SAINS TEKNOLOGI DAN REKAYASA

LAPORAN PENELITIAN DOSEN PEMULA

SUATU PEMODELAN MATEMATIKA PSQP (*POTENTIAL SMOKERS, SMOKERS, QUIT SMOKERS AND POTENTIAL SMOKERS*) DARI PENGARUH ROKOK PADA SUATU POPULASI

Oleh:

Riry Sriningsih, S.Si, M.Sc

Penelitian ini dibiayai oleh:
Dana DIPA Universitas Negeri Padang Tahun Anggaran 2012
Sesuai dengan Surat Keputusan Rektor UNP No. 433/UN35.2/PG/2012

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS NEGERI PADANG
2012

HALAMAN PENGESAHAN
LAPORAN HASIL PENELITIAN DOSEN PEMULA

1.	Judul Penelitian	: Suatu Pemodelan Matematika PSQP (*Potential Smoker, Smoker, Quit Smoker and Potential Smoker*) dari Pengaruh Rokok pada Suatu Populasi
2.	Bidang Ilmu	: Sains Teknologi dan Rekayasa
3.	Ketua Peneliti	
	a. Nama Lengkap	: Riry Sriningsih, S. Si., M. Sc
	b. Jenis Kelamin	: Perempuan
	c. NIP	: 19830426 200812 2 003
	d. Disiplin Ilmu	: Matematika Terapan
	e. Pangkat/Golongan	: Penata Muda Tk I/ III b
	f. Jabatan Fungsional	: Asisten Ahli
	g. Fakultas/Jurusan	: FMIPA/Matematika
	h. Alamat Kantor	: Jl. Prof. Dr. Hamka Air Tawar, Padang
	i. Telp/Faks/E-mail	: (0751) 444648/ (0751) 7057420
	j. Alamat Rumah	: W. Indah 7 Blok G No 8 Tabing-Padang
	k. Telp/Faks/E-mail	: 085272832235/srirysriningsih@yahoo.com
4.	Jumlah Anggota Peneliti	
	Nama Anggota	. --
5.	Lokasi Penelitian	: Jurusan Matematika FMIPA UNP
6.	Jumlah Biaya Penelitian	: Rp 7.500.000,-
	Terbilang	: Tujuh Juta Lima Ratus Ribu Rupiah

Menyetujui
Dekan FMIPA UNP-Padang,

Prof. Dr. Lufri, MS
NIP. 19610510 198703 1 020

Padang, 31 Desember 2012
Ketua Peneliti,

Riry Sriningsih, S.Si, M.Sc
NIP. 19830426 200812 2 003

Menyetujui,
Ketua Lembaga Penelitian
Universitas Negeri Padang

Dr. Alwen Bentri, M.Pd
NIP. 19610722 198602 1 002

LEMBARAN IDENTITAS PENGESAHAN
LAPORAN PENELITIAN DOSEN PEMULA

1.	a. Judul Penelitian	: Suatu Pemodelan Matematika PSQP (*Potential Smoker, Smoker, Quit Smoker and Potential Smoker*) dari Pengaruh Rokok pada Suatu Populasi
	b. Bidang Ilmu	: Sains Teknologi dan Rekayasa
2.	Personalia	
	a. Ketua Peneliti	
	Nama Lengkap	: Riry Sriningsih, S. Si., M. Sc
	NIP	: 19830426 200812 2 003
	Pangkat/Golongan	: Penata Muda Tk I/ III b
	Fakultas/Jurusan	: FMIPA/Matematika
	b. Anggota Peneliti	: --
3.	Usul Penelitian	: telah direvisi sesuai dengan saran pembahas

Menyetujui,
Ketua Lembaga Penelitian
Universitas Negeri Padang

Dr. Alwen Bentri, M.Pd
NIP. 19610722 198602 1 002

Padang, 31 Desember 2012
Pembimbing Penelitian,

Dra. Hj. Helma, M. Si
NIP. 19680324 199603 2 001

ABSTRAC

Mathematical model of the effect of smoking in a population derived from a mathematical model of the epidemic spread of the disease. The basic idea that initially healthy individuals, but individual health becomes impaired because of illness. Disease in one individual because the individual lifestyle. In this study, the observed pattern of individual life is the habit of smoking behavior. Smoking is considered to give pleasure to the smoker. But on the other hand, smoking can cause adverse effects to the smoker and those around him. In this model the population is divided into 5 groups: the population has the potential smokers, light smokers, moderate smokers, heavy smokers and quit smokers. The model has two types of equilibrium point is the equilibrium point that is free from cigarettes and endemic equilibrium point. If $R_0 > 1$ then the population of smokers always exists. It can be seen from how big the interaction between smokers (mild, moderate and severe) with a potential smokers.

Keywords: stability analysis, mathematical modeling, model SIR, cigarette

RINGKASAN

Model matematika pengaruh kebiasaan merokok dalam suatu populasi berasal dari model matematika epidemi penyebaran penyakit. Ide dasarnya bahwa, individu yang pada awalnya sehat, namun kesehatan individu menjadi terganggu karena adanya penyakit. Penyakit pada individu salah satunya disebabkan karena pola hidup individu tersebut. Pada penelitian ini, pola hidup individu yang diamati adalah prilaku kebiasaan merokok. Merokok dianggap dapat memberikan kenikmatan bagi si perokok. Namun di lain pihak, merokok dapat menimbulkan dampak buruk bagi si perokok maupun orang-orang di sekitarnya. Pada model ini populasi dibagi menjadi 5 kelompok yaitu populasi yang berpotensi untuk menjadi perokok, populasi perokok ringan, perokok sedang, perokok berat dan populasi yang sembuh dari kebiasaan merokok. Model mempunyai 2 jenis titik ekuilibrium yaitu titik ekuilibrium yang bebas dari rokok dan titik ekuilibrium endemic. Jika $R_0 > 1$ maka populasi perokok akan selalu ada. Hal ini dapat dilihat dari seberapa besar interaksi antara perokok (ringan, sedang dan berat) dengan populasi yang berpotensi menjadi perokok

Kata kunci: analisa kestabilan, model matematika, model SIR, rokok

PENGANTAR

Kegiatan penelitian mendukung pengembangan ilmu serta terapannya. Dalam hal ini, Lembaga Penelitian Universitas Negeri Padang berusaha mendorong dosen untuk melakukan penelitian sebagai bagian integral dari kegiatan mengajarnya, baik yang secara langsung dibiayai oleh dana Universitas Negeri Padang maupun dana dari sumber lain yang relevan atau bekerja sama dengan instansi terkait.

Sehubungan dengan itu, Lembaga Penelitian Universitas Negeri Padang bekerjasama dengan Pimpinan Universitas, telah memfasilitasi peneliti untuk melaksanakan penelitian tentang ***Suatu Pemodelan Matematika PSQP (Potential Smoker, Smoker, Quit Smoker and Potensial Smoker) dan Pengaruh Rokok pada Suatu Populasi***, sesuai dengan Surat Penugasan Pelaksanaan Penelitian Dosen Pemula Universitas Negeri Padang Tahun Anggaran 2012 Nomor: 433/UN35.2/PG/2012 Tanggal 25 Juli 2012.

Kami menyambut gembira usaha yang dilakukan peneliti untuk menjawab berbagai permasalahan pembangunan, khususnya yang berkaitan dengan permasalahan penelitian tersebut di atas. Dengan selesainya penelitian ini, Lembaga Penelitian Universitas Negeri Padang akan dapat memberikan informasi yang dapat dipakai sebagai bagian upaya penting dalam peningkatan mutu pendidikan pada umumnya. Di samping itu, hasil penelitian ini juga diharapkan memberikan masukan bagi instansi terkait dalam rangka penyusunan kebijakan pembangunan.

Hasil penelitian ini telah ditelaah oleh tim pembahas usul dan laporan penelitian, kemudian untuk tujuan diseminasi, hasil penelitian ini telah diseminarkan ditingkat Universitas. Mudah-mudahan penelitian ini bermanfaat bagi pengembangan ilmu pada umumnya dan khususnya peningkatan mutu staf akademik Universitas Negeri Padang.

Pada kesempatan ini, kami ingin mengucapkan terima kasih kepada berbagai pihak yang membantu terlaksananya penelitian ini, terutama kepada pimpinan lembaga terkait yang menjadi objek penelitian, responden yang menjadi sampel penelitian, dan tim pereviu Lembaga Penelitian Universitas Negeri Padang. Secara khusus, kami menyampaikan terima kasih kepada Rektor Universitas Negeri Padang yang telah berkenan memberi bantuan pendanaan bagi penelitian ini. Kami yakin tanpa dedikasi dan kerjasama yang terjalin selama ini, penelitian ini tidak akan dapat diselesaikan sebagaimana yang diharapkan dan semoga kerjasama yang baik ini akan menjadi lebih baik lagi di masa yang akan datang.

Terima kasih.

Padang, Desember 2012
Ketua Lembaga Penelitian
Universitas Negeri Padang,

Dr. Alwen Bentri, M.Pd.
NIP. 19610722 198602 1 002

DAFTAR ISI

DAFTAR LAMPIRAN

BAB I PENDAHULUAN

A. Latar Belakang Masalah

Merokok merupakan suatu kegiatan yang sering dilakukan manusia. Kegiatan tersebut dijumpai hampir di setiap tempat/lokasi. Merokok dianggap dapat memberikan kenikmatan bagi si perokok. Namun di lain pihak, merokok dapat menimbulkan dampak buruk bagi si perokok maupun orang-orang di sekitarnya.

Dampak buruk yang diakibatkan kebiasaan merokok disebabkan karena dalam sebatang rokok terkandung sekitar 4000 macam zat kimia. Zat kimia yang dikeluarkan ini terdiri dari komponen gas (85 persen) dan partikel. Nikotin, gas karbonmonoksida, nitrogen oksida, hidrogen sianida, amoniak, akrolein, asetilen, benzaldehid, urethan, benzen, methanol, kumarin, 4-etilkatekol, ortokresol dan perylene adalah sebagian dari beribu-ribu zat di dalam rokok. Setidaknya 200 dari sekitar 4000 macam zat kimia yang ada dalam rokok dinyatakan berbahaya bagi kesehatan manusia.

Racun utama pada rokok adalah tar, nikotin, dan karbon monoksida. **Tar** adalah substansi hidrokarbon yang bersifat lengket dan menempel pada paru-paru. **Nikotin** adalah zat adiktif yang mempengaruhi syaraf dan peredaran darah. Zat ini bersifat karsinogen, dan mampu memicu kanker paru-paru yang mematikan. **Karbon monoksida** adalah zat yang mengikat hemoglobin dalam darah, membuat darah tidak mampu mengikat oksigen.

Saat merokok, serangkaian bahan kimiawi ini menjelajah ke organ vital tubuh seperti otak, paru-paru, jantung dan pembuluh darah. Akibatnya, tubuh menjadi terpolusi bahan kimiawi yang dapat memicu **kanker** dan **kecanduan**. Merokok juga dapat mematikan indra pengecap dan pencium sehingga tidak mampu lagi merasakan lezatnya makanan seperti biasanya.

Efek racun pada rokok ini membuat pengisap asap rokok yang apabila dibandingkan dengan yang tidak menghisap asap rokok mengalami resiko sangat tinggi yaitu: 14x menderita kanker paru-paru, mulut, dan tenggorokan, 4x menderita kanker esophagus, 2x kanker kandung kemih, dan 2x serangan jantung. Merokok merupakan penyebab utama dari sekitar 90% kasus kanker paru-paru pada pria dan sekitar 70% pada wanita. Semakin banyak rokok yang dihisap, semakin besar resiko untuk menderita kanker paru-paru. Rokok juga meningkatkan resiko kefatalan bagi penderita pneumonia dan gagal jantung, tekanan darah tinggi, bahkan dampak yang paling fatal adalah kematian.

Oleh karena banyaknya dampak negatif yang ditimbulkan oleh rokok ini, maka perlu dibentuk sebuah model matematika dengan menggunakan asumsi-asumsi tertentu. Ide dasar dalam membentuk model matematika tersebut yaitu bahwa semua individu pada awalnya sehat, namun kesehatan individu menjadi terganggu karena adanya penyakit. Penyakit pada suatu individu salah satunya disebabkan karena pola hidup individu tersebut. Dalam hal ini akan dilihat prilaku kebiasaan merokok dari individu dan pengaruhnya pada individu di sekitarnya.

Castillo-Chavez (2000: 165) telah mengusulkan model matematika sederhana pengaruh merokok. Castillo mempertimbangkan sistem dengan populasi konstan dibagi ke dalam 3 subpopulasi yaitu individu yang berpotensi untuk menjadi perokok (P), perokok (S), individu yang benar-benar berhenti merokok (Q). Gul Zaman (2009) mengembangkan model dengan mempertimbangkan pengaruh merokok menurut kebiasaan kualitatifnya (individu yang tidak tiap hari merokok dan individu yang merokok setiap hari). Pada model matematika yang dijelaskan di atas, model yang digunakan adalah model dengan mengasumsikan bahwa orang yang teiah berhenti merokok tidak akan pernah merokok kembali. Gunawan (2008) mengembangkan model matematika yang dibuat Castillo dengan mengasumsikan bahwa orang yang telah berhenti merokok dimungkinkan untuk dapat melakukan kebiasaan merokok lagi.

Pada penelitian ini model yang akan diteliti adalah pengembangan dari kombinasi model Gul zaman dan Gunawan dengan asumsi **Pertama**, pada kenyataannya bahwa orang yang telah berhenti merokok dapat dimungkinkan untuk melakukan kebiasaan merokok lagi apabila individu tersebut tidak dapat membentengi dirinya dengan baik terhadap pengaruh disekitarnya untuk tidak merokok lagi (kesadaran untuk tidak merokok lagi menurun), **Kedua,** mempertimbangkan kebiasaan kualitatifnya (individu yang tidak tiap hari merokok dan individu yang merokok setiap hari dilihat dari jumlah rokok yang dikonsumsi oleh individu per hari) dan **Ketiga**, mempertimbangkan adanya kematian pada masing-masing populasi. Model yang terbentuk kemudian dianalisis dan diselidiki titik kesetimbangan beserta sifat-sifatnya.

B. Perumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang masalah, rumusan masalah pada penelitian ini adalah:

1. Bagaimana bentuk model matematika dari pengaruh kebiasaan merokok pada suatu populasi apabila individu yang sudah berhenti merokok dapat kembali lagi menjadi individu yang berpotensi untuk merokok dengan melihat adanya kematian yang disebabkan oleh penyakit yang ditimbulkan dari rokok?
2. Bagaimana análisis/solusi dari model tersebut?

BAB II TINJAUAN PUSTAKA

Adapun teori yang mendukung penelitian ini adalah:

A. Rokok

Rokok merupakan benda berbahaya yang sudah tak asing lagi bagi kita. Merokok sudah menjadi kebiasaan yang sangat umum dan meluas di masyarakat. Banyak penelitian membuktikan kebiasaan merokok dapat meningkatkan resiko timbulnya berbagai penyakit seperti penyakit jantung, gangguan pembuluh darah dan sebagainya. Pada kenyataanya kebiasaan merokok ini sangat sulit dihilangkan dan jarang diakui orang sebagai suatu kebiasaan buruk. Apalagi orang yang merokok untuk mengalihkan diri dari stres dan tekanan emosi, ini menyebabkan kebiasaan merokok sangat sulit dilepaskan.

