LAPORAN PENELITIAN

MEMBANGUN INTEGRAL MC SHANE DENGAN SISTIM SELANG FUNDAMENTAL

Oleh :

Dra. Arnellis, M.Si.

Penelitian Ini Dibiayai Oleh :
Dana Rutin Universitas Negeri Padang
Tahun Anggaran 2003
Surat Perjanjian Pelaksanaan Penelitian (SP3)
Nomor : 260/J41/KU/Rutin/2003
Tanggal 05 Mei 2003

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS NEGERI PADANG
2003

LEMBAR IDENTITAS DAN PENGESAHAN

1. Judul penelitian : Membangun Integral Mc Shane Dengan Sistem Selang Fundamental

2. Ketua Penelitian
   - Nama : Dra . Arnellis, MSi
   - Jenis Kelamin : Perempuan
   - Golongan / Pangkat/ NIP : III C / Penata / 131668025
   - Jabatan Fungsional : Lektor
   - Jurusan / Fakultas : Matematika / FMIPA

3. Jumlah Tim Peneliti 1 (satu) orang

4. Lokasi Penelitian : Jurusan Matematika FMIPA UNP

5. Jangka Waktu Penelitian : 6 (enam) Bulan

6. Biaya yang diperlukan
   - a. Sumber Dana : Dana Rutin
   - b. Jumlah Dana : Rp 3.000.000 (Tiga Juta Rupiah)

Mengetahui
Dekan FMIPA UNP

Drs. Ali Amiran, M.Pd. M.A, Ph.D
NIP. 130353264

Ketua Peneliti

Dra. Arnellis , MSi
NIP. 131668025

Menyetujui
Ketua Lembaga Penelitian UNP

Prof. Dr. H. Agus Irianto
NIP. 130879791

ABSTRACT

Arnellis, Membangun Integral Mc Shane Dengan Sistim Selang Fundamental

This research contains some results of our study on the Mc Shane integral. The definition of the Mc Shane integral using fundamental interval system. The definition of the Mc Shane integral proposed here can be used for integration overs fundamental interval system. We shall study also some of properties on the fundamental Mc Shane integral especially how far properties of Mc Shane integral for arbitrary elementary sets. It is state in terms of point interval system. The purpose of this article is to give characterization of fundamental Mc Shane integral.

Key Word : Fundamental Mc Shane Integral, Fundamental Interval System, Integration.

KATA PENGANTAR

Kegiatan penelitian mendukung pengembangan ilmu serta terapannya. Dalam hal ini, Lembaga Penelitian Universitas Negeri Padang berusaha mendorong dosen untuk melakukan penelitian sebagai bagian integral dari kegiatan mengajarnya, baik yang secara langsung dibiayai oleh dana Universitas Negeri Padang maupun dana dari sumber lain yang relevan atau bekerja sama dengan instansi terkait.

Sehubungan dengan itu, Lembaga Penelitian Universitas Negeri Padang bekerjasama dengan Pimpinan Universitas, telah memfasilitasi peneliti untuk melaksanakan penelitian dengan judul *Membangun Integral Mc Shane dengan Sistem Selang Fundamental,* berdasarkan Surat Perjanjian Pelaksanaan Penelitian Nomor: 260/J41/KURutin/2003 Tanggal 05 Mei 2003.

Kami menyambut gembira usaha yang dilakukan peneliti untuk menjawab berbagai permasalahan pembangunan, khususnya yang berkaitan dengan permasalahan penelitian tersebut di atas. Dengan selesainya penelitian ini, maka Lembaga Penelitian Universitas Negeri Padang akan dapat memberikan informasi yang dapat dipakai sebagai bagian upaya penting dan kompleks dalam peningkatan mutu pendidikan pada umumnya. Di samping itu, hasil penelitian ini juga diharapkan sebagai bahan masukan bagi instansi terkait dalam rangka penyusunan kebijakan pembangunan.

Hasil penelitian ini telah ditelaah oleh tim pereviu usul dan laporan penelitian Lembaga Penelitian Universitas Negeri Padang, namun demikian karena sesuatu sebab teknis, penelitian ini belum dapat diseminarkan sehingga masukan dari dosen senior belum dapat ditampung. Sungguhpun demikian, mudah-mudahan penelitian ini bermanfaat bagi pengembangan ilmu pada umumnya dan peningkatan mutu staf akademik Universitas Negeri Padang.

Pada kesempatan ini kami ingin mengucapkan terima kasih kepada berbagai pihak yang membantu terlaksananya penelitian ini, terutama kepada pimpinan lembaga terkait yang menjadi objek penelitian, responden yang menjadi sampel penelitian, dan tim pereviu Lembaga Penelitian Universitas Negeri Padang. Secara khusus kami menyampaikan terima kasih kepada Rektor Universitas Negeri Padang yang telah berkenan memberi bantuan pendanaan bagi penelitian ini. Kami yakin tanpa dedikasi dan kerjasama yang terjalin selama ini, penelitian ini tidak akan dapat diselesaikan sebagaimana yang diharapkan dan semoga kerjasama yang baik ini akan menjadi lebih baik lagi di masa yang akan datang.

Terima kasih.

Padang, November 2003
Ketua Lembaga Penelitian
Universitas Negeri Padang,

Prof. Dr. H. Agus Irianto
NIP. 130879791

DAFTAR ISI

BAB I

PENDAHULUAN

A. Latar Belakang

Matematika terdiri dari beberapa kelompok ilmu, di antaranya kelompok analisis. Teori integral adalah salah satu ilmu yang termasuk dalam kelompok analisis yang merupakan ilmu deduktif dan masih tetap tumbuh dan berkembang, baik dari segi teori maupun dari segi pemakaiannya.

Dari segi pemakaiannya, sampai saat ini banyak teori integral yang digunakan dalam bidang lainnya di antaranya bidang MIPA sendiri, teknik, ekonomi, sosial dan lainnya. Bidang fisika, integral Rieman digunakan dalam "kerja". Bidang Teknik integral Henstock terpakai pada bentuk "gridding hump". Bidang ekonomi, integral Riemann dipakai dalam analisa ekonomi "fungsi marginal", dan lainnya.

Dari segi teori integral berkembang terus dimulai dengan pendefinisian integral Denjoy Khusus dan integral Perron merupakan perumpamaan integral Lebesgue dalam bentuk deskriptif tetapi dalam arah yang berbeda. Meskipun demikian dua jenis integral itu masih tetap ekuivalen (Kubota,1980). Integral Lebesgue merupakan perumuman dari integral Riemann. Sementara itu pengembangan konsep-konsep kalkulus dipertajam perhatiannya sehingga usaha itu menghasilkan pengembangan integral Riemann menjadi integral Riemann lengkap (integral Henstock). Hasil yang menakjubkan ternyata integral Henstock dapat dimodifikasi ke dalam bentuk integral Mc Shane. Yee (1989) membuktikan bahwa setiap fungsi tak negatif terintegral Henstock juga terintegral Mc Shane pada ruang Euclide R.

Pfeffer (1993) telah mendefinisikan integral Mc Shane dengan sistim selang titik dan sifat-sifat mendasar yang dimiliki oleh integral Mc Shane membentuk suatu sistim selang titik. Pengembangan konsep sistim selang titik dipertajam lagi menjadi pengembangan konsep berdasarkan sistim selang fundamental. Darmawijaya(1993) berhasil menyusun sistim selang himpunan fundamental. Dengan mencermati pengembangan ini, peneliti ingin menyusun teori integral berdasarkan sistim selang fundamental yang merupakan suatu model dari sistim himpunan fundamental. Berdasarkan atas sistim selang fundamental dikontruksi pendefinisian integral Mc Shane sistim selang fundamental, sifat-sifat, dan teorema-teorema integral Mc Shane fundamental. Sifat-sifat dan teorema-teorema yang berlaku pada integral Mc Shane dengan sistim selang titik dapatkah berlaku juga pada sistim selang fundamental ?.

Berdasarkan uraian di atas peneliti tertarik untuk menyelidiki integral Mc Shane dengan sistim selang fundamental. Untuk itu penelitian ini berjudul **Membangun Integral Mc Shane dengan Sístim Selang Fundamental.**

B. Perumusan Masalah

Dari hasil studi yang mendalam tentang teori integral, banyak sifat-sifat maupun karakteristik-karakteristik yang telah diungkapkan dalam integral Mc Shane dengan sistim selang titik. Namun dengan adanya integral Mc Shane dengan sistim selang fundamental apakah temuan di atas juga berlaku. Khususnya sejauh mana definisi-definisi dan sifat-sifat yang terkandung dalam integral Mc Shane pada sistim selang titik dapat dikembangkan ke dalam integral Mc Shane pada sistim selang fundamental.

