MILIK PERPUSTAKAAN
UNIV. NEGERI PADANG

Laporan Penelitian

PENGHITUNGAN KOEFISIEN TRINOMIAL (SUATU BENTUK UMUM SEGITIGA PASCAL DAN SUATU ITERASI DENGAN MENGGUNAKAN BAHASA PEMROGRAMAN PASCAL)

Oleh :

Dodi Vionanda, S.Si.

Helma, M.Si.

MILIK PERPUSTAKAAN UNIV. NEGERI PADANG
DITERIMA TGL. : 7 Agustus 2008
Hd
K.I.
171/Ha/08-P1 (1)
516.15 Vio P.1
Geometry

Penelitian ini dibiayai oleh :

Dana DIPA Universitas Negeri Padang

Surat Perjanjian Kontrak Nomor :802/H35/KU/DIPA/2007

Tanggal : 26 Maret 2007

JURUSAN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS NEGERI PADANG

OKTOBER 2007

HALAMAN PENGESAHAN
LAPORAN PENELITIAN DANA DIK/DIKS UNP

1. a. Judul Penelitian	:	Penghitungan Koefisien Trinomial (Suatu Bentuk Umum Segitiga Pascal dan Suatu Iterasi dengan Menggunakan Bahasa Pemrograman Pascal)
b. Bidang Ilmu	:	Matematika
c. Kategori Penelitian	:	Penelitian Dasar
2. a. Ketua Peneliti		
• Nama Lengkap dan Gelar	:	Dodi Vionanda, S.si
• Jenis Kelamin	:	Laki-laki
• Golongan Pangkat dan NIP	:	III/a/132 308 792
• Jabatan Fungsional	:	-
• Jabatan Struktural	:	-
• Jurusan/Fakultas	:	Matematika/FMIPA
• Pusat Penelitian	:	UNP Padang
b. Alamat Ketua Peneliti		
• Kantor/telepon/fax	:	Jurusan Matematika FMIPA UNP
Rumah/telepon	:	Jl. Patenggangan No. 4E Air Tawar Padang /081315538002
• E-mail	:	dodi_matunp@yahoo.co.id
3. Jumlah Anggota Peneliti	:	1 (satu) orang
Nama Anggota Peneliti	:	Dra. Helma, M.Si.
4. Lokasi Penelitian	:	Jurusan Matematika FMIPA UNP
5. Lama Penelitian	:	8 (delapan) bulan
6. Biaya yang Diperlukan	:	Rp.5,494,000,00 (Lima Juta Empat Ratus Sembilan Puluh Empat Ribu Rupiah)

Padang, 24 Oktober 2007

Mengetahui:
Dekan FMIPA UNP Padang

Drs. H. Asrul, M.A.
NIP. 130 526 481

Ketua Peneliti,

Dodi Vionanda, S.Si
NIP. 132 308 792

Menyetujui,
Ketua Lembaga Penelitian
Universitas Negeri Padang,

Prof. Dr. H. Anas Yasin, MA.
NIP. 130 635 634

ABSTRAK

PENGHITUNGAN KOEFISIEN TRINOMIAL (SUATU BENTUK UMUM SEGITIGA PASCAL DAN SUATU ITERASI DENGAN MENGGUNAKAN BAHASA PEMROGRAMAN PASCAL)

Segitiga Pascal merupakan salah satu penemuan besar dalam matematika. Ditemukan beberapa abad sebelumnya, segitiga Pascal lebih dikenal sebagai karya Blaise Pascal. Segitiga Pascal dikonstruksi dengan mengunakan formula rekursi dalam bentuk kombinasi dengan basis $\binom{n}{k}=1$ untuk $(n,k) \in \{(0,0),(n.0),(n,n)\}$, relasi rekursif $\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1}$ untuk $n,k \in Z^+$ di mana $k<n$, dan $\binom{n}{k}=0$ untuk $(n,k)=0$. Entri segitiga Pascal dikenal juga sebagai koefisien binomial karena entri tersebut merupakan koefisien dalam ekspansi bentuk binomial $(a+b)^n$.

Dalam perspektif ini, bagaimana cara menghitung koefisien penjabaran bentuk trinomial $(a+b+c)^p$ dengan menggunakan segitiga Pascal? Apa formula rekursif yang digunakan dalam mengkonstruksi perluasan segitiga Pascal untuk ekspansi trinomial?

Untuk memecahkan masalah di atas, menurut Chappel (2000) trinom $(a+b+c)^p$ dipandang sebagai $(a+(b+c))^p$ dan dengan menggunakan teorema Binomial, diperoleh $(a+b+c)^p=\sum_{n=0}^{p}\sum_{m=0}^{n}\binom{p}{n}\binom{n}{m}a^{p-n}b^{n-m}c^m$. Berdasarkan formula ini, dikonstruksi perluasan segitiga Pascal yang pada gilirannya membentuk suatu bangun berupa piramida. Dengan demikian, untuk menghitung koefisien trinomial dipakai piramida Pascal.

Secara rekursif, entri Piramida Pascal, yang dilambangkan dengan $T_{(p,n,m)}$, dikonstruksi dengan menggunakan formula rekursif dengan basis $T_{(p,n,m)}=1$ untuk tripel (p,n,m) di mana $p \in \{0\} \cup Z^+$, $n \in \{0,p\}$, dan $m \in \{0,n,p\}$, relasi rekursif $T_{(p,n,m)}= T_{(p-1,n-1,m-1)} + T_{(p-1,n-1,m)} + T_{(p-1,n,m)}$, untuk (p,n,m) di mana $p, n, m \in Z^+$, $n<p$, dan $m<n$, dan $T_{(p,n,m)}=0$ untuk (p,n,m) lainnya.

PENGANTAR

Kegiatan penelitian mendukung pengembangan ilmu serta terapannya. Dalam hal ini, Lembaga Penelitian Universitas Negeri Padang berusaha mendorong dosen untuk melakukan penelitian sebagai bagian integral dari kegiatan mengajarnya, baik yang secara langsung dibiayai oleh dana Universitas Negeri Padang maupun dana dari sumber lain yang relevan atau bekerja sama dengan instansi terkait.

Sehubungan dengan itu, Lembaga Penelitian Universitas Negeri Padang bekerjasama dengan Pimpinan Universitas, telah memfasilitasi peneliti untuk melaksanakan penelitian tentang ***Penghitungan Koefisien Trinomial (Suatu Bentuk Umum Segitiga Pascal dan Suatu Iterasi dengan Menggunakan Bahasa Pemrograman Pascal)***, berdasarkan Surat Perjanjian Kontrak Nomor : 802/H35/KU/DIPA/2007 Tanggal 26 Maret 2007.

