LAPORAN PENELITIAN

MINIMISASI PADA FUNGSI BERNILAI SKALAR

OLEH

Drs. Hendra Syarifuddin, M.Si
(Ketua Tim Peneliti)

Penelitian ini dibiayai oleh :
Dana Rutin Universitas Negeri Padang
Tahun Anggaran 2000/2001
Surat Perjanjian Kerja Nomor: 1102/J41/KU/Rutin/2001
Tanggal : 25 April 2001

UNIVERSITAS NEGERI PADANG
2001

LAPORAN PENELITIAN

MINIMISASI PADA FUNGSI BERNILAI SKALAR

PERSONALIA PENELITI
Ketua : Drs. Hendra Syarifuddin, M.Si
Anggota : Dra. Nonong Amalita, M.Si

ABSTRAK

Pandang ketaksamaan Cauchy-Schwartz, berikut:

$$(\langle x_1, x_2 \rangle)^2 \leq \langle x_1, x_1 \rangle \langle x_2, x_2 \rangle \qquad (1)$$

dimana untuk setiap x_1 dan x_2 di V, dan V adalah suatu ruang hasil kali dalam atas lapangan real $\mathbf{R}$.

Dari ketaksamaan Cauchy-schwartz di atas hal yang menarik untuk dilihat adalah saat ruas kiri sama dengan ruas kanan, karena saat itulah adanya titik kritis. Secara kasat mata kita dapat melihat dengan mudah bahwa ruas kiri akan sama dengan ruas kanan bila salah satu dari dua vektor di atas adalah vektor nol, untuk khasus yang tidak trivial diperlukan kajian tentang syarat cukup dan perlu agar tanda ketaksamaan pada (1) menjadi tanda persamaan. Selanjutnya juga perlu dikaji nilai x manakah yang meminimumkan $\langle x, x \rangle$ dengan syarat batas $\langle x, x_2 \rangle = a$, dimana a adalah skalar.

Jika X dan Y merupakan ruang hasil kali dalam, L suatu transformasi linier dari X ke Y dan L^* adalah adjoin dari L. Maka untuk setiap $x \in X$ dan $y \in Y$ berlaku: $\langle y, L(x) \rangle = \langle L^*(y), x \rangle$. Misalkan $L : X \rightarrow Y$ adalah suatu pemetaan linier dari suatu ruang hasil kali dalam X ke ruang hasil kali dalam Y yang berdimensi hingga. Jika pemetaan komposisi $LL^* : Y \rightarrow Y$ invertible, maka persamaan $L(x) = y_0$ mempunyai solusi $x_0 = L^*(LL^*)^{-1}(y_0)$. Selanjutnya perlu dikaji, jika x_1 adalah sebarang solusi lain dari persamaan $L(x) = y_0$ maka apakah $\|x_0\| \leq \|x_1\|$.

Dari hasil analisis dapat disimpulkan:

1. Misalkan V suatu ruang hasil kali dalam atas lapangan real $\mathbf{R}$. Maka untuk setiap x_1 dan x_2 di V berlaku ketaksamaan $(\langle x_1, x_2 \rangle)^2 \leq \langle x_1, x_1 \rangle \langle x_2, x_2 \rangle$, yang disebut ketaksamaan Schwartz. Persamaan dipenuhi jika dan hanya jika x_1 dan x_2 tidak bebas linier.

2. Misalkan $x_2 \neq 0$ suatu vektor di ruang hasil kali dalam V dan misalkan a suatu skalar. Maka nilai dari $x \in V$ yang meminimumkan $\langle x, x \rangle$ terhadap batas $\langle x, x_2 \rangle = a$ adalah $x_1 = a \langle x_2, x_2 \rangle^{-1} x_2$.

3. Misalkan $L : X \rightarrow Y$ adalah suatu pemetaan linier dari suatu ruang hasil kali dalam X ke ruang hasil kali dalam Y yang berdimensi hingga. Jika pemetaan komposisi $LL^* : Y \rightarrow Y$ invertible, maka persamaan $L(x) = y_0$ mempunyai solusi $x_0 = L^*(LL^*)^{-1}(y_0)$. Selanjutnya, jika x_1 adalah sebarang solusi lain dari persamaan $L(x) = y_0$ maka $\|x_0\| \leq \|x_1\|$.

PENGANTAR

Kegiatan penelitian mendukung pengembangan ilmu serta terapannya. Dalam hal ini, Lembaga Penelitian Universitas Negeri Padang berusaha mendorong dosen untuk melakukan penelitian sebagai bagian integral dari kegiatan mengajarnya, baik yang secara langsung dibiayai oleh dana Universitas Negeri Padang maupun dana dari sumber lain yang relevan atau bekerja sama dengan instansi terkait.

