

# DINAMIK SISTEM LINEAR



OLEH

**MUHAMMAD SUBHAN, S.Si.**

MILIK PERPUSTAKAAN UNIV. NEGERI PADANG
DITERIMA TGL. : 21 - 3 - 2001
SUMBER/HARGA. 7/d 1
KOLEKSI : K1
NO. INVENTARIS : 290/K/2001-d <sub>1</sub> (2)
NO. ISI : 575.352 SUB - 8

**JURUSAN MATEMATIKA  
FAKULTAS MATEMATIKA DAN IPA  
UNIVERSITAS NEGERI PADANG  
PADANG  
2000**

MILIK PERPUSTAKAAN  
UNIV. NEGERI PADANG

## **KATA PENGANTAR**

Puji dan syukur penulis aturkan kepada Tuhan Yang Maha Esa karena berkat rahmat dan karunia-Nya penulis mampu menyelesaikan makalah dengan judul “Dinamik Sistem Linear”.

Makalah ini ditulis dengan maksud untuk menambah referensi matematika khususnya tentang sistem dinamik persamaan diferensial di Jurusan Matematika FMIPA UNP Padang.

Pada makalah ini, akan membahas salah satu bentuk sistem persamaan diferensial yang sering ditemui yaitu sistem linear. Sistem linear di sini adalah sistem persamaan linear planar autonom dan homogen.

Terima kasih penulis aturkan kepada rekan-rekan sejawat khususnya Dra. Minora Longgom Nasution dan Drs. Hendra Syarifudin, M.Si yang telah membaca dan memberikan masukan berharga tentang perbaikan makalah ini, semoga makalah yang sederhana ini bermanfaat bagi pembaca.

Padang, Februari 2001

Penulis

## DAFTAR ISI

	Halaman
KATA PENGANTAR .....	1
DAFTAR ISI .....	ii
I. PENDAHULUAN .....	1
II PERMASALAHAN .....	2
III PEMBAHASAN .....	3
A. Solusi Sistem Linier .....	2
B. Dinamik Sistem Linier .....	3
C. Dinamik Sistem Linier Kanonik .....	7
D. Hubungan dua Sistem linier yang matriks koefisiennya similar .....	18
E. Keekivalenan Sinamik Sistem Linier .....	19
F. Bifurkasi pada Sistem Linier .....	30
IV. KESIMPULAN .....	34
DAFTAR KEPUSTAKAAN .....	36

## I. PENDAHULUAN

Sistem dinamik persamaan diferensial merupakan subjek yang sangat penting dalam sains karena aplikasinya banyak dipakai di berbagai lapangan seperti mekanika langit, osilasi tak-linier, dan mekanika fluida. Salah satu bentuk sistem persamaan diferensial yang sering ditemui adalah sistem linier, yaitu sistem persamaan diferensial planar autonom dan homogen. Misalkan  $\bar{x}' = f(\bar{x})$  suatu sistem persamaan diferensial planar, sistem linier ditandai dengan  $f : \mathbf{R}^2 \mapsto \mathbf{R}^2$  berupa pemetaan linier.

Secara sederhana, sistem ini dapat berbentuk

$$\begin{aligned}x_1' &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\x_2' &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2, \quad a_{ij} (i,j = 1,2) \in \mathbf{R}.\end{aligned}\tag{1}$$

Lebih sederhana lagi berbentuk

$$\bar{x}' = A\bar{x}.\tag{2}$$

dengan  $\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ ,  $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$ ,

dan  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ ,  $a_{ij} (i,j = 1,2) \in \mathbf{R}$ .

## II. PERMASALAHAN

Masalah kestabilan dan perilaku sistem terhadap gangguan merupakan hal yang paling sering dipertanyakan pada suatu sistem dinamik. Dan hal ini tidak mudah jika mesti mencari terlebih dahulu solusi eksplisit dari sistem. Dan akan memudahkan jika secara kualitatif dinamik dari sistem linier bisa dikelompokkan berdasarkan karakteristik tertentu.

Untuk membantu menjawab semua persoalan di atas penulis akan mencoba membahas tentang “**DINAMIK SISTEM LINIER**”, mulai dari Dinamik Sistem Linier Kanonik, Hubungan dua Sistem linier yang matriks koefisiennya similar, Keekivalenan Dinamik Sistem Linier, Keekivalenan Dinamik Sistem Linier dan Bifurkasi pada Sistem Linier.

### III. PEMBAHASAN

#### A. Solusi Sistem Linier.

Semua solusi sistem linier dapat dituliskan sebagai fungsi dua variabel; waktu ( $t$ ) dan nilai awal ( $\bar{x}_0$ ); disebabkan kekontinuan  $f(\bar{x}) = A\bar{x}$ .

##### Definisi 1

Solusi sistem linier berbentuk  $\varphi(t, \bar{x}_0)$  disebut *flow* dari sistem linier

$$\bar{x}' = A\bar{x}.$$

Pada kasus persamaan diferensial skalar  $x' = ax$ , diperoleh *flow*  $\varphi(t, x_0) = e^{at} x_0$  untuk nilai awal  $x_0$ . Secara analog pada kasus sistem linier  $\bar{x}' = A\bar{x}$  bisa diperoleh *flow*  $\varphi(t, \bar{x}_0) = e^{At} \bar{x}_0$  dimana  $e^{At} \equiv X(t) [X(0)]^{-1}$ , untuk nilai awal  $\bar{x}_0$  dimana  $X(t) = (\bar{x}_1(t) | \bar{x}_2(t))$ ,  $\bar{x}_1(t)$  dan  $\bar{x}_2(t)$  solusi dari persamaan (2), dengan  $\det(X(t)) \neq 0 \forall t \in \mathbf{R}$ , dan  $e^{A0} = I$ , disimpulkan  $e^{At}$  adalah matriks solusi prinsipal dari persamaan (2).

#### B. Dinamik Sistem Linier.

##### Definisi 2

Pemetaan dari  $\mathbf{R}^2 \mapsto \mathbf{R}^2$ , yang diberikan oleh  $\bar{x}_0 \mapsto \varphi(t, \bar{x}_0)$ , yang memenuhi :

(i)  $\varphi(0, \bar{x}_0) = \bar{x}_0$ .

(ii)  $\varphi(t+s, \bar{x}_0) = \varphi(t, \varphi(s, \bar{x}_0)) \forall s, t$  dimana pemetaan ini terdefinisi.

(iii)  $\varphi(t, \bar{x}_0)$  pemetaan  $C^1 \forall t \in \mathbf{R}$  dan memiliki invers pemetaan  $C^1$

yang diberikan oleh  $\varphi(-t, \bar{x}_0)$  disebut sistem dinamik  $C^1$  pada  $\mathbf{R}^2$ .

Dengan demikian, *flow* sistem linier  $\bar{x}' = A\bar{x}$  yaitu  $\varphi(t, \bar{x}_0) = e^{At} \bar{x}_0$  yang memetakan  $\bar{x}_0 \mapsto e^{At} \bar{x}_0$  dapat disebut sistem dinamik  $C^1$  pada  $\mathbf{R}^2$ . Sistem linier dan *flow*-nya dapat dilihat dari sudut pandang geometri. Solusi persamaan (2) untuk nilai awal  $\bar{x}_0$  dapat digambarkan pada bidang tiga dimensi- $(t, \bar{x})$  yang disebut trajektori melalui  $\bar{x}_0$ . Karena autonom, juga bisa digambarkan pada bidang- $(x_1, x_2)$ . Proyeksi trajektori pada bidang- $(x_1, x_2)$  disebut orbit.

### Definisi 3

Orbit positif  $\gamma^+(\bar{x}_0)$ , orbit negatif  $\gamma^-(\bar{x}_0)$  dan orbit  $\gamma(\bar{x}_0)$  dari nilai awal  $\bar{x}_0$  didefinisikan sebagai berikut :

$$\gamma^+(\bar{x}_0) = \bigcup_{t \in [0, \infty)} \varphi(t, \bar{x}_0).$$

$$\gamma^-(\bar{x}_0) = \bigcup_{t \in (-\infty, 0]} \varphi(t, \bar{x}_0)$$

$$\gamma(\bar{x}_0) = \bigcup_{t \in (-\infty, \infty)} \varphi(t, \bar{x}_0)$$

Pada orbit, diperlihatkan orientasi  $\varphi(t, \bar{x}_0)$  terhadap perubahan waktu berupa tanda panah. Kumpulan semua orbit dengan orientasinya menghasilkan gambar yang disebut potret fase dari sistem linier.

Beberapa orbit tertentu, berbeda dari yang lain; memegang peranan penting pada studi kualitatif sistem linier. Salah satunya, orbit yang paling

sederhana, disebut titik kesetimbangan.

#### Definisi 4

Suatu titik  $\bar{x}_k \in \mathbb{R}^2$  disebut titik kesetimbangan dari sistem linier

$$\bar{x}' = A\bar{x} \text{ jika } A\bar{x}_k = 0.$$

Hal ini menyebabkan  $\bar{0}$  adalah salah satu titik kesetimbangan pada setiap sistem linier  $\bar{x}' = A\bar{x}$ . Sedangkan perilaku asimtotik dari solusi sistem linier dapat diamati melalui titiklimit-titiklimit dari setiap orbit sistem linier.