Kami menyambut gembira usaha yang dilakukan peneliti untuk menjawab berbagai permasalahan pembangunan, khususnya yang berkaitan dengan permasalahan penelitian tersebut di atas. Dengan selesainya penelitian ini, Lembaga Penelitian Universitas Negeri Padang akan dapat memberikan informasi yang dapat dipakai sebagai bagian upaya penting dalam peningkatan mutu pendidikan pada umumnya. Di samping itu, hasil penelitian ini juga diharapkan memberikan masukan bagi instansi terkait dalam rangka penyusunan kebijakan pembangunan.

Hasil penelitian ini telah ditelaah oleh tim pembahas usul dan laporan penelitian, kemudian untuk tujuan diseminasi, hasil penelitian ini telah diseminarkan ditingkat Universitas. Mudah-mudahan penelitian ini bermanfaat bagi pengembangan ilmu pada umumnya dan khususnya peningkatan mutu staf akademik Universitas Negeri Padang.

Pada kesempatan ini, kami ingin mengucapkan terima kasih kepada berbagai pihak yang membantu terlaksananya penelitian ini, terutama kepada pimpinan lembaga terkait yang menjadi objek penelitian, responden yang menjadi sampel penelitian, dan tim pereviu Lembaga Penelitian Universitas Negeri Padang. Secara khusus, kami menyampaikan terima kasih kepada Rektor Universitas Negeri Padang yang telah berkenan memberi bantuan pendanaan bagi penelitian ini. Kami yakin tanpa dedikasi dan kerjasama yang terjalin selama ini, penelitian ini tidak akan dapat diselesaikan sebagaimana yang diharapkan dan semoga kerjasama yang baik ini akan menjadi lebih baik lagi di masa yang akan datang.

Terima kasih.

Padang, November 2007
Ketua Lembaga Penelitian
Universitas Negeri Padang,

Prof. Dr.H. Anas Yasin, M.A.
NIP. 130365634

DAFTAR ISI

halaman

LEMBAR IDENTITAS DAN PENGESAHAN i

ABSTRAK ii

KATA PENGANTAR iii

DAFTAR ISI iv

DAFTAR GAMBAR vi

BAB I. PENDAHULUAN 1

A. Latar Belakang 1

B. Perumusan Masalah 2

C. Tujuan Penelitian 2

BAB II. TEORI PENDUKUNG 4

A. Kombinasi, Koefisien Binomial, dan Segitiga Pascal 4

1. Kombinasi 4

2. Koefisien Binomial 6

3. Segitiga Pascal 7

B. Ekspansi Trinomial 10

1. Ekspansi Trinomial dalam Perspektif Aljabar 10

2. Ekspansi Trinomial dalam Perspektif Binomial 11

BAB III. PEMBAHASAN 14

A. Perluasan Segitiga Pascal dalam Bentuk Piramida 14

1. Konstruksi Piramida Pascal 14

2. Representasi Geometris Piramida Pascal 15

B. Formula Rekursif Piramida Pascal 19

BAB IV. KESIMPULAN DAN SARAN 22

A. Kesimpulan..... 22

B. Saran 22

DAFTAR KEPUSTAKAAN

LAMPIRAN

DAFTAR GAMBAR

Gambar **Halaman**

1. Segitiga Pascal 1
2. Segitiga Pascal dalam notasi $B_{(n,k)}$ 8
3. Diagram Alir $B_{(n,k)}$ 9
4. Koefisien trinomial sebagai perkalian entri segitiga Pascal dengan entri baris terakhirnya yang berpadanan 14
5. Ekspansi trinom $(a+b+c)^3$ dalam format segitiga Pascal yang diperluas ... 15
6. Piramida Pascal 17
7. Piramida Pascal dengan entri dalam format $T_{(p,n,m)}$ 18
8. Diagram Alir $T_{(p,n,m)}$ 21

BAB I

PENDAHULUAN

A. Latar Belakang

Segitiga Pascal merupakan pola bilangan dalam bentuk segitiga yang tersusun atas baris dan kolom.

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1
\end{array}
$$

Gambar 1. Segitiga Pascal.

Entri suatu baris segitiga Pascal diperoleh dengan menggunakan rumus rekursif dengan basis $\binom{n}{r} = 1$ untuk $n = r = 0$ dan relasi rekurens $\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r} + \binom{n-1}{r-1}$ untuk $n \geq r$ dan n dan r bilangan asli. Notasi n dan r, secara berturut-turut, melambangkan nomor baris dan nomor kolom segitiga Pascal.

Pola bilangan di atas disebut dengan segitiga Pascal karena Blaise Pascal, seorang matematikawan Prancis abad ke–17 yang mengulas secara bersamaan konsep segitiga Pascal, kombinasi, dan koefisien binomial dalam karyanya *Traite du Triangle Arithmetique*. (Pengeley, 2005).

Entri segitiga Pascal dikenal juga dengan koefisien binomial karena entri tersebut merupakan koefisien dalam ekspansi bentuk binomial $(a+b)^n$. Masing-

masing baris segitiga Pascal tersusun atas bilangan yang merupakan koefisien penjabaran binom $(a+b)^n$ untuk $n = 0, 1, 2, ...$

Dalam perspektif ini, muncul permasalahan tentang cara menghitung koefisien penjabaran bentuk trinomial $(a+b+c)^n$ dengan menggunakan segitiga Pascal, formula rekursif perluasan segitiga Pascal yang dipakai untuk ekspansi trinomial, dan program komputer untuk menghasilkan perluasan segitiga Pascal tersebut.

Untuk itu penulis ingin melakukan suatu penelitian dengan judul "Penghitungan Koefisien Trinomial (Suatu Bentuk Umum Segitiga Pascal dan Suatu Iterasi dengan Menggunakan Bahasa Pemrograman Pascal)"

B. Perumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, maka penulis merumuskan permasalahan yang akan dikaji sebagai berikut.

1. Apa bentuk perluasan segitiga Pascal untuk menghitung koefisien trinomial?
2. Apa formula rekursif yang digunakan untuk mengkonstruksi perluasan segitiga Pascal?
3. Bagaimana menghitung koefisien trinomial dengan menggunakan Bahasa Pemrograman Pascal?

C. Tujuan Penelitian

Tujuan umum penelitian ini adalah untuk menghitung koefisien trinomial. Secara khusus, penelitian ini bertujuan untuk :

1. Menemukan bentuk perluasan segitiga Pascal yang digunakan untuk menghitung koefisien trinomial.

2. Mendapatkan formula rekursif untuk mengkonstruksi perluasan segitiga Pascal.
3. Mendapatkan program komputer untuk penghitungan koefisien trinomial dalam Bahasa Pemrograman Pascal.