Berdasarkan uraian di atas maka rumusan masalah dalam penelitian ini adalah:

1. Apakah dengan sistim selang fundamental dapat dikontruksi jenis integral Mc Shane?
2. Apakah dengan sistim selang fundamental dapat diselidiki sifat-sifat dan teorema-teorema integral Mc Shane?
3. Apakah integral Mc Shane dengan sistim selang titik ekivalen dengan integral Mc Shane dengan sistim selang fundamental?

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

A. Sistim Selang Fundamental

Sebelum membahas integral Mc Shane dengan sistim selang fundamental terlebih dahulu dibahas pengertian-pengertian dasar dan teorema-teorema yang digunakan sebagai titik awal pembahasan tentang hasil penelitian yang dimuat dalam bab selanjutnya. Sebagian materi yang disajikan dalam bab ini dapat ditemui dalam literatur yang ada dalam daftar pustaka. Beberapa sifat yang disajikan dalam teorema tidak disertai dengan bukti, akan tetapi diberikan literatur asal teorema tersebut.

Sistim selang fundamental merupakan dasar pembahasan konsep-konsep dalam tulisan ini. Tinjauan teoritis diawali dengan sistim selang fundamental, sistim selang fundamental yang diberikan memenuhi beberapa sifat-sifat tertentu yang tertuang dalam aksioma-aksioma seperti yang dikemukakan oleh Darmawijaya (1993). Untuk setiap $x \in [a,b]$ dibentuk koleksi $\mathcal{D}_x$ dengan anggota semua $D_x = (u, v)$ dengan $u < x < v$. Ternyata $\mathcal{D}_x$ memenuhi aksioma-aksioma berikut :

A1 . Untuk setiap $D_x \in \mathcal{D}_x$ dan $u < x < v$ berakibat

$$\mathcal{D}_x' = D_X \cap (u,v) \in \mathcal{D}_x$$

A2 . Jika $D_x', D_x'' \in \mathcal{D}_x$ maka $D_x = D_x' \cap D_x'' \in \mathcal{D}_x$

A3 . Jika ϑ merupakan sebarang himpunan indexs dan $D_x \in \mathcal{D}_x$

Untuk setiap $\alpha \in \vartheta$ maka $D_x = \cup D_x \in \mathcal{D}_x$

A4 . Untuk setiap $D_x \in \mathcal{D}_x$, D_x memuat x dan ada $u, v \in D_x$ sehingga $u < x < v$.

A5 . Jika $D_x \in \mathcal{D}_x$, $u \in D_x \in \mathcal{D}_x$ dan $u <$ maka ada $u_1 \in D_x$ dengan $u < u_1 < x$;

dan jika $v \in D_x \in \mathcal{D}_x$ dan $x < v$ maka ada $v_1 \in D_x$ dengan $x < v_1 < v$.

Untuk selanjutnya $\mathcal{D}_x$ disebut sistim selang fundamental di x dan setiap $D_x \in \mathcal{D}_x$ disebut selang fundamental. Koleksi semua $\mathcal{D}_x$ untuk $x \in [a ,b]$ disebut sistim selang fundamental pada [a, b].

Berdasarkan atas sistim selang fundamental tersebut khusus beberapa sifatnya akan dikontruksi integral Mc Shane. Mengingat konsep integral yang akan dibahas tidak terlepas dari pengertian partisi suatu selang yang terkait dengan liput penuh fundamental maka berikut dikemukakan definisi liput penuh fundamental.

$\Delta = \{[u, v] : u, v \in \mathcal{D}_x, u \le x \le v$ dan $D_x \in \xi\}$ merupakan liput terbuka selang [a, b] dan disebut liput penuh fundamental selang [a, b] atau LPF selang [a, b], ξ disebut generator LPF.

Ternyata sistim selang fundamental pada [a, b] memenuhi aksioma 6 berikut

A6. jika ξ adalah generator LPF dari $x \in [a, b]$ maka ada $[u, v] \in [a, b]$ dengan $u \le x \le v$ sehingga untuk setiap $s, t \in [u, v]$ dan $D_s, D_t \in \xi$ berlaku $D_s \cap D_t \neq \emptyset$

Definisi 1 (Thomson, 1980)

Jika Δ suatu LPF selang [a, b] dengan generator ξ, maka partisi pada [a, b] $D = \{[u, v], \xi\} = \{a = a_o, a_1, a_2, \ldots\ldots, a_n = b ; x_1, x_2, \ldots x_n\}$ dengan $a_{i-1}, a_i \in D_{xi}$, $a_{i-1} \le x_i \le a_i$ dan $D_{xi} \in \xi$ disebut partisi fundamental pada [a, b].

Teorema 2

Jika Δ LPF selang [a,b], maka ada partisi -Δ

$P = \{a = a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n = b; x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ pada [a,b].

Jika $[c,d] \subset [a,b]$ maka ada partisi -Δ pada $[c,d]$.

Bukti : Karena $\mathcal{G}' = \{D_x \in \mathcal{G};\ x \in [c,d]\}$ merupakan generator LPF selang [c,d] maka cukup dibuktikan sebagai berikut: $\mathcal{G}$ pembangkit LPF Δ, maka menurut Teorema Heine Borel ada $D_{x_1}, D_{x_2}, \ldots D_{x_n}$ sehingga $\bigcup_{i=1}^{n} D_{xi} \supset [a,b]$.

Tanpa mengurangi arti jika dianggap $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$, $D_{x_{i-1}} \cap D_{x_i} \neq \phi, D_{x_{i-1}} \not\subset D_{x_i}$ dan $D_{x_i} \not\subset D_{x_{i-1}}$. Ambil $a = a_0 \leq x_1 \in D_{x_1}$, $b = a_n \geq x_n \in D_{x_n}$ dan $a_{i-1} \in D_{x_{i-1}} \cap D_{x_i}$ untuk $i=2,3,\ldots, n$. Jadi diperoleh partisi -Δ $P=\{a = a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n=b;\ x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. pada [a,b].■

Teorema 3 :

Jika Δ_1, Δ_2 masing-masing LPF selang $[a,b]$ dengan pembangkit berturut-turut $\{D'_x\}$ dan $\{D''_x\}$, dengan $D_x = D'_x \cap D''_x$, merupakan LPF selang [a,b]. Lebih lanjut setiap partisi-Δ pada $[a,b]$ merupakan partisi -Δ_j $(j=1,2)$.

Bukti : Untuk setiap $x \in [a,b]$ terdapat sistim selang fundamental di x, $\mathcal{D}_x$. Ambil sebarang $x \in [a,b]$, $x \in D'_x$ dan $x \in D''_x$. Menurut A2, $D_x = D'_x \cap D''_x \in \mathcal{D}_x$ sehingga diperoleh $x \in D_x$. $\{D_x\}$ akan menjadi generator suatu LPF. Katakan LPF $\Delta = \Delta_1 \cap \Delta_2$. Lebih lanjut setiap partisi-Δ pada [a,b] juga merupakan partisi-Δ_j (j=1,2) pada [a,b], sebab jika $P = ([u,v];\xi) = \{a = a_0, a_1, \ldots, a_n = b;\ x_1, \ldots, x_n\}$ dengan $x_i \in [a_{i-1}, a_i]$ dan $a_{i-1}, a_i \in D_{x_i}$ sebarang partisi -Δ pada [a,b], maka $a_{i-1}, a_i \in D'_{x_i} \cap D''_{x_i}$. Dengan kata lain $a_{i-1}, a_i \in D'_{x_i}$ dan $a_{i-1}, a_i \in D''_{x_i}$.■

Pengertian liput penuh fundamental dan terjaminnya partisi-Δ yang dibahas di atas digunakan lebih lanjut dalam bab selanjutnya.

B. Limit dan Kekontinuan Fundamental

Dengan menggunakan sistim selang fundamental khususnya dengan sifat A1 sampai dengan A5, disusun pengertian limit dan kekontinuan fundamental. Ternyata pengertian limit dan kekontinuan fundamental ekuivalen dengan limit dan kekontinuan yang telah dikenal. Pada bagian ini hanya ditunjukkan ekuivalensi antara pengertian limit dan limit fundamental.

