MILIK UPT PERPUSTAKAAN
IKIP PADANG

SISTEM PERSAMAAN LINEAR DAN MATRIKS

MILIK PERPUSTAKAAN IKIP PADANG
DITERIMA TGL. : 19 MAY 1997
SUMBER / HARGA : H /
KOLEKSI : K
NO. INVENTARIS : 710/K/97-So(2)
KLASIFIKASI : 512.507 FAU s

OLEH:
DRS. AHMAD FAUZAN, M. Pd
DRS. MULIYARDI

JURUSAN PENDIDIKAN MATEMATIKA
FPMIPA IKIP PADANG
1997

KATA PENGANTAR

Puji dan Syukur penulis panjatkan ke hadirat Allah SWT, karena karuniaNya penulis telah dapat menyelesaikan suatu buku yang diberi judul "**Sistem Persamaan Linear dan Matriks**". Buku ini diharapkan dapat membantu mahasiswa yang baru pertama kali mempelajari Aljabar Linier Elementer. Dikatakan demikian, karena materi yang disajikan cukup terurai dan sederhana, serta disertai dengan beberapa contoh-contoh.

Dalam penyusunan buku ini penulis banyak mendapat masukan dan bantuan dari Bapak Prof. Dr. Yong Sian So (dari Universitas Tunghai, Taiwan), serta Bapak/Ibu Staf pengajar Jurusan Pend. Matematika FPMIPA IKIP Padang. Untuk itu pada kesempatan ini penulis mengucapkan terima kasih yang sebesar-besarnya.

Penulis menyadari bahwa tulisan ini masih sangat sederhana dan banyak kekurangannya. Oleh karena itu kritik dan saran sangat diharapkan dari semua pihak.

Akhirnya, penulis berharap semoga tulisan ini memberi manfaat bagi yang membacanya.

Padang, Januari 1997

Penulis

MILIK UPT PERPUSTAKAAN IKIP PADANG

DAFTAR ISI

BAB I

SISTEM PERSAMAAN LINIER

A. Pendahuluan

Untuk menyelidiki alam maupun dunia kegiatan manusia (seperti ekonomi dan sebagainya) satu cara yang sering dipakai (dan dengan sukses) adalah mengkuantitaskan benda-benda yang akan diselidiki. Dari observasi, penelitian (di labor), taksiran dan sebagainya, orang mendapat relasi (syarat) yang menghubungkan kuantitas-kuantitas ini. Dalam bahasa matematika relasi-relasi tersebut adalah fungsi dan persamaan (fungsi adalah satu macam persamaan yang istimewa). Pada Bab I ini kita akan mempelajari semacam persamaan yang paling sederhana (Sistem Persamaan Linier (SPL)). Berhubung kesederhanaan itu, SPL sering dipakai, paling sedikit sebagai aproksimasi keadaan yang lebih rumit.

Definisi:

Satu sistem persamaan linier (SPL) dalam unknowns (yang tidak diketahui) $x_1, x_2, \ldots, x_n$ adalah sistem persamaan yang berbentuk sebagai berikut.

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$
$$a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + a_{k3}x_3 + \ldots + a_{kn}x_n = b_k$$

dimana $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{kn}, b_1, b_2$ adalah konstanta (tetap) dan $k \in \mathbb{N}$. Jadi $x_1, x_2, \ldots, x_n$ hanya muncul dengan bentuk pangkat satu (karena itu disebut linier).

(Surjadi. 1970: 27)

Contoh:

1. Sistem persamaan linier dalam unknown x_1, x_2, x_3

a. $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = \log 3 \\ \sqrt{2}\, x_1 - \sin a\, x_2 + \cos 4\, x_3 = 2 \end{cases}$

b. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 4 \\ x_1 - x_2 - 3x_3 = -2 \\ -3x_1 + x_2 - x_3 = 1 \end{cases}$

2. $x_1 + x_2 + \log x_3 = 2$ bukan SPL dalam unknown x_1, x_2, x_3.

Definisi:

Bilangan $u_1, u_2, \ldots, u_n$ dinamakan solusi (pemecahan) dari SPL:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$
\left.
\begin{array}{l}
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\
\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\
a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + a_{k3}x_3 + \dots + a_{kn}x_n = b_k
\end{array}
\right. \quad \dots\dots\dots (*)
$$

jika x_i disubstitusi dengan u_i ($i = 1,2,\dots,n$), diperoleh identitas:

$$
\begin{array}{l}
a_{11}u_1 + a_{12}u_2 + a_{13}u_3 + \dots + a_{1n}u_n = b_1 \\
a_{21}u_1 + a_{22}u_2 + a_{23}u_3 + \dots + a_{2n}u_n = b_2 \\
\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\
a_{k1}u_1 + a_{k2}u_2 + a_{k3}u_3 + \dots + a_{kn}u_n = b_k
\end{array}
\qquad (**)
$$

(Anton, 1995: 1)

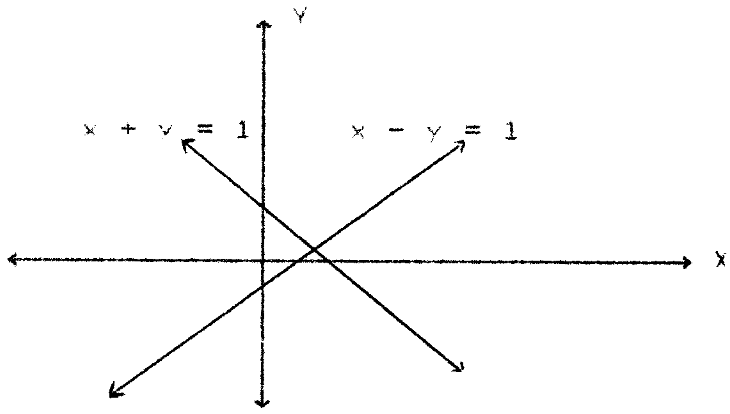
Catatan. Perbedaan antara (*) dan (**) adalah: di bagian kiri dari (*) bukan bilangan sedangkan bagian kiri dari tiap persamaan di (**) adalah bilangan.

Pada bagian selanjutnya kita akan membahas dua hal penting yaitu, bagaimana mengetahui apakah satu SPL mempunyai solusi atau tidak, kalau ada solusi, bagaimana mendapatkan semua solusi tersebut.

Contoh:

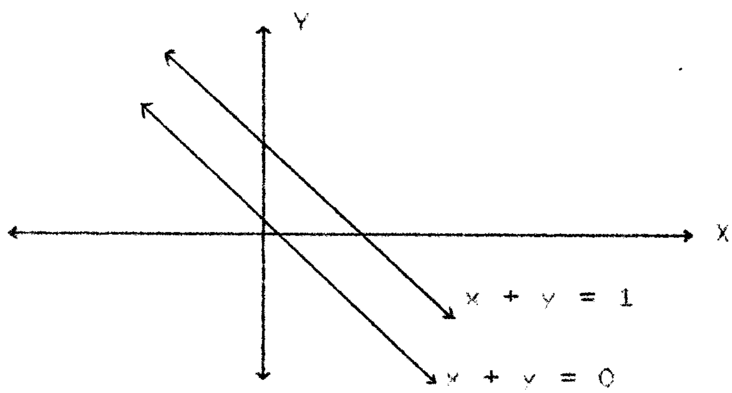
(1). $\begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 1, \end{cases}$ mempunyai solusi yaitu $x = 1$ dan $y = 0$

Interpretasi Geometri:



(2). $\begin{cases} x + y = 1 \\ x + y = 0, \end{cases}$ tidak mempunyai solusi

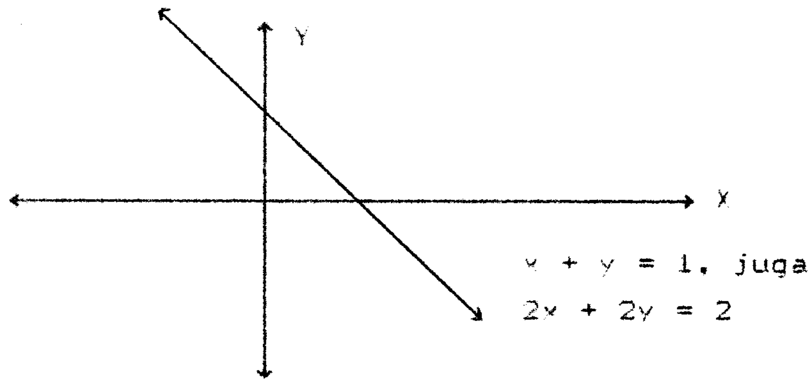
Interpretasi Geometri:



(3). $\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + 2y = 2, \end{cases}$ mempunyai solusi $x = t$, $y = 1-t$, $t \in \mathbb{R}$

(Jadi banyaknya solusi tidak terhingga)

Interpretasi Geometri:



Jika kita mempunyai dua SPL dengan unknown yang sama, misalnya x_1, x_2, dan x_3, apakah ada hubungan antara solusi SPL I dengan solusi SPL II? Ataukah ada hubungan lain?

Contoh

I. $\begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 1 \end{cases}$ II. $\begin{cases} x + y = 1 \\ x = 1 \end{cases}$

III. $\begin{cases} x + y = 1 \\ y = 0 \end{cases}$ IV. $\begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$

Semua SPL di atas mempunyai solusi $x = 1$, $y = 0$. Sedangkan SPL I, II, III, dan IV bentuknya berbeda. Diantara keempat SPL itu, yang paling mudah adalah SPL IV, sedangkan yang paling sukar adalah SPL I. Suasana ini memberi kita suatu ide tentang bagaimana cara mencari solusi dari suatu SPL yang diberikan. Dalam hal ini, apakah kita bisa merubah suatu SPL menjadi suatu SPL yang bentuknya lebih sederhana dalam mencari solusi tanpa resiko merubah solusinya?

Definisi

Suatu SPL dinamakan konsisten jika ia mempunyai solusi.

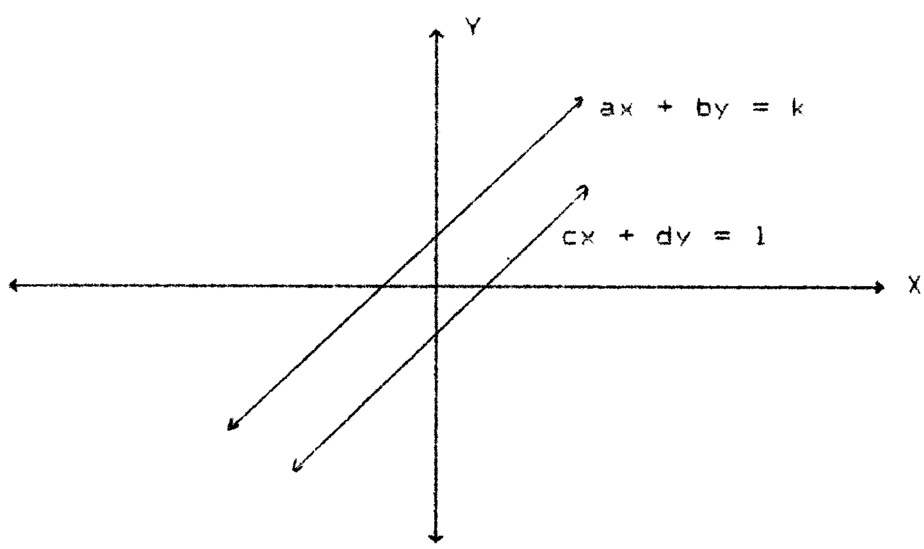
(Anton, 1991: 3)

Dari contoh 1 di atas kita bisa menduga bahwa satu SPL yang berbentuk:

$$\begin{cases} ax + by = k \\ cx + dy = l, \end{cases}$$

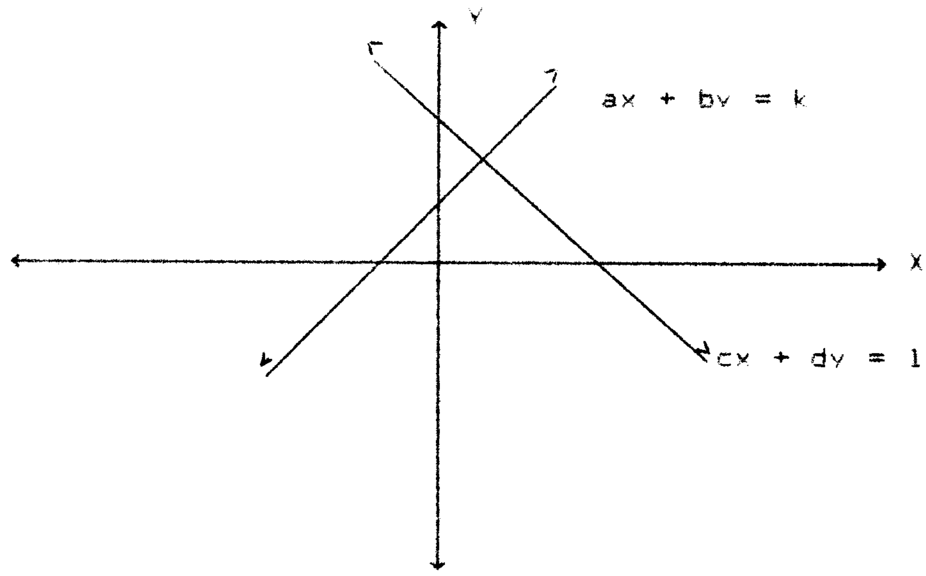
mempunyai tiga kemungkinan bila dilihat dari solusinya.