BAB II

TEORI PENDUKUNG

A. Kombinasi, Koefisien Binomial, dan Segitiga Pascal

Sifat-sifat yang berlaku pada segitiga Pascal dikonstruksi dengan mengaplikasikan sifat-sifat kombinasi. Pada bagian ini akan ditinjau beberapa konsep dasar kombinasi.

1. Kombinasi

Beberapa definisi, teorema, dan identitas berikut ini berkaitan dengan faktorial dan kombinasi.

Definisi 1 : $n! = n(n-1)(n-2)...2.1$, untuk n = 1, 2, 3, ...

dan $0! = 1$.

(Tucker, 1995)

Definisi 2 : Kombinasi r objek yang pilih dari n objek berbeda adalah susunan subhimpunan r objek dari n objek tanpa memperhatikan urutan.

(Freund, 1987)

Jumlah kombinasi r objek dari n objek dilambangkan dengan $\binom{n}{r}$ dan dirumuskan dengan teorema berikut.

Teorema 1 : Jumlah kombinasi r objek dari n objek berbeda adalah

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}, \text{ untuk } r = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

(Freund, 1987)

Definisi 3 : Misalkan $n, r \in Z^+$, untuk $r > n$ berlaku $\binom{n}{r} = 0$.

(Grinstead, 2005)

Dalam operasi bilangan $\binom{n}{r}$ berlaku banyak sifat dan identitas. Identitas yang paling penting adalah Identitas Simetri seperti di bawah ini.

Identitas 1 : $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$ (Helbig, 2007)

Identitas Simetri memperlihatkan bahwa jumlah cara pemilihan suatu sub himpunan yang terdiri atas r objek dari himpunan yang memiliki n anggota sama dengan jumlah cara pemilihan sub himpunan dengan $n-r$ objek yang akan dikeluarkan dari himpunan tersebut.

Identitas lainnya adalah Identitas Pejumlahan. Identitas ini merupakan formula rekursif untuk memperoleh segitiga Pascal.

Identitas 2 : $\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r} + \binom{n-1}{r-1}$

(Johnsonbaugh, 1998)

Identitas 2 bisa diilustrasikan sebagai penghitungan cara pemilihan r orang anggota perwakilan dari suatu komite yang mempunyai n anggota. Misalkan p salah seorang anggota suatu komite. Jika p termasuk dalam perwakilan, maka pemilihan anggota perwakilan yang lainnya bisa dilakukan dalam $\binom{n-1}{r-1}$ cara.

Sebaliknya, jika p tidak diikutsertakan, maka terdapat $\binom{n-1}{r}$ cara pemilihan. Jadi total cara pemilihan yang mungkin sama dengan $\binom{n}{r}$.

Berbeda dengan identitas 2 yang berkenaan dengan penjumlahan dua kombinasi, identitas berikut berkaitan dengan perkalian dua kombinasi dan akan digunakan untuk memodifikasi bentuk perkalian kombinasi yang diperoleh dalam ekspansi trinomial. Identitas ini dikenal dengan Identitas Revisi Trinomial.

Identitas 3 : $\binom{n}{r}\binom{r}{m} = \binom{n}{n-r,\ r-m,\ m}$

(Chappell, 2000)

Identitas 3 merupakan dasar perluasan kombinasi yang akan digunakan dalam ekspansi multinomial.

2. Koefisien Binomial

Bilangan $\binom{n}{r}$ dikenal juga dengan koefisien binomial di mana nilai koefisien variabel suku ke-r dalam ekspansi binom $(a+b)^n$ sama dengan $\binom{n}{r}$.

Pandang bentuk $(a+b)^3$. Bentuk ini diekspansi dengan mengalikan ketiga faktor suku demi suku.

$$\begin{aligned}(a+b)^3 &= (a+b)(a+b)(a+b)\\ &= aaa + aab + aba + abb + baa + bab + bba + bbb\\ &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.\end{aligned}$$

Dalam perspektif kombinatorik, masing-masing suku merupakan kombinasi r buah b dari 3 buah b dan koefisiennya adalah nilai kombinasi dimaksud. Sehingga ekspansi binom di atas bisa dijabarkan dengan menggunakan notasi kombinasi sebagai berikut.

$$(a+b)^3 = \binom{3}{0}a^3 + \binom{3}{1}a^2b + \binom{3}{2}ab^2 + \binom{3}{3}b^3$$

atau

$$(a+b)^3 = \sum_{r=0}^{3}\binom{3}{r}a^{3-r}b^r. \qquad (1)$$

Secara umum, untuk $(a+b)^n$, berlaku teorema berikut.

Teorema 2 : Misalkan $a,b \in R$. Untuk setiap $n \in \{0\} \cup Z^+$ berlaku

$$(a+b)^n = \sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}a^{n-r}b^r.$$

(Helbig, 2007)

Teorema 2 dikenal dengan teorema Binomial.

3. Segitiga Pascal

Segitiga Pascal merupakan pola bilangan dalam bentuk segitiga yang tersusun atas baris dan kolom. Penamaan baris dan kolom dimulai dari baris ke-0 dan kolom ke-0. Untuk sembarang n dan k bilangan Bulat tak negatif, elemen baris ke-n kolom ke-k dilambangkan dengan $B_{(n,k)}$ di mana $B_{(n,k)} = \binom{n}{k}$.

$B_{(0,0)}$

$B_{(1,0)}$ $B_{(1,1)}$

$B_{(2,0)}$ $B_{(2,1)}$ $B_{(2,2)}$

$B_{(3,0)}$ $B_{(3,1)}$ $B_{(3,2)}$ $B_{(3,3)}$

Gambar 2. Segitiga Pascal dalam notasi $B_{(n,k)}$.

Berdasarkan sifat kombinasi, untuk $n, k \in \{0\} \cup Z^+$, $B_{(n,0)} = B_{(n,n)} = 1$, $B_{(n,k)} = B_{(n-1,k)} + B_{(n-1,k-1)}$ jika $n > k$, dan $B_{(n,k)} = 0$, untuk n dan k lainnya. Secara rekursif, $B_{(n,k)}$ bisa dinyatakan sebagai berikut.