Pengertian limit fundamental bawah dan limit fundamental atas berturut-turut didefinisikan sebagai berikut:

$$\overline{Lim}_{f\, x\to x_0}\, g(x) = \inf_{D_{x_0}\in \mathcal{D}_{x_0}} \sup \{g(x); x \in D_{x_0}\}$$

$$\underline{\lim}_{f\, x\to x_0}\, g(x) = \sup_{D_{x_0}\in \mathcal{D}_{x_0}} \inf \{g(x); x \in D_{x_0}\}$$

Sedangkan untuk pengertian limit fundamental didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 4

Fungsi $g : [a,b] \to R$. *Bilangan* ℓ *disebut limit fundamental* $g(x)$ *untuk* x *mendekati* $x_0 \in [a,b]$, *dituliskan dengan* $\displaystyle Lim_{f\, x\to x_0}\, g(x) = \ell$,

Jika untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ *ada selang fundamental* $D_{x0} \in \mathcal{D}_{x0}$ *sehingga untuk setiap* $x \in D_{x_0}$ *dan* $x \neq x_0$ *berlaku* $|g(x) - \ell| < \varepsilon$

Di dalam kalkulus yang telah dikenal, bilangan ℓ disebut limit g(x) untuk x mendekati $x_0 \in [a,b]$, ditulis $\displaystyle \lim_{x\to x_0} g(x) = \ell$, jika untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan $\delta>0$ sehingga untuk setiap $x \in (x_0 - \delta,\ x_0 + \delta)$ dan $x \neq x_0$ berlaku $|g(x) - \ell| < \varepsilon$

Teorema 5

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = \ell \text{ jika dan hanya jika } \operatorname{Lim}_{f}\, g(x) = \ell$$
$$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad x \to x_0$$

Bukti : Ambil sebarang bilangan $\varepsilon > 0$.

(Syarat perlu) $\lim_{x \to x_0} g(x) = \ell$, berarti ada bilangan $\delta > 0$ sehingga untuk setiap

$x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$ dan $x \neq x_0$ berlaku $|g(x) - \ell| < \varepsilon$

untuk setiap $D'_{x_0} \in \mathcal{D}_{x_0}$, menurut A1, $D'_{x_0} \cap (x_0-\delta, x_0+\delta) \in \mathcal{D}_{x_0}$. Dengan mengambil

$D_{x_0} = D'_{x_0} \cap (x_0-\delta, x_0+\delta)$ diperoleh untuk setiap $x \in D_{x_0}$ dan $x \neq x_0$ berlaku

$|g(x) - \ell| < \varepsilon$

Dengan kata lain $\operatorname{Lim}_{f\, x \to x_0} g(x) = \ell$.

(Syarat cukup) $\operatorname{Lim}_{f\, x \to x_0} g(x) = \ell$, berarti ada $D_{x_0} \in \mathcal{D}_{x_0}$ sehingga untuk setiap

$x \in D_{x_0}$ dan $x \neq x_0$ berlaku $|g(x) - \ell| < \varepsilon$

Dengan demikian ada u,v sehingga $D_{x_0} = (u,v)$ dengan $u < x_0 < v$.

Ambil $\delta = \min\{x_0-u, v-x_0\}$. Jelas $\delta > 0$ dan untuk setiap $x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$ dan $x \neq x_0$

berlaku $|g(x) - \ell| < \varepsilon$

Dengan kata lain $\lim_{x \to x_0} g(x) = \ell$. ■

Nilai limit fundamental fungsi g adalah tunggal, sebab jika $\operatorname{Lim}_{f\, x \to x_0} g(x) = k$ dan

$\operatorname{Lim}_{f\, x \to x_0} g(x) = \ell$, berarti untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat selang-selang fundamental

$D'_{x_0}, D''_{x_0} \in \mathcal{D}_{x_0}$ sehingga

(i) Jika $x \in D'_{x_0}$ dan $x \neq x_0$ berlaku $|g(x) - k| < \varepsilon/3$

(1) Jika $x \in D''_{x_0}$ dan $x \neq x_0$ berlaku $|g(x) - \ell| < \varepsilon/3$

Menurut A2, $D_{x_0} = D'_{x_0} \cap D''_{x_0} \in \mathcal{D}_{x_0}$ dan jika $x \in D_{x_0}$ dengan

Teorema 6

Jika $\lim_{f\, x \to x_0} h(x) = A$ *dam* $\lim_{f\, x \to x_0} g(x) = B$ *maka*

(i) $\lim_{f\, x \to x_0} \{K.h(x)\} = K. \lim_{f\, x \to x_0} f(x) = K.A$ *dengan* $K \in \Re$

(ii) $\lim_{f\, x \to x_0} (h(x) + g(x)) = \lim_{f\, x \to x_0} h(x) + \lim_{f\, x \to x_0} g(x) = A + B$

(iii) $\lim_{f\, x \to x_0} h(x) \,.\, g(x) = \lim_{f\, x \to x_0} h(x) \,.\, \lim_{f\, x \to x_0} g(x) = A \,.\, B$

(iv) $\lim_{f\, x \to x_0} \dfrac{h(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{f\, x \to x_0} h(x)}{\lim_{f\, x \to x_0} g(x)} = \dfrac{A}{B}$, *asal* $B \neq 0$.

Definisi 7 (Darmawijaya, 1993)

Jika $\lim_{f\, x \to x_0} g(x) = g(x_0)$ *ada maka dikatakan fungsi g kontinu fundamental di* x_0.

Dengan kata lain, untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ *terdapat* $D_{x_0} \in \mathcal{D}_{x_0}$ *sehingga untuk setiap* $x \in D_{x_0}$ *berlaku* $|g(x) - g(x_0)| < \varepsilon$

Jika fungsi g kontinu fundamental di setiap titik $E \subset [a,b]$, maka dikatakan g kontinu fundamental pada E. Selanjutnya, dengan $C_f(E)$ dimaksudkan himpunan semua fungsi kontinu fundamental pada E.

Teorema 8

Jika g dan h fungsi-fungsi kontinu fundamental di $x = x_0$ *maka* $g + h$, $g.h$ *kontinu fundamental di* x_0 *dan* (g/h) *kontinu fundamental di* x_0 *asal* $h(x_0) \neq 0$.

C. Integral Mc Shane pada Selang Titik

Pengertian partisi sangat erat kaitannya dengan mendefinisikan integral Mc Shane. Begitu juga halnya jumlah Stieltjes yang juga tidak bisa terlepas dari pendefinisian integral Mc Shane. Berikut disajikan pengertian jumlah Stieltjes dan definisi integral Mc Shane berdasarkan sistim selang titik.

Definisi 8 (Pfeffer, 1993)

Diberikan fungsi volume α pada $E \subseteq R$ fungsi $f : E \rightarrow R$ dan koleksi pasangan selang titik $P = \{(A_1,x_1), (A_2,x_2), \ldots (A_p,x_p)\}$ partisi pada E Bilangan $\sigma(f,P,\alpha) = \sum_{i=1}^{p} f(x_i)\alpha(A_i)$ disebut jumlah Stieltjes α fungsi f pada E atas partisi P.

Selanjutnya integral Mc Shane yang didefinisikan berdasarkan sistim selang titik seperti definisi berikut :

Definisi 9 (Pfeffer, 1993)

Diberikan fungsi volume α pada $E \subseteq R$ fungsi $f : E \rightarrow R$ dan dikatakan terintegral Mc Shane pada E terhadap α ditulis sinkat dengan $f \in M(E\alpha)$ jika terdapat bilangan real I sehingga untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat fungsi positif δ pada E sehingga untuk setiap partisi δ - fine $P = \{(A_1,x_1),(A_2, x_2), \ldots (A_p,x_p)\}$ partisi pada E berlaku $|\sigma(f,P,\alpha) - I| < \varepsilon$ dengan $\sigma(f,P,\alpha) = \sum_{i=1}^{p} f(x_i)\alpha(A_i)$

Bilangan real I, yang dimaksud dalam definisi 9 di atas tunggal. Ketunggalan tersebut disajikan dalam teorema berikut.

Teorema 10

Diberikan fungsi volume α pada $E \subset R$. Jika $f \in M(E, \alpha)$, maka bilangan real I, yang dimaksud dalam definisi 9 tunggal.

Bukti : Andaikan ada dua bilangan real I_1 dan I_2 sebarang dan memenuhi Definisi di atas. Diberikan bilangan $\varepsilon > 0$ sebarang, menurut definisi terdapat fungsi positif δ_1 dan δ_2 pada E sehingga berlaku

$|\sigma(f, P_1, \alpha) - I_1| < \frac{\varepsilon}{2}$ untuk setiap partisi δ_1-fine P_1 pada E dan

$|\sigma(f, P_2, \alpha) - I_2| < \frac{\varepsilon}{2}$ untuk setiap partisi δ_2-fine P_2 pada E.

Diambil fungsi positif δ pada E dengan rumus $\delta(x) = \min\{\delta_1(x), \delta_2(x)\}$ untuk setiap $x \in E$. Menurut Lema diperoleh untuk setiap partisi δ- fine P pada E merupakan partisi δ_i-fine ($i = 1,2$) pada E. Oleh karena itu diperoleh

$$|I_1 - I_2| \le |I_1 - \alpha(f, P_1; \alpha)| + |\sigma(f, P_2; \alpha) - I_2| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Dengan kata lain terbukti $I_1 = I_2$ atau bilangan real I yang dimaksud dalam Definisi di atas tunggal.