Sehubungan dengan itu, Lembaga Penelitian Universitas Negeri Padang bekerjasama dengan Pimpinan Universitas, telah memfasilitasi peneliti untuk melaksanakan penelitian tentang ***Minimisasi pada Fungsi Bernilai Skalar*** berdasarkan Surat Perjanjian Kontrak Nomor : 1102/J41/KU/Rutin/2001 Tanggal 25 April 2001

Kami menyambut gembira usaha yang dilakukan peneliti untuk menjawab berbagai permasalahan pembangunan, khususnya yang berkaitan dengan permasalahan penelitian tersebut di atas. Dengan selesainya penelitian ini, maka Lembaga Penelitian Universitas Negeri Padang akan dapat memberikan informasi yang dapat dipakai sebagai bagian upaya penting dan kompleks dalam peningkatan mutu pendidikan pada umumnya. Di samping itu, hasil penelitian ini juga diharapkan sebagai bahan masukan bagi instansi terkait dalam rangka penyusunan kebijakan pembangunan.

Hasil penelitian ini telah ditelaah oleh tim pembahas usul dan laporan penelitian Lembaga Penelitian Universitas Negeri Padang. Kemudian untuk tujuan diseminasi, hasil penelitian ini telah diseminarkan yang melibatkan dosen/tenaga peneliti Universitas Negeri Padang sesuai dengan fakultas peneliti. Mudah-mudahan penelitian ini bermanfaat bagi pengembangan ilmu pada umumnya, dan peningkatan mutu staf akademik Universitas Negeri Padang.

Pada kesempatan ini kami ingin mengucapkan terima kasih kepada berbagai pihak yang membantu terlaksananya penelitian ini, terutama kepada pimpinan lembaga terkait yang menjadi objek penelitian, responden yang menjadi sampel penelitian, tim pembahas Lembaga Penelitian dan dosen-dosen pada setiap fakultas di lingkungan Universitas Negeri Padang yang ikut membahas dalam seminar hasil penelitian. Secara khusus kami menyampaikan terima kasih kepada Rektor Universitas Negeri Padang yang telah berkenan memberi bantuan pendanaan bagi penelitian ini. Kami yakin tanpa dedikasi dan kerjasama yang terjalin selama ini, penelitian ini tidak akan dapat diselesaikan sebagaimana yang diharapkan dan semoga kerjasama yang baik ini akan menjadi lebih baik lagi di masa yang akan datang.

Terima kasih.

Padang, 30 November 2001
Ketua Lembaga Penelitian
Universitas Negeri Padang,

Prof. Dr. H. Agus Irianto
NIP. 130879791

DAFTAR ISI

BAB I

PENDAHULUAN

A Latar Belakang Masalah

Peranan matematika dalam perkembangan sains dan teknologi sangat besar dan tidak perlu diragukan lagi. misalnya dalam bidang industri, matematika digunakan untuk menjawab persoalan-persoalan yang menyangkut estimasi, kalkulasi, dan prediksi. Agar matematika dapat berperan optimal untuk mendukung perkembangan ilmu pengetahuan dan teknologi maka matematika itu sendiri juga harus dikembangkan. Salah satu cara untuk mengembangkan matematika adalah melalui penelitian.

Pencarian nilai optimum dari suatu persoalan merupakan bagian penting dari matematika terapan. Banyak metode-metode dalam matematika yang dapat digunakan untuk mendapatkan solusi optimum dari suatu persoalan. Suatu metode matematika yang digunakan untuk menyelesaikan suatu persoalan yang cukup rumit akan sulit menghindar dari adanya galat, inilah hal yang menarik dari matematika terapan, para matematikawan terus berusaha untuk mendapatkan metode yang terbaik, yang bekerja efektif, efisien, dan menghasilkan galat sekecil mungkin.

Untuk memperbaiki kinerja suatu metode perlu dilakukan analisa berulang-ulang terhadap metode tersebut. Analisa terhadap suatu metode haruslah dilakukan dari dasar motode itu dikembangkan. Banyak metode optimasi yang dikembangkan dengan dasar fungsi bernilai skalar, yaitu fungsi yang memetakan operasi unsur-unsur dalam suatu ruang vektor ke bilangan real ($\mathbf{R}$), dalam matematika ini lebih dikenal dengan ruang hasil kali dalam. Secara formal berikut adalah definisi dari ruang hasil kali dalam:

Definisi I.1. *Hasil kali dalam pada ruang vektor real V adalah pemetaan $\langle\, ,\, \rangle$: $V \times V \longrightarrow \mathbf{R}$ dengan pengaitan $(x, y) \longmapsto \langle x, y\rangle$ sehingga untuk setiap vektor x, y dan z di V, dan $\alpha \in \mathbf{R}$ berlaku :*

(a). $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$

(b). $\langle \alpha\, x, y\rangle = \alpha\, \langle x, y\rangle$

(c). $\langle x + y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$

(d). $\langle x, x\rangle \geq 0$; $\langle x, x\rangle = 0 \Longleftrightarrow x = 0$.