1. Tidak ada solusi

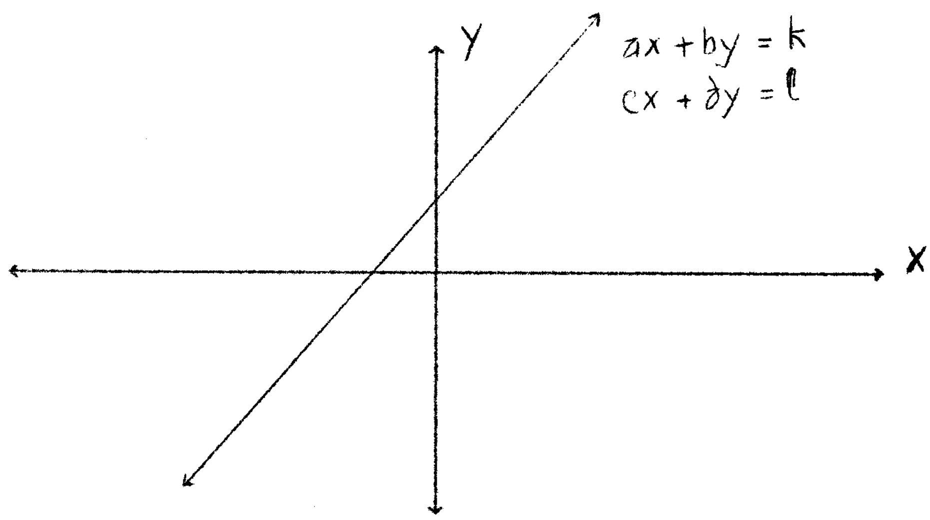


MILIK UPT PERPUSTAKAAN
IKIP PADANG

2. Mempunyai tepat satu solusi

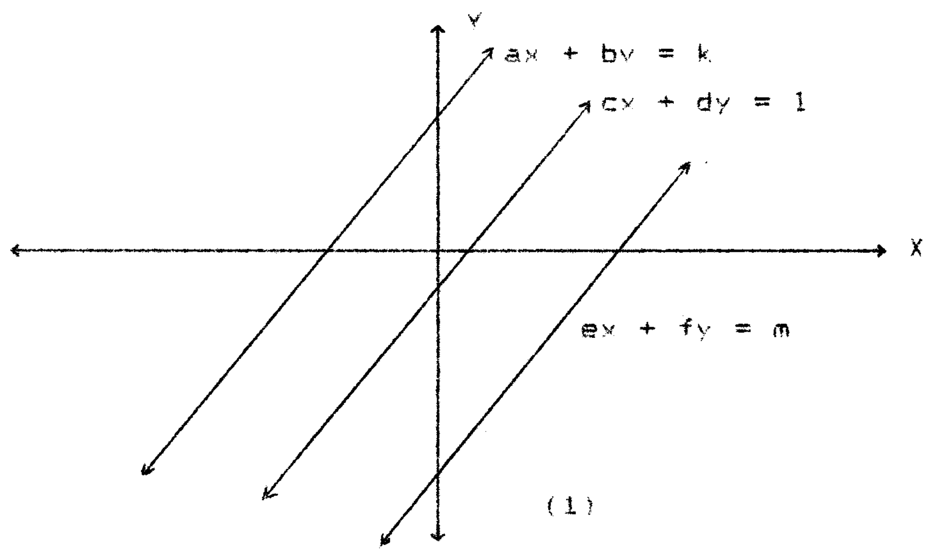


3. Mempunyai takterhingga banyaknya solusi

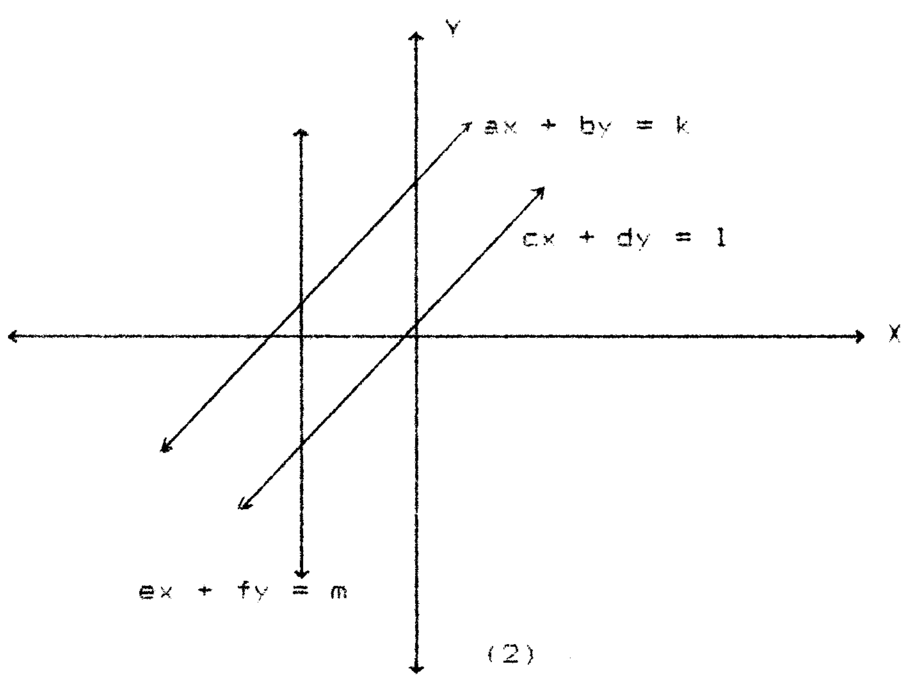


Diskusikanlah semua keadaan yang mungkin dari SPL berikut.

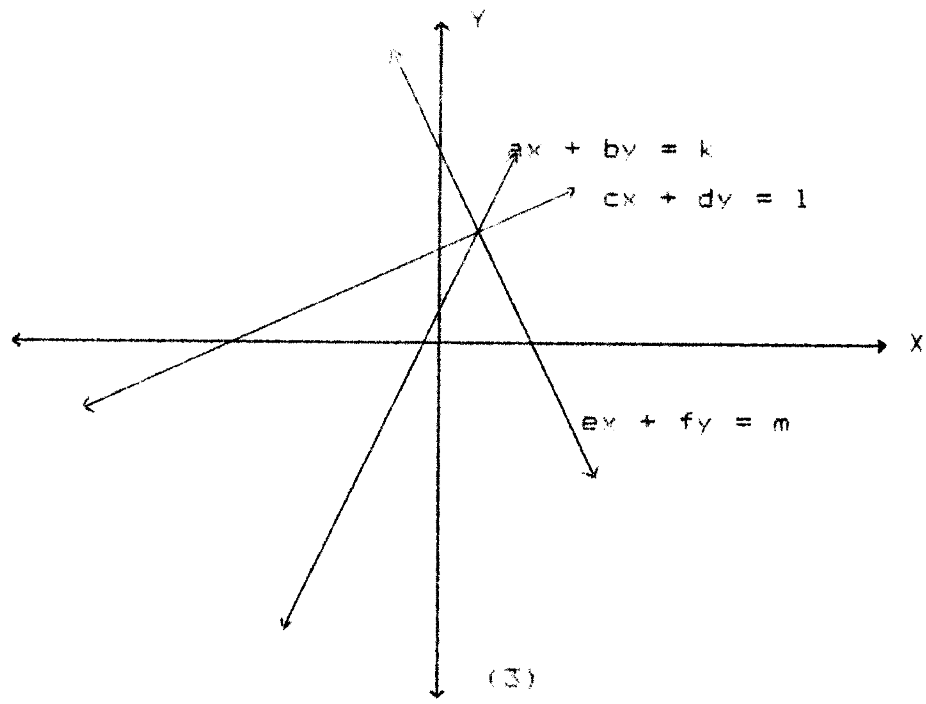
$$\begin{cases} ax + by = k \\ cx + dy = 1 \\ ex + fy = m \end{cases}$$



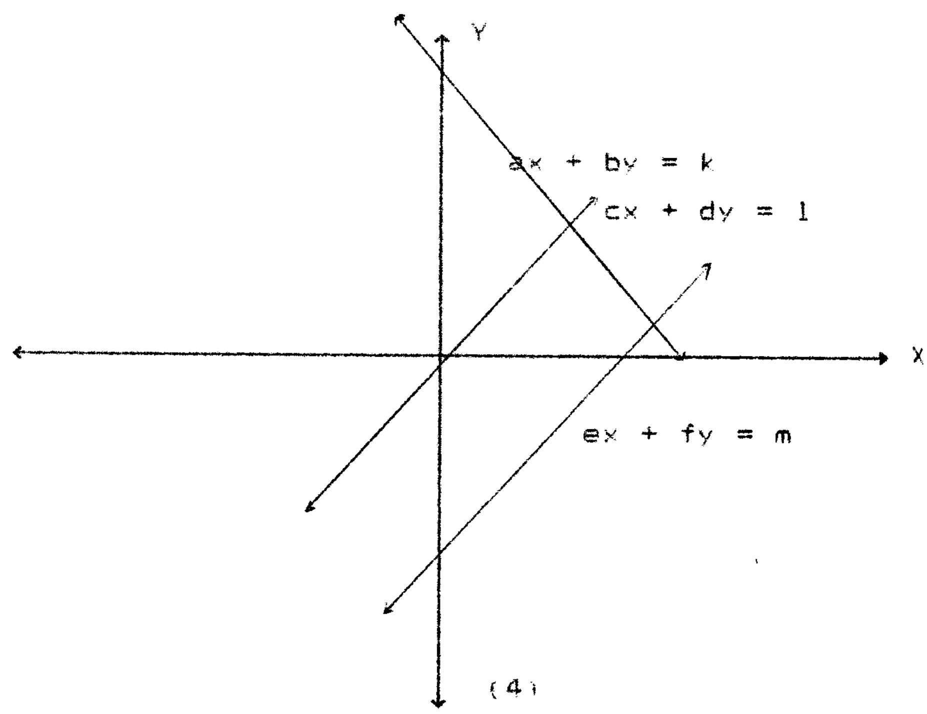
(1)