$B_{(n,k)} =$

a. Basis

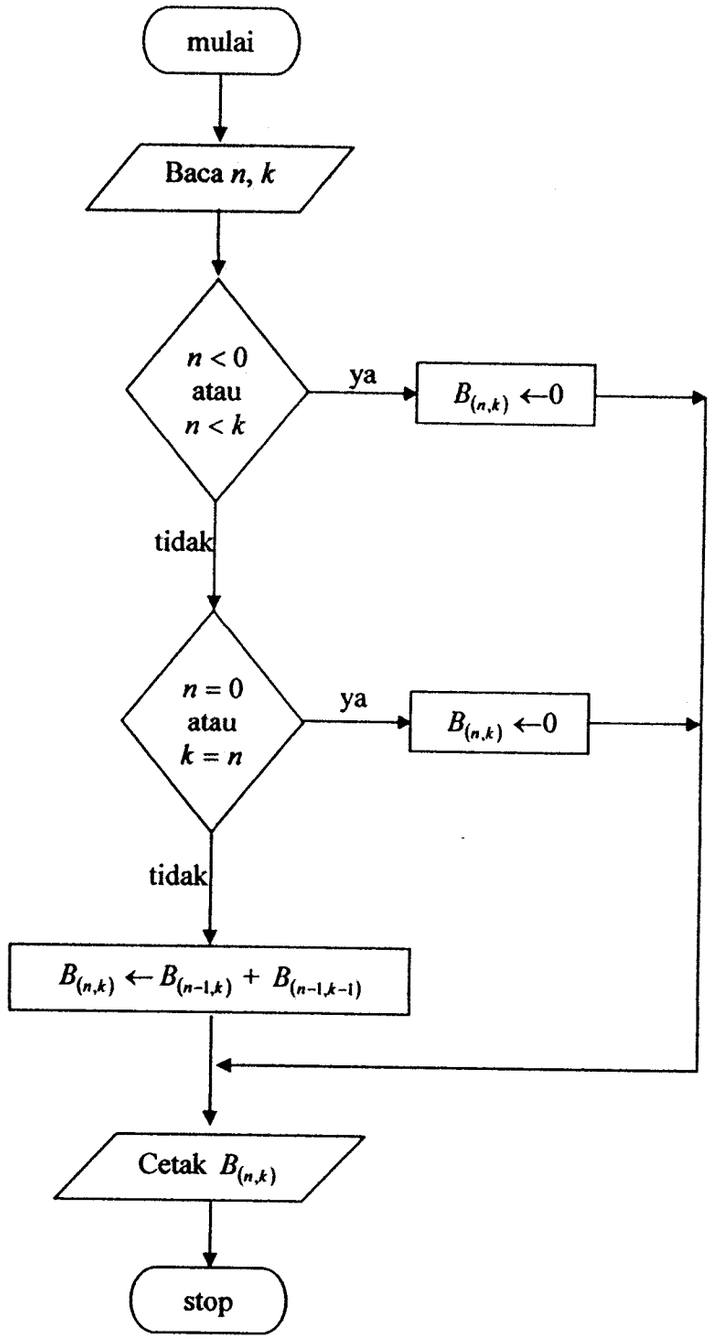
$$1, \text{ untuk } (n,k) \in \{(0,0),(n.0),(n,n)\}$$

Relasi rekursif

$$B_{(n-1,k-1)} + B_{(n-1,k)}, \text{ untuk } n,k \in Z^+, \text{ dan } k < n.$$

b. 0, untuk (n,k) lainnya

dengan diagram alir di bawah ini.



Gambar 3. Diagram Alir $B_{(n,k)}$.

B. Ekspansi Trinomial

Trinomial merupakan bentuk suku tiga $(a+b+c)$. Untuk n bilangan bulat positif, trinom $(a+b+c)^p$ dapat dijabar dengan dua cara. Pertama, dengan mengalikan semua faktor suku demi suku. Kedua, dengan memandang bentuk trinom sebagai bentuk binomial.

1. Ekspansi Trinomial dalam Perspektif Aljabar

Analog dengan binomial, bentuk trinom $(a+b+c)^p$ dijabarkan dengan mengalikan semua faktor suku demi suku. Pandang bentuk $(a+b+c)^3$. Dengan mengalikan ketiga faktor suku demi suku diperoleh

$$(a+b+c)^3 = (a+b+c)(a+b+c)(a+b+c)$$

atau,

$$\begin{aligned}(a+b+c)^3 = {} & aaa + aab + aac + aba + abb + abc + aca + acb + acc + \\ & baa + bab + bac + bba + bbb + bbc + bca + bcb + bcc + \\ & caa + cab + cac + cba + cbb + cbc + cca + ccb + ccc\end{aligned}$$

atau,

$$(a+b+c)^3 = a^3 + 3a^2b + 3a^2c + 3ab^2 + 6abc + 3ac^2 + b^3 + 3b^2c + 3bc^2 + c^3$$

Dalam bentuk lain, hasil penjabaran di atas dapat disusun seperti berikut,

$$\begin{aligned}(a+b+c)^3 = {} & a^3 + \\ & 3a^2b + 3a^2c + \\ & 3ab^2 + 6abc + 3ac^2 + \\ & b^3 + 3b^2c + 3bc^2 + c^3\end{aligned}$$

2. Ekspansi Trinomial dalam Perspektif Binomial

Di samping pendekatan yang digunakan di atas, Chappel (2000) menjabarkan trinomial $(a+b+c)^p$ dengan memandang $(a+b+c)^p = (a+(b+c))^p$. Untuk $p = 3$, berdasarkan teorema Binomial, diperoleh

$$(a+b+c)^3 = (a+(b+c))^3$$

atau,

$$(a+b+c)^3 = \sum_{n=0}^{3} \binom{3}{n} a^{3-n} (b+c)^n$$

atau,

$$(a+b+c)^3 = \sum_{n=0}^{3} \sum_{m=0}^{n} \binom{3}{n} \binom{n}{m} a^{3-n} b^{n-m} c^m$$

atau,

$$\begin{aligned}(a+b+c)^3 = {} & \binom{3}{0}\binom{0}{0} a^3 b^0 c^0 + \\ & \binom{3}{1}\binom{1}{0} a^2 b^1 c^0 + \binom{3}{1}\binom{1}{1} a^2 b^0 c^1 + \\ & \binom{3}{2}\binom{2}{0} a^1 b^2 c^0 + \binom{3}{2}\binom{2}{1} a^1 b^1 c^1 + \binom{3}{2}\binom{2}{2} a^1 b^0 c^2 + \\ & \binom{3}{3}\binom{3}{0} a^0 b^3 c^0 + \binom{3}{3}\binom{3}{1} a^0 b^2 c^1 + \binom{3}{3}\binom{3}{2} a^0 b^1 c^2 + \binom{3}{3}\binom{3}{3} a^0 b^0 c^3\end{aligned}$$

atau,

$$\begin{aligned}(a+b+c)^3 = {} & (1)(1) a^3 b^0 c^0 + \\ & (3)(1) a^2 b^1 c^0 + (3)(1) a^2 b^0 c^1 +\end{aligned}$$