Badan kesehatan dunia (WHO) menganggap bahwa perilaku merokok telah menjadi masalah kesehatan masyarakat yang penting bagi seluruh dunia sejak satu dekade lalu (Suhardi, 1995). Indonesia merupakan negara berkembang yang memiliki tingkat produksi dan konsumsi rokok yang tinggi. Ada beberapa tipe perokok berdasarkan tempat seseorang menghisap rokok, yaitu:

1. Merokok di tempat umum/ruang publik.
   a) Kelompok homogen (sama-sama perokok).

      Mereka menikmati kebiasaannya secara bergerombol. Umumnya mereka masih menghargai orang lain, karena mereka menempatkan diri di *smoking area.*

   b) Kelompok yang heterogen (merokok di tengah orang lain yang tidak merokok, anak kecil, orang jompo, orang sakit, dll).
2. Merokok di tempat-tempat yang bersifat pribadi.
   a) Kantor atau di kamar tidur pribadi.

      Perokok yang memilih tempat seperti ini digolongkan kepada individu yang kurang menjaga kebersihan diri.

   b) Toilet.

      Perokok jenis ini dapat digolongkan sebagai orang yang suka berfantasi.

Ada beberapa faktor yang menyebabkan seseorang menjadi perokok, diantaranya pengaruh orang tua, pengaruh teman, faktor keperibadian, factor social atau lingkungan, factor pergaulan dan pengaruh iklan. Faktor terbesar dari kebiasaan merokok dipengaruhi oleh faktor sosial atau lingkungan, dimana karakter seseorang banyak dibentuk oleh lingkungan sekitar, baik dari keluarga, tetangga, ataupun teman pergaulannya. Bersosialisasi merupakan cara utama pada anak-anak dan remaja untuk mencari jati diri mereka. Dengan melihat apa yang dilakukan orang lain dan kadang kala mencoba untuk meniru apa yang dilakukan orang lain. Hal itu merupakan suatu proses yang terjadi pada remaja untuk mencari jati diri dan belajar menjalani kehidupan sosial. Namun sangat disayangkan, tidak hanya kebiasaan-kebiasaan yang baik saja yang ditiru melainkan juga kebiasaan-kebiasaan buruk, termasuk kebiasaan merokok.

Banyak orang mulai mengenal dan kemudian menjadi perokok pemula berawal dari rumah. Kebiasaan orang tua merokok ternyata memberi dampak bagi perilaku seseorang untuk mencoba rokok. Banyak penelitian membuktikan bahwa perokok pemula di usia remaja lebih dari setengahnya akan menjadi perokok berat pada saat mereka berusia 30-40 tahun.

Selain itu faktor pergaulan juga memberi pengaruh besar terhadap perilaku merokok seseorang. Banyak orang yang terdorong menjadi perokok untuk menyesuaikan diri pada sebuah komunitas pergaulan. Jika seseorang yang bukan perokok, hidup atau berkerja bersama dengan seorang perokok, secara otomatis salah satunya akan terpengaruh. Mungkin yang bukan perokok mulai mencoba merokok, mungkin juga sebaliknya yang perokok mengurangi konsumsi rokok. Baik disadari maupun tidak disadari, adaptasi tersebut dilakukan untuk berusaha menyesuaikan diri dengan lingkungan dan berusaha untuk diterima di lingkungan sosialnya.

B. Bahan Kimia yang Terkandung dalam Rokok

Ketika menghisap sebatang rokok, sebenarnya kita telah menghirup banyak sekali zat yang dapat merusak tubuh kita. Berikut ini pengaruh yang ditimbulkan oleh bahan kimia dalam rokok bagi sistem tubuh adalah sebagai berikut :

1. Nikotin.

   Zat ini menyebabkan kecanduan, merusak jaringan otak, dan darah mudah menggumpal. Bahan ini dapat mempengaruhi tubuh dengan merusak sistem saraf pusat, meningkatkan denyut nadi dan tekanan darah, dan menyebabkan vasokontaksi pembuluh arteri.

2. Tar.

   Zat ini menyebabkan kerusakan pada sel paru-paru, meningkatkan produksi lendir atau dahak di paru-paru, dan dapat menyebabkan kanker paru-paru. Tar bersifat *karsinogenik*, yaitu zat penyebab kanker (kanker paru-paru).

3. Karbon monoksida.

   Zat ini dapat mengurangi jumlah oksigen yang dapat diikat darah,dan menghalangi transportasi oksigen dalam tubuh.Karbon monoksida merupakan gas yang terdapat dalam asap rokok. Karbon monoksida berbahaya kerana mampu mengikat hemoglobin darah yang berakibat kadar oksigen dalam darah berkurang.

4. Zat kersinogen.

   Zat ini dapat memicu pertumbuhan sel kanker dalam tubuh.

5. Zat iritan.

   Zat ini dapat mengakibatkan batuk, kanker paru-paru, dan iritasi pada paru-paru.

Menurut penelitian, setiap tahun 3,5 juta orang meninggal akibat rokok atau rata-rata 10.000 kematian perhari, baik perokok aktif maupun perokok pasif.

C. Dampak Rokok bagi Kesehatan

Saat sebatang rokok disulut dan asapnya mulai diisap, sejumlah bahan kimia akan beredar ke berbagai organ vital dalam tubuh, yakni paru-paru, jantung dan pembuluh darah. Tubuh akan terkontaminasi dengan bahan kimia yang dapat menyebabkan kanker dan kecanduan.

Selanjutnya, asap rokok mengeluarkan lebih dari 40 bahan kimia penyebab kanker, juga sejumlah kecil racun lainnya seperti arsen dan sianida serta lebih dari 4000 bahan kimia lainnya. Salah satu bahan kimia dalam rokok adalah nikotin. Nikotin akan membuat individu perokok menjadi ketagihan rokok dan membuat kecanduan. Nikotin akan meningkatkan zat kimia otak yang disebut dopamin, yang akan membuat orang yang merokok merasa senang. Dopamin inilah yang mengakibatkan proses kecanduan tersebut.

Karbonmonoksida yang dihirup dari asap rokok menggantikan oksigen di sel-sel darah dan mengambil zat makanan dari jantung, otak dan organ tubuh lainnya. Merokok juga mematikan indra pengecap dan penciuman sehingga makanan tidak lagi selezat biasanya.

Efek langsung yang dialami oleh orang yang merokok misalnya: aktivitas otak dan sistem saraf yang mula-mula meningkat lalu kemudian menurun, perasaan euforia ringan, merasa relaks, meningkatnya tekanan darah dan denyut jantung, menurunnya aliran darah ke anggota badan seperti jari-jari tangan dan kaki, pusing, mual, mata berair, asam lambung meningkat, menurunnya nafsu makan, dan berkurangnya indera pengecap dan penciuman.

Sementara efek jangka panjang dari penggunaan tembakau adalah timbulnya berbagai penyakit, antara lain:

1. Kecanduan nikotin
2. Berbagai macam kanker, terutama kanker paru, ginjal, tenggorokan, leher, payu dara, kandung kemih, pankreas dan lambung. Satu dari enam pria perokok akan menderita kanker paru.
3. Penyakit jantung dan pembuluh darah: stroke dan penyakit pembuluh darah tepi.
4. Penyakit saluran pernapasan: flu, radang saluran pernapasan (bronkhitis), penyakit paru obstruktif kronis.
5. Cacat bawaan pada bayi dari ibu yang merokok selama kehamilan.
6. Penyakit Buerger
7. Katarak
8. Gangguan kognitif (daya pikir): lebih rentan terhadap Penyakit Alzheimer (pikun), penyusutan otak.
9. Impotensi

Adapun dampak rokok terhadap diri sendiri dan orang lain yaitu :

Bagi diri sendiri,

1. Merokok lebih banyak mendatangkan kerugian dibandingkan keuntungan bagi tubuh. Menimbulkan sugesti kepada diri kita, bahwa jika kita tidak merokok mulut terasa tidak enak dan asam.
2. Rasa ingin tahu, semangat untuk belajar, dan berbagai hal positif yang ada pada diri kita hilang ketika kita menjadi seorang perokok.

Bagi orang lain,

1. Ketika kita sedang merokok, asap rokok kita dapat mengganggu orang lain dan juga menyebabkan polusi udara.
2. Menyebabkan seseorang yang dekat dengan kita menjadi seorang perokok pasif.
3. Jika membuang puntung rokok sembarangan tanpa mematikan terlebih dahulu sebelumnya, dapat menyebabkan kebakaran.
4. Menyebabkan meninpisnya lapisan ozon.

D. Model Matematika

Bambang Soedijono (1984:186) mengatakan bahwa peranan matematika sangat besar dalam memecahkan atau menjawab berbagai permasalahan dalam situasi nyata. Hal ini dilakukan dengan menerjemahkan masalah-masalah tersebut ke dalam bahasa matematika. Dalam menyusun model matematika, ada beberapa tahapan yang harus dilalui.

Menurut Susanta (1993), model adalah gambaran (tiruan, perwakilan) suatu objek yang disusun berdasarkan tujuan tertentu, objek dapat berupa suatu sistem, atau perlakuan sistem atau suatu proses tertentu. Sistem adalah suatu himpunan yang beserta relasi antar unsur-unsurnya yang disusun berdasarkan tujuan tertentu. Model hanya menirukan sebagian dari segi objek sesuai dengan tujuan penyusunan model dengan maksud supaya lebih mudah dikenali, dipelajari dan dimanupulasi lebih lanjut.

Model matematika merupakan salah satu alat yang dapat membantu mempermudah penyelesaian masalah dalam kehidupan nyata. Masalah-masalah tersebut dapat dibawa ke dalam model matematika dengan menggunakan asumsi-asumsi tertentu. Proses untuk menyelesaikan permasalahan suatu fenomena secara matematika menurut Susanta (1993 : 1.15-1.17) adalah sebagai berikut:

1. Mengidentifikasi masalah yang sesungguhnya.
2. Mengadakan penyederhanaan.

   Di sini dicari semua peubah yang ada kaitannya dengan masalah dan dicoba mencari relasi antar mereka. Bila diperlukan, diadakan penyederhanaan masalah dengan cara misalnya, memotong peubah yang kurang relevan, menyederhanakan hubungan, memperkecil lingkup dan sebagainya. Sebagai hasil diperoleh suatu penghampiran terhadap masalah yang sesungguhnya yang lebih sederhana dan diharapkan lebih mudah untuk dirumuskan. Pada langkah ini juga dibuat asumsi yang akan digunakan dalam meyusun model.
3. Merumuskan masalah dalam bahasa matematika (menyusun model).

   Pada langkah ini, semua peubah dan relasi-relasinya dinyatakan dengan lambang matematika dan dicoba untuk mengenali pola masalah matematika mana yang sesuai dengan masalah tersebut.
4. Menyelesaikan masalah dalam model dengan alat matematika yang sesuai. Rumusan yang diperoleh yang dinyatakan dalam istilah dan pengertian-pengertian matematika diselesaikan dengan alat matematika yang sesuai. Pada

umumnya perumusan matematika belum memberikan jawaban secara langsung, sehingga perlu adanya proses secara matematika yang meliputi perhitungan, penyelesaian persamaan, pembuktian teorema dan sebagainya.

5. Menafsirkan kembali informasi yang diperoleh kedalam fenomena yang ada. Sesudah penyelesaian secara matematika diperoleh, hasilnya harus ditafsirkan kembali atau diterjemahkan kedalam situasi nyata, supaya dapat diuji dengan eksperimen atau pengamatan.
6. Melakukan pengujian model. Hasil penafsiran kembali perlu diuji apakah cukup benar dalam sistemnya semula. Hal ini dapat dikerjakan antara lain dengan cara mengadakan percobaan-percobaan atau simulasi. Kemudian melaksanakan hasil yang sudah dianggap cukup benar untuk mencapai tujuan semula.

Dengan langkah-langkah pembentukan model di atas, maka dibentuklah model matematika pengaruh kebiasaan merokok dari suatu populasi.

E. Model Dasar Epidemilogi

Model epidemiologi pada umumnya berfokus pada dinamik dari transmisi atau perpindahan ciri atau karakter antara individu dengan individu, populasi dengan populasi, komunitas dengan komunitas, daerah dengan daerah, bahkan negara dengan negara. Ciri atau karakter tersebut dapat berbentuk penyakit (malaria, HIV), karakteristik genetik (gender, ras, penyakit genetik), dan bentuk lain seperti kultur (bahasa, kepercayaan).

Beberapa istilah yang sering didengar dalam model epidemiologi diantaranya adalah epidemik, endemik, dan pandemik. Epidemik merupakan sebuah fenomena dimana penyakit tiba-tiba muncul dalam suatu populasi dan menjangkit secara cepat sebelum penyakit tersebut menghilang dan kemudian akan muncul kembali dalam interval waktu tertentu. Endemik merupakan fenomena dimana sebuah penyakit yang muncul akan selalu ada dalam suatu populasi. Sedangkan pandemik adalah suatu fenomena dimana penyakit tersebut telah menyebar luas bahkan mendunia.

Dalam membentuk model epidemiologi ke bentuk persamaan differensial kita mengasumsikan bahwa setiap fungsi merupakan fungsi kontinu. Dalam memodelkan fenomena epidemik, kita dapat membagi populasi menjadi beberapa kelas populasi. Pembagian tersebut pertama kali diperkenalkan oleh Kermack-McKendrick pada tahun 1927. Model ini mempunyai tiga kompartemen yang menggambarkan proses penyebaran penyakit pada populasi. Kompartemen tersebut adalah *Susceptibles* (S) menyatakan kelompok individu yang rentan terhadap penyakit, *Infection* (I) menyatakan individu terinfeksi penyakit dan *Recovery* (R) menyatakan kelompok individu yang sembuh dari penyakit.

Selanjutnya, model matematika epidemic ini menjadi dasar terbentuknya model matematika dari pengaruh kebiasaan merokok pada suatu populasi. Model tersebut pertama kali diperkenalkan oleh Castillo-Chavez, Castillo-Garsow, Jordan-Salivia dan Rodriguez-Herrera dengan membagi populasi menjadi tiga kelompok, yaitu populasi perokok potensial, populasi perokok aktif dan populasi yang berhenti merokok dan disebut dengan model PSQ. Perokok potensial merupakan orang yang belum pernah merokok yang berpotensi menjadi perokok aktif jika berinteraksi dengan perokok aktif. Perokok aktif merupakan orang yang merokok sesekali ataupun merokok setiap hari dan dapat menjadi penyebab bertambahnya jumlah perokok. Orang yang telah berhenti merokok adalah perokok yang telah berhenti merokok secara permanen. Seseorang akan menjadi perokok hanya jika berinteraksi dengan perokok aktif. Dengan kata lain, jika seseorang yang potensial merokok bergaul dengan perokok aktif maka orang tersebut akan menjadi perokok aktif pula karena didorong oleh keinginan untuk mencoba. Faktor lain yang menyebabkan seseorang menjadi perokok diabaikan karena pada umumnya seseorang menjadi perokok karena dipengaruhi oleh lingkungan sosial. Model ini mengasumsikan bahwa orang yang telah berhenti merokok tidak akan pernah merokok kembali. Selanjutnya model ini dikembangkan oleh Gul Zaman (2009) dengan mengasumsikan bahwa kelompok individu perokok tebagi menjadi perokok aktif dan perokok biasa. Model matematikanya adalah pengembangan model PSQ menjadi model matematika PLSQ.