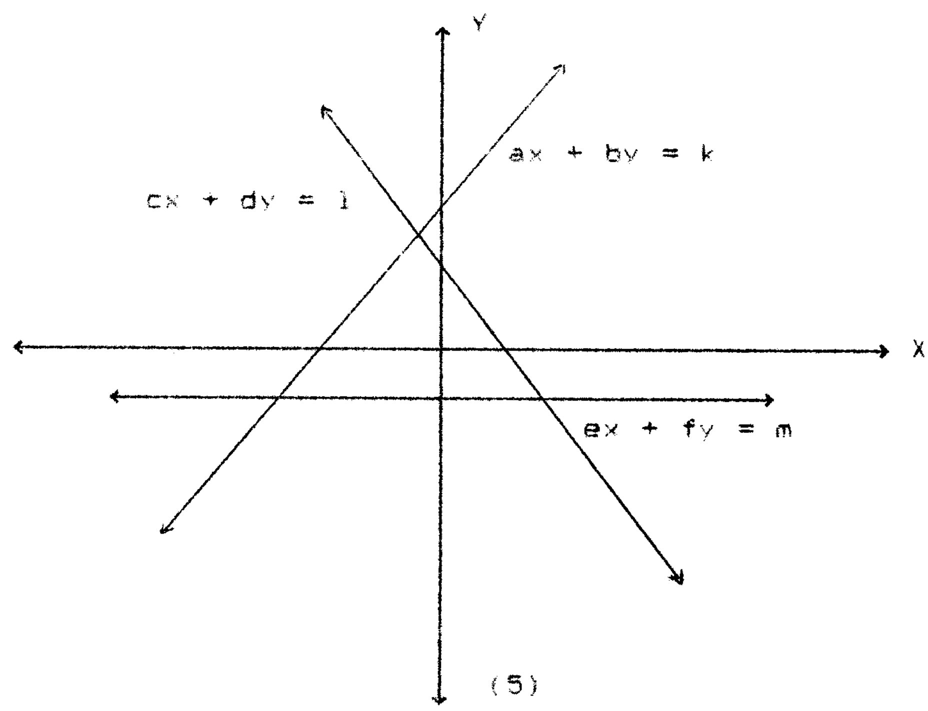
(2)



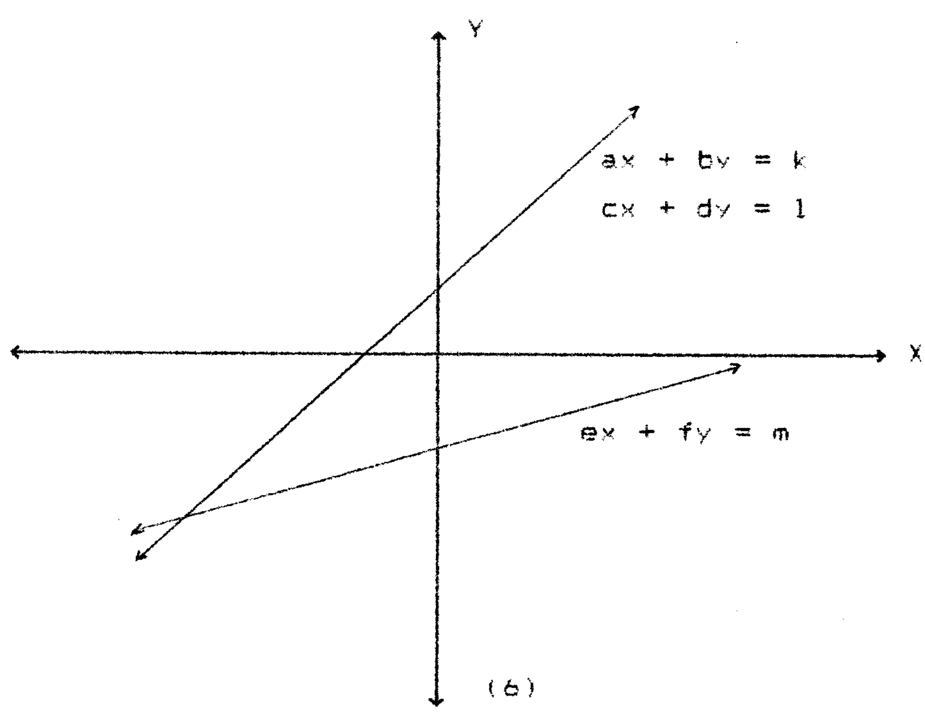
(3)



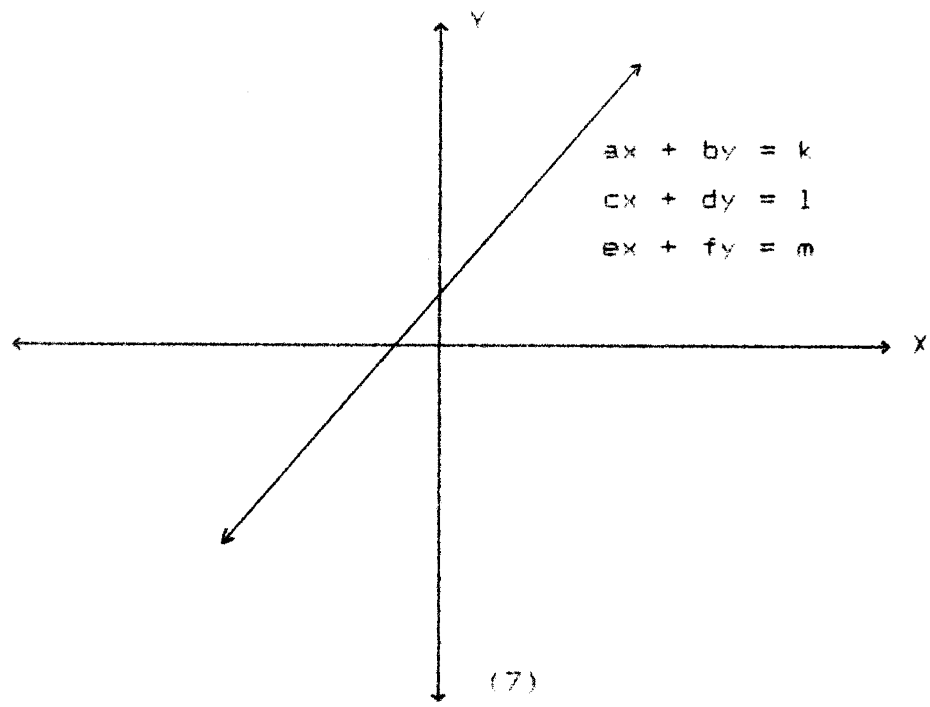
(4)



(5)



(6)



(7)

Catatan: Keadaan (1), (2), (4), dan (5) menunjukkan bahwa SPL tidak mempunyai solusi. Keadaan (3) dan (6) SPL mempunyai tepat satu solusi. Sedangkan keadaan (7) SPL mempunyai tak terhingga banyaknya solusi.

Setiap SPL mempunyai tiga kemungkinan:

(1). tidak mempunyai solusi;

(2). mempunyai tepat satu solusi;

(3). mempunyai solusi yang banyaknya tidak terhingga.

(Ini disebabkan karena $a_{11},\dots,a_{kn}$ anggota $\mathbb{R}$).

Sekarang kita akan membahas satu cara menulis SPL yang lebih singkat, dan lebih penting. Dengan cara menulis seperti ini kita dapat menyelidiki SPL dengan lebih mudah dan mendalam.

Definisi

Satu matriks ukuran k × n adalah satu jajaran (array) dari bilangan yang berbentuk:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \end{bmatrix}$$

(Hohn, 1973: 1)

Contoh: $\begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}$ adalah matriks 1 × 1

$\begin{bmatrix} 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$ adalah matriks 1 × 2

$\begin{bmatrix} \sqrt{2} & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ adalah matriks 2 × 4

Matriks $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \end{bmatrix}$ biasanya ditulis $\begin{bmatrix} a_{ij} \end{bmatrix}_{k \times n}$.

Bilangan a_{ij} . $1 \leq i \leq k$. $1 \leq$ i $\leq$ n disebut entri dari matriks tersebut. (Awas! entri bukan elemen karena matriks bukan himpunan).

Definisi

P adalah satu himpunan yang anggota-anggotanya bilangan real, unknown, misalnya $x_1, \ldots, x_n$, juga $a_1x_1 + \ldots + a_nx_n$ dimana $a_1, \ldots, a_n$ adalah bilangan real.

Jika kita meluaskan sumber darimana kita mengambil entri (dari $\mathbb{R}$ ke P), maka kita dapat mempersingkatkan matriks:

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \vdots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + a_{k3}x_3 + \ldots + a_{kn}x_n = b_k \end{array}$$ menjadi:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ a_{k1} & a_{k2} & \ldots & a_{kn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

Contoh

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x - y = 0 \\ x + 3y = 2 \end{cases}$$ boleh ditulis sebagai $$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$ adalah cara tulis lain untuk

SPL $\begin{cases} x \quad + z = -1 \\ 2x - y \quad = 2 \end{cases}$

Definisi

Matriks:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \end{bmatrix} \text{ dan } \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} & b_k \end{bmatrix}$$ disebut

masing-masing matriks koefisien dan matriks diperbesarkan (augmented matriks) dari SPL:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + a_{k3}x_3 + \cdots + a_{kn}x_n &= b_k. \end{aligned}$$

(Anton, 1991: 4)

Jadi matriks diperbesar dari satu SPL memberi informasi yang sama seperti halnya SPL sendiri. Maka ada artinya jika kita bicara solusi dari satu matriks:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & & & \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} & b_n \end{bmatrix}$$ yang dimaksud adalah solusi dari SPL

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$
$$\vdots$$
$$a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + a_{k3}x_3 + \dots + a_{kn}x_n = b_k$$

B. Eliminasi Gauss

Pada bagian ini diperkenalkan prosedur Eliminasi Gauss yang bisa merubah bentuk satu matriks:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} & b_n \end{bmatrix}$$ menjadi bentuk yang lebih

sederhana, dimana solusinya langsung (atau sangat mudah) didapatkan.

(1). $0\,x_1 + x_2 + 0\,x_3 = 1$ Solusi: $x_1 = t$, $t \in \mathbb{R}$

$0\,x_1 + 0\,x_2 + x_3 = 2$ $x_2 = 1$

$x_3 = 2$

Dengan matriks ditulis $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

(2). $0\,x_1 + x_2 + 2\,x_3 + x_4 = 2$ Solusi: $x_1 = t, t \in \mathbb{R}$

$0\,x_1 + 0\,x_2 + 0\,x_3 + x_4 = 1$ $x_4 = 1$

$x_3 = s, s \in \mathbb{R}$

$x_2 = 1-2s$

Pada SPL di atas posisi unknown tidak semuanya sama, umpamanya x_1, x_3 dapat kita pilih seenaknya, sedang untuk x_2 dan x_4 terbatas. (x_2 dikatakan terbatas, karena nilai x_2 tergantung pada nilai x_4)

Contoh

Diketahui bentuk eselon baris dari matriks yang diperbesar suatu SPL sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

SPL yang bersesuaian dari matriks di atas adalah:

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - 2x_3 \qquad + 2x_5 \qquad &= 0 \\ x_3 + x_4 \qquad + x_6 &= 1 \\ x_6 &= 1/3 \end{aligned}$$

Dengan memisalkan $x_2 = r$, $x_4 = s$, $x_5 = t$, diperoleh solusi dari SPL yaitu: $x_1 = -r - 4s - 2t$, $x_2 = r$, $x_3 = -2s$, $x_4 = s$, $x_5 = t$, dan $x_6 = 1/3$.

710/K/97 (2)

KI
512.507
FAU
50

Definisi

Suatu matriks adalah dalam bentuk eselon baris (*ref*) jika:

1. Baris yang semua entrinya 0 terletak di bawah baris yang memuat entri yang tidak semuanya 0
2. Jika entri pada suatu baris tidak semuanya 0, maka entri pertama yang tidak nol adalah 1 (1 ini disebut satu utama)
3. Satu utama dari suatu baris selalu terletak disebelah kanan satu utama baris yang diatasnya

(Anton, 1995: 8)

Definisi

Suatu matriks adalah dalam bentuk eselon baris tereduksi (*rref*) jika memenuhi syarat (1), (2), (3) dan (4), dimana:

4. Satu utama dari satu kolom adalah entri satu-satunya yang tidak nol pada kolom tersebut.

Contoh:

(1) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

dalam *ref* dan *rref*

(4) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

tidak dalam *ref*

MILIK UPT PERPUSTAKAAN IKIP PADANG

(2) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

dalam *ref* dan *rref*

(5) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

tidak dalam *ref*

(3) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

dalam *ref* tetapi

tidak dalam *rref*

(6) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

tidak dalam *ref*

(7) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

tidak dalam *ref*

Prosedur untuk memperoleh satu matriks menjadi *ref* disebut Eliminasi Gauss dan prosedur untuk memperoleh satu matriks menjadi *rref* disebut Eliminasi Gauss-Jordan.