$$(3)(1)a^1b^2c^0 + (3)(2)a^1b^1c^1 + (3)(1)a^1b^0c^2 +$$

$$(1)(1)a^0b^3c^0 + (1)(3)a^0b^2c^1 + (1)(3)a^0b^1c^2 + (1)(1)a^0b^0c^3$$

atau,

$$\begin{aligned}(a+b+c)^3 = {} & a^3b^0c^0 + \\ & 3a^2b^1c^0 + 3a^2b^0c^1 + \\ & 3a^1b^2c^0 + 6a^1b^1c^1 + 3a^1b^0c^2 + \\ & a^0b^3c^0 + 3a^0b^2c^1 + 3a^0b^1c^2 + a^0b^0c^3\end{aligned}$$

atau,

$$\begin{aligned}(a+b+c)^3 = {} & a^3 + \\ & 3a^2b + 3a^2c + \\ & 3ab^2 + 6abc + 3ac^2 + \\ & b^3 + 3b^2c + 3bc^2 + c^3\end{aligned}$$

Secara umum berlaku teorema berikut.

Teorema 3 : $\forall a, b, c \in R$, $\forall\ p, n, m \in \{0\} \cup Z^+$, $n \le p$, dan $m \le n$:

$$(a+b+c)^p = \sum_{n=0}^{p}\sum_{m=0}^{n}\binom{p}{n}\binom{n}{m}a^{p-n}b^{n-m}c^m.$$

(Chappel, 2000)

Di samping itu, dengan menggunakan identitas 2, perkalian kombinasi $\binom{n}{r}\binom{r}{m}$ pada Teorema 3 bisa dinyatakan sebagai $\binom{n}{n-r,\ \ r-m,\ \ m}$, sehingga diperoleh teorema berikut.

Teorema 4 : $\forall a, b, c \in R$, $p, n, m \in \{0\} \cup Z^{+}$, $n \leq p$, dan $m \leq n$:

$$(a+b+c)^{p} = \sum_{n=0}^{p} \sum_{m=0}^{n} \binom{p}{p-n, n-m, m} a^{p-n} b^{n-m} c^{m} .$$

(Chappel, 2000)

BAB III

PEMBAHASAN

A. Perluasan Segitiga Pascal dalam Bentuk Piramida

1. Konstruksi Piramida Pascal

Dalam tulisannya *The Trinomial Triangle*, Chappel (2000) mengkonstruksi perluasan segitiga Pascal untuk koefisien trinomial dengan mengalikan bilangan-bilangan pada lajur kiri dengan bilangan-bilangan pada bagian kanan pada pola di bawah ini di mana bilangan-bilangan pada bagian kiri merupakan entri segitiga Pascal di sisi kanannya.

1	1			
3	1	1		
3	1	2	1	
1	1	3	3	1

Gambar 4. Koefisien trinomial sebagai perkalian entri segitiga Pascal dengan entri baris terakhirnya yang berpadanan.

Pendekatan ini memperlihatkan bahwa perluasan segitiga Pascal untuk trinomial merupakan perkalian dua nilai kombinasi. Secara aljabar, hasil ini diperoleh berdasarkan teorema 3 untuk $a = 1$, $b = 0$, $c = 0$, dan $p = 3$.

Untuk trinom $(a+b+c)^3$, dengan memandang $(a+b+c)^3=(a+(b+c))^3$, hasil ekspansi diperoleh dengan cara menjumlahkan semua hasil perkalian entri di bagian kiri dengan bagian kanan pada gambar berikut.

a^3	1			
$3a^2$	b	c		
$3a$	b^2	$2bc$	c^2	
1	b^3	$3b^2c$	$3bc^2$	c^3

Gambar 5. Ekspansi trinom $(a+b+c)^3$ dalam format segitiga Pascal yang diperluas.

2. Representasi Geometris Piramida Pascal

Dalam tulisan ini, representasi geometris perluasan segitiga Pascal untuk koefisien trinom $(a+b+c)^p$ dikontruksi dengan mengaplikasikan Teorema 4 menggunakan pendekatan induktif untuk tripel (p,n,m) yang memenuhi kriteria $p, n, m \in \{0\} \cup Z^+$, $n \leq p$, dan $m \leq n$.

Untuk $p = 0$, tripel (p,n,m) yang mungkin adalah $(0,0,0)$. Sehingga dalam kasus ini hanya diperoleh satu skalar bernilai 1 sebagai hasil $\binom{0}{0}\binom{0}{0}$.

Untuk p = 1 terdapat 3 tripel (p,n,m) yakni $(1,0,0)$, $(1,1,0)$, dan $(1,1,1)$. Ketiga menghasilkan skalar bernilai 1. Dengan memandang koefisien trinomial sebagai perkalian kombinasi, maka diperoleh

$$\begin{array}{c|ccc} 1 & 1 & & \\ 1 & 1 & 1 & \end{array}$$

atau,

$$\begin{array}{ll} 1 & \\ 1 & 1 \end{array}$$

Dengan cara yang sama, untuk p = 2 dihasilkan

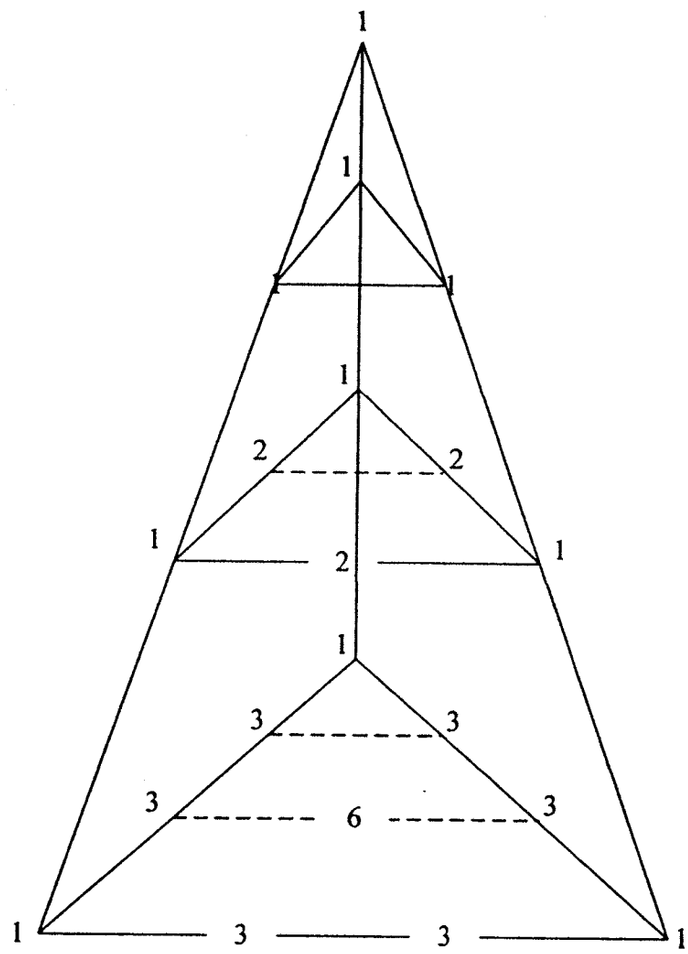
$$\begin{array}{lll} 1 & & \\ 2 & 2 & \\ 1 & 2 & 1 \end{array}$$

begitu juga untuk p = 3

$$\begin{array}{llll} 1 & & & \\ 3 & 3 & & \\ 3 & 6 & 3 & \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{array}$$

