MAKALAH

GEOMETRI HINGGA

Disusun oleh:

Drs. Nurlius

JURUSAN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN IPA

UNIVERSITAS NEGERI PADANG

2000

GEOMETRI HINGGA

Oleh: Drs. Nurlius *)

I. Latar Belakang

Matematika merupakan sarana yang sangat penting di dalam ilmu pengetahuan dan kehidupan sehari-hari. Oleh karena itu matematika diajarkan di setiap jenjang pendidikan, baik pendidikan dasar, menengah, atas maupun perguruan tinggi.

James dan James (1976) (dalam Karso 1993 halaman 2) mengatakan bahwa matematika itu adalah ilmu tentang logika mengenai bentuk, susunan, besaran dan konsep-konsep yang saling berhubungan yang satu dengan yang lainnya dalam jumlah yang banyak. Matematika timbul karena pikiran manusia yang berhubungan dengan ide, proses dan penalaran. Matematika terdiri dari empat wawasan yang luas yaitu aritmatika, aljabar, geometri dan analisis.

Matematika dimulai dari *unsur-unsur yang tidak didefinisikan* berkembang ke *unsur-unsur yang didefinisikan* terus ke *aksioma* atau *postulat* sampai ke *dalil-dalil*. Unsur-unsur dasar yang tidak didefinisikan merupakan unsur dasar dalam komunikasi matematika. Dari unsur-unsur yang tidak dide-

---

*) *Dosen Jurusan Matematika FMIPA UNP Padang*

finisikan dapat dikembangkan menjadi unsur-unsur lainnya yang dapat didefinisikan .

Selanjutnya unsur-unsur yang tidak didefinisikan dan unsur-unsur yang dapat didefinisikan dibuatlah *aksioma*. *Aksioma* merupakan asumsi-asumsi dasar tertentu dan dipilih sebagai kesepakatan yang biasanya nampak sesuai dengan pengalaman kita.

Dari unsur-unsur yang tidak didefinisikan, unsur-unsur yang didefinisikan dan aksioma-aksioma terbentuklah *dalil-dalil* atau *teori-teori* yang kebenarannya berlaku umum dan kebenarannya itu dapat dibuktikan secara deduktif (umum).

Geometri berasal dari kata latin "Geometria", Geo yang berarti tanah dan metria berarti pengukuran. Memang menurut sejarahnya Geometri tumbuh pada zaman jauh sebelum Masehi karena keperluan pengukuran tanah setiap kali sesudah sungai Nil di Mesir banjir. Dalam bahasa Indonesia , Geometri dapat diterjemahkan pula sebagai ilmu ukur. Geometri didefinisikan juga sebagai cabang matematika yang mempelajari titik, garis, bidang dan benda-benda ruang serta sifat-sifatnya, ukuran-ukurannya dan hubungannya satu sama lain (terjemahan dari Webster's New World Dictionary, 605). Jadi geometri dapat dipandang sebagai suatu studi tentang ruang physik.

Dalam geometri terdapat unsur-unsur yang didefinisikan dan unsur-unsur yang tidak didefinisikan yang disebut pengertian pangkal atau "primitive concept". Selain itu dalam geometri juga diperlukan sejumlah definisi, postulat dan dalil-dalil sehingga geometri dapat dipandang sebagai suatu sistem deduktif. Geometri yang pertama-tama dapat dipandang sebagai suatu sistem deduktif adalah Geometri dari Euclide. Ia menulis bukunya sebanyak 13 buah dengan mengumpulkan materinya dari beberapa sumber dan dari tokoh-tokoh sebelumnya yang terkenal dengan "The Elements" atau "Euclid's Elements" atau "Unsur-unsur Euclides". Dalam bukunya yang pertama Euclide mulai dengan 23 definisi , 5 postulat, 5 aksioma dan 48 dalil. Seiring dengan berkembangnya geometri Euclide yang telah dipelajari selama hampir 2000 tahun ternyata sekarang ditemui banyak kelemahannya . Salah satunya adalah postulat kelima dari Euclide yang terkenal dengan Postulat Paralel yang terlalu panjang. Beberapa matematikawan menganggap bahwa postulat kelima itu bukan postulat, karena dapat dibuktikan dengan keempat postulat lainnya. Usaha tersebut mengakibatkan ditemukannya Geometri lain yaitu Geometri Non Euclide yang melahirkan Geometri Rieman (Geometri Eliptik) dan Geometri Lobachevsky (Geometri Hiperbolik).