Dalam model dasar epidemilogi, untuk menentukan kestabilan suatu model epidemilogi kita menggunakan *Bilangan Reproduksi Dasar* (R_0).

F. Bilangan Reproduksi Dasar (*Basic Reproduction Number*)

Penentuan kestabilan sistem untuk model epidemology, dapat ditentukan melalui nilai atau besaran yang disebut sebagai *basic reproductin number* (R_0). Bilangan reproduksi dasar didefinisikan sebagai angka harapan banyaknya infeksi kedua pada populasi *susceptible*. Bilangan reproduksi dasar (R_0) merupakan parameter penting dalam matematika epidemilogi yang merupakan ambang batas (*threshold*) terjadinya penyebaran penyakit. Jika $R_0 < 1$ maka jumlah individu yang terinfeksi berkurang, sedangkan jika $R_0 > 1$ maka jumlah individu yang terinfeksi bertambah.

(Brauer, 2008 : 159)

G. Sistem Persamaan Diferensial

Diberikan suatu sistem persamaan diferensial biasa, yaitu

Misal

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2, \cdots, x_n) \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2, \cdots, x_n) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= f_n(x_1, x_2, \cdots, x_n) \end{aligned} \quad \text{..........(1)}$$

dengan kondisi awal $x_i(t_0) = x_{i0}$, i = 1, 2, ..., n

Sistem (1) dapat ditulis sebagai $\dot{x} = f(x)$ .... (2)

dengan $x \in R^n$, $f = (f_1, \ldots, f_n)^T$ dan kondisi awal $x(t_0) = x_0 \in R^n$

Selanjutnya notasi $x(t) = x(x_0, t)$ menyatakan solusi Sistem (2) yang melalui x_0.

Definisi 1 : (Perko, 1991, hal.101)

Titik $\hat{x} \in R^n$ disebut titik kesetimbangan Sistem (2) jika $f(\hat{x}) = 0$

1. Kestabilan Titik Kesetimbangan Persamaan Diferensial Linier

Misal diberikan suatu sistem linier dalam bentuk

$$\dot{x} = f(x) \quad \text{..........(3)}$$

dengan f linier, $f : E \rightarrow R^n, E \subset R^n$

Sistem (3) dapat dinyatakan dalam bentuk matrik

$$\dot{x} = Ax \quad \text{..........(4)}$$

dengan $x \in R^n$, dan A matrik berukuran n x n.

Apabila matrik A yang digunakan adalah matrik berukuran 2 x 2, artinya sistem terdiri dari dua persamaan diferensial linier. Kestabilan titik kesetimbangan Sistem (3) dapat diperoleh melalui nilai-nilai eigennya.

Definisi 2 : (Perko, 1991)

a. Titik kesetimbangan $\hat{x}$ dikatakan stabil jika untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$, terdapat bilangan $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, sedemikian sehingga untuk setiap solusi $x(t)$ yang memenuhi $\|x(t_0) - \hat{x}\| < \delta$ berlaku $\|x(t) - \hat{x}\| < \varepsilon$, $\forall\, t \geq t_0$

b. Titik kesetimbangan $\hat{x}$ dikatakan tak stabil, jika $\hat{x}$ tidak stabil

c. Titik kesetimbangan $\hat{x}$ dikatakan stabil asimtotik, jika titik kesetimbangan stabil $\hat{x}$ dan terdapat $\delta_0 > 0$ sehingga untuk setiap solusi $x(t)$ yang memenuhi $\|x(t_0) - \hat{x}\| < \delta_0$ berlaku $\lim_{t \to \infty} x(t) = \hat{x}$

Untuk menentukan kestabilan titik kesetimbangan (3) dengan Definisi 2 seringkali mengalami kesulitan. Oleh karena itu, berikutnya akan diberikan teorema bagaimana cara-cara menentukan kestabilan titik kesetimbangan (3)

Teorema 1: (Wiggins, 1990)

Sistem (3) stabil asimtotis jika dan hanya jika bagian real semua nilai eigen dari A negatif, yaitu $(\mathrm{Re}(\lambda_i)) < 0, i = 1,2$

2. **Kestabilan Titik Kesetimbangan Sistem Persamaan Diferensial Nonlinier Orde 1 dengan Koefisien Konstan**

Misal diberikan suatu sistem persamaan diferensial non linear

$$\dot{x} = f(x) \qquad \text{.......................................(5)}$$

$f : E \to R^n$ dengan $E \subset R^n$, f fungsi non linear dan kontinu.

Perilaku solusi pada persekitaran titik kesetimbangan Sistem non linear (5) dapat ditentukan melalui linierisasi pada persekitaran titik kesetimbangan sistem tersebut.

Definisi 3 : (Kocak, 1991, hal.267)

Diberikan $f = (f_1, f_2, \cdots, f_n)$ pada (5) dengan $f_i \in C'(E)$, i = 1,2,..., n

Matrik :

$$Jf(\hat{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(x) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(x) \end{bmatrix}$$

dinamakan matrik Jacobian dari f pada titik x

Definisi 4 : (Perko, 1991, hal.101)

Sistem $\dot{x} = J(f(\hat{x}))x$ disebut linierisasi dari (5) di $\hat{x}$

Setelah proses linierisasi dilakukan pada (5), selanjutnya perilaku kestabilan pada titik kesetimbangan ditentukan seperti pada sistem linier.

Teorema 2 : (Wiggins, 1990, hal.8)

Jika semua nilai eigen dari matriks Jacobian $J(f(\hat{x}))$ mempunyai bagian real negatif, maka titik kesetimbangan $\hat{x}$ dari (5) stabil asimtotis

H. Kriteria Kestabilan Routh Hurwitz

Kriteria ini menunjukkan adakah akar-akar tak stabil persamaan polinom orde n tanpa perlu menyelesaikannya. Untuk sistem kendali, kestabilan mutlak langsung dapat diketahui dari koefisien-koefisien persamaan karakteristik. Prosedur:

1. Tulis persamaan orde n dalam bentuk sebagai berikut:

   $a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n = 0, a_n \neq 0, a_i \in \mathbb{R}, i = 0, 1, \dots, n$

2. Jika ada koefisien yang bernilai nol atau negative disamping adanya koefisien positif, maka hal ini menunjukkan ada satu akar atau akar-akar imajiner atau memiliki bagian real positif (system tidak stabil). Kondisi perlu (tetapi belum cukup) untuk stabil adalah semua koefisien persamaan polinom bertanda sama

3. Table Routh Hurwitz

s^n	a_0	a_2	...
s^{n-1}	a_1	a_3	...
s^{n-2}	b_1	b_2	...
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	...
s^1	f_1		
s^0	g_1		

Dengan koefisien

$$b_i = \frac{a_1 a_{2i} - a_0 a_{2i+1}}{a_1}, c_i = \frac{b_1 a_{2i+1} - a_1 b_{i+1}}{b_1}, d_i = \frac{c_1 b_{i+1} - b_1 c_{i+1}}{c_1}, \ldots \& \ i = 1,2, \ldots$$

4. Kriteria kestabilan Routh Hurwitz: banyaknya akar tak stabil sama dengan banyaknya perubahan tanda pada kolom pertama table Routh Hurwitz

Syarat perlu dan cukup untuk stabil adalah semua koefisien persamaan karakteristik dan semua suku pada kolom pertama table Routh bertanda sama

BAB III TUJUAN, LUARAN, DAN KONTRIBUSI PENELITIAN

A. Tujuan Penelitian

Penelitian ini bertujuan untuk

1. Membentuk model matematika pengaruh kebiasaan merokok pada suatu populasi yang dapat menimbulkan kematian dalam populasi tersebut akibat penyakit yang ditimbulkan dari kebiasaan itu.
2. Menganalisis model.
3. Menginterpretasikan model.

B. Luaran Penelitian

Luaran yang dihasilkan dari penelitian ini minimal salah satu diantara berikut:

1. Publikasi ilmiah dalam jurnal lokal yang mempunyai ISSN atau jurnal nasional terakreditasi
2. Proseding pada seminar ilmiah baik yang berskala local, regional, maupun nasional
3. Bahan ajar yang dapat digunakan untuk mahasiswa/siswa

C. Kontribusi Penelitian

Penelitian ini diharapkan dapat memberikan manfaat dan sumbangan terhadap:

1. Peneliti, yaitu menambah wawasan dan pengetahuan serta khasanah ilmiah dalam membentuk model matematika dari suatu permasalahan.
2. Mahasiswa, yaitu sebagai bahan referensi dalam matakuliah pemodelan matematika
3. Pemerintah atau pihak terkait, yaitu sebagai salah satu acuan dalam menentukan berbagai kebijakan di masa mendatang.
4. Peneliti selanjutnya, yaitu sebagai bahan referensi untuk penelitian berikutnya.

BAB IV METODE PENELITIAN

Penelitian ini merupakan penelitian **teoritis**. Pada penelitian ini teori-teori dikumpulkan, ditelaah, dimodifikasi, dan digunakan untuk mendapatkan jawaban dari permasalahan yang dikemukakan.

Pada penelitian ini, pendekatan yang digunakan adalah analisis teori tentang persamaan diferensial dan model matematika. Adapun langkah-langkah yang dilakukan untuk membentuk model dan menjawab permasalahan yang dikemukakan adalah sebagai berikut,

1. Menentukan asumsi-asumsi berdasarkan permasalahan yang akan dijawab
2. Menentukan variabel dan parameter dari fenomena nyata.
3. Membentuk model matematika dari pengaruh rokok pada suatu populasi dengan mempertimbangkan adanya kematian dalam populasi tersebut baik yang disebabkan karena penyakit yang berhubungan dengan rokok ataupun kematian alami. Individu yang berhenti merokok dapat kembali lagi menjadi individu yang berpotensi menjadi perokok
4. Mencari solusi model dengan menyelidiki titik kesetimbangan dan kestabilannya.
5. Interpretasi model.

BAB V HASIL DAN PEMBAHASAN

A. Model Matematika PSQP dari Pengaruh Rokok Pada Suatu Populasi

Berdasarkan permasalahan yang diamati, selanjutnya ditentukanlah asumsi-asumsi yang mungkin yaitu:

1. Populasi konstan dan tertutup
2. Populasi dalam sistem dibagi atas 3 kelompok dasar yaitu populasi yang berpotensi untuk menjadi perokok (P), populasi perokok (S) dan populasi yang telah berhenti merokok (Q)
3. Populasi perokok dibedakan menjadi 3 kelompok yaitu perokok ringan (S_1), perokok sedang (S_2) dan perokok berat (S_3)
4. Perokok adalah seseorang yang merokok sedikitnya 1 batang/hari selama sekurang-kurangnya 1 tahun
5. Potensial menjadi perokok adalah orang yang belum pernah mencoba rokok dan pernah mencoba tetapi tidak rutin merokok sebanyak 1 batang/hari selama 1 tahun
6. Perokok ringan adalah seseorang yang mengkonsumsi rokok antara 1 – 10 batang/hari, perokok sedang adalah seorang yang mengkonsumsi rokok antara 11 – 20 batang/hari dan perokok berat adalah seorang yang mengkonsumsi rokok lebih dari 20 batang/hari
7. Seseorang yang sudah berhenti dari kebiasaannya merokok dimungkinkan dapat kembali untuk menjadi seseorang yang berpotensi menjadi perokok
8. Setiap individu yang baru masuk ke sistem diasumsikan berpotensi menjadi perokok
9. Adanya kematian pada masing-masing populasi yang disebabkan karena pengaruh rokok (berhubungan dengan penyakit yang ditimbulkan oleh rokok)
10. Adanya kematian alami
11. Penularan kebiasaan merokok terjadi karena adanya interaksi antara populasi yang berpotensi menjadi perokok dengan populasi perokok serta adanya unsur ajakan yang kuat dan keinginan untuk mencoba dari populasi yang berpotensi menjadi perokok tersebut

12. Populasi yang berpotensi menjadi perokok dapat menjadi perokok mulai dari menjadi perokok ringan, sedang dan selanjutnya berat.

Adapun variabel pada penelitian ini adalah jumlah total populasi (N), populasi yang berpotensi menjadi perokok (P), populasi perokok ringan (S_1), populasi perokok sedang (S_2), populasi perokok berat (S_3), populasi yang telah berhenti dari kebiasaan merokok (Q) dan waktu (t). Parameternya adalah

$b =$ tingkat kelahiran

$\beta_1 =$ tingkat penularan kebiasaan merokok dari populasi perokok ringan ke populasi yang berpotensi menjadi perokok

$\beta_2 =$ tingkat penularan dari populasi perokok sedang ke populasi perokok ringan

$\beta_3 =$ tingkat penularan dari populasi perokok berat ke populasi perokok sedang

$\gamma_1 =$ tingkat kesembuhan dari kebiasaan merokok pada populasi perokok ringan

$\gamma_2 =$ tingkat kesembuhan dari kebiasaan merokok pada populasi perokok sedang

$\gamma_3 =$ tingkat kesembuhan dari kebiasaan merokok pada populasi perokok berat

$\mu =$ tingkat kematian alami masing-masing populasi

$d_1 =$ tingkat kematian dari populasi yang berpotensi untuk menjadi perokok yang berkaitan dengan penyakit yang disebabkan oleh rokok

$d_2 =$ tingkat kematian dari populasi perokok ringan yang berkaitan dengan penyakit yang disebabkan oleh rokok

$d_3 =$ tingkat kematian dari populasi perokok sedang yang berkaitan dengan penyakit yang disebabkan oleh rokok

$d_4 =$ tingkat kematian dari populasi perokok berat yang berkaitan dengan penyakit yang disebabkan oleh rokok