Operasi baris elementer (*obe/ero*) meliputi tiga hal yaitu:

1. menukar dua baris dari suatu matriks, disebut operasi baris elementer ke 1 (*ero 1*):
2. mengali satu baris dari suatu matriks dengan bilangan yang $\neq 0$, disebut operasi baris elementer ke 2 (*ero 2*);
3. mengali satu baris dengan bilangan $\neq 0$, kemudian menambahkan baris baru ini ke baris lain, disebut operasi baris elementer ke 3 (*ero 3*)

Contoh:

(4) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ menjadi $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ sesudah dilakukan ero 1 pada baris ke 2 dan 3

(5) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ menjadi $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ sesudah dilakukan ero 2 pada baris ke 3 (kali −1)

(6) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ menjadi $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ jika dilakukan ero 3 (kali baris 1 dengan −1, kemudian tambahkan pada baris 3)

Teorema

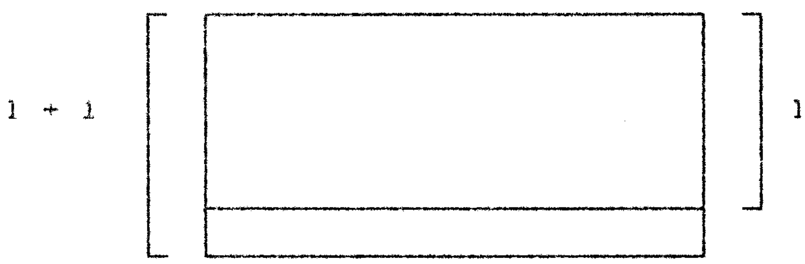
1. Dengan ero 1, 2 dan 3, tiap matriks dapat diubah menjadi *ref* (biasanya tidak unik)
2. Dengan ero 1, 2 dan 3, tiap matriks dapat diubah menjadi *rref* (yang unik)

(Anton, 1995: 16)

Bukti:

Diketahui sebarang matriks k × n. Teorema akan dibuktikan melalui induksi terhadap banyaknya baris (terhadap k). Untuk k = 1, ini jelas sekali (bila perlu gunakan ero 2). Misalkan pernyataan benar untuk matriks yang berukuran $1 \times n$ ($k = 1$). Akan ditunjukkan bahwa pernyataan benar untuk matriks yang berukuran $(1+1) \times n$ (banyaknya baris $(k) = 1 + 1$).

Kita dapat menganggap bahwa matriks yang berukuran $1 \times n$ dalam *ref* (*rref*).



Perhatikan baris ke $1 + 1$. Jika semua entrinya 0, maka matriks sudah dalam *ref* (atau *rref*)

Jika terdapat entri yang $\neq 0$, maka dengan ero 2, entri pertama yang tidak nol (dari kiri) akan menjadi 1 utama. Jika satu utama ini terletak di kanan satu utama baris yang diatasnya, maka matriks telah dalam *ref* (dengan ero 3 diperoleh *rref*). Jika satu utama dari baris ke $1 + 1$ terletak disebelah kiri satu utama baris yang diatasnya, maka dengan ero 1 diperoleh *ref* (dilanjutkan dengan ero 3 diperoleh *rref*). Bukti dari keunikan *rref* agak sukar dan tidak diberikan di sini.

MILIK UPT PERPUSTAKAAN
IKIP PADANG

Contoh:

(7) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ adalah *rref* dari $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

(8) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ adalah *ref* dari

$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (**Carilah 100.000 bentuk yang lain**)

Catatan.

1. *rref* dari matriks berordo 2 × 2 yang mungkin adalah:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2. *ref* dari matriks berordo 2 × 2 adalah:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad a, b \in \mathbb{R}$$

3. *rref* dari $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ adalah $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\Leftrightarrow$ $ad \neq bc$

4. ero 1 dapat diganti dengan ero 2 dan ero 3 seperti terlihat berikut ini.

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{ero 3}} \begin{bmatrix} a & b \\ -a+c & -b+d \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{ero 3}} \begin{bmatrix} a+(-a+c) & b+(-b+a) \\ -a+c & -b+d \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} c & d \\ -a+c & -b+d \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{ero } 3} \begin{bmatrix} c & d \\ (-a+c)-c & (-b+d)-d \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} c & d \\ -a & -b \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{ero } 2} \begin{bmatrix} c & d \\ a & b \end{bmatrix}$$

Meskipun demikian, kita tetap akan sering menggunakan ero 1, 2 dan 3.

Berikut ini akan ditunjukkan bagaimana cara mendapatkan solusi, jika matriks yang diperbesar dari suatu SPL sudah dalam *rref* (atau *ref*).

Contoh 9.

Matriks yang diperbesar dari suatu SPL adalah:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccccc|c} 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \end{array}$$

Unknown x_2, x_4, x_6 adalah unknown utama (variabel utama), karena koefisiennya merupakan satu utama. Selanjutnya dengan mudah kita memperoleh:

$x_1 = t$, $x_3 = s$, $x_5 = r$, $x_7 = u$, $x_6 = 1 - u$, $x_4 = -u - r$, $x_2 = -2s - u$, dimana $r, s, t, u \in \mathbb{R}$.

Contoh 10.

Carilah solusi dari SPL yang matriks diperbesarnya adalah:

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \end{array}$$
$$\left[\begin{array}{ccccccc|c} 0 & 1 & 2 & 2 & 3 & 4 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \ldots\ldots (*)$$

Tentu saja kita dapat merubah (*) menjadi *rref*. Tetapi kadang-kadang lebih efisien jika kita pakai subsitusi balik (back substitution). Dari (*) diperoleh:

$x_7 = u$, $x_6 = 1 - u$, $x_5 = r$, $x_3 = s$,

$x_4 = 2 - r - 2(1 - u) - 3u = -r - u$,

$x_2 = 4 - 2s - 2(r - u) - 3r - 4(1 - u) - 7u = -2s - 5r - u$,

dimana $r, s, u \in \mathbb{R}$.

Akhirnya, satu hal penting yang harus kita ingat adalah dengan prosedur eliminasi Gauss-Jordan, kita dapat memperoleh *ref* (atau *rref*) suatu matriks yang diperbesar dari suatu SPL, dan mencari solusi dari matriks yang berbentuk *ref* (*rref*) tersebut.

Siapakah yang dapat menjamin bahwa solusi yang kita peroleh ini adalah solusi dari SPL asli, atau dengan kata lain, apakah himpunan solusi matriks pertama dan himpunan solusi dari matriks ke dua itu sama? Pertanyaan ini sekarang bisa dijawab dengan "Ya", dan akan dibuktikan nanti.

Peranan *rref* dari suatu SPL tidak hanya memudahkan dalam mencari solusi, lebih penting lagi adalah seperti yang dinyatakan dalam teorema berikut.

Teorema

Dua SPL mempunyai himpunan solusi yang sama $\Leftrightarrow$ *rref* dari kedua SPL sama

C. Persamaan Linier Homogen

Di sini akan kita bicarakan satu macam SPL yang istimewa. Di samping istimewa, kita juga bisa lebih memahami SPL umum.

Definisi: SPL

$$\begin{matrix} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{k1}x_1 + \dots + a_{kn}x_n = b_k \end{matrix}$$

disebut homogen jika $b_1 = \dots = b_k = 0$, dan tak homogen jika terdapat setidaknya satu $b_i \neq 0$, $i \in \{1,2,\dots,k\}$.

(Hohn, 1973: 70)

Jelaslah bahwa $x_1 = 0, \dots, x_n = 0$ adalah satu solusi dari SPL yang homogen. Sedangkan SPL yang tak homogen mungkin tidak mempunyai solusi.

Notasi: Untuk selanjutnya kita akan menulis $\begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_k \end{bmatrix}$ adalah solusi dari satu SPL dan tidak seperti sebelumnya $x_1 = u_1$, ..., $x_k = u_k$. Umpamanya: solusi dari $x + y = 1$ kita tulis:

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1-t \\ t \end{bmatrix} \middle| \; t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Teorema

Jika $\begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$ adalah dua solusi dari satu SPL homogen, maka:

(1). $\begin{bmatrix} u_1+v_1 \\ \\ u_n+v_n \end{bmatrix}$ adalah solusi dari SPL itu

(2). $\begin{bmatrix} tu_1 \\ \\ tu_n \end{bmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$ juga solusi (Buktikan!)

(Anton, 1995: 22)

Catatan.

(1). Solusi $\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ diperoleh jika $t = 0$

(2) Teorema di atas biasanya diringkas menjadi:

$$\begin{bmatrix} tu_1 + sv_1 \\ \vdots \\ tu_n + sv_n \end{bmatrix}$$ $t, s \in \mathbb{R}$, yang juga merupakan solusi dari SPL tersebut.

(Coba anda buktikan teorema berikut!)

Teorema

Jika $\begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$ adalah dua solusi dari satu SPL:

$$\begin{matrix} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{k1}x_1 + \dots + a_{kn}x_n = b_k \end{matrix} \quad \dots\dots (*)$$

Maka $\begin{bmatrix} tu_1 + sv_1 \\ \vdots \\ tu_n + sv_n \end{bmatrix}$ solusi dari SPL:

$$\begin{matrix} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{k1}x_1 + \dots + a_{kn}x_n = 0 \end{matrix} \quad \dots\dots (**)$$

Akibat Teorema

Jika $\begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$ satu solusi dari SPL (*), himpunan solusi dari

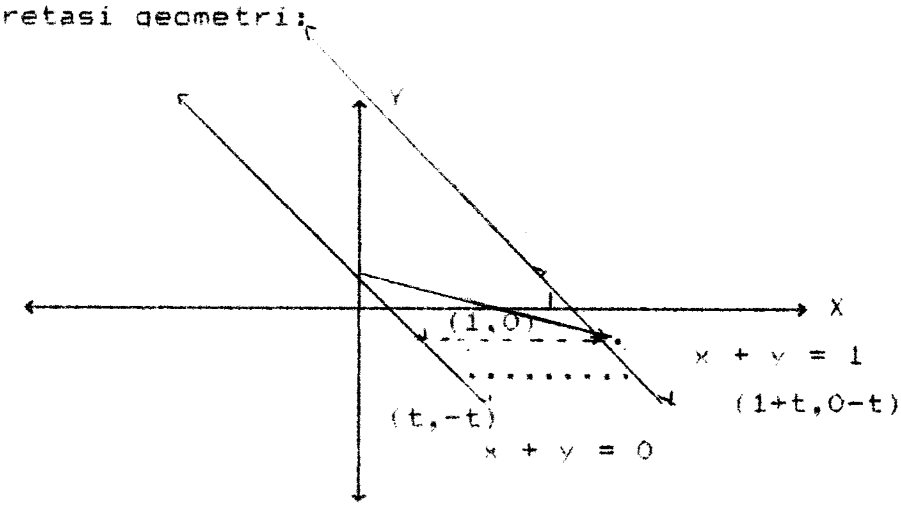
SPL (*) adalah:

$$\left\{ \begin{bmatrix} u_1 + v_1 \\ \vdots \\ u_n + v_n \end{bmatrix} \;\middle|\; \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \text{ satu solusi dari } (**) \right\}$$

Contoh 1.

$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ adalah solusi dari $x + y = 1$, maka himpunan solusinya adalah $\left\{ \begin{bmatrix} 1 + t \\ 0 - t \end{bmatrix} \;\middle|\; t \in \mathbb{R} \right\}$ (Ingat! $\begin{bmatrix} t \\ -t \end{bmatrix}$ adalah solusi dari $x + y = 0$.

Interpretasi geometri:



Di atas, seperti biasanya kita menulis $(t,-t)$, dan bukan $\begin{bmatrix} t \\ -t \end{bmatrix}$

Definisi

Solusi $\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ dari suatu SPL Homogen dinamakan solusi trivial, sedangkan solusi lain dinamakan non trivial.