#### Definisi 5

a) Jika terdapat barisan  $t_j (t_j \rightarrow \infty \text{ jika } j \rightarrow \infty)$  sehingga  $\varphi(t_j, \bar{x}_0) \rightarrow \bar{y}$  jika  $j \rightarrow \infty$ , maka  $\bar{y}$  disebut titiklimit-*alpha* dari orbit  $\gamma$ . Himpunan titik-limit-*alpha* dinotasikan dengan  $\alpha(\bar{x}_0)$ .

b) Jika terdapat barisan  $t_j (t_j \rightarrow \infty \text{ jika } j \rightarrow \infty)$  sehingga  $\varphi(t_j, \bar{x}_0) \rightarrow \bar{y}$  jika  $j \rightarrow \infty$ , maka  $\bar{y}$  disebut titiklimit-*omega* dari orbit  $\gamma(\bar{x}_0)$ . Himpunan titiklimit-*omega* dinotasikan dengan  $\omega(\bar{x}_0)$ .

Titik  $\bar{x} \in \mathbb{R}^2$  yang memenuhi  $\varphi(t, \bar{x}_0) \rightarrow \bar{x}$  jika  $t \rightarrow \infty$  dapat ditunjukkan memenuhi  $\omega(\bar{x}_0) = \bar{x}$  atau  $\alpha(\bar{x}_0) = \bar{x}$  dengan sendirinya  $\bar{x}$  adalah titik kesetimbangan. Studi kualitatif sistem dinamik dari sistem linier akan dilakukan dengan mengamati potretfase pada bidang- $(x_1, x_2)$  beserta karakteristik orbit-orbitnya.

Potret fase sistem linier  $\bar{x}' = A\bar{x}$ , ditinjau dari matriks solusi prinsipal  $e^{At}$ , sangat bergantung pada bentuk matriks koefisien A. Jika matriks koefisien A

berbentuk kanonik, potretfase akan lebih mudah digambarkan karena solusi eksplisit-nya mudah diperoleh. Semua matriks  $2 \times 2$  real dapat dirubah menjadi matriks kanonik Jordan.

Berdasarkan nilai eigennya, sebarang matriks  $2 \times 2$   $A$  similar dengan salah satu matriks kanonik Jordan diagonal, triangular, atau kompleks.

(a) Kasus nilai eigen real dan berbeda.

Misalkan  $\lambda_1, \lambda_2 (\lambda_1 \neq \lambda_2)$  adalah dua nilai eigen dari matriks  $A$  dengan  $\bar{v}_1$  dan  $\bar{v}_2$  masing-masing vektor eigen yang berkaitan dengan nilai eigen tersebut.

Maka  $\exists$  matriks  $P = (\bar{v}_1 | \bar{v}_2)$  non-singulir sehingga:

$$P^{-1} AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

(b) Kasus nilai eigen real dan sama.

Jika terdapat dua vektor eigen  $\bar{v}_1$  dan  $\bar{v}_2$  bebas linier, dengan cara sama

seperti (a), pilih  $P = (\bar{v}_1 | \bar{v}_2)$  sehingga  $P^{-1} AP = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$

Jika hanya terdapat satu vektor eigen yang bebas linier  $\bar{v}_1$ , pilih  $\bar{v}_2$  yang memenuhi  $(A - \lambda I)\bar{v}_2 = \bar{v}_1$  dan saling bebas linier.

Maka  $\exists$  matriks  $P = (\bar{v}_1 | \bar{v}_2)$  non-singular  $\ni P^{-1} AP = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$

(c) Kasus nilai eigen kompleks.

Misalkan  $\alpha + i\beta$  ( $\beta \neq 0$ ) salah satu nilai eigen yang berkaitan dengan  $\bar{v}_1 + i\bar{v}_2$ ;

$\bar{v}_1$  dan  $\bar{v}_2 \neq 0$  adalah vektor-vektor real; vektor eigen yang berkaitan dengan

nilai eigen tersebut sehingga

$$A(\bar{v}_1 + i\bar{v}_2) = (\alpha + i\beta)(\bar{v}_1 + i\bar{v}_2).$$

Maka  $\exists$  matriks  $P = (\bar{v}_1 | \bar{v}_2)$  sehingga  $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$

Karena pengambilan vektor eigen pada kasus nilai eigen kompleks,  $\alpha + i\beta$  atau  $\alpha - i\beta$ , menentukan bentuk matriks koefisien kanonik yang similar dengan matriks koefisiennya,  $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$  atau  $\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$ ,  $\beta > 0$ , maka potret fase sistem linier-nya dapat digambarkan dengan dua cara berbeda. Dengan kata lain, semua sistem linier pada kasus ini mempunyai sepasang potret fase.

### C. Dinamik Sistem Linier Kanonik.

1. Dinamik sistem linier dengan matriks koefisien diagonal.

Misalkan  $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ ,  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{R}$ . Maka matriks solusi utamanya,

$$\begin{aligned} e^{At} &= \begin{pmatrix} \lambda_1^0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda_1^1 t & 0 \\ 0 & \lambda_2^1 t \end{pmatrix} + \dots + \frac{1}{n!} \begin{pmatrix} \lambda_1^n t^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n t^n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda_1 t)^n}{n!} & 0 \\ 0 & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda_2 t)^n}{n!} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Jadi, untuk nilai awal  $\bar{x}_0 = \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix}$  solusi sistem linier  $\bar{x}' = A\bar{x}$  adalah

$$\varphi(t, \bar{x}_0) = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} x_1(0) \\ e^{\lambda_2 t} x_2(0) \end{pmatrix}.$$

a. jika kedua nilai eigen tak nol dan bertanda sama (negatif/positif), Mengingat

solusi sistem linier berupa  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} x_1(0) \\ e^{\lambda_2 t} x_2(0) \end{pmatrix}$ , maka orbit-orbitnya berupa :

- sumbu- $x_1$  untuk  $x_2(0) = 0$ .

- sumbu- $x_2$  untuk  $x_1(0) = 0$ .

- untuk  $x_1(0), x_2(0) \neq 0$ ,

$$\left(\frac{x_2(t)}{x_2(0)}\right)^{\frac{1}{\lambda_2}} = \left(\frac{x_1(t)}{x_1(0)}\right)^{\frac{1}{\lambda_1}}.$$

misalkan  $\lambda_i < 0 < \lambda_j$  ( $i, j = 1$  atau  $2, i \neq j$ ), diperoleh

$$\left(\frac{x_j(t)}{x_j(0)}\right)^{\frac{1}{\lambda_j}} \left(\frac{x_i(t)}{x_i(0)}\right)^{-\frac{1}{\lambda_i}} = 1.$$

Misalkan  $(x_j(0))^{1/\lambda_j} (x_i(0))^{-1/\lambda_i} = K$ ,

maka  $(x_j(t))^{1/\lambda_j} (x_i(t))^{-1/\lambda_i} = K$ .

adalah orbit-orbit berbentuk hiperbola dengan asimtot sumbu-sumbu koordinat.

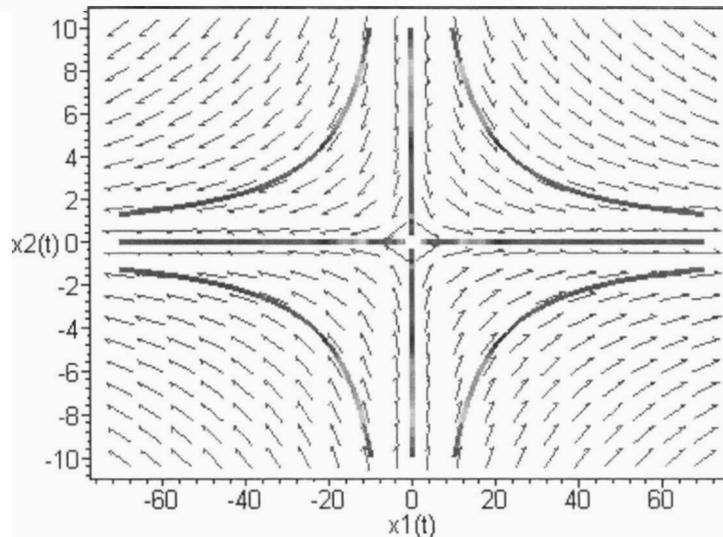
Bila  $\lambda_i < 0, \lambda_j > 0$  ( $i \neq j$ ), maka orbit-orbit sepanjang sumbu  $x_i$  ( $x_j(0) = 0, i \neq j$ ) akan memenuhi  $\varphi(t, \bar{x}_0) \rightarrow 0$  untuk  $t \rightarrow \sim$  dan sepanjang sumbu- $x_j$  ( $x_i(0) = 0, i \neq j$ ) akan memenuhi  $\varphi(t, \bar{x}_0) \rightarrow 0$  untuk  $t \rightarrow -\sim$ .

Akibatnya, hanya orbit-orbit di sepanjang sumbu koordinat yang mempunyai limit-*alpha* atau limit-*omega*.

Pada orbit-orbit berupa hiperbola, berlaku hubungan bila:

$$\varphi_i(t, x_i(0)) = x_i(t) = e^{\lambda_i t} x_i(0) \rightarrow 0 \text{ maka } \varphi_j(t, x_j(0)) \rightarrow \pm \infty.$$

Pada potretfase yang seperti ini (lihat gambar 1), titik  $\bar{0}$  sebagai satu-satunya titik kesetimbangan disebut titik *saddle*.



Gambar 1. Potretfase sistem linier dengan nilai eigen 1 dan -1

b. jika kedua nilai eigen tak nol dan bertanda sama.