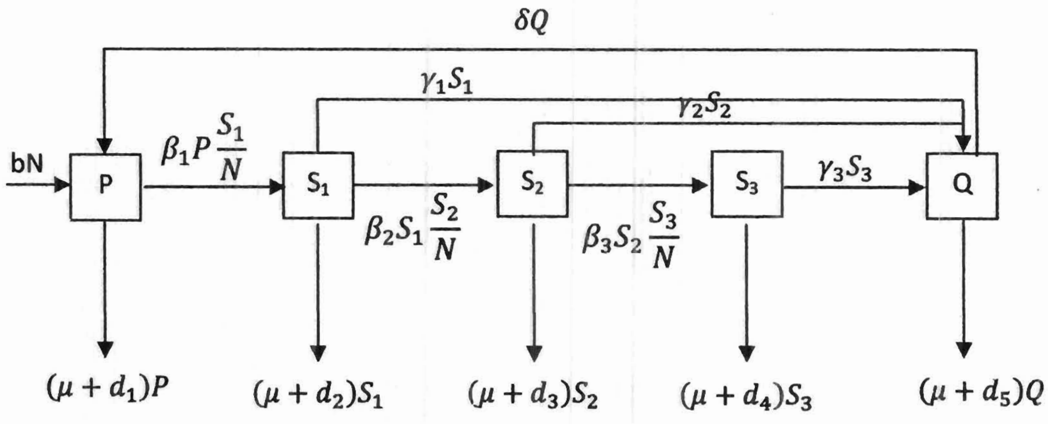
$d_5 =$ tingkat kematian dari populasi yang sembuh dari kebiasaan merokok yang berkaitan dengan penyakit yang disebabkan oleh rokok

$\delta =$ tingkat penurunan kesadaran untuk tidak merokok lagi (perokok yang sudah berhenti dari kebiasaan merokok menjadi berpotensi kembali menjadi perokok)

$c =$ rata-rata banyaknya kontak tiap satuan waktu

$q =$ peluang individu menjadi perokok (ringan, sedang dan berat)

Berdasarkan asumsi-asumsi di atas dapat digambarkan diagram transfer model sebagai berikut:



Gambar 1. Diagram Transfer Pengaruh Rokok Pada Suatu Populasi

Selanjutnya, berdasarkan diagram di atas dapat diformulasikan modelnya sebagai berikut:

$\frac{dP}{dt} = bN - \beta_1 P \frac{S_1}{N} + \delta Q - (\mu + d_1)P$ .... (6)

$\frac{dS_1}{dt} = \beta_1 P \frac{S_1}{N} - \beta_2 S_1 \frac{S_2}{N} - (\gamma_1 + \mu + d_2)S_1$.. .. (7)

$\frac{dS_2}{dt} = \beta_2 S_1 \frac{S_2}{N} - \beta_3 S_2 \frac{S_3}{N} - (\gamma_2 + \mu + d_3)S_2$.. .(8)

$\frac{dS_3}{dt} = \beta_3 S_2 \frac{S_3}{N} - (\gamma_3 + \mu + d_4)S_3$.. .(9)

$\frac{dQ}{dt} = \gamma_3 S_3 + \gamma_1 S_1 + \gamma_2 S_2 - (\mu + \delta + d_5)Q$..(10)

$N(t) = P(t) + S_1(t) + S_2(t) + S_3(t) + Q(t)$..(11)

Oleh karena,

$$\frac{dN}{dt} = \frac{dP}{dt} + \frac{dS_1}{dt} + \frac{dS_2}{dt} + \frac{dS_3}{dt} + \frac{dQ}{dt}$$

$$= bN - \mu(P + S_1 + S_2 + S_3 + Q) - (d_1 P + d_2 S_1 + d_3 S_2 + d_4 S_3 + d_5 Q)$$

$$= (b - \mu)N - (d_1 P + d_2 S_1 + d_3 S_2 + d_4 S_3 + d_5 Q)$$

Jika $d_1 = d_2 = d_3 = d_4 = d_5 = d$ maka $\frac{dN}{dt} = (b - \mu - d)N$ sehingga diperoleh

$$\frac{dN}{N} = (b - \mu - d)dt$$

$$\ln N = (b - \mu - d)t + c$$

$$N = ke^{(b-\mu-d)t}$$

Jika $b = \mu + d$ maka total populasi adalah konstan.

Untuk memudahkan analisis, sistem persamaan (6) – (10) diatas dinormalkan, dengan memisalkan $p = \frac{P}{N}, s_1 = \frac{S_1}{N}, s_2 = \frac{S_2}{N}, s_3 = \frac{S_3}{N}, q = \frac{Q}{N}$.

Selanjutnya, perhatikan $p = \frac{P}{N} \leftrightarrow dP = Ndp$, kemudian substitusikan ke persamaan (6) diperoleh

$$\frac{dP}{dt} = bN - \beta_1 P \frac{S_1}{N} + \delta Q - (\mu + d_1)P$$

$$\frac{Ndp}{dt} = bN - \beta_1 Nps_1 + \delta Nq - (\mu + d_1)Np$$

$\frac{dp}{dt} = b - \beta_1 ps_1 + \delta q - (\mu + d_1)p$ ....(12)

Analog untuk yang lain diperoleh

$\frac{ds_1}{dt} = \beta_1 ps_1 - \beta_2 s_1 s_2 - (\gamma_1 + \mu + d_2)s_1$ ....(13)

$\frac{ds_2}{dt} = \beta_2 s_1 s_2 - \beta_3 s_2 s_3 - (\gamma_2 + \mu + d_3)s_2$ ....(14)

$\frac{ds_3}{dt} = \beta_3 s_2 s_3 - (\gamma_3 + \mu + d_4)s_3$ ....(15)

$\frac{dq}{dt} = \gamma_3 s_3 + \gamma_1 s_1 + \gamma_2 s_2 - (\mu + \delta + d_5)q$ ....(16)

$p(t) + s_1(t) + s_2(t) + s_3(t) + q(t) = 1$ ....(17)

dan daerah penyelesaian

$$\Omega = \left\{ (p, s_1, s_2, s_3, q) \middle| \begin{matrix} p \geq 0, s_1 \geq 0, s_2 \geq 0, s_3 \geq 0, q \geq 0, \\ p + s_1 + s_2 + s_3 + q \leq n \leq 1 \end{matrix} \right\}$$

B. Analisis Stabilitas Model

1. Titik Ekuilibrium Model

Persamaan (12) sampai dengan (16) mempunyai beberapa titik ekuilibrium. Titik ekuilibrium tersebut diberikan oleh teorema berikut:

Teorema 3:

1. $E_0 = \left(\frac{b}{\mu + d_1}, 0,0,0,0\right)$ merupakan titik ekuilibrium bebas dari kebiasaan merokok
2. $E_1 = (p, s_1, 0,0, q)$ merupakan titik ekuilibrium endemik 1 dengan $p = \frac{\gamma_1 + \mu + d_2}{\beta_1} = \frac{1}{R_{01}},\ s_1 = \frac{(\mu + \delta + d_5)(\mu + d_1 - R_{01} b)}{\delta \gamma_1 R_{01} - \beta_1(\mu + \delta + d_5)}, q = \frac{\gamma_1(\mu + d_1 - R_{01} b)}{\delta \gamma_1 R_{01} - \beta_1(\mu + \delta + d_5)}$
3. $E_2 = (p, s_1, s_2, 0, q)$ merupakan titik ekuilibrium endemik 2 dengan

$$p = (b + \delta q)\left(\frac{R_{02}}{\beta_1 + R_{02}(\mu + d_1)}\right) = (b + \delta q)\varphi$$

$$s_1 = \frac{\gamma_2 + \mu + d_3}{\beta_2} = \frac{1}{R_{02}}$$

$$s_2 = \frac{\beta_1}{\beta_2 R_{01}}[R_{01}b\varphi - 1]\left(1 + \frac{\varphi\delta\gamma_2\beta_1}{(\mu + \delta + d_5)\beta_2 - \gamma_2\beta_1\varphi\delta}\right) + \frac{\varphi\delta\gamma_1\beta_1}{R_{02}[(\mu + \delta + d_5)\beta_2 - \gamma_2\beta_1\varphi\delta]}$$

$$q = \frac{\gamma_1 R_{01}\beta_2 + R_{02}\gamma_2\beta_1(R_{01}b\varphi - 1)}{R_{01}R_{02}[(\mu + \delta + d_5)\beta_2 - \gamma_2\beta_1\varphi\delta]}$$

dan

$$\varphi = \frac{R_{02}}{\beta_1 + R_{02}(\mu + d_1)}$$

4. $E_3 = (p, s_1, s_2, s_3, q)$ merupakan titik ekuilibrium endemic 3 dengan

$$p = \frac{\beta_2 R_{01} + \beta_1 R_{03}}{\beta_1 R_{01} R_{03}}, s_1 = \frac{\beta_3 R_{02}[R_{03} m\beta_2(\eta - b\psi) - \gamma_2] + R_{03}\gamma_3\beta_2}{R_{02}R_{03}(\gamma_3\beta_2 + \beta_3\gamma_1 - \beta_2\beta_3 m)}$$

$$s_2 = \frac{\gamma_3 + \mu + d_4}{\beta_3} = \frac{1}{R_{03}}, s_3 = \frac{\beta_2\{R_{03}(m\beta_2[1 + R_{02}(\eta - b\psi)] - \gamma_1) - \gamma_2 R_{02}\}}{R_{02}R_{03}(\gamma_3\beta_2 + \beta_3\gamma_1 - \beta_2\beta_3 m)}$$

$$q = \frac{R_{02}R_{03}(\eta - b\psi)(\gamma_3\beta_2 + \beta_3\gamma_1) + R_{03}\gamma_3\beta_2 - \beta_3\gamma_2 R_{02}}{\delta\psi R_{02}R_{03}(\gamma_3\beta_2 + \beta_3\gamma_1 - \beta_2\beta_3 m)}, \psi = \frac{R_{01}R_{03}}{\beta_2 R_{01} + \beta_1 R_{03}}$$

$\eta = \frac{(\mu+d_1)}{\beta_1}$ dan $m = \frac{\mu+\delta+d_5}{\delta\psi\beta_2}$

Bukti: dapat dilihat pada Lampiran 1

2. Kestabilan titik ekuilibrium

Untuk menyelidiki kestabilan titik ekuilibrium sistem persamaan (12) sampai dengan (16), diberikan Lemma berikut:

Lemma 1:

Matrikas Jacobian fungsi f dari sistem persamaan (12) sampai dengan (16) di titik $x = (p, s_1, s_2, s_3, q)$, yaitu:

$$J(f(x)) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial p} & \frac{\partial f_1}{\partial s_1} & \frac{\partial f_1}{\partial s_2} & \frac{\partial f_1}{\partial s_3} & \frac{\partial f_1}{\partial q} \\ \frac{\partial f_2}{\partial p} & \frac{\partial f_2}{\partial s_1} & \frac{\partial f_2}{\partial s_2} & \frac{\partial f_2}{\partial s_3} & \frac{\partial f_2}{\partial q} \\ \frac{\partial f_3}{\partial p} & \frac{\partial f_3}{\partial s_1} & \frac{\partial f_3}{\partial s_2} & \frac{\partial f_3}{\partial s_3} & \frac{\partial f_3}{\partial q} \\ \frac{\partial f_4}{\partial p} & \frac{\partial f_4}{\partial s_1} & \frac{\partial f_4}{\partial s_2} & \frac{\partial f_4}{\partial s_3} & \frac{\partial f_4}{\partial q} \\ \frac{\partial f_5}{\partial p} & \frac{\partial f_5}{\partial s_1} & \frac{\partial f_5}{\partial s_2} & \frac{\partial f_5}{\partial s_3} & \frac{\partial f_5}{\partial q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & -\beta_1 p & 0 & 0 & \delta \\ \beta_1 s_1 & a_{22} & -\beta_2 s_1 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_2 s_2 & a_{33} & -\beta_3 s_2 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_3 s_3 & a_{44} & 0 \\ 0 & \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & a_{55} \end{bmatrix}$$

dengan

$$a_{11} = -(\beta_1 s_1 + \mu + d_1)$$

$$a_{22} = \beta_1 p - \beta_2 s_2 - (\mu + \gamma_1 + d_2)$$

$$a_{33} = \beta_2 s_1 - \beta_3 s_3 - (\mu + \gamma_2 + d_3)$$

$$a_{44} = \beta_3 s_2 - (\mu + \gamma_3 + d_4)$$

$$a_{55} = -(\mu + \delta + d_5)$$

a. **Kestabilan titik ekuilibrium bebas dari rokok**

Untuk menyelidiki kestabilan titik ekuilibrium ini dapat dilihat dari teorema berikut:

Teorema 4:

1. Jika $\frac{\beta_1 b}{\mu + d_1} < \mu + \gamma_1 + d_2 \leftrightarrow \frac{\beta_1 b}{(\mu + d_1)(\mu + \gamma_1 + d_2)} < 1 \leftrightarrow R_0 < 1$ maka nilai-nilai eigen dari matriks Jacobian di titik E_0 lebih kecil dari nol. Dengan kata lain titik ekuilibrium E_0 stabil asimtotik lokal
2. Jika $R_0 > 1$ maka ada nilai eigen dari matriks Jacobian di titik E_0 lebih besar dari nol $(\lambda_2 > 0)$ sehingga titik ekuilibrium E_0 tidak stabil

Bukti:

Berdasarkan Lemma 1 didapatkan matriks Jacobian $J(f(E_0))$ dari fungsi f di titik ekuilibrium yang bebas dari rokok (kebiasaan merokok) $E_0 = \left(\frac{b}{\mu+d_1}, 0,0,0,0\right)$ sebagai berikut:

$$J(f(E_0)) = \begin{bmatrix} -(\mu+d_1) & -\beta_1\left(\frac{b}{\mu+d_1}\right) & 0 & 0 & \delta \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(\mu+\gamma_2+d_3) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -(\mu+\gamma_3+d_4) & 0 \\ 0 & \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & -(\mu+\delta+d_5) \end{bmatrix}$$

dengan

$$a_{22} = \beta_1\left(\frac{b}{\mu+d_1}\right) - (\mu+\gamma_1+d_2)$$

Selanjutnya diperoleh:

$$|\lambda I - J(f(E_0))| = 0$$

$$\leftrightarrow \begin{vmatrix} a_{11} & \beta_1\left(\frac{b}{\mu+d_1}\right) & 0 & 0 & -\delta \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda+(\mu+\gamma_3+d_4) & 0 \\ 0 & -\gamma_1 & -\gamma_2 & -\gamma_3 & \lambda+(\mu+\delta+d_5) \end{vmatrix} = 0$$

dengan

$$a_{11} = \lambda + (\mu + d_1)$$

$$a_{22} = \lambda - \left(\beta_1\left(\frac{b}{\mu+d_1}\right) - (\mu+\gamma_1+d_2)\right)$$

$$a_{33} = \lambda + (\mu+\gamma_2+d_3)$$

Sepanjang kolom 1

$$(\lambda + (\mu + d_1)) \begin{vmatrix} a_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{44} & 0 \\ -\gamma_1 & -\gamma_2 & -\gamma_3 & a_{55} \end{vmatrix} = 0$$

dengan

$$a_{22} = \lambda - \left(\beta_1\left(\frac{b}{\mu + d_1}\right) - (\mu + \gamma_1 + d_2)\right)$$

$$a_{33} = \lambda + (\mu + \gamma_2 + d_3)$$

$$a_{44} = \lambda + (\mu + \gamma_3 + d_4)$$

$$a_{55} = \lambda + (\mu + \delta + d_5)$$

Sepanjang baris 1

$$(\lambda + (\mu + d_1))\left(\lambda - \left(\beta_1\left(\frac{b}{\mu + d_1}\right) - (\mu + \gamma_1 + d_2)\right)\right)$$

$$\begin{vmatrix} \lambda + (\mu + \gamma_2 + d_3) & 0 & 0 \\ 0 & \lambda + (\mu + \gamma_3 + d_4) & 0 \\ -\gamma_2 & -\gamma_3 & \lambda + (\mu + \delta + d_5) \end{vmatrix} = 0$$

$$(\lambda + (\mu + d_1))\left(\lambda - \left(\beta_1\left(\frac{b}{\mu + d_1}\right) - (\mu + \gamma_1 + d_2)\right)\right)(\lambda + (\mu + \gamma_2 + d_3))(\lambda$$
$$+ (\mu + \gamma_3 + d_4))(\lambda + (\mu + \delta + d_5)) = 0$$

$$\lambda_1 = -(\mu + d_1)$$

$$\lambda_2 = \left(\beta_1\left(\frac{b}{\mu + d_1}\right) - (\mu + \gamma_1 + d_2)\right)$$

$$\lambda_3 = -(\mu + \gamma_2 + d_3)$$

$$\lambda_4 = -(\mu + \gamma_3 + d_4)$$

$$\lambda_5 = -(\mu + \delta + d_5)$$

Jadi, dapat disimpulkan:

