0) &= L(L^*(y_1)) \\ &= L[L^*(LL^*)^{-1}](y_0) \\ &= LL^*(LL^*)^{-1}(y_0) \\ &= y_0. \end{aligned}$$

Jadi x_0 merupakan solusi persamaan $L(x) = y_0$.

Misalkan x_1 solusi lain untuk $L(x) = y_0$, akan ditunjukan

$$||x_0|| \leq ||x_1||.$$

Karena x_0 dan x_1 merupakan solusi dari $L(x) = y_0$, maka

$$L(x_0) - L(x_1) = L(x_0 - x_1) = 0.$$

Ini memberikan

$$\begin{aligned} 0 &= \langle y_1, L(x_0 - x_1)\rangle \\ &= \langle L^*(y_1), x_0 - x_1\rangle \\ &= \langle x_0, x_0 - x_1\rangle \\ &= \langle x_0, x_0\rangle - \langle x_0, x_1\rangle. \end{aligned}$$

Dengan menggunakan ketaksamaan Schwartz diperoleh

$$\langle x_0, x_0\rangle - \sqrt{\langle x_0, x_0\rangle\langle x_1, x_1\rangle} \leq \langle x_0, x_0\rangle - \langle x_0, x_1\rangle = 0$$

atau,

$$||x_0||^2 - ||x_0||||x_1|| \leq 0.$$

Jika $x_0 \neq 0$, maka $||x_0|| \neq 0$, dan diperoleh

$$||x_0|| \leq ||x_1||,$$

dan jika $x_0 = 0$, jelas $||x_0|| = 0$ dan

$$||x_0|| \leq ||x_1||.$$

Jadi, untuk setiap x_1 solusi yang lain dari $L(x) = y_0$ diperoleh

$$||x_0|| \leq ||x_1||. \quad \blacksquare$$

Contoh: Misalkan z adalah suatu m-vektor dan misalkan A suatu matrik $m \times n$. Masalah kita adalah menentukan suatu n-vektor x sedemikian sehingga $Ax = z$ dan $||x||$ minimum. Karena rank A adalah m, maka AA^T invertible, maka menurut teorema 3.1.2

$$x_0 = A^T(AA^T)^{-1}z$$

adalah solusi yang diinginkan. $\blacksquare$

Contoh: Tentukan solusi dari persamaan vektor

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

yang meminimumkan $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$.

Penyelesaian: Menurut teorema 3.2 solusinya adalah

$$x_0 = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 14 & 20 \\ 20 & 30 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{20} \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 30 & -20 \\ -20 & 14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{20} \begin{bmatrix} -10 & 10 \\ 20 & -12 \\ 10 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Teorema berikut menjelaskan tentang minimisasi jumlah dari suku kuadratik dan suku linier.

Teorema 2.6 *Jika $Q = Q^T$ adalah matrik yang definit positif, maka untuk setiap $x \in \mathbf{R}^n$*

$$\eta = x^T Qx + 2r^T x + b \geq b - r^T Q^{-1} r.$$

Kesamaan dipenuhi jika dan hanya jika $x_0 = -Q^{-1}r$.

Bukti: Karena Q definit positif, maka Q^{-1} ada. Jika η ditambah dan dikurangkan dengan $r^T Q^{-1} r$ diperoleh

$$\begin{aligned}
\eta &= x^T Qx + 2r^T x + b + r^T Q^{-1} r - r^T Q^{-1} r \\
&= x^T Qx + 2r^T x + r^T Q^{-1} r + b - r^T Q^{-1} r \\
&= (x^T + r^T Q^{-1})(Qx + r) + b - r^T Q^{-1} r \\
&= (x + Q^{-1} r)^T (Qx + r) + b - r^T Q^{-1} r \\
&= (x + Q^{-1} r)^T Q (x + Q^{-1} r) + b - r^T Q^{-1} r. \qquad (2.2)
\end{aligned}$$

Karena Q definit positif, maka suku pertamanya mempunyai nilai minimum 0 sehingga

$$\eta = x^T Qx + 2r^T x + b \geq b - r^T Q^{-1} r.$$

Jadi dari (2.2) terlihat bahwa kesamaan dipenuhi jika dan hanya jika

$$x = -Q^{-1} r. \quad \blacksquare$$

Bagian 3

Kesimpulan

Dari uraian pada bagian 3, teorema-teorema yang telah dibahas tersebut merupakan kesimpulan dari makalah ini.

Teorema 3.1 *Misalkan* $x_2 \neq 0$ *suatu vektor di ruang hasil kali dalam* V *dan misalkan* a *suatu skalar. Maka nilai dari* $x \in V$ *yang meminimumkan* $\langle x, x \rangle$ *terhadap batas* $\langle x, x_2 \rangle = a$ *adalah* $x_1 = a\langle x_2, x_2 \rangle^{-1} x_2$.

Teorema 3.2 *Misalkan* $L : X \rightarrow Y$ *adalah suatu pemetaan linier dari suatu ruang hasil kali dalam* X *ke ruang hasil kali dalam* Y *yang berdimensi hingga. Jika pemetaan komposisi* $LL^* : Y \rightarrow Y$ *invertible, maka persamaan* $L(x) = y_0$ *mempunyai solusi*

$$x_0 = L^*(LL^*)^{-1}(y_0).$$

Selanjutnya, jika x_1 *adalah sebarang solusi lain dari persamaan* $L(x) = y_0$ *maka*

$$\|x_0\| \leq \|x_1\|.$$

Teorema 3.3 *Jika* $Q = Q^T$ *adalah matrik yang definit positif, maka untuk setiap* $x \in \mathrm{R}^n$

$$\eta = x^T Q x + 2r^T x + b \geq b - r^T Q^{-1} r.$$

Kesamaan dipenuhi jika dan hanya jika $x_0 = -Q^{-1} r$.