Orbit-orbitnya berupa :

- sumbu- $x_1$  untuk  $x_2(0) = 0$ .
- sumbu- $x_2$  untuk  $x_1(0) = 0$ .
- untuk  $x_1(0), x_2(0) \neq 0$ ,

$$\frac{x_2(t)}{x_2(0)} = \left( \frac{x_1(t)}{x_1(0)} \right)^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}.$$

Misalkan  $\frac{x_2(0)}{(x_1(0))^{\lambda_2/\lambda_1}} = K,$

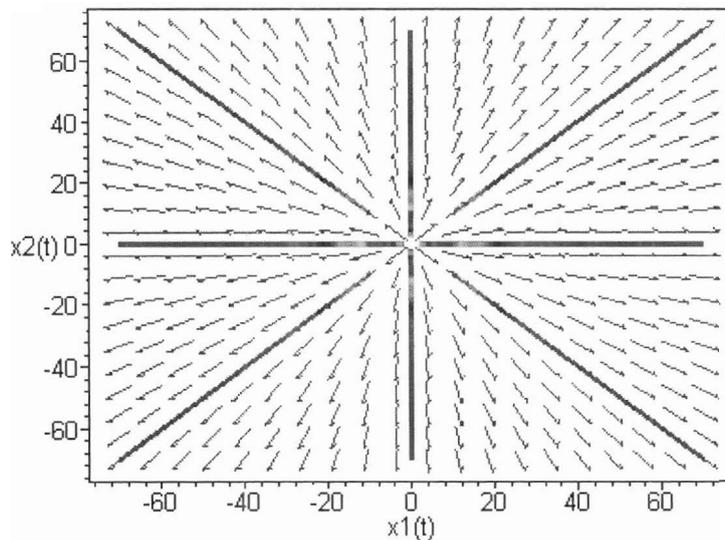
maka  $x_2(t) = K (x_1(t))^{\lambda_2/\lambda_1}$  yang berupa :

- parabola jika  $\lambda_2 \neq \lambda_1$
- garis lurus jika  $\lambda_2 = \lambda_1$ .

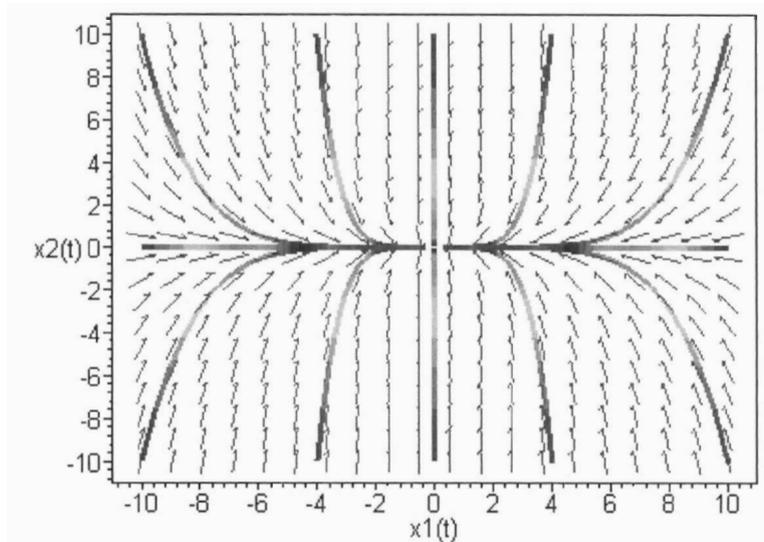
Sesuai dengan sifat *flow* sistem linier sebagai sistem dinamik di  $\mathbb{R}^2$ , orbit-orbit positif pada kasus  $\lambda_1, \lambda_2 < 0$  akan sama dengan orbit-orbit negatif pada kasus  $\lambda_1, \lambda_2 > 0$  apabila  $|\lambda_i|$ ,  $i = 1, 2$ , pada kedua kasus sama. Potretfase kedua kasus akan sama kecuali orientasi *flow* terhadap waktu yang saling berlawanan.

Untuk  $\lambda_1, \lambda_2 < 0$ ,  $\varphi(t, \bar{x}_0) \rightarrow 0$  jika  $t \rightarrow \infty$  dan semua orbit mempunyai limit-*alpha*. Sedangkan untuk  $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ ,  $\varphi(t, \bar{x}_0) \rightarrow 0$  jika  $t \rightarrow -\infty$  dan semua orbit mempunyai limit-*omega*.

Titik  $\bar{0}$  sebagai satu-satunya titik kesetimbangan disebut *proper node* pada kasus  $\lambda_1 = \lambda_2$  (gambar 2) dan *improper node* pada kasus  $\lambda_1 \neq \lambda_2$  (gambar 3).



Gambar 2. Potretfase sistem linier dengan nilai eigen 1 dan 1.



Gambar 3. Potret fase sistem linier dengan nilai eigen -1 dan -5.

c. Kasus terdapatnya nilai eigen nol.

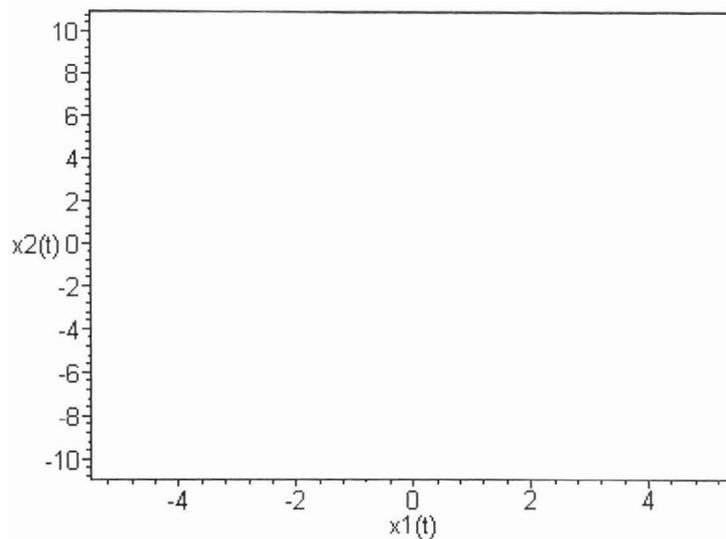
Bila kedua nilai eigen nol, semua nilai awal di  $\mathbf{R}^2$  merupakan orbit-orbit sistem linier untuk nilai awal tersebut sekaligus titik kesetimbangan. Akibatnya, hanya ada satu potret fase yang mungkin untuk kasus ini (gambar 4).

Sedangkan pada kasus  $\lambda_i = 0$ ,  $\lambda_j \neq 0$  ( $i, j = 1$  atau  $2$ ,  $i \neq j$ ), orbit-orbitnya berupa garis-garis sejajar sumbu- $x_j$ , akan memenuhi :

$$\varphi(t, \bar{x}_0) \rightarrow 0 \text{ untuk } t \rightarrow \infty, \text{ bila } \lambda_j < 0$$

$$\varphi(t, \bar{x}_0) \rightarrow 0 \text{ untuk } t \rightarrow -\infty, \text{ bila } \lambda_j > 0.$$

Akibatnya, sumbu- $x_i$  memuat semua limit-*alpha*/limit-*omega* orbit yang berarti juga memuat semua titik kesetimbangan (gambar 4).



Gambar 4. Potretfase sistem linier dengan nilai eigen 0.

## 2. Dinamik sistem linier dengan matriks koefisien triangular.

Misalkan matriks koefisien  $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ ,  $\lambda \in \mathbf{R}$ . A dapat ditulis

sebagai hasil tambah matriks  $B = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$  dan  $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  yang memenuhi

$BC = CB$  sehingga

$$e^{At} = e^{Bt}e^{Ct} = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix}$$

Jadi, untuk nilai awal  $\bar{x}_0 = \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix}$ , solusi sistem linier  $\bar{x}' = A\bar{x}$  adalah

$$\varphi(t, \bar{x}_0) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} x_1(0) + te^{\lambda t} x_2(0) \\ e^{\lambda t} x_2(0) \end{pmatrix}$$

Dari solusi di atas, diperoleh orbit-orbit berupa :

- untuk  $x_2(0) \neq 0$ ,

$$x_1(t) = e^{\lambda t} x_1(0) + t x_2(t) = \frac{x_2(t)}{x_2(0)} x_1(0) + t x_2(t).$$

Misalkan  $\frac{x_1(0)}{x_2(0)} = K$ , maka  $x_1(t) = (K + t) x_2(t)$  merupakan persamaan

orbit-orbit untuk nilai awal  $x_2(0) \neq 0$ .

- untuk nilai awal  $x_2(0) = 0$ ,

orbit-orbitnya berupa sumbu-  $x_1$  bila  $\lambda \neq 0$  dan titik-titik pada sumbu-  $x_1$  bila  $\lambda = 0$ .