171/Hd/00 - P. (1)
MILIK PERPUSTAKAAN
UNIV. NEGERI PADANG
516.15
Vio
P-1

Jika pola bilangan di atas disusun secara vertikal, maka diperoleh pola seperti piramida berikut.

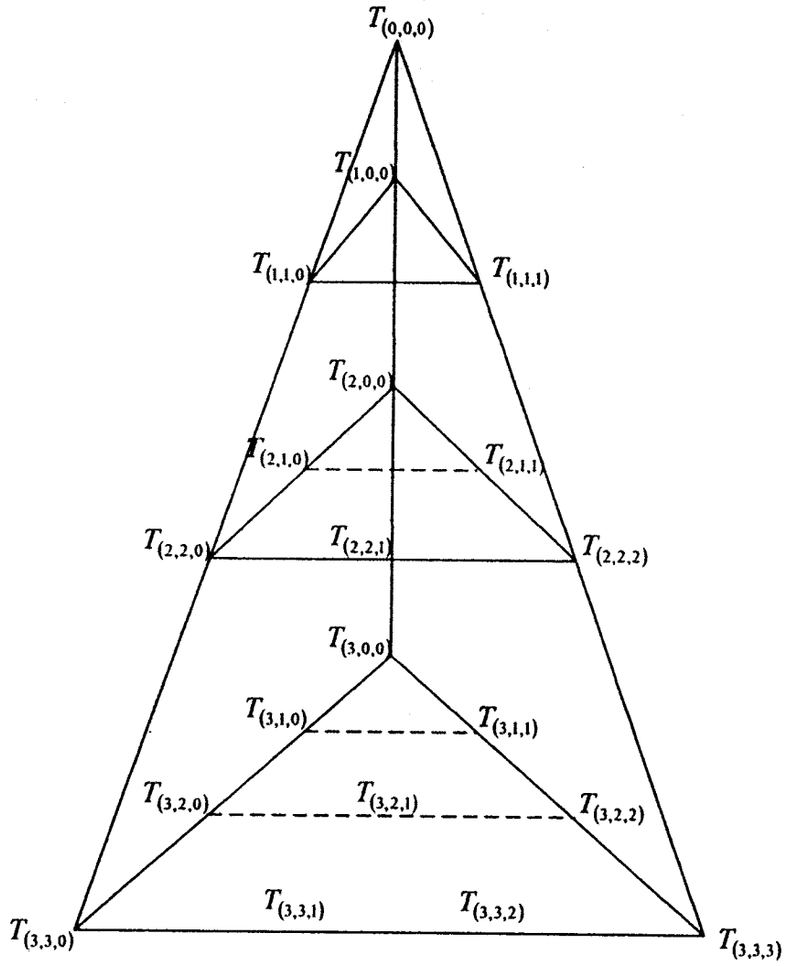


Gambar 6. Piramida Pascal.

Horn (2005) menyebut pola di atas sebagai piramida Pascal.

Urutan vertikal pada pola di atas untuk selanjutnya dinamakan dengan lapis. Dengan demikian, posisi entri piramida bilangan ini ditentukan oleh lapis, baris, dan kolom, dan dilambangkan dengan $T_{(p,n,m)}$, di mana p menunjukkan

lapis, n baris, dan m kolom. Berdasarkan pendekatan yang digunakan Chappel, $T_{(p,n,m)} = B_{(p,n)} \cdot B_{(n,m)}$. Sehingga $T_{(p,n,m)} = \binom{p}{n}\binom{n}{m} = \binom{p}{p-n, n-m, m}$.



Gambar 7. Piramida Pascal dengan entri dalam format $T_{(p,n,m)}$.

B. Formula Rekursif Piramida Pascal

Sebagaimana telah ditinjau sebelumnya, segitiga Pascal dikonstruksi dengan menggunakan rumus rekursi.

$B_{(n,k)}$ =

a. Basis

$$1, \text{ untuk } (n,k) \in \{(0,0),(n.0),(n,n)\}$$

Relasi rekursif

$$B_{(n-1,k-1)} + B_{(n-1,k)}, \text{ untuk } n,k \in Z^+, \text{ dan } k < n.$$

b. 0, untuk (n,k) lainnya

Dengan menggunakan rumus rekursi di atas dan identitas 3, maka

1. untuk tripel (p,n,m) di mana $p \in \{0\} \cup Z^+$, $n \in \{0,p\}$, dan $m \in \{0,n,p\}$ diperoleh

$$T_{(p,n,m)} = B_{(p,n)} \cdot B_{(n,m)} = 1 \qquad (2)$$

2. dan untuk tripel (p,n,m), di mana $p, n, m \in Z^+$, $n < p$, dan $m < n$ didapatkan

$$T_{(p,n,m)} = B_{(p,n)} \cdot B_{(n,m)}$$

atau,

$$T_{(p,n,m)} = \left(B_{(p-1,n-1)} + B_{(p-1,n)}\right) . B_{(n,m)}$$

atau

$$T_{(p,n,m)} = B_{(p-1,n-1)} B_{(n,m)} + B_{(p-1,n)} B_{(n,m)}.$$

atau,

$$T_{(p,n,m)} = B_{(p-1,n-1)}\left(B_{(n-1,m-1)} + B_{(n-1,m)}\right) + B_{(p-1,n)}B_{(n,m)}.$$

atau,

$$T_{(p,n,m)} = B_{(p-1,n-1)}B_{(n-1,m-1)} + B_{(p-1,n-1)}B_{(n-1,m)} + B_{(p-1,n)}B_{(n,m)} \quad (3)$$

Berdasarkan identitas 3,

$$B_{(p-1,n-1)}B_{(n-1,m-1)} = T_{(p-1,n-1,m-1)} \quad (4)$$

$$B_{(p-1,n-1)}B_{(n-1,m)} = T_{(p-1,n-1,m)} \quad (5)$$

$$B_{(p-1,n)}B_{(n,m)} = T_{(p-1,n,m)} \quad (6)$$

Dengan mensubstitusi persamaan (4), (5), dan (6) ke persamaan (3) dihasilkan

$$T_{(p,n,m)} = T_{(p-1,n-1,m-1)} + T_{(p-1,n-1,m)} + T_{(p-1,n,m)} \quad (7)$$

3. untuk tripel (p,n,m) lainnya diperoleh

$$T_{(p,n,m)} = B_{(p,n)} \cdot B_{(n,m)} = 0$$

Persamaan (1) dan persamaan (7) menunjukkan pola rekursi piramida Pascal. Secara singkat, rumus rekursif piramida Pascal di atas dapat dinyatakan sebagai berikut.