Geometri Euclide yang dipelajari selama ini merupakan bagian dari geometri itu sendiri. Masih banyak lagi geometri-geometri yang belum kita kenal. Untuk itu penulis mencoba membahas salah satu di antaranya, yaitu geometri hingga. Geometri hingga yang dibahas dalam makalah ini adalah *Geometri Empat Titik* dan *Geometri Fano dan Young*.

II. PEMBAHASAN

Pada Sistem Geometri Euclid dikenal adanya unsur-unsur yang tidak didefinisikan yaitu titik, garis, lengkungan dan bidang. Dari unsur-unsur yang tidak didefinisikan muncullah unsur-unsur yang didefinisikan seperti sudut, bujur sangkar, dan lain sebagainya.

Dari unsur-unsur yang tidak didefinisikan dan unsur-unsur yang didefinisikan lahirlah *postulat* atau *aksioma* yaitu:

1. garis lurus dibuat dari titik ke titik
2. garis lurus kontiniu yang terbatas dihasilkan dari garis lurus
3. untuk melukis lingkaran diperlukan pusat dan jarak
4. semua sudut siku-siku sama satu dengan yang lainnya
5. jika garis lurus dipotongkan pada dua garis lurus lain membuat sudut dalam pada sisi yang sama kurang dari dua kali siku-siku, maka kedua garis lurus tersebut akan berpotongan pada sisi yang sudutnya kurang dari dua kali sudut siku-siku
6. ada paling sedikit tiga titik dimana mereka tidak pada satu garis.

A. Geometri Empat Titik

Sebagaimana halnya Geometri Euclid di atas, Geometri Empat Titik ini mempunyai unsur-unsur yang tidak didefinisikan yaitu *titik*, *garis* dan *pada*

Berikut tiga aksioma yang terdapat di dalam *Geometri Empat Titik* yaitu:

Aksioma 1 : Ada tepat empat titik

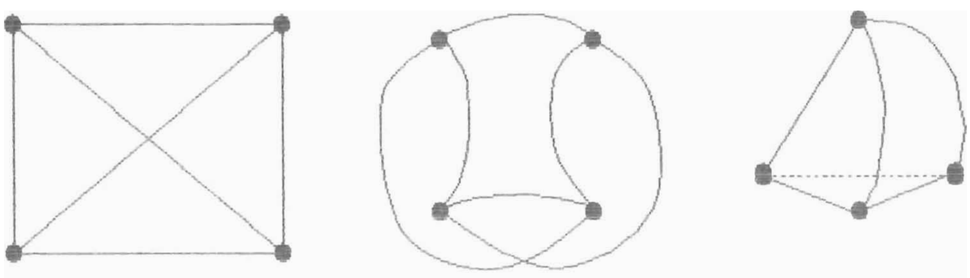
Aksioma 2 : Ada dua titik berbeda yang tepat mempunyai satu garis padanya.

Aksioma 3 : Setiap garis memuat tepat dua titik

Di dalam geometri ini hanya terdapat empat buah titik. Jika terdapat dua buah titiknyang berbeda, maka hanya dapat dibuat satu buah garis yang melalui kedua garis tersebut. Setiap garis dalam geometri ini hanya dapat memuat dua buah titik.