Dasar untuk proses minimisasi pada fungsi bernilai skalar banyak bertumpu pada ketaksamaan Cauchy-Schwartz, berikut:

$$(\langle x_1, x_2\rangle)^2 \leq \langle x_1 . x_1\rangle\langle x_2 . x_2\rangle \tag{I.1}$$

dimana untuk setiap x_1 dan x_2 di V, dan V adalah suatu ruang hasil kali dalam atas lapangan real $\mathbf{R}$.

Dari ketaksamaan Cauchy-schwartz di atas hal yang menarik untuk dilihat adalah saat ruas kiri sama dengan ruas kanan, karena saat itulah adanya titik kritis. Secara kasat mata kita dapat melihat dengan mudah bahwa ruas kiri akan sama dengan ruas kanan bila salah satu dari dua vektor di atas adalah vektor nol, untuk khasus yang tidak trivial diperlukan kajian tentang syarat cukup dan perlu agar tanda ketaksamaan pada (I.1) menjadi tanda persamaan. Selanjutnya juga perlu dikaji nilai x manakah yang meminimumkan $\langle x, x\rangle$ dengan syarat batas $\langle x, x_2\rangle = a$, dimana a adalah skalar.

Jika X dan Y merupakan ruang hasil kali dalam, L suatu transformasi linier dari X ke Y dan L^* adalah adjoin dari L. Maka untuk setiap $x \in X$ dan $y \in Y$ berlaku:

$$\langle y, L(x)\rangle = \langle L^*(y), x\rangle.$$

Teorema I.1. *Misalkan $L : X \to Y$ adalah suatu pemetaan linier dari suatu ruang hasil kali dalam X ke ruang hasil kali dalam Y yang berdimensi hingga. Jika pemetaan komposisi $LL^* : Y \to Y$ invertible, maka persamaan $L(x) = y_0$ mempunyai solusi*

$$x_0 = L^*(LL^*)^{-1}(y_0).$$

Selanjutnya perlu dikaji, jika x_1 adalah sebarang solusi lain dari persamaan $L(x) = y_0$ maka apakah

$$\|x_0\| \leq \|x_1\|.$$

B Identifikasi Masalah

Dari latar belakang di atas masalah yang teridentifikasi adalah:

1. Bagaimana syarat perlu dan cukup untuk vektor-vektor tak nol sehingga ruas kiri sama dengan ruas kanan pada ketaksamaan Cauchy-schwartz.
2. Manakah nilai x yang meminimumkan $\langle x, x \rangle$ dengan syarat batas $\langle x, x_2 \rangle = a$, dimana a adalah skalar.
3. Dari teorema 1, Apakah solusi yang dihasilkan tersebut bernilai minimum.

C Pembatasan Masalah

Untuk menghindari salah penafsiran terhadap masalah yang diteliti maka peneliti perlu memberi pembatasan sebagai berikut: Fungsi bernilai skalar pada penelitian ini dibatasi pada fungsi-fungsi pada ruang hasil kali dalam.

D Perumusan Masalah

Dari latar belakang di atas maka rumusan masalah dari penelitian ini adalah:

1. Syarat perlu dan cukup apa untuk vektor-vektor tak nol sehingga ruas kiri sama dengan ruas kanan pada ketaksamaan Cauchy-schwartz.
2. Nilai x manakah yang meminimumkan $\langle x, x \rangle$ dengan syarat batas $\langle x, x_2 \rangle = a$, dimana a adalah skalar.
3. Dari teorema 1, apakah solusi yang dihasilkan tersebut bernilai minimum.

E Tujuan Penelitian

Penelitian ini mempunyai tujuan:

1. Untuk mengetahui syarat perlu dan cukup pada vektor-vektor tak nol sehingga ruas kiri sama dengan ruas kanan pada ketaksamaan Cauchy-schwartz.

2. Untuk mengetahui nilai x manakah yang meminimumkan $\langle x, x \rangle$ dengan syarat batas
   $\langle x, x_2 \rangle = a$, dimana a adalah skalar.