$T_{(p,n,m)} =$

1. Basis

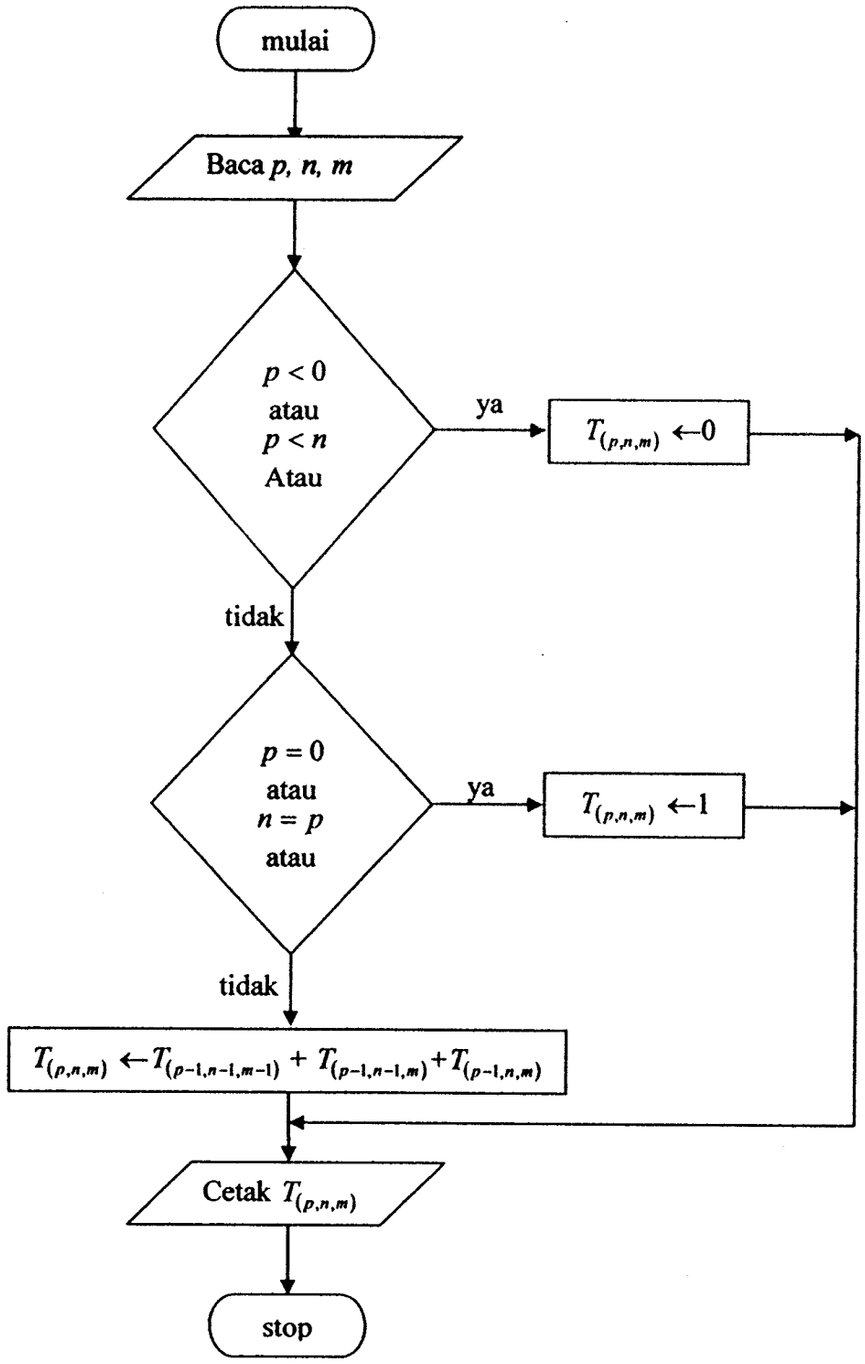
   1, untuk (p,n,m) di mana $p \in \{0\} \cup Z^+$, $n \in \{0,p\}$, dan $m \in \{0,n,p\}$

   Relasi rekursif

   $T_{(p-1,n-1,m-1)} + T_{(p-1,n-1,m)} + T_{(p-1,n,m)}$, untuk (p,n,m) di mana $p, n, m \in Z^+$, $n < p$, dan $m < n$

2. 0, untuk (p,n,m) lainnya

dengan diagram alir sebagai berikut.



Gambar 8. Diagram Alir $T_{(p,n,m)}$.

BAB IV

KESIMPULAN DAN SARAN

A. Kesimpulan

Berdasarkan kajian dalam penelitian ini, maka ditarik beberapa kesimpulan berikut.

1. Perluasan segitiga Pascal untuk ekspansi trinomial merupakan pola bilangan berbentuk piramida.
2. Formula rekursi piramida Pascal adalah

   $T_{(p,n,m)} = T_{(p-1,n-1,m-1)} + T_{(p-1,n-1,m)} + T_{(p-1,n,m)}$, untuk $p = 1, 2, 3, \ldots$ $n = 1, 2, \ldots, (p-1)$ dan $m = 1, 2, \ldots, (n-1)$

B. Saran

Penulis menyarankan agar dilakukan beberapa penelitian lanjutan berkenaan dengan segitiga Pascal khususnya tentang, antara lain :

1. Perluasan segitiga Pascal untuk multinomial.
2. Algoritma rekursi yang lain untuk mengkonstruksi perluasan segitiga
3. Analisis kompleksitas algoritma rekursi segitiga Pascal dan perluasan segitiga Pascal.