Garis dalam geometri *Geometri Empat Titik* titik ini tidak hanya berupa garis lurus namun bisa juga berupa garis lengkung. Garis ini panjangnya berhingga, namun bentuk garis yang melalui dua buah titik tidak ditentukan.

Jika titik-titik diinterpretasikan sebagai bintik pada kertas dan garis sebagai garis hitam, maka satu model dari Geometri Empat Titik dapat ditunjukkan dengan banyak gambar, tiga diantaranya daperlihatkan dalam gambar berikut:



Gambar 1 Gambar 2 Gambar 3

Semua aksioma yang ada akan dipenuhi oleh ketiga gambar di atas.

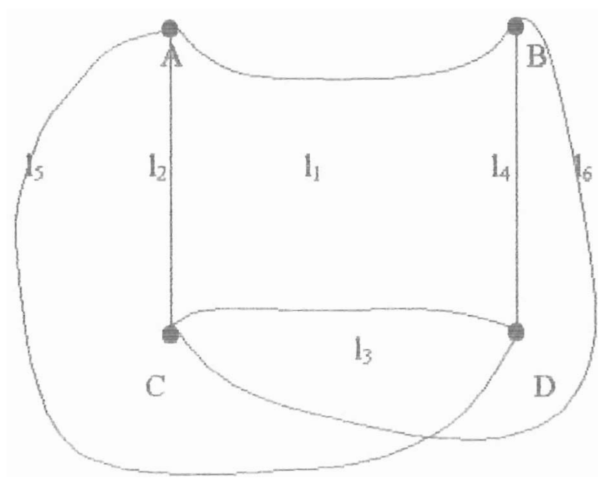
Definisi 1 :

Dua garis pada titik yang sama dikatakan berpotongan dan disebut garis berpotongan.

Definisi 2 :

Dua garis yang tidak berpotongan dinamakan sejajar.

Perhatikan gambar berikut ini!



Gambar 4

Keterangan:

l_3 berpotongan dengan l_5 karena l_3 dan l_5 sama-sama terletak pada titik D

l_1 berpotongan dengan l_2 karena l_1 dan l_2 sama-sama terletak pada titik A

l_4 berpotongan dengan l_6 karena l_4 dan l_6 sama-sama terletak pada titik B

l_1 sejajar dengan l_3 karena tidak terletak pada satu titik yang sama

l_2 sejajar dengan l_4 karena tidak terletak pada satu titik yang sama

l_5 sejajar dengan l_6 karena tidak terletak pada satu titik yang sama

Dalam Geometri Empat Titik ini tidak dikenal adanya sudut, hubungan antara garis dan titik yaitu titik terletek pada garis atau garis terletak pada titik dan titik tidak terletak pada garis atau garis tidak terletak pada titik. Sedangkan hubungan antara garis dengan garis adalah garis sejajar dengan garis lain atau garis berpotongan dengan garis lain. Geometri Empat Titik ini terletak pada bidang.

Teorema Empat Titik (1):

Dalam Geometri Empat Titik, jika dua garis berbeda berpotongan maka terdapat satu titik persekutuan.

Bukti:

Dengan *definisi 1,* dua garis berbeda yang berpototngan mempunyai paling sedikit satu titik persekutuan dan *aksioma 2* melarang lebih dari satu persekutuan.

Teorema Empat Titik (2):

Geometri Empat Titik mempunyai tepat enam garis

Bukti:

Dari *aksioma 2,* tiap pasangan titik mempunyai satu garis dan *aksioma 1* menguatkan ada empat titik. Dengan menggunakan kombinatorik sederhana, maka akan terdapat enam pasangan dari titik. Dari sini ada enam garis. *Aksioma 3* menjamin tidak lebih dan tidak kurang

Teorema Empat Titik (3):

Tiap titik pada Geometri Empat Titik mempunyai tepat tiga garis pasanya.