Jika $f \in M(E, \alpha)$, maka bilangan real I yang terkait dalam Definisi di atas disebut nilai integral Mc Shane fungsi f pada E terhadap α dan ditulis dengan $I = (M)^B \int_E f d\alpha$.

BAB III

TUJUAN DAN MANFAAT PENELITIAN

A. Tujuan Penelitian

Berdasarkan perumusan masalah tersebut di atas maka tujuan penelitian adalah:

1. Mengkonstruksi suatu teori integral, yaitu integral Mc Shane berdasarkan sistim selang fundamental.
2. Menyelidiki sifat-sifat dan teorema-teorema tentang integral Mc Shane sistim selang fundamental
3. Menyelidiki keekivalenan antara integral Mc Shane dengan sistim selang titik dengan sistim selang fundamental.

B. Manfaat Penelitian

Manfaat dari hasil penelitian ini adalah :

1. Menambah wawasan tentang konsep-konsep selang berdasarkan sistim selang fundamental.
2. Menambah wawasan teori integral yaitu integral Mc Shane
3. Memberikan sumbangan pada para peneliti di bidang matematika terutama tentang teori integral, diantaranya dapat dibangun integral Mc Shane berdasarkan selang fundamental.

BAB IV

METODE PENELITIAN

A. Jenis Penelitian

Penelitian ini merupakan penelitian teoritik atau penelitian kepustakaan, dimulai dengan mempelajari beberapa karya ilmiah yang disajikan dalam bentuk jurnal, ataupun buku. Hasilnya disajikan dalam bentuk teori integral yang memuat definisi-definisi dan teorema-teorema yang dilengkapi bukti. Jadi metode yang digunakan adalah metode deskriptif yang bertujuan menjelaskan secara rinci temuan yang diperoleh sehubungan dengan masalah yang ingin diselesaikan.

B. Teknik Pengumpulan Data

Data penelitian ini dikumpulkan dari buku-buku, jurnal-jurnal yang menunjang penelitian, sehingga diperoleh konsep berupa teorema dan dapat dibuktikan secara sistematis, dan merupakan jawaban dari permasalahan. Adapun proses kerjanya sebagai berikut :

a. Meninjau permasalahan yang dihadapi

b. Mencari teori-teori yang relevan sebagai penunjang untuk menjawab permasalahan

c. Memodifikasi teori-teori yang berisi definisi-definisi dan teorema-teorema sehingga terjawab permasalahan.

BAB V

HASIL DAN PEMBAHASAN

A. Konstruksi Definisi Integral Mc Shane Fundamental

Konstruksi integral Mc Shane dimulai sebagai berikut. Jika $\delta(x) > 0$ untuk setiap $x \in [a,b]$, liput penuh lengkap Λ selang [a,b] adalah koleksi semua selang terbuka (u,v) dengan $x - \delta(x < u \leq x \leq v < x + \delta(x)$ untuk setiap $x \in [a,b]$. Jika Δ merupakan liput penuh lengkap selang [a,b] maka ada partisi pada [a,b] : $P([u,v);\xi)=\{a=a_0,a_1, \ldots, a_n=b : x_1,x_2, \ldots, x_n\}$ $x : -\delta(x_i)<a_{i-1}\leq x_i \leq a_i < x_i + \delta(x_i)$ yang biasa disebut partisi δ-fine atau partisi-δ pada [a,b]. Dengan terjaminnya eksistensi partisi-δ tersebut dibangun suatu integral dasar konstruktif yang dikenal dengan integral Mc Shane.

Selanjutnya berdasarkan sistem selang fundamental pada [a,b], A1 sampai dengan A6, akan dibangun suatu integral. Integral yang dihasilkan disebut integral Mc Shane fundamental.

Ambil selang [a,b] sebagai suatu sistim fundamental; berarti untuk setiap $x \in [a,b]$ terdapat suatu sistim selang fundamental $\mathcal{D}_x$ di x. Jika untuk setiap $x \in [a,b]$ diambil tepat satu $D_x \in \mathcal{D}_x$, koleksi semua D_x ditulis dengan $\mathcal{G}$. Liput Penuh Fundamental (LPF) Δ selang [a,b] adalah koleksi semua (u,v) dengan $u,v \in D_x$ dan $D_x \in \mathcal{G}$. Selanjutnya $\mathcal{G}$ disebut dengan generator LPF Δ selang [a,b].

Jika Λ suatu LPF selang [a,b] dengan $\mathcal{G}$ sebagai generatornya, maka ada partisi $-\Delta$. $P = ([u,v];\xi)=\{a = a_0, a_1,..., a_n = b; x_1, x_2, x_3, ..., x_n\}$ pada [a,b]; dengan $a_{i-1},a_i \in D_{x_i}$, $a_{i-1} \le x_i \le a_i$ dan $D_{x_i} \in \mathcal{G}$. Jamininan adanya partisi $-\Delta$ pada [a,b] telah ditunjukkan pada teorema 2 dan 3 pada Bab II. Dengan menggunakan partisi $-\Delta$ tersebut disusun suatu integral pada [a,b]. Integral tersebut dikenal dengan integral Mc Shane fundamental.

Di dalam pengkonstruksian integral Mc Shane fundamental diperlukan definisi integral Mc Shane pada sistim selang titik. Oleh karena itu diingatkan kembali definisi integral Mc Shane selang titik. Seperti Definisi 5.1.1. berikut

Definisi 5.1.1. (Integral Mc Shane selang titik)

Diberikan fungsi volume α pada sel $E \subset \Re$. Fungsi $f : E \to \Re$ dikatakan terintegral Mc Shane pada E terhadap α ditulis singkat dengan $f \in M(E, \alpha)$, jika terdapat bilangan real I sehingga untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat fungsi positif δ pada E sehingga untuk setiap partisi δ - fine $P=\{(A,x)\} = \{(A_1,x_1) ... (A_p,x_p)\}$ pada E berlaku

$$|\sigma(f,P;\alpha)-I| < \varepsilon \; dengan \; \sigma(f,P;\alpha)=\sum_{i=1}^{p} f(x_i)\alpha(A_i)$$

Dalam pengkonstruksian integral Mc Shane eksistensi partisi $-\Delta$ pada [a,b] harus dijamin. Jika untuk setiap x $\in$[a,b] liput penuh lengkap selang [a,b] maka terdapat partisi pada [a,b] $P=\{(A,x)\} = \{(A_1,x_1) ... (A_p,x_p)\}$ yang biasa disebut partisi δ - *fine*. Kemudian dengan menggunakan aksioma A_1 sampai A_6 sistim selang fundamental disusun bahwa untuk setiap x $\in$[a,b] terdapat $D_x \in \mathcal{D}_x$ dengan Λ liput penuh fundamental selang [a,b] dengan $\mathcal{G}$ sebagai generatornya maka ada partisi - Δ $P = ([u,v];\xi)=\{a = a_0, a_1,\ldots, a_n = b; x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n\}$ pada $[a,b]$; dengan $a_{i-1},a_i \in D_{x_i}$, $a_{i-1} \leq x_i \leq a_i$ dan $D_{x_i} \in \mathcal{G}$.

Menurut teorema sebelumnya eksistensi partisi - Δ pada **[a,b]** terjamin. Oleh karena sudah adanya jaminan partisi - Δ pada sistim selang fundamental maka disusun pengertian integral Mc Shane fundamental seperti definisi berikut :

Definisi 5.1.2

Diberikan fungsi volume α pada sel $E \subset \Re$. Fungsi $g:[a,b] \rightarrow \Re$ dikatakan terintegral Mc Shane fundamental atau terintegral M_f pada selang $[a,b]$ terhadap α atau ditulis dengan $g \in M_f([a,b],\alpha)$ jika ada bilangan A sehingga untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ ada LPF Δ selang $[a,b]$ sehingga untuk setiap partisi - Δ

$P = ([u,v];\xi) = \{a = a_0, a_1, \ldots, a_n = b; x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n\}$ berakibat

$$\sigma(f,P;\alpha)\ \left|(P)\sum g(\xi)\alpha(v-u) - A\right| = \left|\sum_{i=1}^{n} g(x_i)\alpha(a_i - a_{i-1}) - A\right| < \varepsilon$$

Teorema 5.1.3

Diberikan fungsi volume α pada $[a,b]$. Fungsi $g:[a,b] \rightarrow \Re$ terintegral Mc Shane fundamental pada $[a,b]$ maka bilangan A dalam Definisi 4.1.2 tunggal.