LAMPIRAN-LAMPIRAN

1. Daftar Pustaka

Chappel, James. & Osler, Thomas J. (1999). The Trinomial Triangle. *The College Mathematics Journal* (online), Volume 30, No.2 (http://www.proquest.com diakses 20 November 2006)

Freund, John E. & Walpole, Ronald E. (1987). *Mathematical Statistics. 4th edition.* New Jersey: Prentice Hall

Grinstead, Charles M. & Snell, J. Laurie. (2005) *Introduction to Probability.* (http://www.proquest.com diakses 20 November 2006)

Helbig, Sebastian. & Schafer, Max. (2007). *Combinatorics and Analysis of Algorithms.* (http://web.inf.tudresden.de/~s0218621 diakses tanggal 5 Juli 2007)

Horn, Martin Erik. (2005). *Pascal Pyramids, Pascal Hyper-Pyramids adn a Bilateral Multinomial Theorem.* (http://www.siam.org/journals/problems/03-001.htm diakses 20 November 2005)

Johnsonbaugh, Richard. (1998). *Matematika Diskrit.* Jakarta : Prenhallindo

Pengeley, David. (2005). *Pascal Treatise on the Arithmetical Triangle, Mathematical Induction, Combinations, the Binomial Theorem and Fermat Theorem.* (http://www.math.nmsu.edu/hist_projects/pascalII.pdf diakses 12 April 2007)

Tucker, Alan. (1995). *Applied Combinatorics.* 3rd ed. New York : John Wiley & Sons

2. Listing Program Binomial dan Trinomial dalam Bahasa Pemrograman Pascal

a. Program menghitung entri segitiga Pascal baris ke-*n* kolom ke-*k*.

```
(*Program menghitung entri Segitiga Pascal
 pada baris ke-n kolom ke-k dengan menggunakan rekursi*)
Program Segitiga_Pascal;
uses crt;
(*Bagian Deklarasi Variabel*)
var n, k, i, j : longint;
(*Fungsi untuk menghitung entri segitiga Pascal*)
function binomial(i,j:longint):longint;
begin
 if (i<0) then
  binomial := 0
 else
  if (j = 0) then
   binomial := 1
  else
   binomial:=binomial(i-1,j-1)+binomial(i-1,j);
end;

(*Program Utama*)
begin
clrscr;
 writeln('Menghitung Nilai Suku Baris ke - n dan Kolom ke - k');
 writeln('        pada Segitiga Pascal');
 writeln('=========================================
 ================');
 writeln;
 writeln;
 writeln('Masukkan nomor baris.');
 write('   n : ');
```

```
  read(n);
  writeln;
  writeln('Masukkan nomor kolom.');
  write('   k : ');
  read(k);
  writeln;
  writeln;
  binomial(n,k);
  readln;
  write('Suku baris ke - ',n,' kolom ke - ',k,' adalah : ');
  write(binomial(n,k));
  readln;
end.
```

b. Program Trinomial

```
(*Program untuk menghitung entri Piramida Pascal lapis ke-p, baris ke-n,
kolom ke-n dengan menggunakan rekursi*)
Program Piramida_Pascal;
uses crt;
(*Bagian Deklarasi Variabel*)
var p, n, m, i, j, k : longint;
(*Fungsi untuk menghitung entri Piramida Pascal*)
function trinomial(i,j,k:longint):longint;
begin
 if (i<0) then
  trinomial:=0
 else
  if ((j = 0) and (k = 0)) then
   trinomial:=1
  else
   trinomial:=trinomial(i-1,j-1,k-1)+ trinomial(i-1,j-1,k)+trinomial(i-
```

```
    1,j,k);
  end;

  (*Program Utama*)
  begin
  clrscr;
   writeln('Menghitung entri Piramida Pascal pada Lapis ke-p, Baris ke-n,');
   writeln('                dan Kolom ke-m');
   writeln('==========================================================');
   writeln;
   writeln('Masukkan nomor lapis (p). ');
   write('   p : ');
   read(p);
   writeln;
   writeln('Masukkan nomor baris (n). ');
   write('   n : ');
   read(n);
   writeln;
   writeln('Masukkan nomor kolom (m).');
   write('   m : ');
   read(m);
   writeln;
   writeln;
   readln;
   trinomial(p, n, m);
   write('Suku lapis ke ',p,', baris ke ',n,', kolom ke ',m,' adalah : ');
   writeln(trinomial(p,n,m));
   writeln;
   write('Untuk kembali tekan sembarang kunci ');
   readln;
end.
```

MILIK PERPUSTAKAAN
UNIV. NEGERI PADANG

CURRICULUM VITAE

Nama	:	Dodi Vionanda, S.Si
NIP	:	132 308 792
Tempat/Tanggal Lahir	:	Padang Panjang/11 Juni 1979
Pekerjaan/Nama Instansi	:	Staf Pengajar/Jurusan Matematika FMIPA UNP
Golongan	:	III /a
Sejarah Pendidikan	:	1986 – 1992 SD
		1992 – 1995 SMP
		1995 – 1998 SMA
		1998 – 2002 S1 Matematika UNP
Publikasi	:	Suatu Perluasan Deskripsi Hoppe tentang Segitiga Heron; Suatu Perspektif Titik Eksenter (Peneliti, 2002)

Padang, 24 Oktober 2007

Dodi Vionanda, S.Si
NIP. 132 308 792

CURRICULUM VITAE

MILIK PERPUSTAKAAN
UNIV. NEGERI PADANG

Nama	:	Dra. Helma, M.Si
NIP	:	132 150 429
Tempat/Tanggal Lahir	:	Padang /24 Maret 1968
Pekerjaan/Nama Instansi	:	Staf Pengajar/Jurusan Matematika FMIPA UNP
Golongan	:	III /c
Sejarah Pendidikan	:	1975 – 1981 SD
		1981 – 1984 SMP
		1984 – 1987 SMA
		1987 – 1992 S1 Matematika IKIP Padang
		1992 – 1995 S2 Matematika ITB Bandung

Publikasi :

1. Domain Abstraksi dari Fungsi Distribusi Stabil (Peneliti, 1995)
2. Kriteria Fungsi Distribusi yang Termuat dalam Daerah Atraksi dari Fungsi Distribusi Normal (Peneliti, 2000)
3. Simulasi Operator Geser untuk Menentukan Pengamatan yang Berpengaruh pada Analisis Regresi Linier (Anggota Peneliti, 2000)
4. Fungsi Kuadratik di Ruang Riil dan Ruang Kompleks (Anggota Peneliti, 2000)
5. Estimasi Interval pada Distribusi Eksponensial di Bawah Sensor "Multiple Type II" (Anggota Peneliti, 2000)
6. Upaya Peningkatan Kualitas Perkuliahan Analisis Riil I Melalui Model Pembelajaran Aktif Diiringi dengan Pemberian Lembaran Soal Belajar Aktif (LBSA) (Peneliti, 2002)

Padang, 24 Oktober 2007

Dra. Helma, M.Si
NIP. 132 150 429