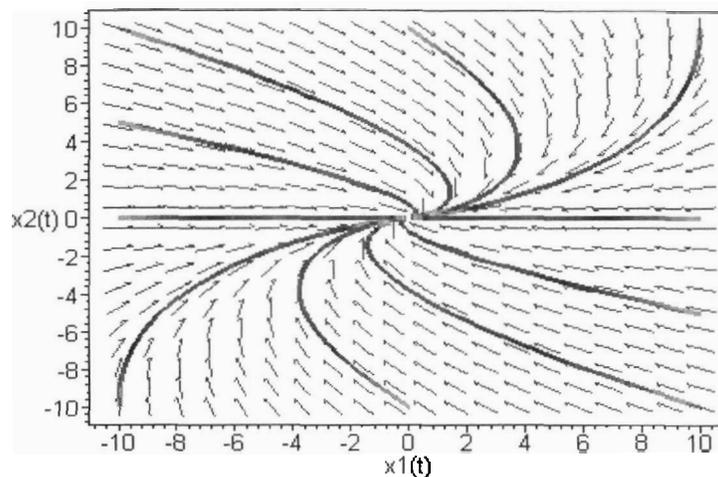
Karena orbit-orbit positif pada kasus  $\lambda < 0$  sama dengan orbit-orbit negatif pada kasus  $\lambda > 0$ , asalkan  $|\lambda|$  pada kedua kasus sama, maka ada dua kasus nilai eigen :  $\lambda \neq 0$  dan  $\lambda = 0$ .

a. jika  $\lambda \neq 0$ .

*Flow*  $\varphi(t, \bar{x}_0) \rightarrow 0$  jika  $t \rightarrow \infty$ , bila  $\lambda < 0$  dan  $\varphi(t, \bar{x}_0) \rightarrow 0$  jika  $t \rightarrow -\infty$ ,

bila  $\lambda > 0$ . Akibatnya,  $\omega(\bar{x}_0) = \bar{0}$  atau  $\alpha(\bar{x}_0) = \bar{0}$ . Titik  $\bar{0}$  sebagai satu-satunya

titik kesetimbangan disebut *improper node* (gambar 5).



Gambar 5. Potretfase sistem linier dengan kedua nilai eigennya -1 dan hanya terdapat satu vektor eigen bebas linier.

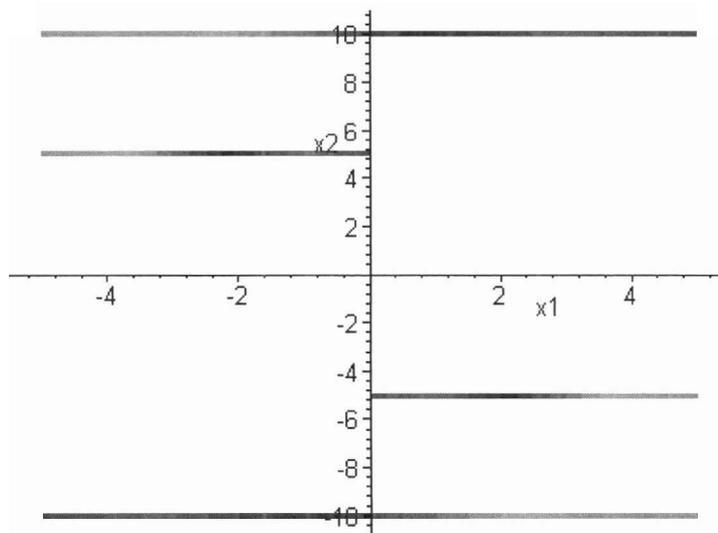
b. jika  $\lambda = 0$ .

Untuk kasus ini, hanya terdapat satu kemungkinan matriks koefisien A yaitu  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ . Dari persamaan  $x_1(t) = x_1(0) + tx_2(0)$ , diketahui bahwa untuk nilai awal  $x_2(0) \neq 0$  :

- $x_1(t) > x_1(0) \quad \forall t > 0$  jika  $x_2(0) > 0$ .
- $x_1(t) < x_1(0) \quad \forall t > 0$  jika  $x_2(0) < 0$ .

Sedangkan  $x_2(t) = x_2(0)$  konstan  $\forall t \in \mathbf{R}$ .

Untuk nilai awal  $x_2(0) = 0$ , semua nilai awal  $\bar{x}_0$  merupakan orbit untuk nilai awal itu sendiri. Akibatnya, semua titik di sumbu- $x_1$  adalah titik kesetimbangan. Semua orbit lainnya, yang tidak setimbang, tidak mempunyai limit- $\alpha$  maupun limit- $\omega$  (gambar 6).



Gambar 6. Potretfase sistem linier dengan nilai eigen keduanya 0 dan hanya ada satu vektor eigen bebas linier.

3. Dinamik sistem linier dengan matriks koefisien kompleks.

Misalkan matriks koefisien  $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$ , dimana  $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ ,  $\beta \neq 0$ .

A. dapat ditulis sebagai hasil tambah matriks B dan C, dengan  $B = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$  dan

$C = \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ -\beta & 0 \end{pmatrix}$ , dan memenuhi  $BC = CB$  sehingga

$$e^{At} = e^{Bt} e^{Ct}$$

$$e^{Bt} = \begin{pmatrix} e^{\alpha t} & 0 \\ 0 & e^{\alpha t} \end{pmatrix}$$

$$e^{Ct} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \beta t \\ -\beta t & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2!} \begin{pmatrix} -\beta^2 t^2 & 0 \\ 0 & \beta^2 t^2 \end{pmatrix} + \frac{1}{3!} \begin{pmatrix} 0 & -\beta^3 t^3 \\ \beta^3 t^3 & 0 \end{pmatrix} + \dots$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \beta^{2n} t^{2n}}{(2n)!} & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \beta^{2n+1} t^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \beta^{2n+1} t^{2n+1}}{(2n+1)!} & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \beta^{2n} t^{2n}}{(2n)!} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos \beta t & \sin \beta t \\ -\sin \beta t & \cos \beta t \end{pmatrix}$$

Jadi,  $e^{At} = e^{\alpha t} \begin{pmatrix} \cos \beta t & \sin \beta t \\ -\sin \beta t & \cos \beta t \end{pmatrix}$ .

Untuk nilai awal  $\bar{x}_0 = \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix}$ , solusi sistem linier  $\bar{x}' = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} \bar{x}$  dipenuhi

oleh  $\varphi(t, \bar{x}_0) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = e^{\alpha t} \begin{pmatrix} x_1(0) \cos \beta t + x_2(0) \sin \beta t \\ -x_1(0) \sin \beta t + x_2(0) \cos \beta t \end{pmatrix}$ .

Bentuk :  $x_1(t) = e^{\alpha t} (x_1(0) \cos \beta t + x_2(0) \sin \beta t)$

$x_2(t) = e^{\alpha t} (-x_1(0) \sin \beta t + x_2(0) \cos \beta t)$ .

dapat dirubah menjadi

$$x_1(t) = K e^{\alpha t} \cos(\beta t - \delta)$$

$$x_2(t) = K e^{\alpha t} \sin(\beta t - \delta).$$

dengan  $K = \sqrt{(x_1(0))^2 + (x_2(0))^2}$

$$\text{dan } \delta = \tan^{-1}\left(\frac{x_2(0)}{x_1(0)}\right), \text{ untuk } \bar{x}_0 \neq \bar{0}$$

Untuk nilai awal  $\bar{x}_0 = \bar{0}$ , orbitnya titik  $\bar{0}$  itu sendiri.

Dipandang dari koordinat polar  $(r, \theta)$ , solusi untuk nilai awal  $\bar{x}_0 \neq \bar{0}$  akan berbentuk

$$r(t) = K e^{\alpha t}$$

$$\theta(t) = -\beta t + \delta$$

Arah orientasi waktu ditunjukkan oleh  $\theta(t)$ , dimana

$$\theta(t) \rightarrow \sim \text{ untuk } t \rightarrow \sim \text{ bila } \beta < 0 \text{ dan } \theta(t) \rightarrow -\sim \text{ untuk } t \rightarrow \sim \text{ bila } \beta > 0.$$

Hal ini dikuatkan oleh  $\frac{\partial \theta}{\partial t} = -\beta$ , yang menunjukkan  $\theta(t)$  naik monoton bila  $\beta < 0$

dan turun monoton bila  $\beta > 0$ . Artinya, orientasi *flow* terhadap waktu akan searah jarum jam bila  $\beta > 0$  dan sebaliknya bila  $\beta < 0$ .

Ada dua macam struktur orbit untuk sistem linier dengan matriks koefisien kompleks ini.

a. jika  $\alpha \neq 0$ .

Bila dilihat solusi dalam koordinat polar,  $r(t)$ , terlihat bahwa :

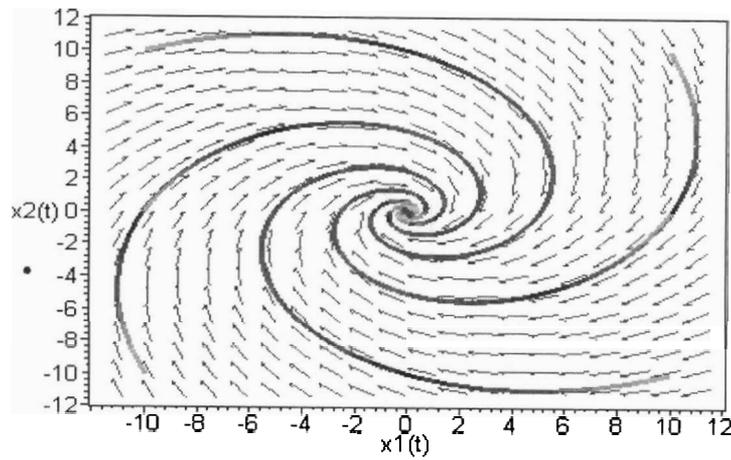
-  $r(t) \rightarrow \sim$ , naik monoton, untuk  $t \rightarrow \sim$  pada kasus  $\alpha > 0$ .

575.352  
598.  
d<sub>0</sub>

248 |k| 2001 ⇒ d<sub>1</sub> (2)

-  $r(t) \rightarrow 0$ , turun monoton, untuk  $t \rightarrow \infty$  pada kasus  $\alpha < 0$ .