Bukti : Andaikan ada bilangan A_1 dan A_2 yang memenuhi definisi di atas. Ambil sebarang bilangan $\varepsilon > 0$.

Ada LPF Δ_1 selang [a,b] sehingga untuk setiap partisi-Δ_1 pada [a,b] $P_1=([u',v'];\xi)$

berlaku $|\sigma(g,P_1,\alpha)-A_1| = |(P_1)\sum g(\xi')\alpha(v'-u')-A_1| < \varepsilon$

Ada LPF Δ_2 selang [a,b] sehingga untuk setiap partisi-Δ_2 pada [a,b] $P_2=([u'',v''];\xi'')$ berlaku $|\sigma(g,P_2,\alpha)-A_2| = |(P_2)\sum g(\xi'')\alpha(v''-u'')-A_2| < \varepsilon$

Katakan Δ_1 dibangkitkan oleh $\{D'_x\}$ dan Δ_2 dibangkitkan oleh $\{D''_x\}$, maka $\{D_x\}$ dengan $D_x = D'_x \cap D''_x$ membangkitkan LPF Δ. Dengan demikian untuk setiap partisi -Δ P = ([u,v];ξ) pada [a,b] berlaku

$$|(P)\sum g(\xi)\alpha(v-u)-A_1| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ dan } |(P)\sum g(\xi)\alpha(v-u)-A_2| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Karena partisi -Δ P merupakan pula partisi -Δ_i (i=1,2) maka diperoleh

$$|A_1 - A_2| \le |A_1 - \sigma(g,P,\alpha)| + |\sigma(g,P,\alpha) - A_2|$$

$$|A_1 - A_2| \le |(P)\sum g(\xi)\alpha(v-u)-A_1| + |(P)\sum g(\xi)\alpha(v-u)-A_2| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Jadi $A_1 = A_2$.■

Untuk selanjutnya bilangan A dalam Definisi 4.1.2 disebut nilai integral M_f fungsi g pada [a,b] dan dituliskan dengan $A = (M_f)\int_a^b g(\alpha)\, d\alpha$

Dengan M_f ([a,b],α) adalah himpunan semua fungsi yang terintegral -M_f pada [a,b].

B. Sifat-sifat Integral Mc Shane Fundamental

Beberapa sifat fungsi yang terintegral $-M_f$ dibahas dalam teorema-teorema berikut.

Teorema 5.2.1

$M_f([a,b],\alpha)$ merupakan ruang linear, yaitu jika h, $g \in M_f([a,b],\alpha)$ dan c skalar, maka

(i). $c\,h \in M_f([a,b],\alpha)$ dan $(M_f)\int_a^b ch\, d\alpha = c\,(M_f)\int_a^b h d\alpha$

(ii). $h + g \in M_f([a,b],\alpha)$ dan $(M_f)\int_a^b (h+g)d\alpha = (M_f)\int_a^b hd\alpha + (M_f)\int_a^b gd\alpha$

Bukti : Ambil sebarang bilangan $\varepsilon > 0$.

Karena h, g $\varepsilon M_f([a,b],\alpha)$ maka ada LPF Δ' dan LPF Δ'' selang [a.b] sehingga untuk setiap partisi-$\Delta'P=([u',v'];\xi')$ dan partisi-$\Delta''P''=([u''v''];\xi'')$ dan pada [a,b] berlaku $|\sigma(h,P,\alpha) - A'| = |(P)\sum g(\xi')\alpha(v'-u') - A'| < \varepsilon/2$

$|\sigma(g,P_2;\alpha) - A''| = |(P'')\sum h(\xi'')\alpha(v''-u'') - A''| < \varepsilon/2$

dengan $A' = (M_f)\int_a^b hd\alpha$ dan $A'' = (M_f)\int_a^b gd\alpha$

Jika Δ' dibangkitkan oleh $\{D'_x\}$ dan Δ'' dibangkitkan oleh $\{D''_x\}$, maka $\{D_x\}$, dengan $D_x = D'_x \cap D''_x$, akan membangkitkan suatu LPF selang [a,b] pula; namakan LPF yang dibangkitkannya dengan LPF Δ.

Jadi untuk setiap partisi -Δ $P = ([u,v];\xi)$ pada $[a,b]$, diperoleh:

$|\sigma(ch, P;\alpha) - cA'| =$

(i). $(P')\sum ch(\xi')\alpha(v'-u') - cA'| = |C||(P')\sum h(\xi')\alpha(v'-u') - A'| < |c|\varepsilon/2$ yang

berarti $ch \in M_f([a,b],\alpha)$ dan $(M_f)\int_a^b ch d\alpha = c(M_f)\int_a^b h d\alpha$

(ii). $|(P)\sum(h(\xi) + g(\xi))\alpha(v-u) - (A'+A'')|$

$\leq |(P)\sum h(\xi)\alpha(v-u) - A'| + |(P)\sum g(\xi)\alpha(v-u) - A''|$

$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

Jadi $h+g \in M_f([a,b],\alpha)$, dan$(M_f)\int_a^b (h+g)d\alpha = (M_f)\int_a^b h d\alpha + (M_f)\int_a^b g d\alpha$. ■

Teorema 5.2.2

Diketahui $g \in M_f([a,b],\alpha)$ dan $g \in M_f([b,c],\alpha)$ maka $g \in M_f([a,c],\alpha$

dan $(M_f)\int_a^c g d\alpha = (M_f)\int_a^b g d\alpha + (M_f)\int_b^c g d\alpha$

Bukti : Ambil sebarang bilangan $\varepsilon > 0$.

$g \in M_f([a,b],\alpha)$ maka ada LPF Δ' selang $[a,b]$ sehingga untuk partisi-Δ'

$P'=([u'v'];\xi')$ pada selang $[a,b]$ berlaku $|(P')\sum g(\xi')\alpha(v'-u') - A'| < \varepsilon/2$

dengan $A' = (M_f)\int_a^b g d\alpha$

$g \in M_f([b,c],\alpha)$ maka ada LPF Δ'' selang $[b,c]$ sehingga untuk setiap partisi-Δ'' $P''=([u'',v''];\xi'')$ pada selang $[b,c]$ berlaku

$$\left|(P'')\sum g(\xi'')\alpha(v''-u'') - A''\right| < \varepsilon/2 \text{ dengan } A'' = (M_f)\int_b^c g d\alpha$$

sebut $\{D'_x\}$ dan $\{D''_x\}$ berturut-turut pembangkit LPF Δ' dan LPF Δ'', dibentuk LPF Δ selang $[a,c]$ yang dibangkitkan oleh $\{D_x\}$, dengan

$$D_x = \begin{cases} D'_x & \text{, jika } x \in [a,b] \\ D'_b \cap D''_b & \text{, jika } x = b \\ D''_x & \text{, jika } x \in [b,c] \end{cases}$$

Jika $P = \{a=a_0, a_1, \ldots, a_n = c; x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ merupakan partisi -Δ pada $[a,c]$, maka tentu $b \in [a_{k-1}, a_k]$ untuk suatu k. Dengan demikian dapat dipahami bahwa $P' = \{a=a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}, b; x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, b\}$

Merupakan partisi -Δ'' pada $[a,b]$ dan

$$P'' = \{b, a_k, a_{k-1}, \ldots, a_n, =c; b, x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n\}$$

Merupakan partisi-Δ'' pada $[b,c]$. Oleh karena itu

$$\left|(P)\sum g(\xi)\alpha(v-u) - (A'+A'')\right| \leq \left|(P')\sum g(\xi)\alpha(v-u) - A'\right|$$

$$+\left|(P'')\sum g(\xi)\alpha(v-u) - A''\right| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 < \varepsilon$$

Dengan kata lain terbukti $g \in M_f([a,c],\alpha)$ dan

$$(M_f)\int_a^c g d\alpha = A'+A'' = (M_f)\int_a^b g d\alpha + (M_f)\int_b^c g d\alpha . \blacksquare$$

Lemma 5.2.3

Jika himpunan E berukuran nol, maka untuk setiap bilangan ε > 0 terdapat koleksi terhitung selang-selang terbuka {E_i; $I_i \in \mathcal{N}$} sehingga

$$E \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \; dan \; \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i) < \varepsilon$$

Dengan $\mu(E_i)$ menyatakan panjang selang E_i.

Lemma 5.2.4

Jika {E_n} barisan himpunan berukuran nol, maka $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ berukuran nol.

Bukti : Ambil sebarang bilangan ε > 0.