Bukti:

Dengan *aksioma 2,* maka tiap titik mempunyai sebuah garis persekutuan dengan ketiga titik lainnya. Oleh karena itu paling sedikit ada tiga garis pada tiap titik. Andaikan terdapat empat garis pada satu titik, dengan *aksioma 3* maka garis keempat akan berada pada salah satu dari ketiga titik lainnya, hal ini dibantah oleh *aksioma 2* yang menyatakan bahwa ada dua titik berbeda yang tepat mempunyai satu garis padanya. Oleh karena itu ada tepat tiga garis pada tiap titik.

Teorema Empat Titik (4):

Dalam Geometri Empat Titik, tiap garis yang berbeda tepat mempunyai satu garis sejajar padanya.

Bukti:

Aksioma 1 dan *Aksioma 3* memberi kita garis l dan sebuah titik P tidak pada garis l. *Teorema Empat Titik 3* menyatakan bahwa tepat ada tiga garis pada P dan *Aksioma 2* menyatakan bahwa dua dari garis tersebut berpotongan pada l. Oleh karena itu, paling sedikit satu garis sejajar pada l. Andaikan ada garis lain yang sejajar dengan l. Garis ini tidak dapat memuat P yang diperkuat *Teorema Empat Titik 3* dan karena ia paralel (sejajar) dengan l maka garis ini tidak dapat memuat satu titik lainpun pada l. Berarti garis kedua hanya memuat satu titik, menurut *aksioma 3* atau ada lima titik menurut *Teorema Empat Titik 1.* Oleh karena itu, garis sejajar yang kedua tersebut tidak ada dan tepat hanya ada satu garis.

Bukti keempat *Teorema Empat Titik* dengan cara lain :

Semenjak geometri itu hingga, adalah mungkin untuk menguji setiap kemungkinan dari masalah titik dan garis. Dengan menggunakan gambar di bawah dimana titik-titik dinyatakan dengan huruf A,B,C dan D dan garis dengan kolom-kolom huruf boleh diperiksa langsung untuk melihat bahwa dua garis yang berbeda saling berpotongan tepat pada satu titik, sehingga tepat ada 6 garis yang tiap titik tepat mempunyai tiga garis padanya dan tiap garis tepat mempunyai satu garis yang sejajar dengannya.

l_1	l_2	l_3	l_4	l_5	l_6
A	A	A	B	B	C
B	C	D	C	D	D

Contoh Soal:

1. Tulislah setiap aksioma dari Geometri Empat Titik dengan menukar kata "titik" dengan "garis". Setiap aksioma baru disebut *plane dual*. Geometri yang dihasilkan disebut *Geometri Empat Garis*.

Jawab:

Aksioma 1 : Terdapat tepat empat garis

Aksioma 2 : Terdapat dua garis berbeda yang tepat mempunyai satu titik padanya

Aksioma 3 : Setiap titik memuat tepat dua garis

1. Tulis setiap teorema Geometri Empat Titik dengan menukar kata "titik" dengan "garis" dan sebaliknya. Bentuk baru ini desebut *Teorema Geometri Empat Garis.*

Jawab:

Teorema Empat Garis (1):

Dalam Geometri Empat Garis, jika dua titik berbeda berpotongan maka terdapat satu garis persekutuan.

Teorema Empat Garis (2) :

Geometri Empat Garis mempunyai tepat enam titik

Teorema Empat Garis (3) :

Tiap garis pada Geometri Empat Garis mempunyai tepat tiga titik padanya.

Teorema Empat Garis (4) :

Dalam Geometri Empat Garis, tiap titik yang berbeda tepat mempunyai satu titik sajajar padanya.

2. Jika titik-titik diinterpretasikan sebagai bintik pada kertas dan garis sebagai garis hitam, maka buatlah satu model dari Geometri Empat Garis.