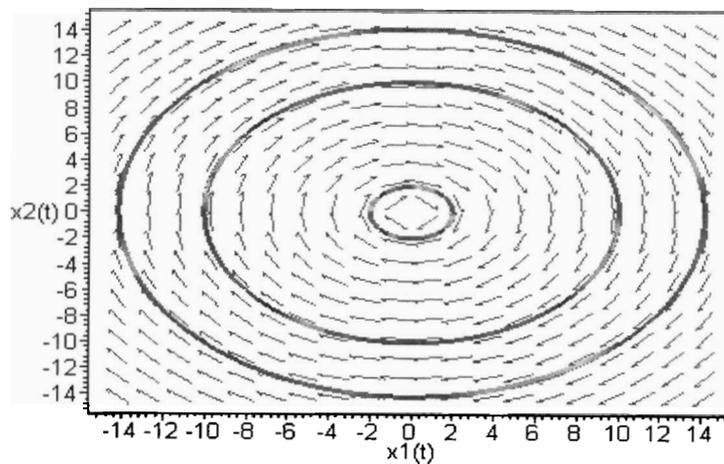
Titik  $\bar{o}$  sebagai satu-satunya titik kesetimbangan pada sistem dinamik ini disebut titik *spiral* atau *fokus* (gambar 7).



Gambar 7. Potretfase sistem linier dengan nilai eigen  $-1 \pm 2i$

b. jika  $\alpha = 0$ .

Pada kasus ini,  $r(t)$  konstan sehingga orbit untuk nilai awal  $\bar{x}_0 \neq \bar{o}$  berupa lingkaran mengelilingi titik  $\bar{o}$ . Titik  $\bar{o}$  pada kasus ini disebut titik *Central* (gambar 8).



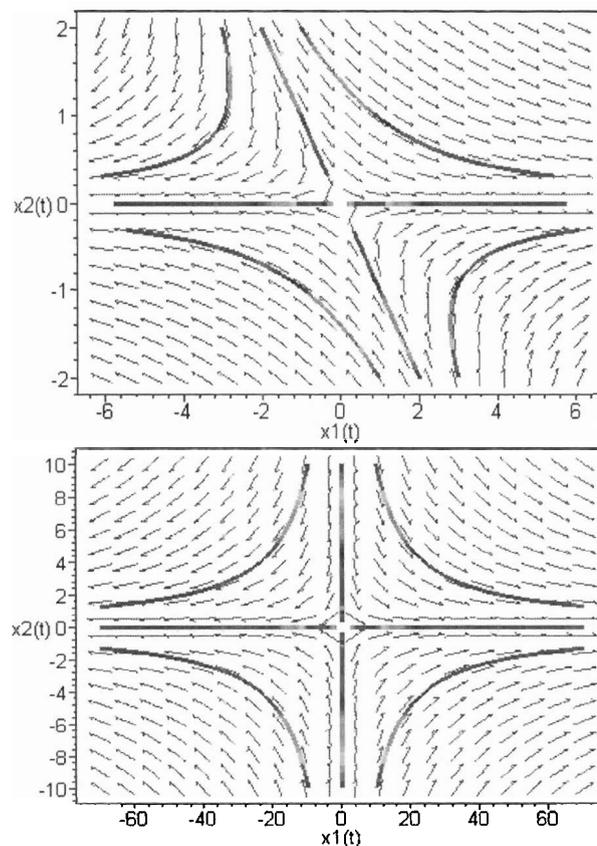
Gambar 8. Potretfase sistem linier dengan nilai eigen  $\pm i$

MILIK PERPUSTAKAAN  
UNIV. NEGERI PADANG

**D. Hubungan dua sistem linier yang matriks koefisiennya similar.**

Misalkan  $\exists$  matriks  $2 \times 2$   $P$  non-singulir sehingga  $P^{-1}AP = J$ . Maka sistem linier  $\bar{x}' = A\bar{x}$  dihubungkan dengan sistem linier kanonik  $\bar{y}' = J\bar{y} = P^{-1}AP\bar{y}$  oleh  $\bar{x} = P\bar{y}$ , yang taklain adalah perubahan koordinat secara linier.

Misalkan *flow* sistem linier  $\bar{x}' = A\bar{x}$  untuk nilai awal  $\bar{x}_0$  adalah  $\phi(t, \bar{x}_0) = e^{At} \bar{x}_0$ . Misalkan pula untuk setiap nilai awal  $\bar{y}_0$ , *flow* sistem linier  $\bar{y}' = P^{-1}AP\bar{y}$  dipenuhi oleh  $\varphi(t, \bar{y}_0) = e^{(P^{-1}AP)t} \bar{y}_0$ . *Flow*  $\varphi(t, \bar{y}_0)$  akan memenuhi  $\phi(t, \bar{x}_0) = P^{-1} \phi(t, \bar{y}_0) = P^{-1} e^{(P^{-1}AP)t} \bar{y}_0 = P^{-1} e^{At} P \bar{y}_0$ .



Gambar 10. Potretfase dua sistem linier dengan nilai eigen 1 dan -1, yaitu

$$\bar{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \bar{x} \text{ (atas) dan } \bar{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \bar{x} \text{ (bawah)}$$

### E. Keekivalenan Dinamik Sistem Linier.

Secara kualitatif, dua sistem linier dapat dikatakan memiliki struktur *flow* atau struktur orbit yang sama jika ada pemetaan yang mengaitkan satu orbit sistem linier pertama dengan satu orbit sistem linier kedua, untuk semua orbit di kedua sistem linier dan berlaku sebaliknya. Ini berarti ada homomorfisma di  $\mathbf{R}^2$  yang menghubungkan kedua struktur orbit sistem linier. Jika homomorfisma tersebut dapat dibuat sedemikian sehingga hanya mengaitkan orbit-orbit yang memiliki orientasi *flow* yang sama, dua sistem linier tersebut dikatakan memiliki struktur orbit yang sama (*ekivalen secara topologi*).

Dalam bentuk yang lebih kuantitatif, homomorfisma  $h : \mathbf{R}^2 \mapsto \mathbf{R}^2$  yang memetakan orbit-orbit  $\bar{x}' = A\bar{x}$  ke orbit-orbit  $\bar{x}' = B\bar{x}$  dapat didefinisikan sebagai

$$h(e^{At}\bar{x}_0) = e^{Bt}h(\bar{x}_0) \quad \forall t \in \mathbf{R}, \forall \bar{x}_0 \in \mathbf{R}^2.$$

Sebelumnya telah diketahui bahwa jika matriks koefisien  $A$  similar dengan salah satu matriks kanonik  $J$  maka terdapat matriks non-singulir  $P$  sehingga *flow* sistem linier  $\bar{x}' = J\bar{x}$  berkaitan dengan *flow* sistem linier  $\bar{x}' = A\bar{x}$  dengan hubungan  $\phi(t, \bar{x}_0) = e^{Jt}\bar{x}_0 = P^{-1}AP\bar{x}_0$ .  $P$  pemetaan linier dari  $\mathbf{R}^2$  ke  $\mathbf{R}^2$ . Kedua sistem linier yang matriks koefisiennya saling similar dikatakan **ekivalen secara linier**. Dengan memilih  $h(\bar{x}) = P\bar{x}$  sebagai homomorfisma yang mengaitkan orbit-orbit kedua sistem linier dengan hubungan

$$\begin{aligned} h(e^{Jt}\bar{x}_0) &= Pe^{Jt}\bar{x}_0 \\ &= e^{At}P\bar{x}_0 = e^{At}h(\bar{x}_0) \quad \forall t \in \mathbf{R}, \forall \bar{x}_0 \in \mathbf{R}^2, \end{aligned}$$

dapat ditunjukkan bahwa sistem linier yang ekuivalen secara linier juga ekuivalen secara topologi (memiliki struktur orbit sama).

Homomorfisma di atas mempertahankan orientasi *flow* terhadap waktu karena pada hakikatnya yang terjadi adalah pembentukan basis baru di bidang fase untuk menggambarkan potret fase sistem linier tersebut. Misalkan potret fase sistem linier  $\bar{x}' = A\bar{x}$  digambarkan pada bidang- $(x_1, x_2)$ , maka potret fase  $\bar{x}' = J\bar{x}$  adalah potret fase sistem linier  $\bar{x}' = A\bar{x}$  yang digambarkan pada bidang- $(y_1, y_2)$ . Hasil ini menunjukkan setiap sistem linier akan ekuivalen secara topologi dengan sistem linier kanonik yang matriks koefisiennya similar. Akibatnya, studi tentang struktur orbit sebarang sistem linier  $\bar{x}' = A\bar{x}$  cukup diamati melalui struktur orbit sistem linier kanonik yang matriks koefisiennya similar dengan  $A$ .