1. Jika $\frac{\beta_1 b}{\mu+d_1} < \mu + \gamma_1 + d_2 \leftrightarrow \frac{\beta_1 b}{(\mu+d_1)(\mu+\gamma_1+d_2)} < 1 \leftrightarrow R_0 < 1$ maka nilai eigen dari matriks Jacobian di titik E_0 lebih kecil dari nol. Dengan kata lain titik ekuilibrium E_0 stabil asimtotik lokal
2. Jika $R_0 > 1$ maka $\lambda_2 > 0$ sehingga titik ekuilibrium E_0 tidak stabil

Interpretasi di titik ekuilibrium $E_0 = \left(\frac{b}{\mu+d_1}, 0,0,0,0\right)$

1. Jika tingkat penularan kebiasaan merokok dari individu perokok kepada populasi yang berpotensi menjadi perokok dan tingkat kelahiran dalam populasi lebih sedikit daripada tingkat kematian dan kesembuhan dalam populasi maka dengan bertambahnya waktu populasi akan terbebas dari individu yang merokok (tidak ada lagi individu yang merokok)
2. Jika tingkat penularan kebiasaan merokok dari individu perokok kepada populasi yang berpotensi menjadi perokok dan tingkat kelahiran dalam populasi lebih banyak daripada tingkat kematian dan kesembuhan dalam populasi maka dengan bertambahnya waktu populasi orang yang merokok semakin bertambah

b. **Kestabilan titik ekuilibrium tidak bebas dari rokok**

Untuk menyelidiki kestabilan titik ekuilibrium ini dapat dilihat dari teorema berikut:

Teorema 5:

Titik ekuilibrium E_1 stabil apabila $R_0 > 1$ dan $s_1 > 0$

Bukti:

Berdasarkan Lemma 1 didapatkan matriks Jacobian $J(f(E_1))$ dari fungsi f di titik ekuilibrium yang tidak bebas dari rokok (kebiasaan merokok) $E_1 = (p, s_1, 0, 0, q)$ dengan $p = \frac{\gamma_1+\mu+d_2}{\beta_1} = \frac{1}{R_{01}}$, $s_1 = \frac{(\mu+\delta+d_5)(\mu+d_1-R_{01}b)}{\delta\gamma_1 R_{01}-\beta_1(\mu+\delta+d_5)}$, $q = \frac{\gamma_1(\mu+d_1-R_{01}b)}{\delta\gamma_1 R_{01}-\beta_1(\mu+\delta+d_5)}$ sebagai berikut:

$$J(f(E_1)) = \begin{bmatrix} a_{11} & -\beta_1 p & 0 & 0 & \delta \\ \beta_1 s_1 & a_{22} & -\beta_2 s_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} & 0 \\ 0 & \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & a_{55} \end{bmatrix}$$

dengan

$$a_{11} = -(\beta_1 s_1 + \mu + d_1)$$

$$a_{22} = \beta_1 p - (\mu + \gamma_1 + d_2)$$

$$a_{33} = \beta_2 s_1 - (\mu + \gamma_2 + d_3)$$

$$a_{44} = -(\mu + \gamma_3 + d_4)$$

$$a_{55} = -(\mu + \delta + d_5)$$

Selanjutnya,

$$|\lambda I - J(f(E_1))| = 0$$

$$\leftrightarrow \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & \beta_1 p & 0 & 0 & -\delta \\ -\beta_1 s_1 & \lambda - a_{22} & \beta_2 s_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - a_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda - a_{44} & 0 \\ 0 & -\gamma_1 & -\gamma_2 & -\gamma_3 & \lambda - a_{55} \end{vmatrix} = 0$$

Sepanjang baris ke-3

$$(\lambda - a_{33}) \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & \beta_1 p & 0 & -\delta \\ -\beta_1 s_1 & \lambda - a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - a_{44} & 0 \\ 0 & -\gamma_1 & -\gamma_3 & \lambda - a_{55} \end{vmatrix} = 0$$

Sepanjang baris ke-3

$$(\lambda - a_{33})(\lambda - a_{44})\begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & \beta_1 p & -\delta \\ -\beta_1 s_1 & \lambda - a_{22} & 0 \\ 0 & -\gamma_1 & \lambda - a_{55} \end{vmatrix} = 0$$

$$(\lambda - a_{33})(\lambda - a_{44})\{(\lambda - a_{11})(\lambda - a_{22})(\lambda - a_{55}) - \delta\gamma_1\beta_1 s_1 + \beta_1^2 s_1 p(\lambda - a_{55})\} = 0$$

$$\begin{aligned}(\lambda - a_{33})(\lambda - a_{44})\{\lambda^3 &- (a_{11} + a_{22} + a_{55})\lambda^2 \\ &+ (a_{11}a_{22} + a_{11}a_{55} + a_{22}a_{55} + \beta_1^2 s_1 p)\lambda \\ &- (a_{11}a_{22}a_{55} + \delta\gamma_1\beta_1 s_1 + \beta_1^2 s_1 p a_{55})\} = 0\end{aligned}$$

$$\lambda_1 = a_{33} = \beta_2 s_1 - (\mu + \gamma_2 + d_3) < 0 \leftrightarrow \beta_2 s_1 < (\mu + \gamma_2 + d_3)$$

$$\lambda_2 = a_{44} = -(\mu + \gamma_3 + d_4) < 0$$

$$\lambda^3 - a_1\lambda^2 + a_2\lambda - a_3 = 0$$

dengan

$$a_1 = a_{11} + a_{22} + a_{55}$$

$$a_1 = -(\beta_1 s_1 + \mu + d_1) - (\mu + \delta + d_5)$$

$$a_2 = a_{11}a_{22} + a_{11}a_{55} + a_{22}a_{55} + \beta_1^2 s_1 p$$

$$a_2 = (\beta_1 s_1 + \mu + d_1)(\mu + \delta + d_5) + \beta_1^2 s_1 p$$

$$a_3 = a_{11}a_{22}a_{55} + \delta\gamma_1\beta_1 s_1 + \beta_1^2 s_1 p a_{55}$$

$$a_3 = \delta\gamma_1\beta_1 s_1 - \beta_1^2 s_1 p(\mu + \delta + d_5)$$

Berdasarkan kriteria R-H, titik ekuilibrium E_1 stabil apabila $a_0 > 0, a_1 < 0$ dan $a_1 a_2 < a_3$.

$a_1 a_2 < a_3 \leftrightarrow -(\beta_1 s_1 + \mu + d_1)^2(\mu + \delta + d_5) - (\beta_1 s_1 + \mu + d_1)\beta_1^2 s_1 p - (\mu + \delta + d_5)^2(\beta_1 s_1 + \mu + d_1) - \delta\gamma_1\beta_1 s_1 < 0.$

Agar hal ini terjadi maka $s_1 > 0$.

$$s_1 > 0 \leftrightarrow \frac{(\mu + \delta + d_5)\left(\mu + d_1 - \frac{\beta_1}{\gamma_1 + \mu + d_2} b\right)}{\delta\gamma_1 \frac{\beta_1}{\gamma_1 + \mu + d_2} - \beta_1(\mu + \delta + d_5)} > 0$$

$$\leftrightarrow -\frac{(\mu + \delta + d_5)\left(\mu + d_1 - \frac{\beta_1}{\gamma_1 + \mu + d_2} b\right)}{\beta_1(\mu + \delta + d_5) - \delta\gamma_1 \frac{\beta_1}{\gamma_1 + \mu + d_2}} > 0$$

$$\leftrightarrow \frac{(\mu + \delta + d_5)\left(\mu + d_1 - \frac{\beta_1}{\gamma_1 + \mu + d_2} b\right)}{\beta_1(\mu + \delta + d_5) - \delta\gamma_1 \frac{\beta_1}{\gamma_1 + \mu + d_2}} < 0$$

$$\leftrightarrow \frac{(\mu + \delta + d_5)(1 - R_0)}{\beta_1(\mu + \delta + d_5) - \delta\gamma_1 \frac{\beta_1}{\gamma_1 + \mu + d_2}} < 0 \leftrightarrow R_0 > 1$$

$s_1 > 0$ akan terpenuhi apabila $R_0 > 1$. Jadi titik ekuilibrium E_1 stabil

Interpretasi di titik ekuilibrium $E_1 = (p, s_1, 0,0, q)$ dengan $p = \frac{\gamma_1+\mu+d_2}{\beta_1} = \frac{1}{R_{01}}$, $s_1 = \frac{(\mu+\delta+d_5)(\mu+d_1-R_{01}b)}{\delta\gamma_1 R_{01}-\beta_1(\mu+\delta+d_5)}$, $q = \frac{\gamma_1(\mu+d_1-R_{01}b)}{\delta\gamma_1 R_{01}-\beta_1(\mu+\delta+d_5)}$

1. Titik ekuilibrium E_1 stabil apabila $R_0 > 1$ dan $s_1 > 0$. Hal ini berarti bahwa dalam jangka waktu yang lama jumlah populasi perokok ringan akan bertambah, yang mengakibatkan terjadinya pengurangan jumlah individu pada populasi yang berpotensi menjadi perokok
2. Titik ekuilibrium E_1 tidak stabil apabila $R_0 < 1$. Hal ini berarti bahwa dalam jangka waktu yang lama tidak ada individu yang merokok (populasi bebas dari kebiasaan merokok). Dalam hal ini tidak ada lagi populasi perokok ringan.

Teorema 6:

Titik ekuilibrium E_2 stabil apabila $R_0 > 1$, $s_1 > 0$ dan $s_2 > 0$

Bukti:

Berdasarkan Lemma 1 didapatkan matriks Jacobian $J(f(E_2))$ dari fungsi f di titik ekuilibrium yang tidak bebas dari rokok (kebiasaan merokok) $E_2 = (p, s_1, s_2, 0, q)$

dengan

$$p = (b + \delta q)\left(\frac{R_{02}}{\beta_1 + R_{02}(\mu + d_1)}\right) = (b + \delta q)\varphi, s_1 = \frac{\gamma_2 + \mu + d_3}{\beta_2} = \frac{1}{R_{02}}$$

$$s_2 = \frac{\beta_1}{\beta_2 R_{01}}[R_{01} b\varphi - 1]\left(1 + \frac{\varphi\delta\gamma_2\beta_1}{(\mu + \delta + d_5)\beta_2 - \gamma_2\beta_1\varphi\delta}\right) + \frac{\varphi\delta\gamma_1\beta_1}{R_{02}[(\mu + \delta + d_5)\beta_2 - \gamma_2\beta_1\varphi\delta]}$$

$q = \frac{\gamma_1 R_{01}\beta_2 + R_{02}\gamma_2\beta_1(R_{01}b\varphi - 1)}{R_{01}R_{02}[(\mu+\delta+d_5)\beta_2 - \gamma_2\beta_1\varphi\delta]}$, dan $\varphi = \frac{R_{02}}{\beta_1 + R_{02}(\mu + d_1)}$ sebagai berikut:

$$J(f(E_2)) = \begin{bmatrix} a_{11} & -\beta_1 p & 0 & 0 & \delta \\ \beta_1 s_1 & a_{22} & -\beta_2 s_1 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_2 s_2 & a_{33} & -\beta_3 s_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} & 0 \\ 0 & \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & a_{55} \end{bmatrix}$$

dengan

$$a_{11} = -(\beta_1 s_1 + \mu + d_1)$$

$$a_{22} = \beta_1 p - (\beta_2 s_2 + \mu + \gamma_1 + d_2)$$

$$a_{33} = \beta_2 s_1 - (\mu + \gamma_2 + d_3)$$

$$a_{44} = \beta_3 s_2 - (\mu + \gamma_3 + d_4)$$

$$a_{55} = -(\mu + \delta + d_5)$$

Selanjutnya,

$$|\lambda I - J(f(E_2))| = 0$$

$$\leftrightarrow \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & \beta_1 p & 0 & 0 & -\delta \\ -\beta_1 s_1 & \lambda - a_{22} & \beta_2 s_1 & 0 & 0 \\ 0 & -\beta_2 s_2 & \lambda - a_{33} & \beta_3 s_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda - a_{44} & 0 \\ 0 & -\gamma_1 & -\gamma_2 & -\gamma_3 & \lambda - a_{55} \end{vmatrix} = 0$$

Sepanjang baris ke-4

$$(\lambda - a_{44}) \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & \beta_1 p & 0 & -\delta \\ -\beta_1 s_1 & \lambda - a_{22} & \beta_2 s_1 & 0 \\ 0 & -\beta_2 s_2 & \lambda - a_{33} & 0 \\ 0 & -\gamma_1 & -\gamma_2 & \lambda - a_{55} \end{vmatrix} = 0$$

Sepanjang kolom ke-4

$$(\lambda - a_{44}) \left\{ \delta \begin{vmatrix} -\beta_1 s_1 & \lambda - a_{22} & \beta_2 s_1 \\ 0 & -\beta_2 s_2 & \lambda - a_{33} \\ 0 & -\gamma_1 & -\gamma_2 \end{vmatrix} + (\lambda - a_{55}) \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & \beta_1 p & 0 \\ -\beta_1 s_1 & \lambda - a_{22} & \beta_2 s_1 \\ 0 & -\beta_2 s_2 & \lambda - a_{33} \end{vmatrix} \right\}$$
$$= 0$$

$$(\lambda - a_{44})\{\lambda^4 - a_1\lambda^3 + a_2\lambda^2 - a_3\lambda + a_4\} = 0$$

dengan

$$a_1 = a_{11} + a_{22} + a_{33} + a_{55}$$

$$a_2 = a_{11}a_{22} + a_{11}a_{33} + a_{22}a_{33} + \beta_2^2 s_1 s_2 + \beta_1^2 s_1 p + a_{55}(a_{11} + a_{22} + a_{33})$$

$$a_3 = a_{11}a_{22}a_{33} + \beta_2^2 s_1 s_2 a_{11} + \beta_1^2 s_1 p a_{33} \\ + a_{55}(a_{11}a_{22} + a_{11}a_{33} + a_{22}a_{33} + \beta_2^2 s_1 s_2 + \beta_1^2 s_1 p + \delta\gamma_1\beta_1 s_1)$$

$$a_4 = a_{55}(a_{11}a_{22}a_{33} + \beta_2^2 s_1 s_2 a_{11} + \beta_1^2 s_1 p a_{33}) - \beta_1\beta_2 s_1 s_2 \gamma_2 \delta + \beta_1 s_1 \gamma_1 \delta a_{33}$$

Jadi,

$$\lambda = a_{44} = \beta_3 s_2 - (\mu + \gamma_3 + d_4) < 0 \leftrightarrow \beta_3 s_2 < (\mu + \gamma_3 + d_4)$$

Berdasarkan kriteria R-H, titik ekuilibrium E_2 stabil apabila $a_0 > 0, a_1 < 0$,

$a_1a_2 < a_3$ dan $a_1a_2a_3 < a_3^2 + a_1^2a_4$. Agar hal ini terjadi maka $s_1 > 0$ dan $s_2 > 0$.