(Hohn, 1973: 70)

Dalam hal ini, tugas kita adalah mencari semua solusi non trivial dari suatu SPL Homogen.

Teorema

Jika suatu SPL Homogen mempunyai n unknown dan k persamaan dan $k < n$, maka SPL homogen ini *selalu* mempunyai solusi non trivial.

(Anton, 1995: 20)

Bukti:

Misalkan yang berikut adalah matriks yang diperbesar dari suatu SPL Homogen.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} & 0 \end{bmatrix}$$

Dengan prosedur eliminasi Gauss-Jordan diperoleh *rref* yaitu:

$$\begin{bmatrix} \ldots 1 & \ldots & \ldots & 0 \\ \ldots\ldots 1 & & & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ & \ldots . 1 & \ldots & 0 \end{bmatrix}$$ yang dapat ditulis menjadi

persamaan:

$$\begin{array}{l} \ldots + x_{i_1} + \ldots\ldots\ldots\ldots = 0 \\ \ldots + \ldots + x_{i_2} + \ldots\ldots = 0 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ \ldots + \ldots\ldots\ldots + x_{i_r} + \ldots = 0 \end{array}$$

dimana $x_{i_1}, \ldots, x_{i_r}$ adalah unknown utama, dengan $i_1, \ldots, i_r \in \{1, 2, \ldots, n\}$ dan $r \leq k \leq n$. Dengan demikian pasti terdapat unknown yang bukan unknown utama, yang dapat kita subsitusi seenaknya. Jadi SPL Homogen selalu mempunyai solusi yang tak trivial.

Contoh 2

Diketahui SPL: $0x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 + 3x_5 = 0$

$$0x_1 + x_2 + x_3 + 0x_4 + x_5 = 0$$

Sesudah diubah dalam *rref diperoleh:*

$$0x_1 + x_2 + 2x_3 + 0x_4 + x_5 = 0$$
$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + x_4 + x_5 = 0$$

Unknown utama disini adalah x_2 dan x_4, dan $i_1 = 2$, $i_2 = 4$ (bila dihungkan dengan bukti teorema) sebelumnya. Karena x_1,

x_3, x_5 bukan unknwon utama, maka dapat mensubsitusi dengan seenaknya. Dengan demikian SPL homogen di atas mempunyai solusi tak trivial.

Himpunan solusinya adalah:

$$\left\{ \begin{bmatrix} t \\ -2s - u \\ s \\ -u \\ u \end{bmatrix} \middle| \; t,\ s,\ u \ \exists\ \mathbb{R} \right\}$$

Contoh 3

Diketahui SPL: $x + y = 0$

$2x + 2y = 0$

$3x + 3y = 0$

Meskipun SPL homogen ini hanya terdiri dari dua unknown dan tiga persamaan, tetapi ia mempunyai solusi yang tidak trivial, misalnya $x = 1$, $y = 1$.

Contoh ini menunjukkan bahwa kebalikan dari teorema di atas tidak berlaku.

Sempurnakanlah teorema di bawah ini!

Teorema

SPL homogen dengan n unknown dan k persamaan mempunyai solusi taktrivial $\Leftrightarrow$ banyak satu utama di *rref* (atau *ref*) nya lebih ....

Contoh 4

Carilah nilai λ sehingga SPL berikut mempunyai solusi tak trivial!

$$\begin{aligned} (\lambda - 3)x + \quad\quad\quad y &= 0 \\ x + (\lambda - 3)y &= 0 \end{aligned}$$

Jelas, bahwa jika $\lambda = 3$ maka SPL mempunyai solusi trivial ($x = 0$, $y = 0$). Matriks yang diperbesar dari SPL adalah:

$$\begin{bmatrix} \lambda-3 & 1 & 0 \\ 1 & \lambda-3 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & \lambda-3 & 0 \\ \lambda-3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & \lambda-3 & 0 \\ 0 & -(\lambda-3)^2+1 & 0 \end{bmatrix}$$

Jika $1 - (\lambda - 3)^2 \neq 0$, maka ada 2 satu utama, sehingga SPL hanya mempunyai solusi trivial. Jika $1 - (\lambda - 3)^2 = 0$ atau $\lambda - 3 = \pm 1$ ($\lambda = 2$ atau $\lambda = 4$) maka SPL mempunyai solusi tak trivial. (Carilah semua solusi tersebut)

Contoh 5

Pecahkanlah SPL Homogen berikut dengan menggunakan eliminasi Gauss-Jordan.

$$\begin{aligned} 2a + 2b - c \quad\quad + e &= 0 \\ -a - b + 2c - 3d + e &= 0 \\ a + b - 2c \quad\quad - e &= 0 \\ c + d + e &= 0 \end{aligned}$$

Dengan melakukan obe terhadap matriks yang diperbesar dari SPL, kemudian memecahkannya untuk unknwon-unknwon utama, diperoleh $a = -b - e$, $c = -e$, $d = 0$. Jadi solusinya adalah:

$a = -s - t$, $b = s$, $c = -t$, $d = 0$, $e = t$, $s, t \in \mathbb{R}$.

BAB II

MATRIKS DAN OPERASI MATRIKS

A. Matriks

Konsep matriks disini kita dapatkan dari SPL. sedangkan konsep itu juga dipakai dalam bidang lain yang tidak berhubungan dengan SPL. Apakah pembaca ingat, apakah matriks itu?

Contoh.

Coba teliti, manakah di antara berikut ini yang merupakan matriks?

1. $\sqrt{2}$ 2. $[\sqrt{2}]$ 3. $\begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{bmatrix}$ 4. $\begin{bmatrix} \text{Padang} & \text{Jakarta} \\ \text{Malang} & \text{Medan} \end{bmatrix}$

5. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ & 3 \end{bmatrix}$ 6. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

Biasanya kita memakai huruf besar untuk matriks dan huruf kecil untuk entrinya. Misalnya:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \end{bmatrix}$$

Ini kadang-kadang disingkat menjadi $\begin{bmatrix} a_{ij} \end{bmatrix}_{k\times n}$ atau $[a_{ij}]$ saja.
Biasanya a_{ij} ditulis A_{ij}

Dari matriks A di atas, kolom ke t dari A yaitu $\begin{bmatrix} a_{1t} \\ \vdots \\ a_{kt} \end{bmatrix}$

Sedangkan baris ke s dari A ialah $\begin{bmatrix} a_{s1} \ldots a_{sn} \end{bmatrix}$ yang biasa nya disingkat menjadi $A_{(s)}$ atau A_s saja.

Definisi

Dua matriks A dan B dikatakan sama jika ukuran A sama dengan ukuran B dan $\forall$ i, j $a_{ij} = b_{ij}$ dimana $A = \begin{bmatrix} a_{ij} \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} b_{ij} \end{bmatrix}$.

(Hohn, 1973: 2)

Contoh 7

$$A = [1 \quad 2 \quad 3] \neq B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$ karena ukuran A ≠ ukuran B

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \neq D = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$ (Kenapa?)

Berikut ini akan diperkenalkan beberapa matriks yang istimewa.

Definisi

1. Matriks $\begin{bmatrix} a_{ij} \end{bmatrix}_{k \times n}$ dinamakan matriks kuadrat jika k = n

   Suatu himpunan yang beranggotakan matriks matriks kuadrat dinotasikan dengan:

$$M_{n \times n}(\mathbb{R}) = \left\{ A \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{A matriks } n \times n \text{ yang} \\ \text{entinya anggota } \mathbb{R} \end{array} \right\}$$

2. Diagonal dari kiri atas ke kanan bawah dari suatu matriks disebut diagonal utama.

3. Suatu matriks kuadrat dinamakan matriks diagonal jika hanya entri pada diagonal utama yang mungkin $\neq 0$, sedangkan entri-entri di tempat lain $= 0$.

(Anton, 1995: 23)

Contoh 8

$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ matriks diagonal

$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ bukan matriks diagonal

4. Suatu matriks kuadrat dinamakan simetris jika $a_{ij} = a_{ji}$

Contoh 9

$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ adalah matriks simetris.

5. Matriks nol adalah suatu matriks yang seluruh entrinya terdiri dari 0 dan biasanya ditulis O_{kxn} atau O saja.

6. Matriks Identitas adalah matriks kuadrat dimana:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$ dan ditulis I_{nxn} atau I saja.

Notasi:

1. $-B$ adalah singkatan dari $(-1)B$
2. $A - B$ adalah singkatan dari $A + (-B)$

Di dunia bilangan kita melakukan operasi antar bilangan. Dengan cara begini kita mendapatkan bilangan baru. Demikian juga halnya di dunia fungsi. Misalnya:

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longrightarrow x^2 \qquad\quad x \longrightarrow \sin x$$

maka $f + g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longrightarrow x^2 + \sin x$, adalah suatu fungsi baru yang diperoleh dari f dan g.

$\sqrt{2}f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longrightarrow \sqrt{2}\, x^2$, juga satu fungsi baru yang diperoleh dari f dan $\sqrt{2}$. (Coba selidiki beda kedua operasi ini!)

Definisi

Misalkan $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ b_{k1} & b_{k2} & \cdots & b_{kn} \end{bmatrix}$

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} + b_{k1} & \cdots & a_{kn} + b_{kn} \end{bmatrix},$$

$$tA = \begin{bmatrix} ta_{11} & ta_{12} & \cdots & ta_{1n} \\ \vdots & & & \\ ta_{k1} & ta_{k2} & \cdots & ta_{kn} \end{bmatrix}$$

berturut-turut dibaca matriks A ditambah dengan matriks B dan matriks A dikalikan dengan skalar t.

MILIK UPT PERPUSTAKAAN

Definisi

Misalkan A matriks k × n dan B matiks n × 1. Maka AB adalah satu matriks n × 1 yang entrinya dihitung dengan cara berikut.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} b_{11} \\ \vdots \\ b_{k1} \end{bmatrix} \text{ maka:}$$

$$AB = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \cdots + a_{1n}b_{n1} \\ \vdots \\ a_{k1}b_{11} + a_{k2}b_{21} + \cdots + a_{kn}b_{n1} \end{bmatrix} \text{ atau}$$

$$[AB] = \begin{bmatrix} \sum_{t=1}^{n} a_{1t}b_{t1} \\ \vdots \\ \sum_{t=1}^{n} a_{kt}b_{t1} \end{bmatrix}$$

(Hohn, 1973: 8)

Catatan.

SPL:

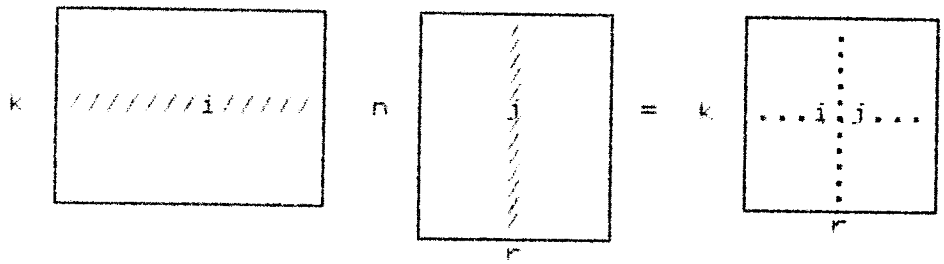
$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad & \quad \vdots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + a_{k3}x_3 + \cdots + a_{kn}x_n &= b_k \end{aligned}$$

dapat ditulis dengan singkat:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_k \end{bmatrix}}_{B} \text{ atau } AX = B \text{ saja}$$

Definisi

Misalkan A matriks k x n dan B matriks n x r, maka AB adalah matriks k x r yang entrinya dihitung sebagai berikut.



Contoh 10

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{t=1}^{3} a_{1t}b_{t1} & \sum_{t=1}^{3} a_{1t}b_{t2} \\ \sum_{t=1}^{3} a_{2t}b_{t1} & \sum_{t=1}^{3} a_{2t}b_{t2} \end{bmatrix}$$

Anda tentu heran, mengapa dua matriks dikalikan dengan cara begitu. Alasan untuk ini akan dijelaskan pada bagian selanjutnya. Dengan cara seperti ini, dua matriks yang berukuran sama belum tentu selalu dapat dikalikan, tetapi selalu dapat dijumlahkan. kamu akan lebih heran lagi melihat contoh-contoh di bawah ini.