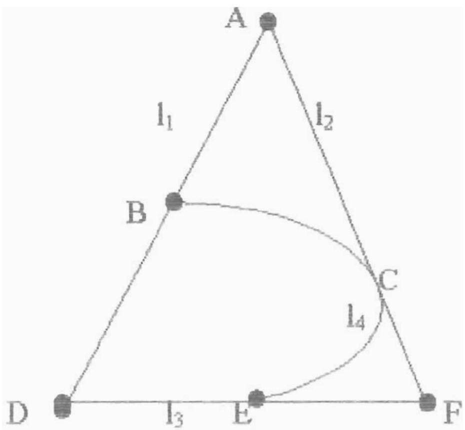
Jawab:

Pada soal 1 dan soal 2 telah kita dapatkan Aksioma dan Teorema dari Geometri Empat Garis. Untuk dapat membuat gambar dari Geometri Empat Garis kita memerlukan definisi dari Geometri Empat Garis dengan cara menukar kata "titik" dengan "garis" pada definisi Geometri Empat Titik dan sebaliknya.

Definisi 1 :

Dua titik pada garis yang sama dikatakan berpotongan dan disebut titik berpotongan.

Definisi 2 : Dua titik yang tidak berpotongan dinamakan sejajar



Dari gambar di atas, terdapat empat buah garis yaitu l_1, l_2, l_3 dan l_4.

Terdapat dua garis berbeda yang mempunyai tepat satu titik padanya, yaitu:

a. l_1 dan l_2 memuat titik A

b. l_1 dan l_3 memuat titik D

c. l_1 dan l_4 memuat titik B

d. l_2 dan l_3 memuat titik F

e. l_2 dan l_4 memuat titik C

f. l_3 dan l_4 memeuat titik E

Setiap titik termuat pada dua garis yaitu:

a. titik A termuat pada l_1 dan l_2

b. titik B termuat pada l_1 dan l_4

c. titik C termuat pada l_2 dan l_4

d. titik D termuat pada l_1 dan l_3

e. titik E termuat pada l_3 dan l_4

f. titik F termuat pada l_2 dan l_3

B. Geometri Fano dan Young

Sebagaimana halnya Geometri Euclid di atas, Geometri Fano dan Young ini mempunyai unsur-unsur yang tidak didefinisikan yaitu *titik, garis* dan *pada*. Sebagaimana namanya maka geometri ini sebenarnya terdiri dari dua macam yaitu Geometri Fano dan Geometri Young. Untuk lebih jelasnya kita bahas satu persatu.

- **Geometri Fano**

Geometri Fano dalam geometri hingga mempunyai beberapa aksioma dan teorema yang mempunyai kekhasan tersendiri dari geometri lain.

Berikut lima aksioma dari geometri Fano:

Aksioma 1 : Terdapat paling sedikit satu garis

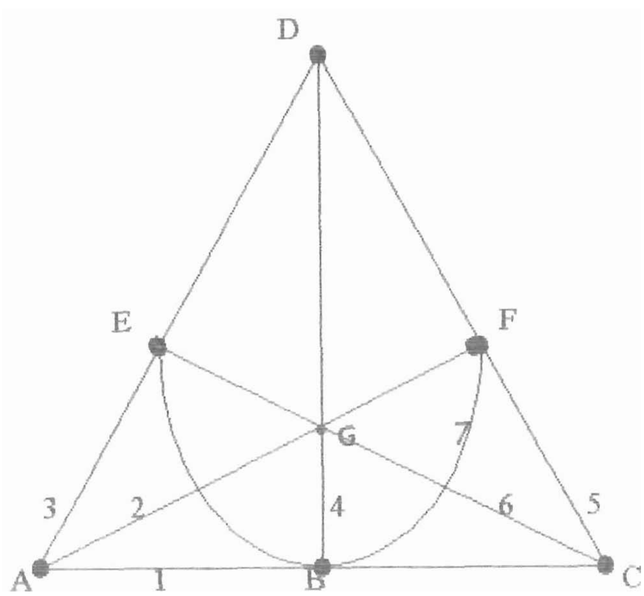
Aksioma 2 : Ada tepat 3 titik pada setiap garis