$s_2 > 0 \leftrightarrow R_{01}b\varphi - 1 > 0$

$$\leftrightarrow R_{01}b\frac{R_{02}}{\beta_1 + R_{02}(\mu + d_1)} - 1 > 0$$

$$\leftrightarrow \frac{\frac{R_{01}b}{\mu + d_1}(\mu + d_1)R_{02}}{\beta_1 + R_{02}(\mu + d_1)} - 1 > 0$$

$$\leftrightarrow \frac{R_0(\mu + d_1)R_{02} - (\beta_1 + R_{02}(\mu + d_1))}{\beta_1 + R_{02}(\mu + d_1)} > 0$$

$$\leftrightarrow (\mu + d_1)R_{02}[R_0 - 1] - \beta_1 > 0 \leftrightarrow R_0 > 1$$

$s_1 > 0$ dan $s_2 > 0$ akan terpenuhi apabila $R_0 > 1$. Jadi titik ekuilibrium E_2 stabil

Interpretasi di titik ekuilibrium $E_2 = (p, s_1, s_2, 0, q)$ dengan

$$p = (b + \delta q)\left(\frac{R_{02}}{\beta_1 + R_{02}(\mu + d_1)}\right) = (b + \delta q)\varphi, s_1 = \frac{\gamma_2 + \mu + d_3}{\beta_2} = \frac{1}{R_{02}}$$

$$s_2 = \frac{\beta_1}{\beta_2 R_{01}}[R_{01}b\varphi - 1]\left(1 + \frac{\varphi\delta\gamma_2\beta_1}{(\mu + \delta + d_5)\beta_2 - \gamma_2\beta_1\varphi\delta}\right) + \frac{\varphi\delta\gamma_1\beta_1}{R_{02}[(\mu + \delta + d_5)\beta_2 - \gamma_2\beta_1\varphi\delta]}$$

$q = \frac{\gamma_1 R_{01}\beta_2 + R_{02}\gamma_2\beta_1(R_{01}b\varphi - 1)}{R_{01}R_{02}[(\mu+\delta+d_5)\beta_2 - \gamma_2\beta_1\varphi\delta]}$, dan $\varphi = \frac{R_{02}}{\beta_1 + R_{02}(\mu + d_1)}$ yaitu

1. Titik ekuilibrium E_2 stabil apabila $R_0 > 1$, $s_1 > 0$ dan $s_2 > 0$. Hal ini berarti bahwa dalam jangka waktu yang lama jumlah populasi perokok ringan dan sedang bertambah
2. Titik ekuilibrium E_2 tidak stabil apabila $R_0 < 1$. Hal ini berarti bahwa dalam jangka waktu yang lama tidak ada individu yang merokok (populasi bebas dari kebiasaan merokok)

Teorema 7:

Titik ekuilibrium E_3 stabil apabila $R_0 > 1, s_1 > 0, s_2 > 0$ dan $s_3 > 0$

Bukti:

Berdasarkan Lemma 1 didapatkan matriks Jacobian $J(f(E_3))$ dari fungsi f di titik ekuilibrium yang tidak bebas dari rokok (kebiasaan merokok) $E_3 = (p, s_1, s_2, s_3, q)$ dengan

$$p = \frac{\beta_2 R_{01} + \beta_1 R_{03}}{\beta_1 R_{01} R_{03}}, s_1 = \frac{\beta_3 R_{02}[R_{03} m\beta_2(\eta - b\psi) - \gamma_2] + R_{03}\gamma_3\beta_2}{R_{02}R_{03}(\gamma_3\beta_2 + \beta_3\gamma_1 - \beta_2\beta_3 m)}$$

$$s_2 = \frac{\gamma_3 + \mu + d_4}{\beta_3} = \frac{1}{R_{03}}, s_3 = \frac{\beta_2\{R_{03}(m\beta_2[1 + R_{02}(\eta - b\psi)] - \gamma_1) - \gamma_2 R_{02}\}}{R_{02}R_{03}(\gamma_3\beta_2 + \beta_3\gamma_1 - \beta_2\beta_3 m)}$$

$$q = \frac{R_{02}R_{03}(\eta - b\psi)(\gamma_3\beta_2 + \beta_3\gamma_1) + R_{03}\gamma_3\beta_2 - \beta_3\gamma_2 R_{02}}{\delta\psi R_{02}R_{03}(\gamma_3\beta_2 + \beta_3\gamma_1 - \beta_2\beta_3 m)}$$

$\psi = \frac{R_{01}R_{03}}{\beta_2 R_{01} + \beta_1 R_{03}}$, $\eta = \frac{(\mu + d_1)}{\beta_1}$ $dan\, m = \frac{\mu + \delta + d_5}{\delta\psi\beta_2}$ sebagai berikut:

$$J(f(E_3)) = \begin{bmatrix} a_{11} & -\beta_1 p & 0 & 0 & \delta \\ \beta_1 s_1 & a_{22} & -\beta_2 s_1 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_2 s_2 & a_{33} & -\beta_3 s_2 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_3 s_3 & a_{44} & 0 \\ 0 & \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & a_{55} \end{bmatrix}$$

dengan

$$a_{11} = -(\beta_1 s_1 + \mu + d_1)$$

$$a_{22} = \beta_1 p - (\beta_2 s_2 + \mu + \gamma_1 + d_2)$$

$$a_{33} = \beta_2 s_1 - (\beta_3 s_3 + \mu + \gamma_2 + d_3)$$

$$a_{44} = \beta_3 s_2 - (\mu + \gamma_3 + d_4)$$

$$a_{55} = -(\mu + \delta + d_5)$$

Selanjutnya,

$$|\lambda I - J(f(E_3))| = 0$$

$$\leftrightarrow \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & \beta_1 p & 0 & 0 & -\delta \\ -\beta_1 s_1 & \lambda - a_{22} & \beta_2 s_1 & 0 & 0 \\ 0 & -\beta_2 s_2 & \lambda - a_{33} & \beta_3 s_2 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta_3 s_3 & \lambda - a_{44} & 0 \\ 0 & -\gamma_1 & -\gamma_2 & -\gamma_3 & \lambda - a_{55} \end{vmatrix} = 0$$

Sepanjang kolom ke-1

$$(\lambda - a_{11}) \begin{vmatrix} \lambda - a_{22} & \beta_2 s_1 & 0 & 0 \\ -\beta_2 s_2 & \lambda - a_{33} & \beta_3 s_2 & 0 \\ 0 & -\beta_3 s_3 & \lambda - a_{44} & 0 \\ -\gamma_1 & -\gamma_2 & -\gamma_3 & \lambda - a_{55} \end{vmatrix}$$
$$+ \beta_1 s_1 \begin{vmatrix} \beta_1 p & 0 & 0 & -\delta \\ -\beta_2 s_2 & \lambda - a_{33} & \beta_3 s_2 & 0 \\ 0 & -\beta_3 s_3 & \lambda - a_{44} & 0 \\ -\gamma_1 & -\gamma_2 & -\gamma_3 & \lambda - a_{55} \end{vmatrix} = 0$$

Sepanjang kolom ke-4

$$(\lambda - a_{11})(\lambda - a_{55}) \begin{vmatrix} \lambda - a_{22} & \beta_2 s_1 & 0 \\ -\beta_2 s_2 & \lambda - a_{33} & \beta_3 s_2 \\ 0 & -\beta_3 s_3 & \lambda - a_{44} \end{vmatrix}$$
$$+ \beta_1 s_1 \left\{ \delta \begin{vmatrix} -\beta_2 s_2 & \lambda - a_{33} & \beta_3 s_2 \\ 0 & -\beta_3 s_3 & \lambda - a_{44} \\ -\gamma_1 & -\gamma_2 & -\gamma_3 \end{vmatrix} \right.$$
$$\left. + (\lambda - a_{55}) \begin{vmatrix} \beta_1 p & 0 & 0 \\ -\beta_2 s_2 & \lambda - a_{33} & \beta_3 s_2 \\ 0 & -\beta_3 s_3 & \lambda - a_{44} \end{vmatrix} \right\} = 0$$

$$\lambda^5 - a_1 \lambda^4 + a_2 \lambda^3 - a_3 \lambda^2 + a_4 \lambda - a_5 = 0$$

dengan

$$a_1 = a_{11} + a_{22} + a_{33} + a_{44} + a_{55}$$

$$a_2 = a_{22}a_{33} + a_{22}a_{44} + a_{33}a_{44} - \beta_3^2 s_2 s_3 + \beta_2^2 s_1 s_2 + (a_{11} + a_{55})(a_{22} + a_{33} + a_{44})$$
$$+ a_{11}a_{55} + \beta_1^2 s_1 p$$

$$a_3 = (a_{11} + a_{55})(a_{22}a_{33} + a_{22}a_{44} + a_{33}a_{44} - \beta_3^2 s_2 s_3 + \beta_2^2 s_1 s_2) + (a_{11}a_{55})(a_{22} + a_{33} + a_{44}) + \beta_1 s_1 \gamma_1 \delta + \beta_1 p a_{55} - \beta_1^2 s_1 p(a_{33} + a_{44} + a_{55}) + (a_{22}a_{33}a_{44} - \beta_3^2 s_2 s_3 a_{22} + \beta_2^2 s_1 s_2 a_{44})$$

$$a_4 = (a_{11} + a_{55})(a_{22}a_{33}a_{44} - \beta_3^2 s_2 s_3 a_{22} + \beta_2^2 s_1 s_2 a_{44}) + (a_{11}a_{55})(a_{22}a_{33} + a_{22}a_{44} + a_{33}a_{44} - \beta_3^2 s_2 s_3 + \beta_2^2 s_1 s_2) + \beta_1 s_1 \gamma_1 \delta(a_{33} + a_{44}) - \beta_1 s_1 \delta \gamma_2 \beta_2 s_2 + \beta_1^2 s_1 p(a_{33}a_{44} - a_{44}a_{55} - a_{33}a_{55}) + \beta_1^2 \beta_3^2 s_2 s_3 s_1 p$$

$$a_5 = (a_{11}a_{55})(a_{22}a_{33}a_{44} - \beta_3^2 s_2 s_3 a_{22} + \beta_2^2 s_1 s_2 a_{44}) + \beta_1 s_{1 s_2 s_3} \delta \beta_2 \beta_3 \gamma_3 + \beta_1 s_1 \gamma_1 \delta(a_{33}a_{44}) + \beta_1 s_1 \gamma_1 \delta \beta_3^2 s_2 s_3 - a_{44}\beta_1 s_1 \delta \gamma_2 \beta_2 s_2 + \beta_1^2 s_1 p(a_{33}a_{44}a_{55}) + \beta_3^2 s_1 s_2 s_3 \beta_1^2 p a_{55}$$

Berdasarkan kriteria R-H, titik ekuilibrium E_3 stabil apabila $a_0 > 0, a_1 < 0$,

$a_1 a_2 < a_3$, $a_1 a_2 a_3 + a_1 a_5 < a_3^2 + a_1^2 a_4$ dan

$$\left(a_1 a_2 a_3 + a_1 a_5 - (a_3^2 + a_1^2 a_4)\right)(a_1 a_4 - a_5) + (a_1 a_2 a_5 - a_3 a_5)(a_1 a_2 - a_3) > 0$$

Agar hal ini terjadi maka $s_1 > 0$ $s_2 > 0$ dan $s_3 > 0$.

$$s_1 > 0 \leftrightarrow \frac{\beta_3 R_{02}[R_{03} m \beta_2(\eta - b\psi) - \gamma_2] + R_{03}\gamma_3\beta_2}{R_{02}R_{03}(\gamma_3\beta_2 + \beta_3\gamma_1 - \beta_2\beta_3 m)} > 0$$

$$\leftrightarrow \frac{-\beta_3 R_{02}[R_{03} m \beta_2(\eta - b\psi) - \gamma_2] - R_{03}\gamma_3\beta_2}{R_{02}R_{03}(-\gamma_3\beta_2 - \beta_3\gamma_1 + \beta_2\beta_3 m)} > 0$$

$$\leftrightarrow \frac{\beta_1\beta_3 b(\mu + \delta + d_5) + \beta_1\gamma_2\delta(\gamma_3 + \mu + d_4) + \beta_1\gamma_3(\gamma_2 + \mu + d_3)}{(\mu + \delta + d_5)(\mu + d_1)\left(\beta_2(\gamma_3 + \mu + d_4) + \beta_3(\gamma_1 + \mu + d_2)\right)} > 1$$

$$\leftrightarrow R_0^* > 1$$

dan

$$s_3 > 0 \leftrightarrow \frac{\beta_2\{R_{03}(m\beta_2[1 + R_{02}(\eta - b\psi)] - \gamma_1) - \gamma_2 R_{02}\}}{R_{02}R_{03}(\gamma_3\beta_2 + \beta_3\gamma_1 - \beta_2\beta_3 m)} > 0$$

$$\leftrightarrow \frac{-\beta_2\{R_{03}(m\beta_2[1+R_{02}(\eta-b\psi)]-\gamma_1)+\gamma_2R_{02}\}}{R_{02}R_{03}(-\gamma_3\beta_2-\beta_3\gamma_1+\beta_2\beta_3m)} > 0$$

$s_1 > 0$ $s_2 > 0$ dan $s_3 > 0$ akan terpenuhi apabila $R_0^* > 1$. Jadi titik ekuilibrium E_3 stabil

Interpretasi di titik ekuilibrium $E_3 = (p, s_1, s_2, s_3, q)$

dengan

$$p = \frac{\beta_2R_{01}+\beta_1R_{03}}{\beta_1R_{01}R_{03}}, s_1 = \frac{\beta_3R_{02}[R_{03}m\beta_2(\eta-b\psi)-\gamma_2]+R_{03}\gamma_3\beta_2}{R_{02}R_{03}(\gamma_3\beta_2+\beta_3\gamma_1-\beta_2\beta_3m)}$$

$$s_2 = \frac{\gamma_3+\mu+d_4}{\beta_3} = \frac{1}{R_{03}}, s_3 = \frac{\beta_2\{R_{03}(m\beta_2[1+R_{02}(\eta-b\psi)]-\gamma_1)-\gamma_2R_{02}\}}{R_{02}R_{03}(\gamma_3\beta_2+\beta_3\gamma_1-\beta_2\beta_3m)}$$

$$q = \frac{R_{02}R_{03}(\eta-b\psi)(\gamma_3\beta_2+\beta_3\gamma_1)+R_{03}\gamma_3\beta_2-\beta_3\gamma_2R_{02}}{\delta\psi R_{02}R_{03}(\gamma_3\beta_2+\beta_3\gamma_1-\beta_2\beta_3m)}$$