Karena E_n berukuran nol, maka dapat dipilih koleksi terhitung selang-selang terbuka {E_{ni} ; i ∈ $\mathcal{N}$} sedemikian sehingga $E_n \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} E_{ni}$ dan $\sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_{ni}) < \frac{\varepsilon}{2^n}$, untuk setiap n. Jadi {$E_{ni}$; i ∈ $\mathcal{N}$} merupakan koleksi terhitung selang-selang terbuka dengan $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{\infty} E_{ni}$ dan $\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_{ni}) \; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} < \varepsilon$

Jadi E berukuran nol. ■

Definisi 5.2.5

Misalkan {E_n} barisan himpunan berukuran nol dan $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$. Fungsi g yang didefinisikan dengan $g(x) = \begin{cases} |g(x)| \leq 2^n & jika \; x \in E_n \; (n = 1,2,3,...) \\ g(x) = 0 & jika \; x \notin E \end{cases}$

dikatakan fungsi nol.

Teorema 5.2.6

Fungsi nol terintegral M_f ke nol pada setiap selang [a,b].

Bukti : Ambil sebarang bilangan $\varepsilon > 0$. Ambil S_n gabungan terhitung selang-selang terbuka yang menutup E.

Misalkan $S_n = \bigcup_{i=1}^{\infty} I_{ni}$ dengan $\mu(S_n) = \bigcup_{i=1}^{\infty} \mu(I_{ni}) < \frac{\varepsilon}{4^n}$.

Didefinisikan $D_\xi \subseteq S_n$ untuk suatu n, jika $\xi \in E$.

Ambil partisi -Δ P = {a = a_0, a_1, a_n = b;x_1,x_2, ..., x_n} = ([u,v];ξ) selang [a,b], maka berlaku | (P) Σ g(ξ)α(v-u) |

$$\leq |(P)\sum_{\xi\in E} g(\xi)\alpha(v-u)| + |(P)\sum_{\xi\in E} g(\xi)\alpha(v-u)|$$

$$\leq (P)\sum_{i=1}^{n} |g(\xi)|\,|\alpha|\,|u-v|$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} 2^i \mu(S_i) < \sum_{i=1}^{n} 2^i \frac{\varepsilon}{4^i} \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon}{4^i} = \varepsilon$$

Jadi g terintegral $-M_f$ ke nol pada [a,b]. ■

Suatu sifat "D" dikatakan berlaku hampir di mana-mana, Jika "D" berlaku untuk setiap semua kecuali pada suatu himpunan yang berukuran nol. Jadi h(x)=g(x) hampir dimana-mana pada [a,b], berarti himpunan $\{x\in[a,b];h(x)\neq g(x)\}$ berukuran nol.

Definisi 5.2.7

Jika fungsi $g : [a,b] \to \Re$ terintegral -M_f pada $[a,b]$ dan $|g(x)| \le K$ untuk setiap $x \in [a,b]$, maka $\left|(M_f)\int_a^b g d\alpha\right| \le K(b-a)$.

Bukti : Ambil sebarang bilangan $\varepsilon > 0$.

Karena $g \in M_f([a,b],\alpha)$ maka ada LPF Δ selang $[a,b]$ sehingga untuk setiap partisi -Δ $P=([u,v];\xi)$ pada $[a,b]$ berlaku $\left|(M_f)\int_a^b g d\alpha - (P)\sum g(\xi)\alpha(v-u)\right| < \varepsilon$.

$$\left|(M_f)\int_a^b g d\alpha\right| + \left|-(P)\sum g(\xi)\alpha(v-u)\right| < \left|(M_f)\int_a^b g d\alpha - (P)\sum g(\xi)\alpha(v-u)\right| < \varepsilon$$

Dengan demikian diperoleh

$$\left|(M_f)\int_a^b g d\alpha\right| + \left|(P)\sum g(\xi)\alpha(v-u)\right| + \varepsilon \le (P)\left|\sum g(\xi)\right|\left|\alpha\right|\left|(v-u)\right| + \varepsilon \le K(b-a) + \varepsilon.$$

Karena berlaku untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$, berarti

$$\left|(M_f)\int_a^b g d\alpha\right| \le K(b-a).\blacksquare$$

Teorema 5.2.8:

Jika $h,g: [a,b] \to \Re$ fungsi-fungsi terintegral -M_f pada $[a,b]$ dan $h(x) \le g(x)$ hampir di mana-mana pada $[a,b,]$ maka $(M_f)\int_a^b h d\alpha \le (M_f)\int_a^b g d\alpha$.

Bukti : Dianggap $h(x) \le g(x)$ untuk setiap $x \in [a,b]$. Ambil sebarang bilangan $\varepsilon>0$. Karena $h \in M_f([a,b],\alpha)$, maka ada LPF Δ_1 selang $[a,b]$ sehingga untuk setiap partisi Δ_1 $P_1 =([u',v'];\xi')$ pada $[a,b]$ berlaku

$$\left|(P_1)\sum h(\xi')\alpha(v'-u') - (M_f)\int_a^b h d\alpha\right| < \varepsilon/2$$

Karena $g \in M_f([a,b],\alpha)$, maka ada LPF Δ_2 selang [a,b] sehingga untuk setiap partisi Δ_2 $P_2 = ([u'',v''];\xi'')$ pada [a,b] berlaku

$$\left|(P_2)\sum h(\xi'')\alpha(v''-u'') - (M_f)\int_a^b g\,d\alpha\right| < \varepsilon/2$$

Sebut $\{D'_x\}$ dan $\{D''_x\}$ berturut-turut merupakan generator LPF Δ_1 dan LPF Δ_2. Ambil $D_x = D'_x \cap D''_x$, maka $\{D_x\}$ menjadi generator LPF Δ sehingga untuk setiap partisi -Δ

$P = ([u,v];\xi)$ pada [a,b] berlaku $\left|(P)\sum h(\xi)\alpha(v-u) - (M_f)\int_a^b h\,d\alpha\right| < \varepsilon/2$ dan

$$\left|(P)\sum h(\xi)\alpha(v-u) - (M_f)\int_a^b g\,d\alpha\right| < \varepsilon/2$$

Dengan demikian diperoleh

$$\begin{aligned}(M_f)\int_a^b h\,d\alpha - \varepsilon/2 &< (P)\sum h(\xi)\alpha(v-u)\\ &\le (P)\sum g(\xi)\alpha(v-u)\\ &< (M_f)\int_a^b g + \varepsilon/2\end{aligned}$$

Karena berlaku untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$, maka diperoleh

$(M_f)\int_a^b h\,d\alpha \le (M_f)\int_a^b g\,d\alpha$.■

Akibat 5.2.9:

(i) Jika $h,g : [a,b] \to \Re$ terintegrasi -M_f pada [a,b] dan $h(x) = g(x)$ hampir di mana-mana pada [a,b] maka $(M_f)\int_a^b h\,d\alpha = (M_f)\int_a^b g\,d\alpha$

(ii) Jika $h, |h| : [a,b] \to \Re$ terintegral M_f pada [a,b] maka

$$\left|(M_f)\int_a^b h\,d\alpha\right| \le (M_f)\int_a^b |h|\,d\alpha$$

Bukti :

(i) Langsung menggunakan Teorema 5.2.8

(ii) Dipunyai $-|h| \leq h\ |h|$. Dengan menggunakan Teorema 5.2.8 diperoleh

$$(M_f)\int_a^b |hd\alpha| \leq (M_f)\int_a^b hd\alpha \leq (M_f)\int_a^b |hd\alpha| \text{ atau}$$

$$-(M_f)\int_a^b |hd\alpha| \leq (M_f)\int_a^b hd\alpha \leq (M_f)\int_a^b |hd\alpha| \text{ atau}$$

$$\left|(M_f)\int_a^b hd\alpha\right| \leq (M_f)\int_a^b |hd\alpha| \text{ atau}$$

Teorema 5.2.10 :

Jika $g : [a,b] \rightarrow \Re$ terintegral M_f pada $[a,b]$ dengan primitif M_f G, maka G kontinu fundamental pada $[a,b]$.

Bukti : Ambil sebarang $x_0 \in [a,b]$. Ambil sebarang bilangan $\varepsilon > 0$. Karena $g \in M_f[a,b]$, maka ada LPF Δ selang $[a,b]$ sehingga untuk setiap partisi $-\Delta$ $p=([u,v];\xi)$, pada $[a,b]$ berlaku

$$\left|(P)\sum g(\xi)\alpha(v-u)-(M_f)\int_a^b gd\alpha\right| < \varepsilon/4$$

dan menurut Lemma

$$\left|(P)\sum_1 g(\xi)\alpha(v-u)-(M_f)\int_a^b gd\alpha\right| < \varepsilon/2$$

Untuk setiap partisi-Δ P pada $[a,b]$ selalu ada selang bagian $[u,v]$ yang memuat x_0.