3. Untuk mengetahui, apakah solusi yang dihasilkan oleh teorema 1 bernilai minimum.

F Manfaat Penelitian

Hasil dari penelitian ini akan bermanfaat:

1. Untuk meningkatkan efisiensi dan efektifitas kerja dalam menyelesaikan masalah-masalah matematika terapan, terutama untuk motode-motode dengan basis fungsi bernilai skalar.

2. Untuk memberikan masukan bagi para peneliti lain, yang meneliti tentang matematika terapan khususnya fungsi bernilai skalar.

BAB II

Tinjauan Pustaka

Pada bab ini akan diuraikan; sistem persamaan linier, ruang vektor, hasil kali dalam dan norm, transformasi linier, transformasi adjoin, dan matriks transisi.

A Sistem Persamaan Linier

Aljabar linier dimulai dengan mempelajari sistem persamaan linier. Dasar-dasar untuk mempelajari sistem ini dapat diperoleh pada aljabar sekolah menengah atas, dimana kita terbiasa mengerjakan sistem dengan dua atau tiga persamaan. Secara umum, salah satu cara yang dapat digunakan untuk mencari solusi dari suatu sistem persamaan adalah dengan eliminasi Gauss (algoritma hitung). Ide dibalik algoritma ini sangat sederhana, namun konsekuensinya sangat berarti.

Simbol R akan menotasikan bilangan real dan simbol C akan menotasikan bilangan kompleks. Dalam aljabar sekolah menengah, dan selanjutnya dalam kalkulus, persamaan linier mempunyai koefisien bilangan real. Namun dalam beberapa aplikasi penting dari aljabar linier ditemui koefisiennya berupa bilangan kompleks.

Definisi II.1. *Suatu persamaan linier dengan variabel* $X_1, X_2, ..., X_n$ *adalah suatu persamaan dalam bentuk*

$$a_1X_1 + a_2X_2 + ... + a_nX_n = b$$

dimana bilangan konstan $a_1, a_2, ..., a_n, b$ *adalah skalar-skalar.*

Suatu sistem dari m persamaan linier dengan variabel $X_1, X_2, ..., X_n$ digambarkan sebagai berikut :

$$\begin{array}{l} a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + ... + a_{1n}X_n = b_1 \\ a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + ... + a_{2n}X_n = b_2 \\ \quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \quad\; \vdots \\ a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + ... + a_{mn}X_n = b_m \end{array}$$

Disini $a_{ij}, b_j \in F$ adalah skalar-skalar.

B Ruang Vektor

Definisi II.2. *Misalkan V adalah suatu himpunan yang tak kosong dimana dua operasi didefinisikan, penjumlahan dan perkalian dengan skalar. Penjumlahan $u, v \in V$ yang ditulis dengan $u + v$. misalkan k adalah suatu skalar dan $u \in V$, maka perkalian dengan skalar ditulis ku. Jika aksioma-aksioma berikut dipenuhi untuk semua $u, v, w \in V$ dan semua skalar k dan l, maka V disebut ruang vektor.*

1. *Jika $u, v \in V$ maka $u + v \in V$.*

2. $u + v = v + u$.

3. $u + (v + w) = (u + v) + w$.

4. *Ada $0 \in V$ sehingga $0 + u = u + 0, \forall u \in V$.*

5. *Untuk setiap* $u \in V$*, terdapat* $-u \in V$ *sedemikian sehingga* $u + (-u) = (-u) + u = 0$.

6. *Jika* k *adalah sebarang skalar dan* $u \in V$ *sebarang, maka* $ku \in V$.

7. $k(u + v) = ku + kv$.

8. $(k + l)u = ku + lu$.

9. $k(lu) = (kl)(u)$.

10. $1u = u$.

Definisi II.3. *Jika* $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_r\}$ *adalah himpunan yang tak kosong dari vektor-vektor, maka persamaan vektor*

$$k_1v_1 + k_2v_2 + \cdots + k_rv_r = 0$$

mempunyai paling sedikit satu solusi, yaitu

$$k_1 = 0, \quad k_2 = 0, \quad \ldots, \quad k_r = 0.$$

Jika tidak ada solusi yang lain, maka S *disebut himpunan yang bebas linier. Jika terdapat solusi yang lain, maka* S *disebut himpunan yang tidak bebas linier (bergantung linier).*