Contoh

11. $$\underset{A}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} \underset{B}{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}} = \underset{\text{ukuran } 2 \times 1}{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}}$$

Sedangkan BA tidak terdefinisi

12. $$\underset{A}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}} \underset{B}{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$ ukuran 2 x 2

$$\underset{B}{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}} \underset{A}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$ ukuran 3 x 3

13. $$\underset{A}{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}} \underset{B}{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\underset{B}{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}} \underset{A}{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$ Jadi $AB \neq BA$

14. $$\underset{A}{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}} \underset{B}{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$ Meskipun $A \neq 0_{2 \times 2}$ dan $B \neq 0_{2 \times 2}$

15. $$\underset{A}{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}} \underset{A}{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$ Jadi $AA = 0$, tanpa harus $A = 0$

16. $$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Sedangkan di dunia bilangan: $a^2 = a \Rightarrow a = 0$ atau $a = 1$.

Teorema

1. Matriks kuadrat yang berukuran sama selalu dapat ditambahkan dan dikalikan, dan hasilnya juga merupakan matriks kuadrat
2. Jumlah dan hasil kali dua matriks diagonal yang berukuran sama, juga merupakan matriks diagonal yang berukuran sama.

Jika kita hanya ingin tahu kolom (atau baris) tertentu dari hasil perkalian dua matriks, maka teorema berikut akan sangat membantu.

Teorema

1. $(AB)^{(j)} = AB^{(j)}$
2. $(AB)_{(i)} = A_{(i)}B$

Contoh 17

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$$

Kolom ke 3 dari AB =

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \end{bmatrix}$$

Baris ke 2 dari AB =

$$\begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix}$$

B. Ilmu Hitung Matriks

Matriks bisa dipikirkan sebagai perluasan dari bilangan. Operasi-operasi di dunia bilangan dan dunia matriks ada yang mirip sekali, tetapi ada juga yang berbeda sama sekali. Di bawah ini kita memberikan perbandingan tentang hal tersebut.

Bilangan	Matriks
1. $(a + b) + c = a + (b + c)$	1. $(A + B) + C = A + (B + C)$ (Asosiatif untuk +)
2. $a + 0 = 0 + a = a$	2. $A + O = O + A = A$
3. $(\forall a)(\exists a')\ a + a' = 0$ $(a' = -a)$	3. $(\forall A)(\exists A')\ A + A' = O$ $(A' = -A)$
4. $a + b = b + a$	4. $A + B = B + A$ (komutatif untuk +)
5. $(ab)c = a(bc)$	5. $(AB)C = A(BC)$ (Asosiatif untuk perkalian)
6. $ab = ba$	6. Tidak selalu berlaku

7. $(\forall a)(\exists 1)\ a.1 = 1.a = a$	7. A berukuran $k \times n \Rightarrow$ $A \times I_{n \times n} = A$ dan $I_{k \times k} \times A = A$
8. $(a + b)c = ac + bc$ $a(b + c) = ab + ac$	8. $(A + B)C = AC + BC$ $A(B + C) = AB + AC$ (Distributif kanan dan kiri)
9. $ab = 0 \Rightarrow a = 0$ atau $b = 0$	9. Tidak selalu berlaku
10. $a^2 = a \Rightarrow a = 0$ atau $a = 1$	10. Tidak selalu berlaku
11. $ab = ac,\ a \neq 0 \Rightarrow b = c$	11. Tidak selalu berlaku
12. $a^2 = 0 \Rightarrow a = 0$	12. Tidak selalu berlaku

Bukti nomor 5

Misalkan $A_{k \times n}$, $B_{n \times r}$, $C_{r \times s}$. Maka $AB_{k \times r}$, $(AB)C_{k \times s}$ dan $BC_{n \times s}$, $A(BC)_{k \times s}$. Jadi $(AB)C$ dan $A(BC)$ berukuran sama. Sekarang akan diperiksa apakah entri baris ke i kolom ke j dari $(AB)C = A(BC)$

$$((AB)C)_{ij} = \sum_{t=1}^{r} (AB)_{it}C_{tj} = \sum_{t=1}^{r} (\sum_{u=1}^{n} (A_{iu}B_{ut})C_{tj}$$

$$= \sum_{t=1}^{r} (\sum_{u=1}^{n} A_{iu}B_{ut}C_{tj})$$

$$= \sum_{u=1}^{n} (\sum_{t=1}^{r} A_{iu}B_{ut}C_{tj}) = \sum_{u=1}^{n} (\sum_{t=1}^{r} A_{iu}(B_{ut}C_{tj})$$

$$= \sum_{u=1}^{n} A_{iu} (\sum_{t=1}^{r} B_{ut}C_{tj}) = \sum_{u=1}^{n} A_{iu}(BC)C_{uj} = (A(BC))_{ij}$$

Jadi $(AB)C = A(BC)$

Teorema

Misalkan s, t $\in \mathbb{R}$, dan matriks A, B mempunyai ukuran sedemikian sehingga operasi pada pernyataan di bawah ini terdefinisi. Maka:

1. $(s + t)A = sA + tA$
2. $s(A + B) = sA + sB$
3. $(st)A = s(tA)$
4. $s(AB) = A(sB)$

(Anton, 1995: 30)

Peranan matriks nol adalah sangat istimewa sekali, seperti terlihat pada teorema berikut.

Teorema

1. $A + O = O + A = A$
2. $A - A = O$
3. $O - A = -A$
4. $A_{k\times n}O_{n\times m} = O_{k\times m}$
5. $O_{k\times n}A_{n\times m} = O_{k\times m}$
5. $kA = O \Rightarrow k = 0$ atau $A = O$

Dengan bahasa matriks kita sekarang dapat membuktikan teorema di bawah ini dengan mudah.

Teorema

Tiap SPL tidak mempunyai solusi atau jika ia mempunyai solusi maka banyaknya adalah satu atau tidak terhingga.

Bukti:

Yang perlu didiskusikan adalah jika SPL mempunyai solusi dan banyaknya lebih dari satu maka banyaknya tidak terhingga. Misalkan matriks U_1 dan U_2 $(U_1 \neq U_2)$ adalah solusi dari SPL $AX = B$, maka $AU_1 = AU_2 = B$. Dengan mudah dapat dilihat bahwa $U_1 + t(U_2 - U_1)$, $t \in \mathbb{R}$ juga solusi dari $AX = B$ (Coba tunjukkan!). Untuk t yang berbeda $U_1 + t(U_2 - U_1)$ juga berbeda (Mengapa?). Jadi kita mempunyai solusi yang tidak berhingga banyaknya jika kita biarkan t lari di $\mathbb{R}$.

Dalam dunia bilangan, $\forall$ a, $a \neq 0$, terdapat satu bilangan yang unik sedemikian sehingga hasil kalinya dengan a adalah 1. Bilangan unik ini yaitu $1/a$ (atau a^{-1}) penting sekali peranannya, sebab tanpa mereka pembagian tidak dapat dilakukan.

Definisi

Suatu matriks kuadrat A disebut dapat dibalik (mempunyai invers) jika terdapat satu matriks B sehingga $AB = BA = I$.

(Anton, 1995: 34)

Contoh

(1). $\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$ dapat dibalik karena $\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$

(2). $\begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}$ dapat dibalik karena $\begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$

(3). $\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}$ tak dapat dibalik karena $\forall$ B, $\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix} B \neq \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$

$$B\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$$

Teorema

Jika A adalah matriks kuadrat dan BA = AB = CA = AC = I, maka B = C.

(Anton, 1995: 35)

Bukti:

$B.A = I \Rightarrow (B.A)C = C$

$\Rightarrow C = B(A.C) = B.I = B$

Matriks yang unik ini diberi tanda A^{-1} dan disebut invers dari A.

Teorema

A. B dapat dibalik $\Rightarrow$ A.B juga dapat dibalik dan $(A.B)^{-1} = B^{-1}.A^{-1}$.

(Anton, 1995: 35)

Teorema

A dapat dibalik $\Rightarrow A^{-1}$ dapat dibalik dan $(A^{-1})^{-1} = A$

Contoh 4.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

tapi $\left[\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right]^{-1} \neq \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$

Akibat Teorema

Jika $A_1.A_2.\dots.A_l$ semua matriks dapat dibalik dan berukuran sama, maka $(A_1.A_2.\dots.A_l)^{-1} = A_l^{-1}.A_{l-1}^{-1}\dots A_2^{-1}.A_1^{-1}$.

Di bagian belakang akan dibahas penggunaan dari invers untuk mencari solusi dan bagaimana invers dari satu matriks.

Teorema

A dapat dibalik $A.B = A.C \Rightarrow B = C$

Contoh 5.

$$\underset{A}{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}} \underset{B}{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}} = \underset{A}{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}} \underset{C}{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$B \neq C$ dan A tak dapat dibalik.

Contoh 6.

Matriks kuadrat A yang mempunyai satu baris terdiri dari 0 $\Rightarrow$ A tak mempunyai invers.

Contoh 7.

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ tidak mempunyai invers, meskipun tidak ada baris yang hanya terdiri dari 0.

Contoh 8.

Jika matriks A memenuhi $A^2 - 3A + I = 0$, maka A dapat dibalik.

$$A^2 - 3A + I = 0$$

$$I = 3A - A^2 = A(3I - A)$$

$$= (3I - A)A$$

Jadi A mempunyai invers yaitu $3I - A$.

Kita sudah tahu arti dari A^l ($l \in \mathbb{N}$) dan A^{-1}, sekarang kita akan memperluas pengertian tersebut.

Definisi

$$A^l := \underbrace{A \ldots\ldots\ldots\ldots A}_{l \text{ kali}} \text{ , jika } l \in \mathbb{N}$$

$$A^0 := I$$

$$A^{-l} := (A^{-1})^l \text{ untuk } l \in \mathbb{N} \text{ dan } A \text{ yang dapat dibalik.}$$

Teorema

Misalkan A matriks kuadrat.

(1). $\forall\ r,s \in \mathbb{Z}$ berlaku $A^r.A^s = A^{r+s}$ dan $(A^r)^s = A^{r.s}$

(2). Jika A dapat dibalik, maka

1). A^l juga dapat dibalik dan $(A^l)^{-1} = (A^{-1})^l$ (*)

2). $(kA)^{-1} = 1/k\ .\ A^{-1}$ untuk $k \neq 0$

(Anton, 1995: 37)

Teorema

Jika C adalah matriks yang dapat dibalik, maka AX = B dan $CAX = CB$ mempunyai himpunan solusi yang sama.

Bukti:

Misalkan U adalah solusi dari $AX = B$, maka $AU = B$. Sehingga $CAU = CB$. Berarti U adalah solusi dari $CAX = CB$. Sebaliknya, misalkan V adalah solusi dari $CAX = CB$, maka $CAV = CB$. Sehingga $C^{-1}CAV = C^{-1}CB$ atau $AV = B$. Berarti V adalah solusi dari $AX = B$.

Tulislah sendiri satu akibat teorema mengenai kaitan solusi antara $AX = 0$ dan $CAX = 0$.

Catatan. Teorema ini menjamin bahwa prosedur Gauss (Gauss-Jordan) tidak merubah solusi suatu SPL.

Definisi

A matriks berukuran $k \times n$, maka transpos dari A (matriks A^T) adalah matriks berukuran $n \times k$ dengan entri $(A^T)_{ij} = A_{ji}$.

Tidak tiap matriks mempunyai invers, tetapi tiap matriks mempunyai transpos.

Teorema

(1). $A^T = B^T \Longleftrightarrow A = B$

(2). A simetrik $\Longleftrightarrow A = A^T$

(3). untuk semua A, AA^T, A^TA, $A + A^T$ adalah simetrik.