Aksioma 3 : Tidak semua titik berada pada garis yang sama

Aksioma 4 : Tepat satu garis pada dua titik yang berbeda

Aksioma 5 : Terdapat sekurang-kurangnya satu titik pada dua garis yang berbeda

Dengan adanya aksioma-aksioma di atas mendorong kita untuk mencoba menggambarkan suatu model dari geometri Fano. Salah satunya adalah gambar di bawah ini :



Dalam geometri hingga sebuah model geometri dapat disajikan dalam bentuk tabel dimana titik -titik dinyatakan dengan huruf-huruf besar dan garis-garis merupakan kolom-kolom huruf. Dari sini akan mudah dicek secara langsung untuk melihat apakah dua garis yang berbeda saling berpotongan tepat pada satu titik. Jadi jika model geometri Fano di atas digambarkan dalam bentuk tabel maka hasilnya adalah sebagai berikut.

l_1	l_2	l_3	l_4	l_5	l_6	l_7
A	A	A	B	C	C	E
B	G	E	G	F	G	B
C	F	D	D	D	F	F

Selain 5 aksioma di atas, geometri Fano juga didukung oleh beberapa teorema yaitu :

Teorema 1 : Dalam geometri Fano dua garis berbeda mempunyai tepat satu titik persekutuan.

Bukti :

Jika garis l dan m berpotongan, maka menurut definisi terdapat paling sedikit satu titik (titik potong), misalkan P

Andaikan l dan m berpotongan pada titik lain (misalkan Q), maka akan akan terdapat dua garis yang memuat 2 titik secara bersama. Ini bertentangan dengan A_4, yaitu "Tepat satu garis pada dua titik yang berbeda". Jadi yang benar adalah "Dua garis berbeda berpotongan pada tepat satu titik.

Teorema 2 : Geometri Fano memuat tepat tujuh titik dan tujuh garis

Bukti :

Menurut Aksioma 1, ada suatu garis, sebutlah l.

Menurut Aksioma 2, garis l ini memuat tiga titik, sebutlah titik A, B, dan C.

Menurut Aksioma 3, ada suatu titik yang tidak termuat di l, misalkan titik D.

Menurut Aksioma 4, pasangkan titik-titik A dengan D, B dengan D, dan C dengan D masing-masing menentukan garis, sebutlah berturut-turut l_1, l_2, dan l_3. Masing-masing l_i ini berlainan.

Menurut A_2(aksioma 2) dengan mengingat A_3, misalkan E adalah titik di l selain A dan D, F adalah titik di l_2 selain B dan D, dan G adalah titik di l_3 selain C dan D.

Perhatikan bahwa titik-titik E, F, dan G ini saling berbeda (dengan mengingat teorema 1).

Demikian juga, masing-masing E, F, dan G tidak sama dengan salah satu dari A, B, ataupun C (dengan mengingat A_2).

Sekarang, menurut A_2, kita punya garis yang melalui G dan A, (sebutlah m_1), dan garis yang melalui G dan B, (sebutlah m_2), juga garis yang melalui E dan C (sebutlah m_3).

Menurut A_3, maka m_1 dan m_2 masing-masing berbeda dengan l, sehingga dengan demikian m_1 tidak sama dengan m_2 (dengan mengingat A_2).

Selanjutnya dengan mengingat A_2, maka m_1 berbeda dengan m_3, m_2 berbeda dengan m_3, dan m_1, m_2 ,m_3 masing-masing berbeda dengan l, l_1, l_2, maupun l_3.

Jadi kita punya paling sedikit 7 garis.

Sekarang, misalkan n adalah sebarang garis.

Karena kita punya tepat 7 titik, maka titik-titik itu adalah A, B, C, D, E, F, dan G.