Misalkan M : $\sup\{|g(\xi)|; x_0, \xi \in [u,v]\}$ dengan sup diambil atas semua partisi -Δ selang [a,b].

Ambil n_{x_0} : $min\{|v - x_0|, |u - x_0|, \frac{\varepsilon}{2}\}$ dan menurut A_1 untuk sembarang $D_{x0}\,\mathcal{D}_{x_0}$,

$D'_{x_0} = D_{x_0} \cap (x_0 - n_{x_0}, x_0 + n_{x_0}) \in \mathcal{D}_{x_0}$ jika $\xi \in [a,b]$ dengan $\xi \in D'_{x0}$ maka

$$|G(x_0) - G(\xi)| \le |G(x_0) - G(\xi) - g(\xi)(x_0 - \xi)| + |g(\xi)(x_0 - \xi)| < \frac{\varepsilon}{2} + M\left(\frac{\varepsilon}{2M}\right)$$

$$= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Jadi G kontinu fundamental di x_0. Karena x_0 sebarang anggota [a,b], maka terbukti G kontinu fundamental pada [a,b]. ■

Dalam pembahasan selanjutnya diperlihatkan bahwa setiap fungsi f yang terintegral Mc Shane pada sel E terhadap α, terintegral Mc Shane pula pada setiap sel $B \subset E$ terhadap α. Namun dalam menentukan $(M)\int_B f d\alpha$ akan mendapat kesulitan, karena tidak dapat menggunakan definisi sebelumnya. Oleh karena itu diperlukan alat bantu untuk menentukan integral tersebut yang dikenal dengan kriteria Cauchy berikut ini :

Teorema 5.2.11 : (Kriteria Cauchy)

Jika $g \in M_f[\alpha,\beta]$ untuk setiap $[\alpha,\beta] \subseteq [a,b]$ dengan $a < \alpha < \beta < b$ dan $g\text{-}\lim_{\substack{\alpha \to a_+ \\ \beta \to b_-}}$ $(M_f)\int_\alpha^\beta g d\alpha = I$ ada, maka $g \in M_f([a,b],\alpha)$ dan $(M_f)\int_a^b g d\alpha = I$.

Bukti : Cukup dibuktikan bahwa jika $g \in M_f([a,\beta],\alpha)$ untuk setiap $a < \beta < b$ dan

$f - \lim_{\beta \to b^-} (M_f) \int_a^\beta g d\alpha = I$, maka $g \in M_f([a,b],\alpha)$ dan $(M_f) \int_a^\beta g d\alpha = I$.

Misalkan $a = \beta_0 < \beta_1 < \ldots < b$ dan $\lim_{n \to \infty} \beta_n = b$.

Karena $g \in M_f[\beta_{k-1}, \beta_k]$ maka ada bilangan I_k sehingga untuki setiap bilangan $\varepsilon > 0$

ada LPF Δ_k selang $[\beta_{k-1}, \beta_k]$ sedemikian sehingga untuk setiap partisi $-\Delta_k$ p_k pada

$[\beta_{k-1}, \beta_k]$ berlaku $|(p_k)\Sigma g(\xi)\alpha(\text{v-untuk}) - I_k| < \varepsilon/2^k$

Dengan $I_k = (M_f) \int_{\beta_{k-1}}^{\beta_k} g d\alpha$

Karena $f - \lim_{\beta \to b^-} (M_f) \int_a^\beta g d\alpha = I$, maka untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ ada $\delta > 0$ dan

$D_b \in \mathcal{D}_b$ sehingga

$$| I - (M_f) \int_a^\beta g d\alpha | < \varepsilon \text{ dan } | (b-\beta)\, g(\beta) | < \varepsilon$$

untuk setiap $\beta \in A = D_b \cap (b - \delta, b)$.

Jelas bahwa $\Delta = (\cup\ \Delta_k) \cup \{[\beta,b];\ \beta \in A\}$ merupakan LPF selang $[a,b]$ sehingga

jika $P = \{a = a_0, a_1, \ldots, a_n = b;\ x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ partisi $-\Delta$ pada $[a,b]$, maka

$$| I - \sum_{k=1}^{n} g(x_k)\alpha(a_k - a_{k-1})| \le |(M_f) \int_\alpha^{\alpha_{n-1}} g d\alpha - \sum_{k=1}^{n-1} g(x_k)\alpha(a_k - a_{k-1}) |$$

$$+ | I - (M_f) \int_\alpha^{\alpha_{n-1}} g d\alpha | + | g(b)\, \alpha(b - a_{n-1})|$$

$$< \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\varepsilon}{2^k} + \varepsilon + \varepsilon < 3\varepsilon.$$

Berarti $g \in M_f([a,b],\alpha)$ dan $(M_f)\int_a^b g d\alpha = I$ ■

Selanjutnya dibahas bahwa setiap fungsi f yang terintegral Mc Shane pada sel E terhadap α, terintegral Mc Shane pula pada setiap sel $B \subset E$ terhadap α yang disajikan pada teorema berikut ini.

Teorema 5.2.12 :

Diberikan fungsi volume α pada sel $E \subset R$. Jika $f \in M(E,\alpha)$, maka $f \in M(B,\alpha)$ untuk setiap sel $B \subset R$.

Bukti : Diberikan bilangan $\varepsilon > 0$ sebarang. Menurut Kriteria Cauchy terdapat LPF Δ pada E sehingga untuk setiap partisi Δ P dan Q pada E berlaku

$|\sigma(f,P:\alpha) - \sigma(f,Q:\alpha)| < \varepsilon$

Karena sel $B \subset E$, maka terdapat koleksi berhingga C dari sel-sel yang tidak tumpang tindah sehingga $\overline{E-B} = \bigcup_{c\in C} c$. Selanjutnya menurut Lema Cousin's terdapat partisi Δ - P_c pada c untuk setiap $c \in G$. Jika P_B dan Q_B partisi Δ pada B, diperoleh

$P = P_B \cup \left(\bigcup_{c\in C} c\right)$ dan $Q = Q_B \cup \left(\bigcup_{c\in C} C\right)$ merupakan partisi Δ pada E dan

$\sigma(f, P;\alpha) = \sigma(f,P_B;\alpha) + \sum_{C\in C} \sigma(f,P_c;\alpha)$

$\sigma(f, Q;\alpha) = \sigma(f,Q_B;\alpha) + \sum_{C\in C} \sigma(f,P_c;\alpha)$

Oleh karena itu, diperoleh

$$|\sigma(f, P;\alpha) - \sigma(f,Q_B;\alpha)|$$

$$= |\sigma(f, P;\alpha) - \sum_{C\in\mathcal{C}}\sigma(f,P_C;\alpha) - \sigma(f,P;\alpha) + \sum_{C\in\mathcal{C}}\sigma(f,P_C;\alpha)|$$

$$= |\sigma(f,P;\alpha) - \sigma(f,Q;\alpha)| < \varepsilon$$

Jadi terbukti bahwa $f \in M(B, \alpha)$ untuk setiap sel $B \subset E$. ■

Contoh penggunaan teorema Cuchy adalah untuk membuktikan lema yang disajikan berikut ini.

Lema 5.2.13:

Diberikan fungsi volume α pada sel $E \subset R$. Fungsi $f \in M(E,\alpha)$ jika dan hanya jika untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat LPF Δ pada E sehingga untuk setiap dua partisi Δ- pada E berlaku $\sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(y_i)|\alpha(A_i) < \varepsilon$.

Bukti : (Syarat perlu) Diberikan bilangan $\varepsilon > 0$ sebarang. Menurut Kriteria Cauchy terdapat LPF Δ pada E sehingga untuk setiap partisi Δ- P dan Q pada E berlaku $|\sigma(f,P;\alpha) - \sigma(f,Q,\alpha)| < \varepsilon$.