Tiga jenis sistem linier kanonik tidak bisa mengelompokkan sistem linier berdasarkan struktur orbit karena, secara mudah, bila diamati orbit tersederhana, yaitu titik kesetimbangan, masing-masing mempunyai jumlah titik kesetimbangan yang bervariasi yang berarti tidak bisa ekuivalen secara topologi. Selain itu, sistem linier yang memiliki jumlah titik kesetimbangan dan struktur orbit sama dapat memiliki kombinasi nilai eigen berbeda, contohnya sistem linier  $\bar{x}' = I\bar{x}$  dan

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, = 2I\bar{x}.$$

Dengan memulai pengamatan dari orbit tersederhana (titik kesetimbangan), dapat diidentifikasi delapan kelas keekivalenan, yaitu :

1. Dua nilai eigen negatif pada bagian realnya, dengan matriks koefisien kanonik tersederhana  $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ , memiliki satu titik kesetimbangan  $\bar{0}$  dengan semua orbit menuju  $\bar{0}$  jika  $t \rightarrow \infty$ .
2. Dua nilai eigen positif pada bagian realnya, dengan matriks koefisien tersederhana  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ , memiliki satu titik kesetimbangan  $\bar{0}$  dengan semua orbit menuju  $\bar{0}$  jika  $t \rightarrow -\infty$ .
3. Satu nilai eigen positif dan satu nilai eigen negatif pada bagian realnya, dengan matriks koefisien tersederhana  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ , memiliki satu titik kesetimbangan  $\bar{0}$  dan terdapat orbit yang menuju  $\bar{0}$  jika  $t \rightarrow \infty$  juga orbit yang menuju  $\bar{0}$  jika  $t \rightarrow -\infty$ .
4. Nilai eigen nol pada bagian realnya dengan dua vektor eigen bebas linier, dengan matriks koefisien tersederhana  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ , dengan semua nilai awal adalah titik kesetimbangan.
5. Nilai eigen nol pada bagian realnya dengan satu vektor eigen bebas linier, dengan matriks koefisien tersederhana  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ , dengan semua orbit, positif dan negatif, yang tidak setimbang tidak terbatas.

6. Satu nilai eigen negatif dan satu nilai eigen nol pada bagian realnya, dengan matriks koefisien tersederhana  $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ , dengan himpunan limit-*omega* dari semua orbit positif adalah titik kesetimbangan.
7. Satu nilai eigen positif dan satu nilai eigen nol pada bagian realnya, dengan matriks koefisien tersederhana  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ , dengan himpunan limit-*alpha* dari semua orbit negatif adalah titik kesetimbangan.
8. Nilai eigen bilangan kompleks murni, dengan matriks koefisien tersederhana  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ , dengan satu titik kesetimbangan  $\bar{0}$  dan semua orbit tak setimbang adalah periodik.

Dapat dilihat dengan jelas bahwa masing-masing kelas memiliki struktur orbit yang berbeda satu sama lain. Tinggal membuktikan setiap sistem linier pada masing-masing kelas ekuivalen secara topologi.

Pada bagian berikut ini akan dibuktikan keekivalenan tersebut.

#### 1. Dua nilai eigen negatif pada bagian realnya.

Pembentukan homomorfisma  $h : \mathbf{R}^2 \mapsto \mathbf{R}^2$  yang mengaitkan orbit-orbit dua sistem linier pada kasus ini akan dibantu oleh elips-elips mengelilingi titik pusat koordinat, yang merupakan himpunan tingkat  $\{\bar{x} \mid \bar{x}^T C \bar{x} = k, k > 0\}$  pada bidang, dan memotong orbit-orbit sistem linier ini.

Matriks real simetri  $C$  yang memenuhi bentuk kuadratik  $\bar{x}^T C \bar{x} > 0$ ,  $\forall \bar{x} \neq \bar{0}$  disebut matriks definit positif. Lemma berikut menegaskan eksistensi  $C$  yang akan digunakan dalam membentuk homomorfisma yang diinginkan.

**Lemma 1.**

Jika matriks  $A$  mempunyai nilai eigen negatif pada bagian realnya, maka terdapat matriks definit positif  $C$  sehingga  $A^T C + CA = -I$ .  $A, C$  matriks  $2 \times 2$ .

**Bukti.**

Berdasarkan teori tentang produk tensor, diketahui jika  $A$  dan  $B$  mempunyai nilai eigen semuanya negatif pada bagian realnya maka persamaan  $A^T C + CA = -I$  akan dipenuhi oleh solusi tunggal

$$C = \int_0^{\infty} e^{A^T t} (-I) e^{At} dt .$$

sehingga untuk masing-masing matriks koefisien kanonik  $A$  berikut dapat dipilih  $C$  definit positif dan simetri :

$$(i) C = \begin{pmatrix} 1/2\lambda_1 & 0 \\ 0 & 1/2\lambda_2 \end{pmatrix} \text{ untuk } A = \begin{pmatrix} -\lambda_1 & 0 \\ 0 & -\lambda_2 \end{pmatrix}, \lambda_1, \lambda_2 > 0.$$

$$(ii) C = \begin{pmatrix} 1/2\alpha & 0 \\ 0 & 1/2\alpha \end{pmatrix} \text{ untuk } A = \begin{pmatrix} -\alpha & \beta \\ -\beta & -\alpha \end{pmatrix}, \alpha > 0, \beta \neq 0.$$

$$(iii) C = \begin{pmatrix} 1/2\lambda & 1/4\lambda^2 \\ 1/4\lambda^2 & 1/2\lambda + 1/4\lambda^3 \end{pmatrix} \text{ untuk } A = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 0 & -\lambda \end{pmatrix}, \lambda > 0.$$

Dengan memilih  $C$  tersebut untuk elips-elips  $\bar{x}^T C \bar{x} = k$ , dapat ditunjukkan orbit sistem linier selain untuk nilai awal  $\bar{0}$  akan memotong elips-elips tersebut ke arah dalam ( menuju pusat koordinat ).

$$\frac{\partial}{\partial t} (\bar{x}^T(t) C_A \bar{x}(t)) = \bar{x}^T(t) [A^T C_A + C_A A] \bar{x}(t) = -\bar{x}^T(t) \bar{x}(t).$$

Sekarang, akan ditunjukkan dua sistem linier dalam kelas ini, misalkan  $\bar{x}' = A \bar{x}$  dan  $\bar{x}' = B \bar{x}$  dengan elips-elips yang mengelilingi pusat koordinat pada masing-masing sistem linier  $\bar{x}^T C_A \bar{x} = k$  dan  $\bar{x}^T C_B \bar{x} = k$ ,  $k > 0$ , ekuivalen secara topologi.

$\forall \bar{x}_0 \neq \bar{0}, \exists t_{x_0}$  tunggal  $\ni e^{A(-t_{x_0})} \bar{x}_0 = \bar{x}_1$  dengan  $\bar{x}_1 \in \{\bar{x} \mid \bar{x}^T C_A \bar{x} = 1\}$ .

$\bar{x}_1 = (x_{11}, x_{12})$  dapat dinyatakan dalam koordinat polar sebagai  $(\|\bar{x}_1\|, \theta)$  dengan

$$\theta = \tan^{-1} \left( \frac{x_{12}}{x_{11}} \right).$$

Misalkan  $\hat{h} : \{\bar{x} \mid \bar{x}^T C_A \bar{x} = 1\} \mapsto \{\bar{x} \mid \bar{x}^T C_B \bar{x} = 1\}$  adalah homomorfisma antara kedua elips yang didefinisikan

$$\hat{h} : (\|\bar{x}_1\|, \theta) \mapsto (\|\bar{x}_2\|, \theta) \text{ dengan } \bar{x}_2 \in \{\bar{x} \mid \bar{x}^T C_B \bar{x} = 1\}.$$

Definisikan,

$$\begin{aligned} h(\bar{x}_0) &= e^{Bt} \bar{x}_2, & \bar{x}_0 \neq \bar{0}. \\ &= \bar{0}, & \bar{x}_0 = \bar{0}. \end{aligned}$$

$h : \mathbf{R}^2 \mapsto \mathbf{R}^2$  seperti didefinisikan di atas, satu-satu, pada dan mempunyai invers.

$h$  juga kontinu  $\forall \bar{x}_0 \in \mathbf{R}^2, \bar{x}_0 \neq \bar{0}$ . Akan ditunjukkan  $h$  kontinu di  $\bar{0}$ .

$\{\bar{x} \mid \bar{x}^T C_B \bar{x} = 1\}$  terbatas, misalkan oleh  $M > 0$ . Karena matriks koefisien  $B$  mempunyai nilai eigen negatif pada bagian realnya, maka :

$$\exists k, \alpha > 0 \ni \|e^{Bt}\| \leq k e^{-\alpha t} \quad \forall t \geq 0.$$

Misalkan  $\varepsilon > 0$ . Maka  $\exists 0 < \delta < 1$  sehingga  $t_\delta \leq t_{x_0}$ , dimana  $t_\delta \rightarrow \infty$  jika

$\delta \rightarrow 0$ . Akibatnya  $\forall \bar{x}^T C_A \bar{x} \leq \delta$ ,

$$\|h(\bar{x}_0)\| = \left\| e^{Bt_{x_0}} \hat{h}(e^{-At_{x_0}}) \right\| \leq k e^{-\alpha t_{x_0}} M \leq k e^{-\alpha t_{x_0}} M = \varepsilon.$$

Jadi,  $h$  kontinu di  $\bar{0}$ .

Dengan adanya homomorfisma  $h : \mathbf{R}^2 \mapsto \mathbf{R}^2$  seperti didefinisikan di atas, dua sistem linier yang memiliki dua nilai eigen negatif pada bagian realnya dapat dibuktikan ekuivalen secara topologi. Sistem linier dengan struktur orbit seperti pada kelas ini disebut *sink hiperbolik*.

## 2. Dua nilai eigen positif pada bagian realnya.

Dengan mengganti  $t$  dengan  $-t$  pada kasus 1, dapat dikonstruksi suatu homomorfisma yang membuktikan dua sistem linier pada kasus ini ekuivalen secara topologi dengan teknik yang sama dengan kasus 1. Sistem linier dengan struktur orbit seperti pada kelas ini disebut *source hiperbolik*.