Jadi menurut A_2, n memuat paling sedikit 2 titik dari 7 titik tersebut. Dengan setiap kali menggunakan A_4, maka tampak bahwa n adalah salah satu dari l, l_1, l_2, l_3, m_1, m_2 , atau m_3.

Dengan demikian terbukti bahwa terdapat tujuh titik dan tujuh garis.

Jika sekarang ini kita mengenal adanya istilah garis sejajar maka dalam geometri Fano tidak dikenal adanya garis sejajar.

♦ **Geometri Young**

Sekarang kita bahas tentang geometri Young dimana geometri Young ini memperkuat keberadaan geometri Fano dengan tetap mengasumsikan empat aksioma pertama dan pada aksioma ke 5 terdapat perbedaan .

Aksioma 1 : Terdapat paling sedikit satu garis

Aksioma 2 : Ada tepat 3 titik pada setiap garis

Aksioma 3 : Tidak semua titik berada pada garis yang sama

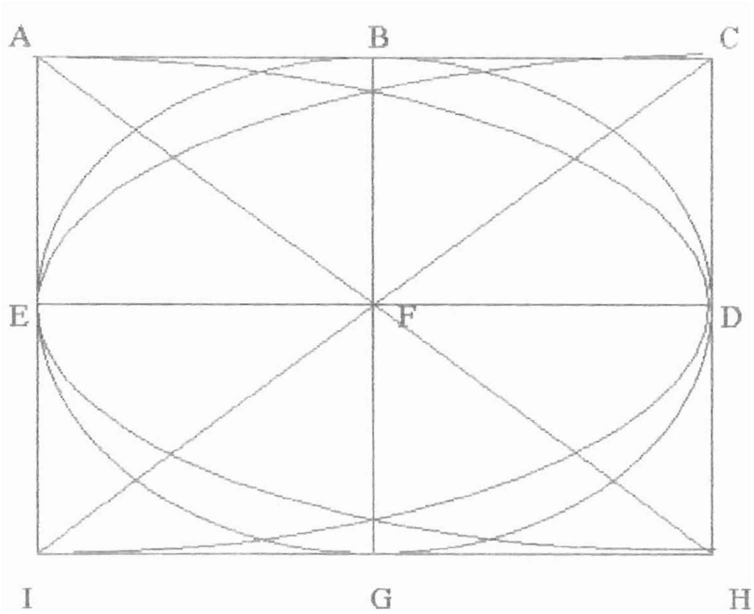
Aksioma 4 : Tepat satu garis pada dua titik yang berbeda

Aksioma 5 : Untuk tiap garis l dan tiap titik P tidak pada l ada tepat satu garis pada P yang tidak memuat satupun titik pada l.

Dari kelima aksioma yang diberikan dapat disajikan suatu bentuk dalam tabel dari geometri Young sebagai berikut :

l_1	l_2	l_3	l_4	l_5	l_6	l_7	l_8	l_9	l_{10}	l_{11}	l_{12}
A	A	A	B	B	B	C	C	D	D	G	H
B	D	E	E	D	F	F	E	E	H	H	F
C	G	I	H	I	G	I	G	F	C	I	A

Adapun model dari tabel geometri Young tersebut di atas adalah seperti gambar di bawah ini.



Mungkin dalam hal ini pembaca dapat memikirkan bagaimana bentuk geometri Young ini . Untuk memperkuat keberadaannya geometri ini juga dilengkapi dengan beberapa teorema :

Teorema 1 : Setiap titik dalam geometri Young berada paling sedikit pada empat garis

Bukti :

Ambil sebarang titik P dan sebarang garis l yang tidak memuat P. Dengan aksioma 2, l memuat tepat tiga titik dan dengan aksioma 4, P dan tiap titik pada l menentukan sebuah garis yang berbeda . Oleh karena itu kita mempunyai paling sedikit 3 garis. Dengan aksioma 5 pasti ada sebuah garis l yang memuat P tetapi tidak memuat titik pada l.