Perhatikan partisi Δ $P = \{(A_1,x_1), \ldots, (A_n,x_n)\}$ dan $Q = \{(A_1,y_1), \ldots, (A_n,y_n)\}$ pada E. Diambil bilangan bulat $0 \le k \le n$ sehingga

$f(x_i) \ge f(y_i)$ untuk $i = 1,2, \ldots, k$ dan

$f(x_i) < f(y_i)$ untuk $i = k\text{-}1, \ldots, n$

Dibentuk partisi Δ

$R = \{(A_1,x_1), \ldots (A_k,x_k),(A_{k+1},y_{k-1}), \ldots, (A_n,y_n)$ dan

$S = \{(A_1,Y_1), \ldots (A_k,Y_k),(A_{k+1},x_{k-1}), \ldots, (A_n,x_n)$

merupakan partisi Δ- pada E, sebab

$A_k \subset B(x_k,\delta(x_k)) \cap B(y_k,\delta(y_k))$

Jadi untuk setiap partisi Δ- pada E, diperoleh

$\varepsilon > |\sigma(f,R;\alpha) - \sigma(f,S;\alpha)|$

$$= \left|\left(\sum_{i=1}^{k} f(x_i)\alpha(A_i) + \sum_{i=k+1}^{n} f(y_i)\alpha(A_i)\right) - \left(\sum_{i=1}^{k} f(y_i)\alpha(A_i) + \sum_{i=k+1}^{n} f(x_i)\alpha(A_i)\right)\right|$$

$$= \sum_{i=1}^{k} [f(x_i) - f(y_i)]\alpha(A_i) - \sum_{i=k+1}^{n} [f(y_i) - f(x_i)]\alpha(A_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{k} |f(x_i) - f(y_i)|\alpha(A_i)$$

(Syarat cukup) Diberikan bilangan $\varepsilon > 0$ sebarang. Terdapat LPF Δ pada E sehingga untuk setiap partisi Δ- pada E berlaku $\varepsilon > \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(y_i)|\alpha(A_i)$

Diambil bilangan bulat k dengan $0 \le k \le n$ sehingga diperoleh

$$\varepsilon > \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(y_i)|\alpha(A_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{k} [f(x_i) - f(y_i)]\alpha(A_i) + \sum_{i=k+1}^{n} [f(y_i) - f(x_i)]\alpha(A_i)$$

$$= \left|\left(\sum_{i=1}^{k} f(x_i)\alpha(A_i) + \sum_{i=k+1}^{n} f(y_i)\alpha(A_i)\right) - \left(\sum_{i=1}^{k} f(y_i)\alpha(A_i) + \sum_{i=k+1}^{n} f(x_i)\alpha(A_i)\right)\right|$$

$$= |\sigma(f,R;\alpha) - \sigma(f,S;\alpha)|$$

dengan $R = \{(A_1,x_1), \dots (A_k,x_k),(A_{k+1},y_{k-1}), \dots, (A_n,y_n)$ dan

$s = \{(A_1,Y_1), \dots (A_k,Y_k),(A_{k+1},x_{k-1}), \dots, (A_n,x_n)$

merupakan partisi Δ- pada E.

Jadi terbukti bahwa $f \in M(E,\alpha)$. ■

C. Ekivalensi Integral Mc Shane Sistim Selang Titik dengan Sistim Selang Fundamental

Keterkaitan integral Mc Shane pada sistim selang titik dengan sistim selang fundamental ditunjukkan dengan teorema berikut:

Teorema

Fungsi $g \in M([a,b],\alpha)$ jika dan hanya jika $g \in M_f([a,b],\alpha)$

Bukti : Ambil sebarang $\varepsilon > 0$.

(Syarat perlu) $g \in M([a,b],\alpha)$, berarti ada A dan ada $\delta(x)>0$ sehingga untuk setiap partisi -δ $P=([u,v];\xi)$ pada [a,b] berlaku $|(P) \sum g(\xi)\alpha(u-v)-A| < \varepsilon$.

Menurut A1, untuk sebarang selang fundamental $D_x \in \mathcal{D}_\tau$ berlaku

$D'_x=D_x \cap (x-\delta(x),x+\delta(x)) \in \mathcal{D}_\tau$. $\{D'_x\}$ membangkitkan LPF Δ selang [a,b] sehingga untuk setiap partisi -Δ $P = ([u,v];\xi)$, yang juga merupakan partisi -δ, pada [a,b].

berlaku $|(P) \sum g(\xi)\alpha(u-v)-A| < \varepsilon$.

Dengan kata lain $g \in M_f([a,b],\alpha)$.

(Syarat cukup)

$g \in M_f([a,b],\alpha)$ berarti ada A dan ada LPF Δ sehingga untuk setiap partisi-Δ sehingga untuk setiap partisi-Δ $P=([u,v],\xi)$ pada $[a,b]$ berlaku $|(P)\sum g(\xi)\alpha(u-v)-A|<\varepsilon$. Katakan $\{D_x=(\alpha_x,\beta_x)\}$ generator untuk LPF Δ.

Ambil $\delta(x)=\min\{x-\alpha_x,\beta_x-x\}$, diperoleh $\delta(x)>0$ dan untuk setiap partisi -δ, yang juga merupakan partisi -Δ, $P=([u,v];\xi)$ pada $[a,b]$ berlaku $|(P)\sum g(\xi)\alpha(u-v)-A|<\varepsilon$.

Dengan kata lain $g \in M[a,b]$. ■

BAB VI

KESIMPULAN

Berdasarkan pembahasan yang telah diuraikan pada bab sebelumnya diperoleh hasil sebagai berikut :

1. Diberikan fungsi volume α pada sel $E \subset \Re$. Fungsi $g:[a,b] \rightarrow \Re$ dikatakan terintegral Mc Shane fundamental M_f pada selang [a,b] terhadap α atau ditulis dengan $g \in M_f([a,b],\alpha)$ jika ada bilangan A sehingga untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ ada LPF Δ selang [a,b] sehingga untuk setiap partisi - Δ

   $P = ([u,v];\xi) = \{a = a_0, a_1, \ldots, a_n = b; x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n\}$ berakibat

   $$\alpha(f,P;\alpha) = \left|(P)\sum g(\xi)\alpha(v-u) - A\right| = \left|\sum_{i=1}^{n} g(x_i)\alpha(a_i - a_{i-1}) - A\right| < \varepsilon$$

2. Sifat-sifat yang dimiliki integral Mc Shane pada [a,b] adalah :

   (i) Diberikan fungsi volume α pada [a,b]. Fungsi $g:[a,b] \rightarrow \Re$ terintegral Mc Shane fundamental pada [a,b] maka bilangan A yang dimaksud tunggal.

   (ii) Diberikan fungsi volume α pada [a,b]

   (a) $M_f([a,b],\alpha)$ merupakan ruang linear, yaitu jika h, $g \in M_f([a,b],\alpha)$ dan c skalar, maka

   (1) $ch \in M_f([a,b],\alpha)$ dan $(M_f)\,chd\alpha = c\,(M_f)\int_a^b hd\alpha$

   (2) $h+g \in M_f([a,b],\alpha)$ dan $(M_f)\int_a^b (h+g)d\alpha = (M_f)\int_a^b hd\alpha + (M_f)\int_a^b gd\alpha$

(b) Diketahui $h \in M_f([a,b],\alpha)$ dan $g \in M_f([b,c],\alpha)$, maka $g \in M_f([a,c],\alpha)$

dan $(M_f)\int_a^c g d\alpha = (M_f)\int_a^b g d\alpha + (M_f)\int_b^c g d\alpha$

(c) Fungsi nol terintegral M_f ke nol pada setiap selang [a,b]

(d) Jika fungsi $g : [a,b] \to \Re$ terintegral M_f pada [a,b] dan $|g(x)| \leq K$

untuk setiap $x \in [a,b]$, maka $\left|(M_f)\int_a^b g d\alpha\right| < K\,\alpha(b-a)$.

(e) Jika $h,g: [a,b] \to \Re$ fungsi-fungsi terintegral $-M_f$ pada [a,b] dan

$h(x) \leq g(x)$ hampir di mana-mana pada [a,b,] maka

$(M_f)\int_a^b h d\alpha \leq (M_f)\int_a^b g d\alpha$.

(f) Jika $g : [a,b] \to \Re$ terintegrasi $-M_f$ pada [a,b] dengan primitif $-M_f$ G, maka G kontinu fundamental pada [a,b].

3. Integral Mc Shane pada sistim selang titik ekivalen dengan sistim selang fundamental, yaitu fungsi $g \in M([a,b],\alpha)$ jika dan hanya jika $g \in M_f([a,b],\alpha)$.

DAFTAR PUSTAKA

Damawijaya (1993). *A Fundalmental Integral on the Real Line*. Proceedings of the Asian Mathematical Conference-Hongkong 13 – 18 Agustus 1993.

Dirjen Dikti (2002). *Panduan Pelaksanaan Penelitian dan Pengabdian*, Masyarakat. Jakarta DP3M. Dirjen Dikti

Gordon, A Russel (1994). *The Integrals of Lebesgue, Denjoy, and Hendestok* American Mathahematical Sociaty

Kubota, Y. (1980). *A Direct proof that the RC Integral is Eguivalent to D Integral.* Proccedings of the americans Mathematical Society Vol. 80. 293 – 296.

Pfeffer, F Washek (1993). *The Riemann Approach to integration* Cambritge University Press

Thomson, B (1980). *On full Covering Properties* Real Analysis Exchange. Vol. 6

Yee, Peng Lee, (1989). *Lanzhau Leetures on Hentock Integration.* World Scientific