## 3. Satu nilai eigen positif dan satu negatif pada bagian realnya.

Misalkan dua sistem linier  $\bar{x}' = A\bar{x}$  dan  $\bar{x}' = B\bar{x}$  dengan matriks

koefisien masing-masing  $\begin{pmatrix} -\lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$  dan  $\begin{pmatrix} -\mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{pmatrix}$ ,  $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2 > 0$

Diperoleh persamaan-persamaan diferensial linier

$$\begin{aligned} x_1' &= -\lambda_1 x_1 & x_1' &= -\mu_1 x_1 \\ x_2' &= \lambda_2 x_2 & x_2' &= \mu_2 x_2 \end{aligned}$$

Pandang dua persamaan diferensial skalar  $x_1' = -\lambda_1 x_1$  dan  $x_1' = -\mu_1 x_1$  dengan *flow-flow*  $\varphi(t, x_0) = e^{-\lambda_1 t} x_0$  dan  $\psi(t, x_0) = e^{-\mu_1 t} x_0$ . Dengan menggunakan titik 1 dan -1 sebagai acuan akan dikonstruksi suatu homomorfisma  $h_1 : \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}$  yang menghubungkan kedua persamaan diferensial.

$$\forall x_0 > 0, \exists t_{x_0} = \frac{\ln x_0}{\lambda_1} \ni \exp(-\lambda_1 t_{x_0}) x_0 = 1.$$

$$\forall x_0 < 0, \exists t_{x_0} = \frac{\ln(-1/x_0)}{-\lambda_1} \ni \exp(-\lambda_1 t_{x_0}) x_0 = -1.$$

$$\begin{aligned} \text{Definisikan } h_1(x_0) &= (x_0)^{\frac{\mu_1}{\lambda_1}}, & x_0 > 0. \\ &= 0, & x_0 = 0. \end{aligned}$$

$$= - \left( \frac{-1}{x_0} \right)^{\frac{-\mu_1}{\lambda_1}}, \quad x_0 < 0.$$

$h_1 : \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}$  satu-satu dan pada. Akan ditunjukkan  $h_1$  kontinu di 0.

Misalkan  $\varepsilon > 0$ .

Pilih  $\delta = (\varepsilon)^{\lambda_1/\mu_1}$  sehingga  $\forall x \in \mathbf{R}, |x| < \delta$ , berlaku  $|h(x)| < \varepsilon$ .  $h_1$  juga mempunyai invers kontinu. Dengan homomorfisma  $h_1$  seperti yang didefinisikan di atas, terbukti bahwa  $x_1' = -\lambda_1 x_1$  dan  $x_1' = -\mu_1 x_1$  ekuivalen secara topologi. Dengan teknik yang sama diperoleh  $h_2 : \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}$  sehingga dapat ditunjukkan  $x_2' = \lambda_2 x_2$  dan  $x_2' = \mu_2 x_2$  juga ekuivalen secara topologi.

Maka,  $h : \mathbf{R}^2 \mapsto \mathbf{R}^2$ ,  $h(\bar{x}) = (h_1(x_1), h_2(x_2))$ , adalah homomorfisma yang menghubungkan *flow-flow* sistem linier  $\bar{x}' = A\bar{x}$  dan  $\bar{x}' = B\bar{x}$  dengan

mempertahankan orientasi *flow* terhadap waktu sehingga dapat dibuktikan dua sistem linier pada kasus ini ekuivalen secara topologi. Sistem linier pada kelas ini disebut *saddle hiperbolik*.

4. Nilai eigen nol pada bagian real dengan dua vektor eigen bebas linier.

Pada kasus ini, semua sistem linier ekuivalen secara linier dengan sistem linier kanonik  $\bar{x}' = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \bar{x}$  karena matriks koefisiennya akan similar dengan  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ . Dengan demikian jelas ekuivalen secara topologi satu sama lain.

5. Nilai eigen nol pada bagian real dengan satu vektor eigen bebas linier.

Setiap sistem linier pada kasus ini ekuivalen secara linier dengan sistem linier kanonik  $\bar{x}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \bar{x}$  sehingga jelas ekuivalen secara topologi satu sama lain.

6. Nilai eigen negatif dan nol pada bagian realnya.

Misalkan dua sistem linier  $\bar{x}' = \begin{pmatrix} -\lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \bar{x}$ ,  $\lambda > 0$  dan  $\bar{x}' = \begin{pmatrix} -\mu & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \bar{x}$ ,

$\mu > 0$ , hendak ditunjukkan ekuivalen secara topologi. Pandang persamaan-persamaan differensial linier :

$$x_1' = -\lambda x_1 \qquad x_1' = -\mu x_1$$

$$x_2' = 0 \qquad x_2' = 0.$$

Dengan teknik yang sama dengan kasus 3, diperoleh homomorfisma  $h_1: \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}$  memetakan orbit-orbit  $x_1' = -\lambda x_1$  ke orbit-orbit  $x_1' = -\mu x_1$ . Sedangkan orbit-orbit  $x_2' = 0$  dipetakan oleh homomorfisma identitas  $h_2: \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}$ . Jadi,  $h: \mathbf{R}^2 \mapsto \mathbf{R}^2$ ,  $h(\bar{x}) = (h_1(x_1), h_2(x_2))$  merupakan homomorfisma satu-satu, pada, kontinu dan memiliki invers kontinu, yang menghubungkan orbit-orbit sistem

linier  $\bar{x}' = \begin{pmatrix} -\lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \bar{x}$  ke orbit-orbit sistem linier  $\bar{x}' = \begin{pmatrix} -\mu & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \bar{x}$  sehingga

dapat dibuktikan ekuivalen secara topologi.

#### 7. Nilai eigen positif dan nol pada bagian realnya.

Dengan mengganti  $t$  dengan  $-t$  pada kasus 6, dapat dipilih homomorfisma dengan cara sama sehingga dapat ditunjukkan dua sistem linier pada kasus ini ekuivalen secara topologi.

#### 8. Nilai eigen kompleks.

Karena struktur orbit sistem linier pada kasus nilai eigen kompleks dapat digambarkan pada bidang fase dengan dua cara, dalam membandingkan struktur orbit pada kedua sistem linier dapat dilakukan dengan membandingkan struktur orbit yang orientasi *flow*-nya searah jarum jam saja.

Misalkan dua sistem linier pada kasus ini masing-masing :

$$\bar{x}' = \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ -\beta & 0 \end{pmatrix} \bar{x}, \beta > 0, \text{ dan } \bar{x}' = \begin{pmatrix} 0 & \eta \\ -\eta & 0 \end{pmatrix} \bar{x}, \eta > 0.$$

Pandang garis  $G = \{\bar{x} \mid x_1 > 0, x_2 = 0\}$ .

Maka  $\forall \bar{x}_0 \exists t_{x_0} < \frac{2\pi}{|\beta|}$  tunggal  $\ni e^{-At_{x_0}} \bar{x}_0 = \bar{x}_1$ , dimana  $\bar{x}_1 \in G$ .

Definisikan  $h : \mathbf{R}^2 \mapsto \mathbf{R}^2$  sebagai berikut :

$$h(\bar{x}_0) = e^{B(pt_{x_0})} \bar{x}_1 = e^{B(pt_{x_0})} e^{-At_{x_0}} \bar{x}_0, \bar{x}_0 \neq \bar{0}.$$

$$= \bar{0}, \bar{x}_0 = \bar{0}.$$

$$p = \frac{\text{periode orbit - orbit } \bar{x}' = B\bar{x}}{\text{periode orbit - orbit } \bar{x}' = A\bar{x}}.$$

$h$  satu-satu dan pada. Akan ditunjukkan  $h$  kontinu di  $\bar{0}$ .

Misalkan  $\varepsilon > 0$ .

Karena solusi berbentuk lingkaran mengelilingi  $\bar{0}$ , maka solusi pada kasus ini terbatas. Maka  $\exists K_1, K_2 > 0 \in \mathbf{R} \ni \|e^{B(pt_{x_0})}\| < K_1$  dan  $\|e^{-At_{x_0}}\| < K_2$ . Pilih

$$\delta < \frac{\varepsilon}{K_1 K_2}.$$

$$\text{Maka } \forall \|\bar{x}_0\| < \delta, \|e^{B(pt_{x_0})} e^{-At_{x_0}} \bar{x}_0\| \leq K_1 K_2 \delta < \varepsilon.$$

Jadi,  $h$  kontinu di  $\bar{0}$  dan memiliki invers kontinu sehingga homomorfisma  $h$  seperti didefinisikan di atas menunjukkan dua sistem linier tersebut ekuivalen secara topologi.

Dengan demikian, dapat ditunjukkan bahwa secara kualitatif ada delapan kelas sistem linier. Tiga kasus pertama digolongkan sebagai *sistem linier hiperbolik* karena tidak memuat nilai eigen nol pada bagian realnya. Sedangkan lima kasus terakhir digolongkan sebagai *sistem linier non-hiperbolik* karena memuat nilai eigen nol pada bagian realnya.

### F. Bifurkasi pada Sistem Linier.

Berkaitan dengan masalah kestabilan, menjadi pertanyaan bagi kita bagaimanakah sistem linier bereaksi terhadap suatu gangguan yang sangat kecil? Hasil pembahasan sebelumnya memungkinkan pengamatan cukup dilakukan pada sistem linier tersederhana yang mewakili setiap kelas ekuivalen dari sistem linier. Dan ini akan menjadikan nilai eigen pada bagian real sistem linier sebagai parameter yang dipengaruhi gangguan kecil tersebut.