C Hasil Kali Dalam dan Norm

Definisi II.4. *Hasil kali dalam pada ruang vektor real* V *adalah pemetaan* $\langle\, , \rangle : V \times V \longrightarrow \mathbf{R}$ *dengan pengaitan* $(x, y) \longmapsto \langle x, y\rangle$ *sehingga untuk setiap* *vektor x, y dan z di V, dan $\alpha \in \mathbf{R}$ berlaku :*

(a). $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$

(b). $\langle \alpha x, y\rangle = \alpha \langle x, y\rangle$

(c). $\langle x + y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$

(d). $\langle x, x\rangle \geq 0;\quad \langle x, x\rangle = 0 \Longleftrightarrow x = 0.$

Definisi II.5. *Hasil kali dalam dua vektor $x(t)$ dan $y(t) \in \mathbf{R}^n$ yang merupakan fungsi-fungsi kontinu pada interval $t \in [t_1, t_2]$, didefinisikan oleh*

$$\begin{aligned}\langle x(t), y(t)\rangle &= \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} x^T(t)y(t)\ dt \\ &= \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{n} x_i(t)y_i(t).\end{aligned}$$

Misalkan $x \in \mathbf{R}^n$ dengan komponen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ dan A adalah matriks $n \times n$ dengan elemen $a_{ij} \in \mathbf{R}$. Maka

$$\langle x, Ax\rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j = x^T Ax.$$

Fungsi bernilai skalar $f(x) = \langle x, Ax\rangle$ disebut *fungsi kuadratik*.

Definisi II.6. *Untuk setiap $x \neq 0$, suatu bentuk kuadratik $x^T Ax$ disebut definit positif jika $x^T Ax > 0$, dan matriks simetri A disebut matriks definit positif jika bentuk kuadratik $x^T Ax$ adalah definit positif.*

Definisi II.7. *Misalkan V ruang vektor atas lapangan F. Suatu pemetaan $\|\,\| : V \longrightarrow \mathbf{R}$ dengan pengaitan $x \longmapsto \|x\|$ dinamakan norm pada V jika memenuhi :*

a. $\|x\| \geq 0, \quad \forall x \in V.$

b. *Untuk semua* $x \in V$ *berlaku* $\|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0.$

c. $\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\|, \quad \forall x \in V$ *dan* $\alpha \in K$ *(skalar).*

d. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \quad \forall x, y \in V.$

Definisi II.8. *Misalkan* V *suatu ruang hasil kali dalam, maka norm dari setiap* $v(t) \in V$ *yang merupakan fungsi kontinu pada interval* $t \in [t_1, t_2]$ *didefinisikan oleh*

$$\|v(t)\| = \sqrt{\langle v(t), v(t) \rangle}.$$

D Transformasi Linier

Definisi II.9. *Misalkan* V *dan* W *ruang vektor atas lapangan* F*,* $T : V \longrightarrow W$ *suatu fungsi dari* V *ke* W*,* T *disebut transformasi linier dari* V *ke* W*,* $T \in \alpha(V, W)$ *jika untuk setiap vektor* u *dan* $v \in V$ *dan setiap* $c \in F$ *berlaku:*

(a). $T(u + v) = T(u) + T(v)$

(b). $T(cu) = cT(u).$

Dalam kasus dimana $V = W$*, trasformasi linier* $T : V \longrightarrow W$ *disebut operator linier pada* V*.*

Teorema II.1. *Jika* $T : V \longrightarrow W$ *adalah suatu transformasi linier, maka:*

(a). $T(0) = 0$

(b). $T(-v) = -T(v), \forall v \in V$

(c). $T(v-w) = T(v) - T(w)$, $\forall v, w \in V$.

E Transformasi Adjoint

Definisi II.10. *Misalkan $T : V \to W$ adalah transformasi linear, dimana V dan W adalah ruang hasil kali dalam dengan hasil kali dalam berturut-turut $\langle\, , \rangle_v$ dan $\langle\, , \rangle_w$. Transformasi adjoint $T^* : W \to V$ didefinisikan oleh*

$$\langle y, T(x)\rangle_w = \langle T^*(y), x\rangle_v$$

dimana $x \in V$ dan $y \in W$.

Jika $A = (a_{ij})$ adalah suatu matriks atas F, maka $A^* = (\overline{a}_{ij})^T$ adalah konjugate transpose dari A. (Jika $F = R$, maka $A^* = A^T$).

Teorema II.2. *Misalkan $T \in \alpha(V, W)$, dimana V dan W adalah ruang vektor berdimensi hingga. Jika B suatu basis ortonormal untuk V, C suatu basis ortonormal untuk W. Maka*

$$[T^*]_{C,B} = ([T]_{B,C})^*$$

atau, matriks adjoint T^* adalah matriks conjugate transpose dari T.