(4). * $(A + B)^T = A^T + B^T$

* $(kA)^T = k.A^T$

MILIK UPT PERPUSTAKAAN

$* \ (A.B)^T = B^T.A^T$

(5). Jika A dapat dibalik maka A^T juga dapat dibalik dan $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

(Anton, 1995: 35)

Akan dibuktikan $(A.B)^T = B^T.A^T$ dan $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

(1) Mudah dilihat bahwa $(A.B)^T$ dan $B^T.A^T$ berukuran sama.

Selanjutnya:

$$[(A.B)^T]_{ij} = (A.B)_{ji}$$

$$= \sum_{t=1}^{n} A_{jt} \ B_{ti} = \sum_{t=1}^{n} B_{ti} \ A_{jt}$$

$$= \sum_{t=1}^{n} (B^T)_{it} \ (A^T)_{tj} = (B^T.A^T)_{ij} \quad \Rightarrow (A.B)^T = B^T \ A^T.$$

(2) $AA^{-1} = A^{-1}A = I$

$$(AA^{-1})^T = (A^{-1})^T A^T = I^T = I$$

$$(A^{-1}A)^T = A^T (A^{-1})^T = I^T = I$$

$\therefore \ (A^{-1})^T$ adalah invers dari A^T, atau $((A)^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

C. Matriks Elementer

Definisi

Matriks kuadrat E disebut matriks elementer, jika ia diperoleh dari I_n melalui salah satu operasi baris elementer.

(Anton, 1995: 40)

Jadi terdapat tiga macam matriks elementer, yaitu:

(1) $$\begin{array}{cc} & \begin{matrix} & & i & & j & & \end{matrix} \\ \begin{matrix} \\ \\ i \\ j \\ \\ \\ \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & & \vdots & & \vdots & & \\ & 1 & \vdots & & \vdots & & \\ \cdots & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & \\ \cdots & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & \\ & & \vdots & & \vdots & 1 & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix} \end{array}, \quad \text{ditulis } E_{i \leftrightarrow j}$$

(2) $$\begin{array}{cc} & \begin{matrix} & & i & & & \end{matrix} \\ \begin{matrix} \\ \\ i \\ \\ \\ \\ \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & & \vdots & & & \\ & 1 & \vdots & & & \\ \cdots & \cdots & c & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & \vdots & 1 & & \\ & & \vdots & & 1 & \\ & & \vdots & & & 1 \end{bmatrix} \end{array}, \quad \text{ditulis } E_{i \to ci}$$

(3) $$\begin{array}{cc} & \begin{matrix} & & i & & j & & \end{matrix} \\ \begin{matrix} \\ \\ i \\ j \\ \\ \\ \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & & \vdots & & \vdots & & \\ & 1 & \vdots & & \vdots & & \\ \cdots & \cdots & 1 & \cdots & \cdots & \cdots & \\ \cdots & \cdots & c & \cdots & 1 & \cdots & \\ & & \vdots & & \vdots & 1 & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix} \end{array}, \quad \text{ditulis } E_{j \to ci+j}$$

Contoh 1.

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ adalah matriks elementer

Sedangkan $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ bukan matriks elementer

Coba dipikirkan jawaban dari pertanyaan berikut. Apakah I adalah matriks elementer? Apakah jumlah dua matriks elementer masih matriks elementer? Apakah hasil kali dua matriks elementer masih matriks elementer?

D. Sifat-sifat matriks elementer

Teorema

(1) Tiap matriks elementer adalah dapat dibalik dan inversnya juga matriks elementer yang sama bentuknya.

$$\left(E_{i \leftrightarrow j}\right)^{-1} = E_{i \leftrightarrow j} \qquad \left(E_{i \to ci}\right)^{-1} = E_{i \to \frac{1}{c} i}$$

$$\left(E_{j \to ci+j}\right)^{-1} = E_{j \to -ci+j}$$

(2) Transpos dari matriks elementer juga matriks elementer

$$\left(E_{i \leftrightarrow j}\right)^{T} = E_{i \leftrightarrow j} \qquad \left(E_{i \to ci}\right)^{T} = E_{i \to ci}$$

$$\left(E_{j \to ci+j}\right)^{T} = E_{i \to i+cj}$$

Kegunaan dari matriks elementer terlihat pada teorema berikut.

Teorema

Jika matriks A′ diperoleh dari A melalui operasi baris elementer tertentu, maka A′= EA dimana E adalah matriks elementer yang diperoleh dari I melalui ero yang sama.

Contoh 2.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow A' = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}. \text{ Jadi } A' = E_{(1) \leftrightarrow (2)} A$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow A'' = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1/2 \end{bmatrix}. \text{ Jadi } A'' = E_{(2)\leftrightarrow 1/2(2)}A$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow A''' = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}. \text{ Jadi } A''' = E_{(2)\leftrightarrow -2(1)+(2)}A$$

Akibat Teorema

Tiap matriks dapat diubah menjadi ref (atau rref) jika dikalikan dari kiri dengan sederet matriks elementer.

Catatan. Akibat teorema ini adalah satu cara lain untuk menyatakan teorema..... (di 1.2)

Contoh 3.

$$\underset{E_2}{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1/3 \end{bmatrix}} \underset{E_1}{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}} \underset{A}{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Untuk mencapai ref (rref) matriks elementer yang dipakai tidak harus sama (baik banyaknya, maupun bentuknya).

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Akibat Teorema

Tiap matriks yang berukuran kxn adalah hasil kali dari matriks-matriks elementer berukuran kxk dan satu matriks dalam rref berukuran kxn.

Contoh 4.

Tiap matriks ukuran 2x2 adalah dalam bentuk salah satu:

(1). $E_k . E_{k-1} \ldots E_1 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

(2). $E_k \ldots\ldots\ldots E_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

(3). $E_k . E_{k-1} \ldots E_1 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

(4). $E_k . E_{k-1} \ldots E_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

disini $E_k, \ldots, E_1$ adalah matriks-matriks elementer. Bentuk manakah diantara matriks di atas yang dapat dibalik?

Catatan. Setiap matriks yang invertible dapat dinyatakan sebagai hasil kali matriks-matriks elementer.

Bandingkanlah hal tersebut di atas dengan pernyatan "tiap bilangan asli adalah hasil kali dari bilangan *prima*".

Definisi

A,B dua matriks yang berukuran sama disebut ekivalen baris (matriks $A \underset{b}{\sim} B$) jika terdapat satu matriks C yang dapat dibalik sehingga A = CB.

Teorema (1). $A \underset{b}{\sim} B \Leftrightarrow B \underset{b}{\sim} A$

(2). $A \underset{b}{\sim} B, B \underset{b}{\sim} C \Rightarrow A \underset{b}{\sim} C$

(3). $A \underset{b}{\sim} A$

(4). $A \underset{b}{\sim}$ ref dari A

$A \underset{b}{\sim}$ rref dari A

Bukti untuk (4) adalah akibat teorema di atas.

Contoh 5.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \underset{b}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \underset{b}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \underset{b}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \underset{b}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Teorema

Jika A matriks kuadrat nxn, maka pernyataan berikut adalah ekivalen:

(1). A dapat dibalik.

(2). A X = 0 hanya mempunyai solusi trivial.

(3). A = hasil kali matriks-matriks elementer.

(4). $A \underset{b}{\sim} I_n$.

(5). rref dari A = I_n.

Bukti: (1) $\Rightarrow$ (2)

Jika A dapat dibalik, maka $\exists$ B sehingga AB = BA = I.

$AX = O \Rightarrow BAX = BO = O$

$I_n X = X = O$

(2) $\Rightarrow$ (5)

Dengan dikalikan matriks-matriks elementer dari kiri kita mendapat rref R dari A.

$$E_k . E_{k-1} \ldots E_1 . A = R$$

$E_k \ldots E_1 . A . X = RX = O$, R adalah matriks berukuran nxn dan $Rx = O$ juga hanya mempunyai solusi trivial (mengapa?), banyaknya satu utama di R sama dengan n sehingga $R = I_n$.

(5) $\Rightarrow$ (4)

$\exists$ matriks elementer $E_k \ldots E_1$ sehingga $E_k . E_{k-1} \ldots E_1 A = I_n$. Jika $B = E_k . E_{k-1} \ldots E_1$, maka $B\,A = I_n$ yaitu $A \underset{b}{\sim} I_n$

(4) $\Rightarrow$ (2)

$BA = I$ untuk satu B yang $AX = O \Rightarrow BAX = O \Rightarrow IX = X = O$.

(2) $\Rightarrow$ (3)

$AX = O$ hanya bersolusi trivial. Dengan dikalikan matriks elementer yang "tepat" kita dapat rref dari $A = E_k . E_{k-1} \ldots E_1\, A = I_n$ (karena hanya punya solusi trivial) maka $A = E_k^{-1} . E_{k-1}^{-1} \ldots E_1^{-1}$ = hasil kali matriks-matriks elementer.

(3) $\Rightarrow$ (1) jelas sekali.

Akibat Teorema

A, B berukuran $n \times n$, dan paling sedikit satu diantaranya dapat dibalik $\Rightarrow$ AB dan BA tidak dapat dibalik

Bukti: Misalkan A tidak dapat dibalik. Akan ditunjukkan AB tidak dapat dibalik. Karena A dapat dibalik, maka rref dari $A = E_l E_{l-1} \ldots\ldots E_1 A$ mempunyai paling sedikit mempunyai satu baris nol (Kenapa?). rref dari $AB = E_k' \ldots\ldots E_1' E_l \ldots E_1 AB = (E_k' \ldots\ldots E_1')(E_l \ldots\ldots E_1 A)B$. Karena $E_l E_{l-1} \ldots\ldots E_1 A$ mempunyai satu baris nol, maka AB dan bentuk terakhir yang diperoleh juga mempunyai satu baris nol, sehingga AB tidak dapat dibalik.

Jika B tak dapat dibalik, maka seperti cara di atas, BA tidak dapat dibalik. Sekarang misalkan B dapat dibalik. $BAU = 0 \Rightarrow AU = 0$ (karena B dapat dibalik). Berarti $\exists\, U \neq 0$ sedemikian sehingga $AU = 0$. Karena A tidak dapat dibalik, maka U tidak harus nol. Ini berarti bahawa $BAX = 0$ punya solusi tak trivial. Berdasarkan teorema di atas (Coba tunjuk, teorema 4 nomor berapa?), maka BA tidak dapat dibalik.

Akibat Teorema

$A \underset{b}{\sim} B$. A dapat dibalik $\Leftrightarrow$ B dapat dibalik.

Kalau A dapat dibalik, maka terdapat matriks elementer $E_1 \ldots E_k$ sehingga $E_k . E_{k-1} \ldots E_1\ A = I$ dan $A^{-1} = E_k . E_{k-1} \ldots E_1$.

Kalau kita tulis satu matriks baru yang berukuran nx2n $\left[A \mid I\right]$ dan kalikan $E_1.E_2...E_n$ dari kiri berurutan, kita dapat

$$\left[E_n...E_1\ A \mid E_k.E_{k-1}...E_1\ I\right] = \left[I \mid E_k.E_{k-1}...E_1\right] = \left[I \mid A^{-1}\right].$$

Ini memberi satu cara yang sistematis untuk menghitung A.

Contoh 6.

Carilah invers dari $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Jawab: $\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$

$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$

Invers dari $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ adalah $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Contoh 7.

Carilah invers dari $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

Jawab: $\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right]$

bagian kiri tak dapat diubah menjadi $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, maka berarti $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ tak berinvers.

E. SPL yang Matriks Koefisiennya Dapat Dibalik

Di bagian ini kita akan bicarakan SPL tertentu yaitu matriks yang koefisiennya dapat dibalik.

Teorema

Jika A matriks nxn, maka:

(1). $A X = 0$ bersolusi trivial $\Leftrightarrow A^k X = 0$ bersolusi trivial untuk $k \in \mathbb{N}$.

(2). Q matriks nxn, Q dapat dibalik, $A X = 0$ bersolusi trivial $\Leftrightarrow Q A X = 0$ bersolusi trivial.

Teorema

A matriks nxn yang dapat dibalik $\Rightarrow \forall$ B berukuran nx1, $AX = B$ *selalu* bersolusi yaitu $X = A^{-1} B$.