Sistem linier hiperbolik tidak akan mengalami bifurkasi terhadap gangguan yang sangat kecil (dalam hal ini perubahan nilai entri-entri matriks koefisiennya) karena jika kita memandang matriks koefisien  $2 \times 2$   $A$  dari sistem linier sebagai  $\mathbb{R}^4$  maka kita akan selalu dapat membuat lingkungan buka  $U$  dari  $A$  sehingga untuk setiap  $B \in U$  sistem linier  $\bar{x}' = A\bar{x}$  dan  $\bar{x}' = B\bar{x}$  ekuivalen secara topologi. Hal ini dimungkinkan karena berdasarkan rumus kuadratik, bagian real dari nilai eigen matriks  $A$  merupakan fungsi kontinu dari entri-entrinya.

Sistem linier hiperbolik juga padat di himpunan semua sistem linier karena jika  $A$  hiperbolik maka untuk setiap  $\varepsilon \neq 0$ ,  $|\varepsilon|$  cukup kecil, matriks  $A + \varepsilon I$  masih hiperbolik.

Sementara sistem linier non-hiperbolik terhadap gangguan yang sangat kecil tersebut dapat menjadi hiperbolik misalnya dengan menambahkan  $\varepsilon \neq 0$  cukup kecil pada entri nilai eigen nol pada matriks kanonik Jordan yang mewakili sistem liniernya. Yang menarik pada sistem linier non-hiperbolik sekarang bukan sekedar masalah kestabilan saja, tetapi berapa minimal parameter yang mempengaruhi bifurkasi pada sistem linier tersebut. Sistem linier bergantung pada

parameter yang dihasilkan disebut *unfolding* dari sistem linier non-hiperbolik. Pengamatan cukup dilakukan pada matriks Kanonik Jordan dari sistem linier non-hiperbolik saja. Dengan menggunakan informasi mengenai nilai eigen dari matriks  $2 \times 2$   $A$  yang termuat dalam persamaan karakteristiknya yaitu

$$\det(A - \lambda I) = \lambda^2 - \operatorname{tr}(A)\lambda + \det A.$$

dimana

$$\operatorname{tr}(A) = a_{11} + a_{22} = \lambda_1 + \lambda_2$$

$$\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \lambda_1\lambda_2.$$

dan  $\lambda_1, \lambda_2$  adalah akar persamaan  $\det(A - \lambda I) = 0$ .

Dengan membuang matriks nol, yang dapat dilihat dengan jelas bifurkasinya, sistem linier hiperbolik dapat dikelompokkan lagi menjadi tiga matriks:

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ -\beta & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

dimana  $\lambda \neq 0$  dan  $\beta \neq 0$ . Lebih jauh lagi, tanpa menghilangkan sifat umumnya, kita dapat memisalkan  $\lambda = -1$  dan  $\beta = 1$ .

1. *Unfolding*  $A_0 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Kita dapat menemukan lingkungan buka dari  $A_0$  di  $\mathbb{R}^4$  sehingga setiap matriks di lingkungan buka ini ekuivalen secara topologi dengan sistem linier non-hiperbolik  $A_0$  yang memenuhi  $\operatorname{tr}(A) < 0$  dan  $\det(A) = 0$ . Jadi, jika didefinisikan matriks  $A$  yang bergantung pada parameter  $\mu$  sebagai  $A(\mu)$ , dimana  $A(0) = A_0$ ,

maka ada dua kondisi yang mungkin terjadi,  $\text{tr}(A(\mu)) < 0$  dan  $\det(A(\mu)) < 0$  atau  $\text{tr}(A(\mu)) < 0$  dan  $\det(A(\mu)) > 0$ .

Dalam kondisi pertama matriks memiliki dua nilai eigen real negatif dan pada kondisi lainnya satu nilai eigen real negatif dan satu positif. Satu contoh matriks  $A(\mu)$  yang bergantung pada satu parameter tersebut adalah  $A(\mu) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ . Matriks  $A_0$  seperti di atas disebut singularitas kodimensi satu.

$$2. \textit{Unfolding } A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Dengan metode yang sama dengan kasus 1, matriks  $A$  yang ekuivalen secara topologi dengan  $A_0$  di atas mestilah memenuhi kondisi  $\text{tr}(A) = 0$  dan  $\det(A) > 0$ . Sekarang jika didefinisikan matriks  $A$  yang bergantung pada parameter  $\mu$  sebagai  $A(\mu)$ , dimana  $A(0) = A_0$  dan  $\mu$  bervariasi dari negatif ke positif, maka  $\text{tr}(A(\mu))$  akan bergerak dari  $\text{tr}(A(\mu)) < 0$  dan  $\det(A(\mu)) > 0$  ke  $\text{tr}(A(\mu)) > 0$  dan  $\det(A(\mu)) > 0$ .

Dalam kondisi pertama nilai eigennya real negatif dan pada kondisi kedua nilai eigennya real positif. Contoh matriks  $A(\mu)$  yang bergantung pada satu parameter tersebut adalah  $A(\mu) = \begin{pmatrix} \mu & 1 \\ -1 & \mu \end{pmatrix}$ .

$$3. \textit{Unfolding } A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Pada kasus ini, konstruksi *unfolding*-nya merupakan kombinasi dari dua kasus sebelumnya. Matriks  $A$  yang ekuivalen secara topologi dengan  $A_0$  akan

memenuhi kondisi  $A \neq 0$ ,  $\text{tr}(A) = 0$ , dan  $\det(A) = 0$ . Pada kasus ini ada dua parameter yang mempengaruhi, yaitu untuk  $\text{tr}(A)$  dan untuk  $\det(A)$ . Jika didefinisikan matriks  $A$  yang bergantung pada parameter  $\alpha, \beta$  sebagai  $A(\alpha, \beta)$ , dimana  $A(0,0) = A_0$  maka dengan berubahnya parameter  $\alpha, \beta$  dari negatif ke positif kita dapat menemukan semua kondisi yang mungkin pada kasus 1 dan 2, yaitu matriks yang nilai eigennya keduanya negatif, satu positif satu negatif, mempunyai nilai eigen negatif pada bagian realnya, atau mempunyai nilai eigen positif pada bagian realnya. Contoh matriks  $A(\alpha, \beta)$  yang bergantung pada dua parameter tersebut:

$$A(\alpha, \beta) = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} \quad A(\alpha, \beta) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}$$

dimana  $\alpha, \beta$  parameter real yang mendekati nol. Matriks non-hiperbolik  $A_0$  seperti kasus ini disebut singularitas kodimensi dua.

#### IV. KESIMPULAN

Struktur orbit sistem linier bergantung kepada bagian real dari nilai eigen matriks koefisiennya. Sistem linier, jika dibagi menjadi sistem linier hiperbolik dan non-hiperbolik, dapat diklasifikasikan sebagai berikut :

**a) Sistem linier hiperbolik**, terdiri dari :

i) *sink hiperbolik*  $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ .

ii) *source hiperbolik*  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

iii) *saddle hiperbolik*  $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

**b) Sistem linier non-hiperbolik**, terdiri dari :

i)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ : kedua nilai eigen nol, dua vektor eigen bebas linier.

ii)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ : kedua nilai eigen nol, satu vektor eigen bebas linier.

iii)  $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ : satu nilai eigen negatif dan satu nilai eigen nol.

iv)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ : satu nilai eigen positif dan satu nilai eigen nol.

v)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ : nilai eigen kompleks murni.

Jika diberikan gangguan cukup kecil terhadap sistem, sistem linier hiperbolik akan stabil, tetapi sistem linier non-hiperbolik dapat berubah menjadi sistem linier

hiperbolik. Jumlah parameter minimal yang mempengaruhi bifurkasi pada sistem linier non-hiperbolik bervariasi antara satu parameter (pada kasus *unfolding*  $A_0$

$= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  dan *unfolding*  $A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ ) dan dua parameter (pada kasus *unfolding*

$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ).

## DAFTAR KEPUSTAKAAN

1. AHLVORS, L.V. [1979]. *Complex Analysis 3<sup>rd</sup> Edition*. McGraw-Hill Company: New York.
2. FINKBEINER II, D.T. [1960]. *Introduction to Matrices and Linier Transformations*. W.H. Freeman and Company: San Fransisco,London.
3. HALE, J.K. dan KOCAK, H.[1991]. *Dynamics and Bifurcation*. Springer-Verlag: New York.
4. HALMOS, P.R. [1958]. *Finite Dimensional Vector Space 2<sup>nd</sup> Edition*. D. Van Nostrand Company, Inc.: Princeton, New Jersey.
5. KOCAK, H.[1989]. *Differential and Difference Equations through Computer Experiments 2<sup>nd</sup> Edition*. Springer-Verlag: New York.
6. LEFSCHETZ, S. [1957]. *Differential Equations : Geometric Theory*. Interscience Publishers, Inc.: New York.
7. MURRAY, F.J. dan MILLER, K.S.[1954]. *Existence Theorems for Ordinary Differential Equations*. New York University Press: Washington Square, New York.
8. ROSS, S.L.[1984]. *Differential Equations 3<sup>rd</sup> Edition*. John Wiley & Sons: New York.
9. SHILOV, G.E.[1961]. *An Introduction to Theory of Linier Spaces*. Prentice Hall: Englewood Cliffs, New Jersey.