Bukti : Misalkan $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ adalah suatu basis ortonormal untuk V dan $C = \{c_1, c_2, \ldots, c_m\}$suatu basis ortonormal untuk W, jika dimisalkan

$$T(b_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} c_i$$

(a_{ij}) adalah koordinat dari c_i, maka kita dapat menulis matrik

$$[T]_{B,C} = (a_{ij}).$$

Karena C suatu basis ortonormal, maka kita dapat menulis

$$(a_{ij}) = \langle T(b_j), c_i \rangle.$$

Sebaliknya, jika

$$T^*(c_j) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij}(b_i),$$

(α_{ij}) adalah koordinat dari b_i, maka kita dapat menulis matriks

$$[T^*]_{C,B} = (\alpha_{ij}).$$

Karena B suatu basis ortonormal untuk V, maka

$$\begin{aligned}(\alpha_{ij}) = \langle T^*(c_j), b_i \rangle &= \overline{\langle b_i, T^*(c_j) \rangle} \\ &= \overline{\langle T(b_i), c_j \rangle} = \overline{a}_{ij} = ([T]_{B,C})^*.\end{aligned}$$

Jadi,

$$[T^*]_{C,B} = ([T]_{B,C})^*. \qquad \blacksquare$$

BAB III

Metodologi Penelitian

A Metode/Teknik Pengumpulan Data

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah metode studi kepustakaan untuk mengumpulkan bahan-bahan atau data-data yang berkaitan dengan penentuan fungsi kontrol untuk meminimumkan suatu fungsi objektif.

B Teknik Analisis Data

Untuk menentukan minimisasi fungsi bernilai skalar. Peneliti akan menggunakan metode pendekatan kalkulus dasar, aljabar linier, dan sifat-sifat dari ruang hasil kali dalam. Selanjutnya, temuan dikemukan dalam bentuk teorema, kemudian dilakukan analisis untuk pembuktiannya.

BAB IV

HASIL PENELITIAN

Jawaban dari tiga masalah penelitian yang dikemukakan pada bab pertama akan diberikan dalam tiga teorema. Pembahasan masing-masing teorema diberikan dalam bentuk bukti formal.

Teorema IV.1. *Misalkan V suatu ruang hasil kali dalam atas lapangan real* $\mathbf{R}$. *Maka untuk setiap x_1 dan x_2 di V berlaku ketaksamaan*

$$(\langle x_1, x_2\rangle)^2 \leq \langle x_1, x_1\rangle\langle x_2, x_2\rangle$$

yang disebut ketaksamaan Schwartz. Persamaan dipenuhi jika dan hanya jika x_1 dan x_2 tidak bebas linier.

Bukti: Untuk setiap μ dan λ bilangan real berlaku

$$\begin{aligned} 0 &\leq \langle \mu x_1 + \lambda x_2, \mu x_1 + \lambda x_2\rangle \\ &= \mu^2\langle x_1, x_1\rangle + 2\mu\lambda\langle x_1, x_2\rangle + \lambda^2\langle x_2, x_2\rangle \\ &= \begin{bmatrix} \mu & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \langle x_1, x_1\rangle & \langle x_1, x_2\rangle \\ \langle x_1, x_2\rangle & \langle x_2, x_2\rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu \\ \lambda \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Jadi,

$$\begin{bmatrix} \langle x_1, x_1\rangle & \langle x_1, x_2\rangle \\ \langle x_1, x_2\rangle & \langle x_2, x_2\rangle \end{bmatrix}$$

adalah matriks definit nonnegatif, sehingga determinannya nonnegatif, yaitu

$$(\langle x_1, x_2\rangle)^2 \leq \langle x_1, x_1\rangle \; \langle x_2, x_2\rangle.$$

Selanjutnya akan ditunjukan, persamaan dipenuhi jika dan hanya jika x_1 dan x_2 tidak bebas linier. Misalkan persamaan dipenuhi, maka

$$\begin{aligned} 0 &= (\langle x_1, x_2\rangle)^2 - \langle x_1, x_1\rangle\langle x_2, x_2\rangle \\ &= \begin{vmatrix} \langle x_1, x_1\rangle & \langle x_1, x_2\rangle \\ \langle x_1, x_2\rangle & \langle x_2, x_2\rangle \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Jadi ada $\alpha, \beta \in R$ yang tidak keduanya nol sehingga,

$$\begin{aligned} 0 &= \begin{bmatrix} \alpha & \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \langle x_1, x_1\rangle & \langle x_1, x_2\rangle \\ \langle x_1, x_2\rangle & \langle x_2, x_2\rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \\ &= \alpha^2\langle x_1, x_1\rangle + 2\alpha\beta\langle x_1, x_2\rangle + \beta^2\langle x_2, x_2\rangle \\ &= \langle \alpha x_1 + \beta x_2, \alpha x_1 + \beta x_2\rangle. \end{aligned}$$