$\psi = \frac{R_{01}R_{03}}{\beta_2R_{01}+\beta_1R_{03}}, \eta = \frac{(\mu+d_1)}{\beta_1}, m = \frac{\mu+\delta+d_5}{\delta\psi\beta_2}$ yaitu

Titik ekuilibrium E_3 stabil apabila $R_0^* > 1$, $s_1 > 0, s_2 > 0$ dan $s_3 > 0$. Hal ini berarti bahwa dalam jangka waktu yang lama jumlah populasi perokok ringan, sedang dan berat bertambah

C. Simulasi Model

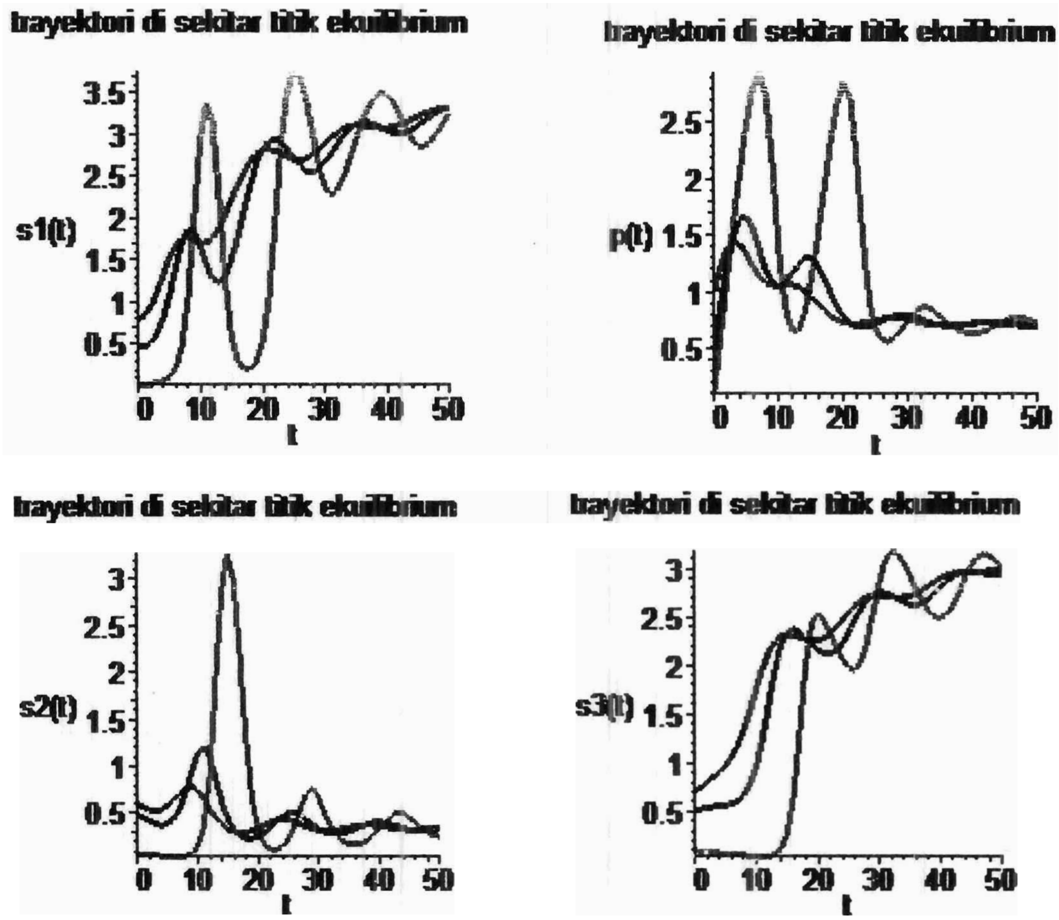
Kasus 1, untuk

b=0.5,beta1=0.3,beta2=0.3,beta3=0.3,gama1=0.08,gama2=0.05,gama3=0.03 ,delta=0.04,mu=0.02,d1=0.0002,d2=0.004,d3=0.01,d4=0.05,d5=0.0005

dan

p(0)=0.5,s1(0)=0.5,s2(0)=0.5,s3(0)=0.5,q(0)=0.5],[p(0)=1,s1(0)=0.8,s2(0)=0.6 ,s3(0)=0.7,q(0)=0.7], [p(0)=0.1,s1(0)=0.03,s2(0)=0.08,s3(0)=0.1,q(0)=0.7]]

Berdasarkan parameter dan nilai awal di atas diperoleh grafik sebagai berikut:



Dari gambar di atas, dapat dilihat bahwa kurva biru mewakili titik tetap tidak bebas dari kebiasaan merokok (endemic) dan kurva hijau dan merah adalah kurva dengan nilai awal berbeda. Titik tetapnya adalah titik tetap yang stabil karena kurva hijau dan merah mendekati titik tetap endemic (kurva biru). Jumlah perokok ringan dan berat semakin lama semakin bertambah, namun perokok sedang dan potensial akan menuju ke nilai awal yang disebabkan adanya perokok yang sudah berhenti merokok kembali lagi menjadi individu yang berpotensi menjadi perokok.

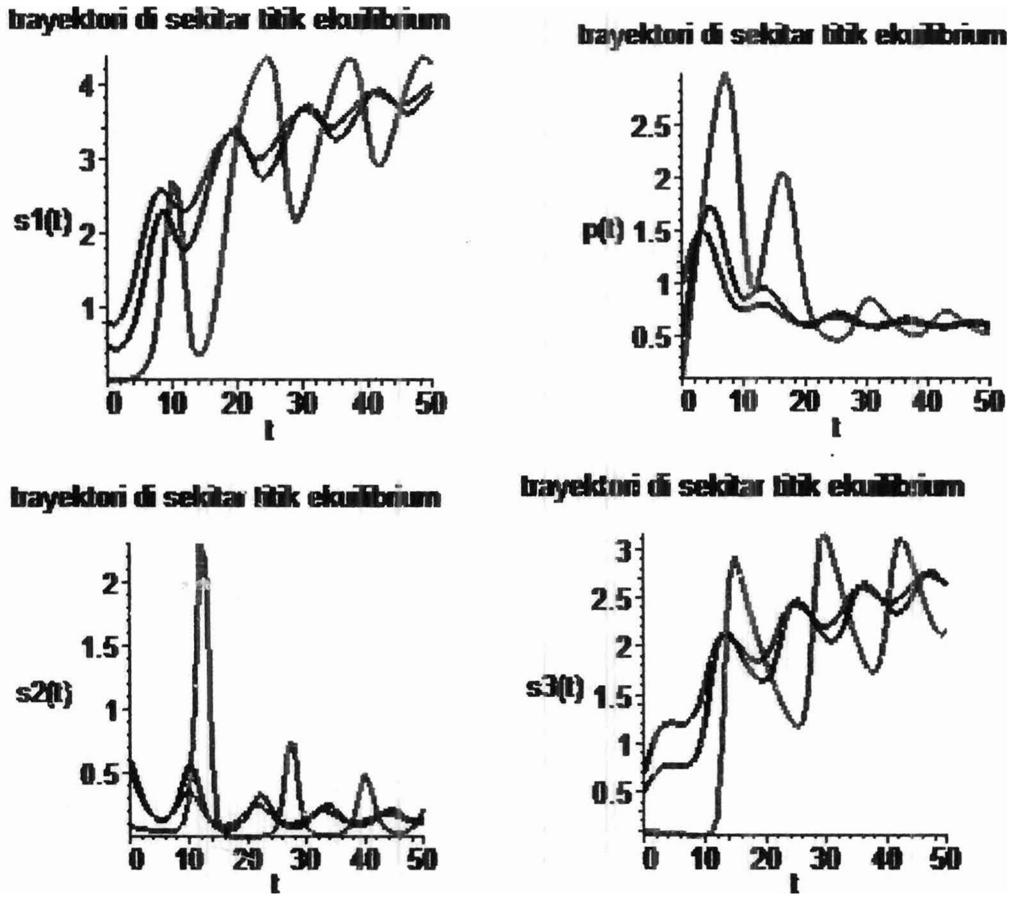
Kasus 2, untuk

b=0.5,beta1=0.3,beta2=0.5,beta3=0.7,gama1=0.08,gama2=0.05,gama3=0.03,delta=0.04,mu=0.02,d1=0.0002,d2=0.004,d3=0.01,d4=0.05,d5=0.0005

dan

p(0)=0.5,s1(0)=0.5,s2(0)=0.5,s3(0)=0.5,q(0)=0.5],[p(0)=1,s1(0)=0.8,s2(0)=0.6,s3(0)=0.7,q(0)=0.7], [p(0)=0.1,s1(0)=0.03,s2(0)=0.08,s3(0)=0.1,q(0)=0.7

Berdasarkan parameter dan nilai awal di atas diperoleh grafik sebagai berikut:



Dari gambar di atas, dapat dilihat bahwa kurva biru mewakili titik tetap tidak bebas dari kebiasaan merokok (endemic) dan kurva hijau dan merah adalah kurva dengan nilai awal berbeda. Titik tetapnya adalah titik tetap yang stabil karena kurva hijau dan merah mendekati titik tetap endemic (kurva biru). Jumlah perokok ringan dan berat semakin lama semakin bertambah, namun individu yang berpotensi menjadi perokok akan menuju ke nilai awal yang disebabkan adanya perokok yang sudah berhenti merokok kembali lagi menjadi individu yang berpotensi menjadi perokok.

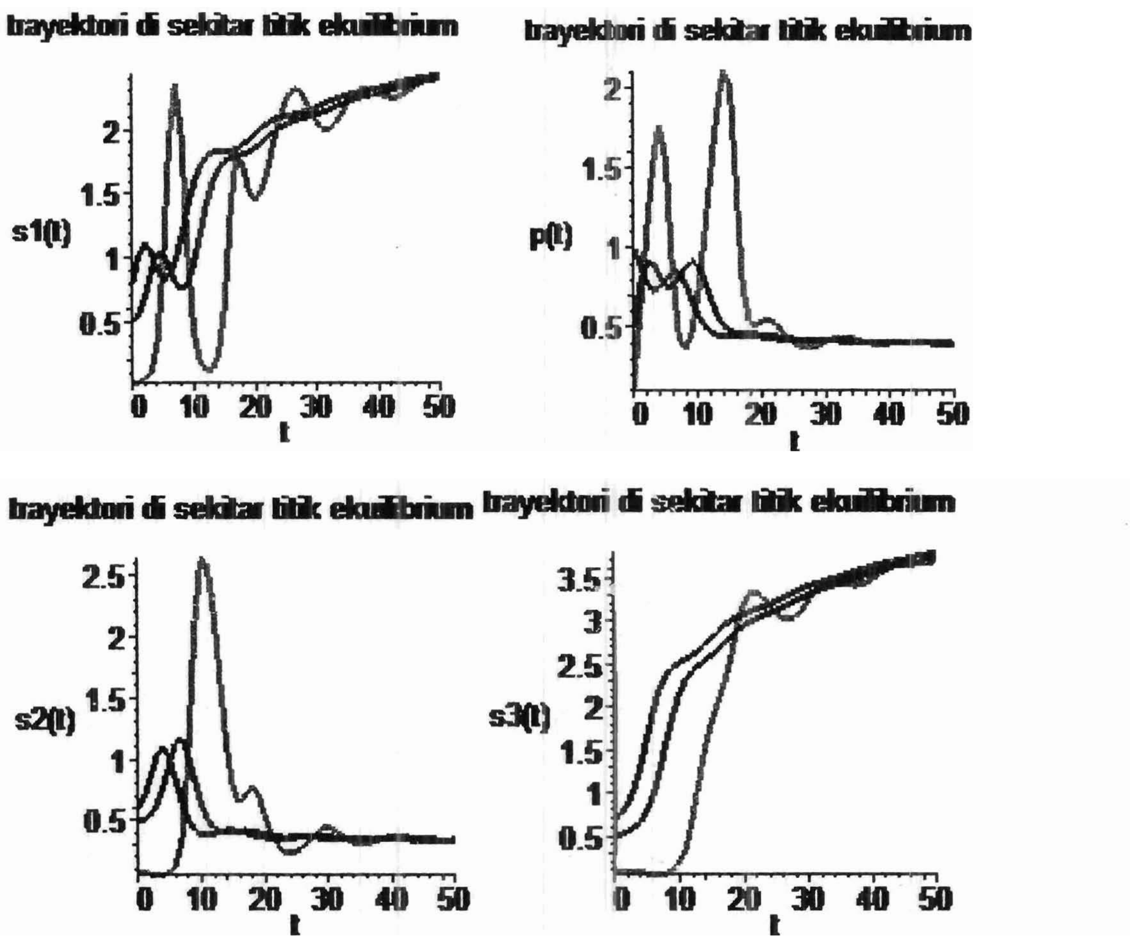
Kasus 3, untuk

b=0.5,beta1=0.7,beta2=0.5,beta3=0.3,gama1=0.08,gama2=0.05,gama3=0.03,delta=0.04,mu=0.02,d1=0.0002,d2=0.004,d3=0.01,d4=0.05,d5=0.0005

dan

p(0)=0.5,s1(0)=0.5,s2(0)=0.5,s3(0)=0.5,q(0)=0.5],[p(0)=1,s1(0)=0.8,s2(0)=0.6,s3(0)=0.7,q(0)=0.7], [p(0)=0.1,s1(0)=0.03,s2(0)=0.08,s3(0)=0.1,q(0)=0.7

Berdasarkan parameter dan nilai awal di atas diperoleh grafik sebagai berikut:



Dari gambar di atas, dapat dilihat bahwa kurva biru mewakili titik tetap tidak bebas dari kebiasaan merokok (endemic) dan kurva hijau dan merah adalah kurva dengan nilai awal berbeda. Titik tetapnya adalah titik tetap yang stabil karena kurva hijau dan merah mendekati titik tetap endemic (kurva biru). Jumlah perokok ringan dan berat semakin lama semakin bertambah, namun individu yang berpotensi menjadi perokok dan perokok sedang akan menuju ke nilai awal yang disebabkan adanya perokok yang sudah berhenti merokok kembali lagi menjadi individu yang berpotensi menjadi perokok.