Kadang-kadang kita ingin mencari solusi dari SPL-SPL yang berbentuk $AX = B_1$, $AX = B_2$, ..., $AX = B_t$. Jika A dapat dibalik, maka solusinya adalah $X = A^{-1}B_1$, $X = A^{-1}B_2, \ldots, X = A^{-1}B_t$. Dan ini dapat dihitung sekaligus dengan cara berikut.

$\left[\; A \;\vdots\; B_1 \;\vdots\; B_2 \;\vdots \ldots \vdots\; B_t \right]$ dengan prosedur Gauss-Jordan diperoleh $\left[I \;\vdots\; A^{-1}B_1 \;\vdots\; A^{-1}B_2 \;\vdots \ldots \vdots\; A^{-1}B_t \right]$. Ini terjadi jika A dapat dibalik.

Contoh 1. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, $B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $B_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$\left[\begin{array}{cc|c|c|c} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|c|c|c} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & -2 & 1 & -1 \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{cc|c|c|c} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2/3 & -1/3 & 1/3 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|c|c|c} 1 & 0 & -1/3 & 2/3 & 1/3 \\ 0 & 1 & 2/3 & -1/3 & 1/3 \end{array}\right]$$

Solusi:

$AX = \left[\quad\right]$ adalah $\left[\quad\right]$

$= \left[\quad\right]$ adalah $\left[\quad\right]$

$= \left[\quad\right]$ adalah $\left[\quad\right]$

Jadi untuk $AX = BA$ dapat dibalik, kita selalu memperoleh solusi, tak peduli dengan B. Bagaimana halnya dengan A yang tak dapat dibalik?

Umpama: $\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + 2y = 1 \end{cases}$ matriks koefisien

$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ tak dapat dibalik.

SPL di atas ternyata tak mempunyai solusi. Kita akan bicarakan hal ini lebih lanjut di bagian belakang.

Contoh 2.

Carilah syarat yang harus dipenuhi oleh b_1, b_2, b_3 supaya SPL ini mempunyai solusi.

$$\begin{cases} x + y + z + u = b \\ 2x - y - z + 2u = b \\ 3x \qquad\quad + 3u = b \end{cases}$$

Bagian kiri persamaan ketiga adalah jumlah bagian-bagian kiri dari persamaan ke I dan II. Ini berarti $b_3 = b_1 + b_2$. Dengan syarat ini, maka SPL menjadi lebih singkat

$$\begin{cases} x + y + 3z + u = b_1 \\ 2x - y - z + 2u = b_2 \end{cases} \Rightarrow 3x + 3u = b_1 + b_2$$

Jadi tak peduli b_1 dan b_2, $3x + 3u = b_1 + b_2$ selalu bersolusi. Solusi kita substitusi ke $x + y + z + u = b_1$. Kita dapat solusi untuk SPL semula.

Waktu kita definisikan invers dari satu matriks kuadrat A, kita mengharuskan $\exists$ B sehingga $A.B = I = B.A$, dimana B harus memenuhi dua syarat, tetapi teorema di bawah ini menunjukkan bahwa syarat itu tidak perlu.

Teorema

A, B matriks kuadrat. $AB = I_n \Leftrightarrow B = A^{-1}$.

Bukti: $\Leftarrow$ jelas

$\Rightarrow$ Kita buktikan dahulu A dapat dibalik. Jika U adalah solusi dari $AX = O$, maka $AU = O = B(AU) = (BA)U = IU = U$. Jadi $AX = O$ hanya mempunyai solusi trivial dan A^{-1} ada.

$BA = I \Rightarrow (BA)A^{-1} = A^{-1} \Rightarrow B(AA^{-1}) = BI = B = A^{-1}$.

MILIK UPT PERPUSTAKAAN IKIP PADANG

Dari uraian yang telah dikemukakan pada Bab I dan Bab II, dapat disarikan beberapa hal penting sebagai berikut.

SPL adalah koleksi persamaan-persamaan dalam unknwon yang sama dan dalam bentuk tertentu (linier). Tugas kita adalah mencari solusi yang memenuhi tiap persamaan dalam waktu yang sama. Cara yang kita pakai (Gauss atau Gauss-Jordan) adalah merobah SPL (atau matriks yang diperbesarnya) menjadi bentuk yang tertentu (*ref* atau *rref*). Dalam bentuk-bentuk ini kita langsung mengetahui apakah SPL semula bersolusi atau tidak. Jika bersolusi, kita dapat dengan mudah memperoleh himpunan solusinya. Tiap solusi dari satu SPL umum adalah terdiri dari satu solusi tertentu dengan solusi dari SPL homogen yang diasosiasikan dengan SPL semula.

Dengan operasi + antar matriks, perkalian skalar antara bilangan dengan matriks dan perkalian antar matriks, kita dapatkan matriks baru. Operasi-operasi ini tingkah lakunya ada yang seperti operasi-operasi pada bilangan, dan ada yang tidak.

Matiks elementer meskipun bentuknya sangat sederhana, tetapi dapat digunakan merubah matriks menjadi ref (atau rref) tanpa merubah solusi. Dan tiap matriks yang dapat dibalik adalah hasil kali matriks elementer tertentu. Dari ini kita dapat satu cara yang mudah mendapat matriks tertentu dari matriks yang dapat dibalik. Matriks yang dapat dibalik ini mempunyai sifat-sifat yang baik.

LATIHAN

Kelompok A

1. Untuk nilai-nilai konstanta *k* manakah SPL berikut mempunyai tepat satu solusi? Takterhingga banyaknya solusi? Tidak mempunyai solusi?

$$x - y = 3$$
$$2x - 2y = k$$

2. Diketahui SPL:

$$ax + by = k$$
$$cx + dy = l$$
$$ex + fy = m$$

   a. Jika SPL ini konsisten, tunjukkan bahwa salah satu persamaan dapat dibuang, tanpa merubah solusinya.

   b. Jika $k = l = m = 0$, tunjukkan bahwa SPL harus konsisten

   c. Kapankan SPL hanya mempunyai tepat satu solusi?

3. Diketahui SPL:

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= a \\ x \quad + \quad z &= b \\ 2x + y + 3z &= c \end{aligned}$$

   Tunjukkan bahwa agar SPL konsisten, maka $c = a + b$.

4. Buktikan: jika SPL $x_1 + kx_2 = c$ dan $x_1 + lx_2 = d$ mempunyai solusi yang sama, maka kedua SPL tersebut identik.

5. Carilah SPL dengan unknown x, y, w, z yang solusinya: $x = 1 - s + t$, $y = s$, $w = t$, $z = 2 - t$, $s, t \in \mathbb{R}$.

8. Carilah 100 ribu SPL yang berbeda bentuknya, tetapi solusinya sama dengan solusi SPL:

$$x + y - j = 1$$
$$2x - y + 3j = 0$$

Kelompok B

1. $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ dapat dibalik $\Leftrightarrow \exists$ B ....
2. A dapat dibalik, $AB = AC \Rightarrow$ ....
3. Matriks Elementer yang dapat dibalik adalah bentuk:

   a. pertama b ke dua c. ke tiga
4. C dapat dibalik $\Rightarrow$ solusi $AX = B$ sama dengan solusi ......
5. Berhubung matriks yang dipakai dalam prosedur Gauss-Jordan adalah bersifat ...., maka prosedur itu menjamin tidak akan merobah ....
6. A dapat dibalik $\Leftrightarrow$ rref dari A adalah ....

   $\Leftrightarrow$ $AX = 0$ hanya mempunyai solusi ....

   $\Leftrightarrow$ $\forall$ B, $AX = B$ mempunyai solusi ....

   $\Leftrightarrow$ A dapat ditulis sebagai perkalian .....
7. A, B, C dapat dibalik $\Rightarrow (ABC)^{-1}$ = ...
8. $((A^{-1})^{-1})^{-1}$ = ...
9. $(A + B)^{-1} = B^{-1} + A^{-1}$, adalah pernyataan yang:

   a. salah b. benar
10. A dapat dibalik, B tak dapat dibalik, maka pernyataan berikut yang enar adalah:

    a. AB tak dapat dibalik

    b. AB dapat dibalik

Kelompok C

1. Carilah contoh yang menunjukkan, jika A', B', $(A+B)'$ masing-masing adalah *rref* (bentuk eselon baris tereduksi) dari matriks A, B, (A +B), maka berlaku $(A + B)' = A' + B'$
2. Carilah contoh yang menunjukkan bahwa kita tidak dapat menggunakan operasi baris elementer (*obe/ero*) ke 1 dan ke 2 untuk mendapatkan hasil yang bisa diperoleh melalui *obe* ke 3.
3. Tulislah *rref* dari SPL dengan 4 persamaan dan 4 unknown yang:

   a. tidak mempunyai solusi

   b. mempunyai tepat satu solusi

   c. mempunyai solusi yang banyaknya tidak terhingga
4. Diketahui SPL:

$$\begin{aligned} x + 2y - 3z &= 4 \\ 3x - y + 5z &= 2 \\ 4x + y + (a^2 - 14)z &= a + 2 \end{aligned}$$

   Tentukan nilai a sedemikian sehingga SPL:

   a. tidak mempunyai solusi

   b. mempunyai tepat satu solusi

   c. mempunyai solusi yang banyaknya tidak terhingga
5. Pecahkanlah SPL berikut menggunakan eliminasi Gauss-Jordan!

(a) $3x_1 + 2x_2 - x_3 = -15$

$5x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0$

$3x_1 + x_2 + 3x_3 = 11$

$11x_1 + 7x_2 = -30$

(b) $x_1 - 2x_2 + x_3 - 4X_4 = 1$

$x_1 + 3x_2 + 7x_3 + 2x_4 = 2$

$x_1 - 12x_2 - 11x_3 - 16x_4 = 5$

6. Pada Teorema 3 (bagian 1.3 pada lecture note), terangkan mengapa tidak benar untuk menyatakan unknown utama dengan x_1, x_2, ..., x_r, melainkan dinyatakan dengan x_{k_1}, x_{k_2}, ..., x_{k_r}.

7. Matriks A berukuran 2 x n dan matriks B berukuran n x 2. Jika $AB = I_{2\times 2}$, tunjukkan bahwa matriks A tidak mempunyai baris yang seluruh entrinya nol. Apakah hal ini juga berlaku untuk matriks B?

8. Jika diketahui A = himpunan solusi dari suatu SPL, berilah suatu cara untuk mencek apakah A merupakan himpunan solusi dari SPL homogen atau bukan.

9. Persamaan $ax^2 + bx + c = 0$ paling banyak mempunyai dua solusi. Carilah satu persamaan matriks $AX^2 + BX + C = 0$ yang mempunyai solusi lebih dari 2 (A, B, C matriks berukuran 2 x 2).

10. Buktikan: jika terdapat $k \in \mathbb{N}$ sehingga $(A - I)^k = 0$,

maka A dapat dibalik.

11. Carilah (*paling sedikit*) empat cara untuk menunjukkan bahwa:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} \text{ tidak dapat dibalik.}$$

12. Carilah invers dari $\begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{bmatrix}$ untuk n = 7 dan 8

Apakah bentuk invers keduanya mirip?

13. $A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$ mempunyai invers. Buktikan:

$$A' = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ juga mempunyai invers.}$$

14. Bacalah definisi dari A tranpose (A^T) kemudian buktikan: A dapat dibalik $\Leftrightarrow$ A^T dapat dibalik.

15. Tulislah $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ sebagai perkalian matriks elementer.

DAFTAR PUSTAKA

Anton, Howard. 1991. **Elementary Linier Algebra,** (6^{th} edition). John Wiley & Sons, Inc : Singapore

Anton, Howard. 1995. **Aljabar Linier Elementer** (Edisi V), Erlangga : Jakarta

Friedberg, Stephen H. 1979. **Linier Algebra**, The Southeast Book Company : New Jersey

Hohn, Franz E., 1973, **Elementary Matrix Algebra**, The Macmillan Company : New York

Surjadi, 1971. **Aljabar Linier dan Ilmu Ukur Analitik**, Djambatan : Jakarta