Kesamaan ini hanya dipenuhi oleh $\alpha x_1 + \beta x_2 = 0$. Karena α dan β tidak keduannya nol, maka x_1 dan x_2 tidak bebas linier. Sebaliknya, Jika x_1 dan x_2 tidak bebas linier maka ada $\alpha \neq 0 \in R$ sehingga $x_1 = \alpha x_2$, ini memberikan

$$\begin{aligned} (\langle x_1, x_2\rangle)^2 &= (\langle \alpha x_2, x_2\rangle)^2 = \alpha^2\langle x_2, x_2\rangle\langle x_2, x_2\rangle \\ &= \langle \alpha x_2, \alpha x_2\rangle\langle x_2, x_2\rangle = \langle x_1, x_1\rangle\langle x_2, x_2\rangle. \qquad \blacksquare \end{aligned}$$

Jika x_2 diketahui, maka ketidaksamaan Schwartz dapat digunakan untuk menjawab pertanyaan bagaimana meminimumkan $\langle x_1, x_1\rangle$ terhadap batas $\langle x_1, x_2\rangle = a$.

Jawabannya adalah dengan memisalkan x_1 tidak bebas linier dengan x_2 dan dengan mengambil suatu konstanta sedemikian sehingga x_1 memenuhi batas. Teorema berikut mengambarkan hal ini.

Teorema IV.2. *Misalkan $x_2 \neq 0$ suatu vektor di ruang hasil kali dalam V dan misalkan a suatu skalar. Maka nilai dari $x \in V$ yang meminimumkan $\langle x, x\rangle$ terhadap batas $\langle x, x_2\rangle = a$ adalah $x_1 = a\langle x_2, x_2\rangle^{-1}x_2$.*

Bukti: Pertama perhatikan bahwa x_1 memenuhi syarat batas. Ambil $x \in V$ sebarang vektor yang memenuhi $\langle x, x_2\rangle = a$, maka

$$\langle x, x_2\rangle = \langle x_1, x_2\rangle = a.$$

Jadi,

$$\langle x - x_1, x_2\rangle = 0. \tag{IV.1}$$

Akan ditunjukan

$$\langle x_1, x_1\rangle \leq \langle x, x\rangle, \quad \forall\, x \in V.$$

Kalikan (IV.1) dengan $a\langle x_2, x_2\rangle^{-1}$, sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} 0 &= a\langle x_2, x_2\rangle^{-1}\langle x - x_1, x_2\rangle = \langle x - x_1, a\langle x_2, x_2\rangle^{-1}x_2\rangle \\ &= \langle x - x_1, x_1\rangle = \langle x, x_1\rangle - \langle x_1, x_1\rangle. \end{aligned}$$

Dengan menggunakan ketaksamaan Schwartz, dihasilkan

$$\sqrt{\langle x, x\rangle\langle x_1, x_1\rangle} - \langle x_1, x_1\rangle \geq \langle x, x_1\rangle - \langle x_1, x_1\rangle = 0$$

atau dengan menggunakan definisi norm,

$$\|x\|\|x_1\| - \|x_1\|^2 \geq 0.$$

Jika $x_1 \neq 0$, maka $\|x_1\| \neq 0$, dan diperoleh

$$\|x_1\| \leq \|x\|,$$

dan jika $x_1 = 0$, jelas $\|x_1\| = 0$ dan

$$\|x_1\| \leq \|x\|, \quad \forall x \in V.$$

Jadi diperoleh

$$\langle x_1, x_1 \rangle \leq \langle x, x \rangle. \quad \blacksquare$$

Jika X dan Y merupakan ruang hasil kali dalam, L suatu transformasi linier dari X ke Y dan L^* adalah adjoin dari L. Maka untuk setiap $x \in X$ dan $y \in Y$ berlaku:

$$\langle y, L(x) \rangle = \langle L^*(y), x \rangle.$$

Teorema IV.3. *Misalkan $L : X \to Y$ adalah suatu pemetaan linier dari suatu ruang hasil kali dalam X ke ruang hasil kali dalam Y yang berdimensi hingga. Jika pemetaan komposisi $LL^* : Y \to Y$ invertible, maka persamaan $L(x) = y_0$ mempunyai solusi*

$$x_0 = L^*(LL^*)^{-1}(y_0).$$

Selanjutnya, jika x_1 adalah sebarang solusi lain dari persamaan $L(x) = y_0$ maka

$$\|x_0\| \leq \|x_1\|.$$

Bukti: Misalkan $LL^*(y_1) = y_0$, y_1 ada karena LL^* invertible, sebut $L^*(y_1) = x_0$, maka

$$L(x_0) = L(L^*(y_1)) = L[L^*(LL^*)^{-1}](y_0) = LL^*(LL^*)^{-1}(y_0)$$

$$= y_0.$$

Jadi x_0 merupakan solusi persamaan $L(x) = y_0$.