Dengan demikian kita punya sekurang-kurangnya empat garis.

Teorema 2 : Geometri Young memuat tepat 9 titik

Bukti :

Akisoma 1 sampai 3 melengkapi kita dengan sekurang-kurangnya empat titik. Tiga titik diantaranya berada pada garis l dan satu titik P tidak pada l. Sekarang dengan aksioma 4 , P dan setiap titik pada l menentukan sebuah garis yang berbeda dan dengan aksioma 2 dimana tiap-tiap garis memuat tiga titik . Akibatnya ada 3 titik yang dapat dibuat dari ke empat titik dengan adanya aksioma 4. Oleh karena itu sekarang ada sekurang-kurangnya tujuh titik. Dengan adanya aksioma 5 dapat dibuat sebuah garis lagi yang melalui P tetapi tidak memuat satupun titik pada l sehingga sesuai dengan aksioma 2 maka didapat 2 buah titik pada garis yang baru. Terbukti sekarang terdapat 9 titik.

III. PENUTUP

Dari uraian di atas dapat disimpulkan, bahwa antara Geometri Euclid dengan Geometri Empat Titik terdapat beberapa perbedaan, diantaranya:

1) Pada Geometri Euclid garis dibedakan atas garis lurus dan garis lengkung, sedangkan pada Geometri Empat titik garis tidak dibedakan atau tidak ditentukan.
2) Pada Geometri Euclid terdapat banyak titik sedangkan pada Geometri Empat Titik hanya terdapat empat titik.
3) Pada Geometri Euclid dalam sebuah garis terdapat banyak titik, sedangkan pada Geometri Empat Titik hanya terdapat dua titik pada sebuah garis.
4) Pada Geometri Euclid kedudukan antara dua buah garis ada tiga yaitu berpotongan, sejajar dan bersilangan, sedangkan pada Geometri Empat Titik kedudukan antara dua buah garis hanya dua yaitu berpotongan dan sejajar.
5) Dalam Geometri Empat Titik harus terdapat enam buah garis, sedangkan pada Geometri Euclid banyaknya garis tidak ditantukan.
6) Pada Geometri Empat Titik melalui satu buah titik hanya dapat dibuat tiga buah garis, sedangkan pada Geometri Euclid melalui satu buah titik dapat dibuat tak berhingga banyaknya garis.

Sedangkan antara Geometri Euclide dengan Geometri Fano dan Young terdapat beberapa perbedaan, diantaranya:

1) Pada Geometri Euclide garis dibedakan atas garis lurus dan garis lengkung, sedangkan pada Geometri Fano dan Young garis tidak harus lurus.
2) Pada Geometri Euclide terdapat banyak titik sedangkan pada Geometri Fano dan Young hanya terdapat tujuh titik.
3) Pada Geometri Euclide dalam sebuah garis terdapat tak hingga banyak titik, sedangkan pada Geometri Fano dan Young hanya terdapat tiga titik dalam sebuah garis.
4) Pada Geometri Euclide kedudukan antara dua buah garis ada tiga yaitu berpotongan, sejajar dan bersilangan, sedangkan pada Geometri Fano dan Young kedudukan antara dua buah garis hanya dua yaitu berpotongan dan sejajar.
5) Dalam Geometri Fano dan Young harus terdapat 12 buah garis, sedangkan pada Geometri Euclide banyaknya garis tidak ditentukan.
6) Pada Geometri Fano dan Young melalui satu buah titik hanya dapat dibuat empat buah garis, sedangkan pada Geometri Euclide melalui satu buah titik dapat dibuat tak berhingga banyaknya garis.

DAFTAR KEPUSTAKAAN

Karso (1993). *Dasar-Dasar MIPA*

Susanta (1990). *Geometri Transformasi*. UGM.

Wallace, Edward C. (1992*).* *Roads To Geometry* . New Jersey.