Misalkan x_1 solusi lain untuk $L(x) = y_0$, akan ditunjukan

$$\|x_0\| \leq \|x_1\|.$$

Karena x_0 dan x_1 merupakan solusi dari $L(x) = y_0$, maka

$$L(x_0) - L(x_1) = L(x_0 - x_1) = 0.$$

Ini memberikan

$$0 = \langle y_1, L(x_0 - x_1)\rangle = \langle L^*(y_1), x_0 - x_1\rangle = \langle x_0, x_0 - x_1\rangle$$

$$= \langle x_0, x_0\rangle - \langle x_0, x_1\rangle.$$

Dengan menggunakan ketaksamaan Schwartz diperoleh

$$\langle x_0, x_0\rangle - \sqrt{\langle x_0, x_0\rangle\langle x_1, x_1\rangle} \leq \langle x_0, x_0\rangle - \langle x_0, x_1\rangle = 0$$

atau,

$$\|x_0\|^2 - \|x_0\|\|x_1\| \leq 0.$$

Jika $x_0 \neq 0$, maka $\|x_0\| \neq 0$, dan diperoleh

$$\|x_0\| \leq \|x_1\|,$$

dan jika $x_0 = 0$, jelas $\|x_0\| = 0$ dan

$$\|x_0\| \leq \|x_1\|.$$

Jadi, untuk setiap x_1 solusi yang lain dari $L(x) = y_0$ diperoleh

$$\|x_0\| \leq \|x_1\|. \quad \blacksquare$$

Contoh: Tentukan solusi dari persamaan vektor

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

yang meminimumkan $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$.

Penyelesaian: Menurut teorema 3 solusinya adalah

$$x_0 = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 14 & 20 \\ 20 & 30 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{20} \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 30 & -20 \\ -20 & 14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{20} \begin{bmatrix} -10 & 10 \\ 20 & -12 \\ 10 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

BAB V

PENUTUP

A Kesimpulan

Kesimpulan dari penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Misalkan V suatu ruang hasil kali dalam atas lapangan real $\mathbf{R}$. Maka untuk setiap x_1 dan x_2 di V berlaku ketaksamaan

$$(\langle x_1, x_2\rangle)^2 \leq \langle x_1, x_1\rangle\langle x_2, x_2\rangle$$

   yang disebut ketaksamaan Schwartz. Persamaan dipenuhi jika dan hanya jika x_1 dan x_2 tidak bebas linier.

2. Misalkan $x_2 \neq 0$ suatu vektor di ruang hasil kali dalam V dan misalkan a suatu skalar. Maka nilai dari $x \in V$ yang meminimumkan $\langle x, x\rangle$ terhadap batas $\langle x, x_2\rangle = a$ adalah $x_1 = a\langle x_2, x_2\rangle^{-1}x_2$.

3. Misalkan $L : X \to Y$ adalah suatu pemetaan linier dari suatu ruang hasil kali dalam X ke ruang hasil kali dalam Y yang berdimensi hingga. Jika pemetaan komposisi $LL^* : Y \to Y$ invertible, maka persamaan $L(x) = y_0$ mempunyai solusi $x_0 = L^*(LL^*)^{-1}(y_0)$. Selanjutnya, jika x_1 adalah sebarang solusi lain dari persamaan $L(x) = y_0$ maka

$$||x_0|| \leq ||x_1||.$$

B Saran-saran

Untuk kelanjutan penelaahan dari penelitian ini, maka Peneliti perlu memberikan saran-saran sebagai berikut:

1. Penelitian ini belum sampai pada pengkajian aplikasi dari minimisasi fungsi bernilai skalar, oleh sebab pengkajian tersebut sangat menarik untuk dilakukan.

2. Pembaca disarankan untuk melakukan analisis yang berbeda dari analisis yang ada pada pembuktian setiap teorema dalam penelitian ini, ini penting untuk memperkaya penelaahan teorema yang ada