BAB VI KESIMPULAN DAN SARAN

A. Kesimpulan

Berdasarkan hasil yang diperoleh, disimpulkan bahwa:

1. Model PSQP dari pengaruh rokok pada suatu populasi adalah sebagai berikut:

$$\frac{dp}{dt} = b - \beta_1 p s_1 + \delta q - (\mu + d_1)p$$

$$\frac{ds_1}{dt} = \beta_1 p s_1 - \beta_2 s_1 s_2 - (\gamma_1 + \mu + d_2)s_1$$

$$\frac{ds_2}{dt} = \beta_2 s_1 s_2 - \beta_3 s_2 s_3 - (\gamma_2 + \mu + d_3)s_2$$

$$\frac{ds_3}{dt} = \beta_3 s_2 s_3 - (\gamma_3 + \mu + d_4)s_3$$

$$\frac{dq}{dt} = \gamma_3 s_3 + \gamma_1 s_1 + \gamma_2 s_2 - (\mu + \delta + d_5)q$$

$$p(t) + s_1(t) + s_2(t) + s_3(t) + q(t) = 1$$

dan daerah penyelesaian

$$\Omega = \left\{ (p, s_1, s_2, s_3, q) \middle| \begin{matrix} p \geq 0, s_1 \geq 0, s_2 \geq 0, s_3 \geq 0, q \geq 0, \\ p + s_1 + s_2 + s_3 + q \leq n \leq 1 \end{matrix} \right\}$$

2. Sistem memiliki 2 titik ekuilibrium yaitu titik ekulibrium bebas dari rokok dan titik ekuilibrium yang tak bebas dari kebiasaan merokok. Titik tersebut adalah $E_0 = \left(\frac{b}{\mu+d_1}, 0,0,0,0\right)$ merupakan titik ekuilibrium bebas dari kebiasaan merokok, $E_1 = (p, s_1, 0,0, q)$ merupakan titik ekuilibrium endemik 1, $E_2 = (p, s_1, s_2, 0, q)$ merupakan titik ekuilibrium endemik 2 dan $E_3 = (p, s_1, s_2, s_3, q)$ merupakan titik ekuilibrium endemic 3. Analisa kestabilan titik ekuilibrium tersebut adalah
   a. Jika $R_0 < 1$ maka titik ekuilibrium E_0 stabil asimtotik local dan jika $R_0 > 1$ maka titik ekuilibrium E_0 tidak stabil
   b. Titik ekuilibrium E_1 stabil apabila $R_0 > 1$ dan $s_1 > 0$
   c. Titik ekuilibrium E_2 stabil apabila $R_0 > 1$, $s_1 > 0$ dan $s_2 > 0$
   d. Titik ekuilibrium E_3 stabil apabila $R_0 > 1$, $s_1 > 0$, $s_2 > 0$ dan $s_3 > 0$

Dinamika model dipengaruhi oleh laju interaksi antara individu yang berpotensi menjadi perokok menjadi individu perokok dan laju penurunan kesadaran dari individu yang sudah berhenti merokok. Jika laju interaksi dan laju penurunan kesadaran lebih besar dari laju kematian dan kesembuhan maka populasi tidak akan pernah bebas dari kebiasaan merokok

B. Saran

Berdasarkan hasil penelitian, disarankan untuk melakukan penelitian bagaimana cara menanggulangi pertambahan jumlah populasi perokok. Dengan menambah asumsi untuk melihat adakah pengaruh denda atau pajak terhadap pertambahan jumlah populasi perokok.

DAFTAR PUSTAKA

Brauer Fred dkk. 2008. Mathematical Epidemiology, Mathematical Biosciences Subseries. Spinger

Castillo, Chavez. 2000. *Mathematical Models in Population Biology and Epidemiology.* Canada.

Gunawan, A. Y dan M. E. Nurtamam. 2008. *Model Dinamik Sederhana untuk Masalah Peningkatan Populasi Perokok.* Jurnal Indonesia, Math, vol. 14, pp. 63-72.

Hethcote, Herbert W. 1981. *Periodicity and Stability in Epidemic Models: a Survey.* Academic Press, Inc.

Hethcote, Herbert W., Ma Zhien., Liao Shengbing. 2002. *Effects of Quarantine in Six Endemic Models for Infectious Diseases.* Mathematical Biosciences

Kocak, H and Hale, K. 1991. *Dynamics and Bifurcations.* Springer-Verlag, New York.

Mena-Lorca, Jaime and Herbert W. Hethcote. 1992. *Dynamic Models of Infectious Diseases as Regulators of Population Sizes.* Jounal of Mathemtical Biology, Spinger-Verlag

Perko, L. 1991. *Differential Equations and Dynamical Systems.* Springer-Verlag, New York.

Suhardi. 1995. Perilaku Merokok di Indonesia menurut Susenas dan SKRT 1995. Jurnal Cermin Kedokteran Indonesia: 23-25

Susanta, b & Bambang Soedijono. 1993. Model Matematika. Jakarta: Karunika Jakarta UT.

Wiggins, S. 1990. *Intriduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*. Springer-Verlag, New York.

Zaman, Gul. 2011. *Qualitative Behavior of Giving Up Smoking Model.* Bulletin of Malaysian Mathematical Sciences Society, pp. 403-415

Zaman, Gul. 2011. Research Article *Optimal Campaign in the Smoking Dynamics.*

Lampiran 1:

Dengan menggunakan Definisi 1, jika $\frac{dp}{dt}=0, \frac{ds_1}{dt}=0, \frac{ds_2}{dt}=0, \frac{ds_3}{dt}=0, \frac{dq}{dt}=0$ maka persamaan (12) sampai dengan (16) didapatkan sebagai berikut:

$b-\beta_1 p s_1+\delta q-(\mu+d_1)p=0$ ....(18)

$\beta_1 p s_1-\beta_2 s_1 s_2-(\gamma_1+\mu+d_2)s_1=0$ ....(19)

$\beta_2 s_1 s_2-\beta_3 s_2 s_3-(\gamma_2+\mu+d_3)s_2=0$ ....(20)

$\beta_3 s_2 s_3-(\gamma_3+\mu+d_4)s_3=0$ ....(21)

$\gamma_3 s_3+\gamma_1 s_1+\gamma_2 s_2-(\mu+\delta+d_5)q=0$ ....(22)

Berikutnya, diperoleh titik ekuilibrium sistem persamaan (18) sampai dengan (22) sebagai berikut:

1. Jika $s_1=s_2=s_3=0$ (dalam populasi tidak ada individu yang merokok) maka $q=0$ dan memenuhi sistem persamaan (18) sampai dengan (22), sehingga diperoleh

$$b-(\mu+d_1)p=0$$
$$p=\frac{b}{\mu+d_1}$$

Jadi, titik ekuilibrium bebas dari rokok adalah

$$E_0=\left(\frac{b}{\mu+d_1},0{,}0{,}0{,}0\right)$$

2. Jika $s_1\neq 0$ dan $s_2=s_3=0$ maka sistem persamaan (18) sampai dengan (22) menjadi

$b-\beta_1 p s_1+\delta q-(\mu+d_1)p=0$ ....(23)

$\beta_1 p s_1-(\gamma_1+\mu+d_2)s_1=0$ ....(24)

$\gamma_1 s_1-(\mu+\delta+d_5)q=0$ ....(25)

Dari (24) diperoleh

$$\big(\beta_1 p-(\gamma_1+\mu+d_2)\big)s_1=0$$

Karena $s_1\neq 0$ maka $\beta_1 p-(\gamma_1+\mu+d_2)=0$

$p=\frac{\gamma_1+\mu+d_2}{\beta_1}=\frac{1}{R_{01}}$ .... (26)

Substitusi (26) ke (23) dan diperoleh

$$b+\delta q-(\beta_1 s_1+\mu+d_1)p=0$$

$b+\delta q-(\beta_1 s_1+\mu+d_1)\frac{1}{R_{01}}=0$ ....(27)

Dari (25) diperoleh

$$s_1 = \left(\frac{\mu+\delta+d_5}{\gamma_1}\right) q \quad \text{.......(28)}$$

Substitusi (28) ke (27)

$$b + \delta q - \frac{\beta_1}{R_{01}}\left(\frac{\mu+\delta+d_5}{\gamma_1}\right) q = \frac{\mu+d_1}{R_{01}}$$

$$q\left(\frac{\delta\gamma_1 R_{01} - \beta_1(\mu+\delta+d_5)}{\gamma_1 R_{01}}\right) = \frac{\mu+d_1-R_{01}b}{R_{01}}$$

$$q = \frac{\gamma_1(\mu+d_1-R_{01}b)}{\delta\gamma_1 R_{01} - \beta_1(\mu+\delta+d_5)} \quad \text{.......(29)}$$

Substitusi (29) ke (28)

$$s_1 = \left(\frac{\mu+\delta+d_5}{\gamma_1}\right) q$$

$$s_1 = \left(\frac{\mu+\delta+d_5}{\gamma_1}\right)\frac{\gamma_1(\mu+d_1-R_{01}b)}{\delta\gamma_1 R_{01} - \beta_1(\mu+\delta+d_5)}$$

$$s_1 = \frac{(\mu+\delta+d_5)(\mu+d_1-R_{01}b)}{\delta\gamma_1 R_{01} - \beta_1(\mu+\delta+d_5)} \quad \text{.......(30)}$$

Jadi, titik ekuilibrium endemik 1 adalah

$$E_1 = (p, s_1, 0, 0, q)$$

dengan

$$p = \frac{\gamma_1+\mu+d_2}{\beta_1} = \frac{1}{R_{01}}$$

$$s_1 = \frac{(\mu+\delta+d_5)(\mu+d_1-R_{01}b)}{\delta\gamma_1 R_{01} - \beta_1(\mu+\delta+d_5)}$$

$$q = \frac{\gamma_1(\mu+d_1-R_{01}b)}{\delta\gamma_1 R_{01} - \beta_1(\mu+\delta+d_5)}$$

3. Jika $s_1 \neq 0$, $s_2 \neq 0$ dan $s_3 = 0$ maka

$$b - \beta_1 p s_1 + \delta q - (\mu+d_1)p = 0 \quad \text{.......(31)}$$

$$\beta_1 p s_1 - \beta_2 s_1 s_2 - (\gamma_1+\mu+d_2)s_1 = 0 \quad \text{.......(32)}$$

$$\beta_2 s_1 s_2 - (\gamma_2+\mu+d_3)s_2 = 0 \quad \text{.......(33)}$$

$$\gamma_1 s_1 + \gamma_2 s_2 - (\mu+\delta+d_5)q = 0 \quad \text{.......(34)}$$

Dari (33)

$$\left(\beta_2 s_1 - (\gamma_2+\mu+d_3)\right)s_2 = 0$$

Karena $s_2 \neq 0$, maka $\beta_2 s_1 - (\gamma_2+\mu+d_3) = 0$

$$s_1 = \frac{\gamma_2+\mu+d_3}{\beta_2} = \frac{1}{R_{02}} \quad \text{.....(35)}$$

Substitusi (35) ke (31)

$$b + \delta q - (\beta_1 s_1 + \mu + d_1)p = 0$$

$$b + \delta q - \left(\beta_1 \frac{1}{R_{02}} + \mu + d_1\right)p = 0$$

$$b + \delta q - \left(\frac{\beta_1 + R_{02}(\mu + d_1)}{R_{02}}\right)p = 0$$

$$p = (b + \delta q)\left(\frac{R_{02}}{\beta_1+R_{02}(\mu+d_1)}\right) = (b + \delta q)\varphi \quad \text{.....(36)}$$

Substitusi (36) ke (32)

$$\beta_1 p s_1 - \beta_2 s_1 s_2 - (\gamma_1 + \mu + d_2)s_1 = 0$$

$$\big(\beta_1 p - \beta_2 s_2 - (\gamma_1 + \mu + d_2)\big)s_1 = 0$$

Karena $s_1 \neq 0$, maka $\beta_1 p - \beta_2 s_2 - (\gamma_1 + \mu + d_2) = 0$

$$\beta_2 s_2 = \beta_1 p - (\gamma_1 + \mu + d_2)$$

$$\beta_2 s_2 = \beta_1 (b + \delta q)\varphi - (\gamma_1 + \mu + d_2)$$

$$s_2 = \frac{\beta_1 (b + \delta q)\varphi - \beta_1 \frac{(\gamma_1 + \mu + d_2)}{\beta_1}}{\beta_2}$$

$$s_2 = \frac{\beta_1 (b + \delta q)\varphi - \frac{\beta_1}{R_{01}}}{\beta_2}$$

$$s_2 = \frac{\beta_1}{\beta_2}\left[\frac{R_{01}(b+\delta q)\varphi - 1}{R_{01}}\right] \quad \text{.....(37)}$$

Substitusi (35), (37) ke (34)

$$\gamma_1 s_1 + \gamma_2 s_2 - (\mu + \delta + d_5)q = 0$$

$$\frac{\gamma_1}{R_{02}} + \gamma_2 \frac{\beta_1}{\beta_2}\left[\frac{R_{01}(b + \delta q)\varphi - 1}{R_{01}}\right] = (\mu + \delta + d_5)q$$

$$\frac{\gamma_1}{R_{02}} + \frac{\gamma_2 \beta_1}{R_{01}\beta_2}(R_{01} b\varphi - 1) = \left((\mu + \delta + d_5) - \frac{\gamma_2 \beta_1 R_{01}\varphi\delta}{R_{01}\beta_2}\right)q$$

$$q = \frac{\gamma_1 R_{01}\beta_2 + R_{02}\gamma_2\beta_1(R_{01}b\varphi - 1)}{R_{01}R_{02}[(\mu+\delta+d_5)\beta_2 - \gamma_2\beta_1\varphi\delta]} \quad \text{.....(38)}$$

Substitusi (38) ke (36) dan (37)

$$p = (b + \delta q)\varphi$$

$$p = b\varphi + \delta\varphi\left(\frac{\gamma_1 R_{01}\beta_2 + R_{02}\gamma_2\beta_1(R_{01}b\varphi - 1)}{R_{01}R_{02}[(\mu+\delta+d_5)\beta_2 - \gamma_2\beta_1\varphi\delta]}\right) \quad \text{.....(39)}$$

$$s_2 = \frac{\beta_1}{\beta_2}\left[\frac{(R_{01}b\varphi - 1)}{R_{01}}\right] + \frac{\beta_1}{\beta_2}\frac{R_{01}\delta\varphi}{R_{01}}q$$

$$s_2 = \frac{\beta_1}{\beta_2}\left[\frac{(R_{01}b\varphi - 1)}{R_{01}}\right] + \frac{\beta_1}{\beta_2}\frac{R_{01}\delta\varphi}{R_{01}}\left(\frac{\gamma_1 R_{01}\beta_2 + R_{02}\gamma_2\beta_1(R_{01}b\varphi - 1)}{R_{01}R_{02}[(\mu + \delta + d_5)\beta_2 - \gamma_2\beta_1\varphi\delta]}\right)$$

$$s_2 = \frac{\beta_1}{\beta_2 R_{01}}[R_{01}b\varphi - 1]\left(1 + \frac{\varphi\delta\gamma_2\beta_1}{(\mu+\delta+d_5)\beta_2 - \gamma_2\beta_1\varphi\delta}\right) + \frac{\varphi\delta\gamma_1\beta_1}{R_{02}[(\mu+\delta+d_5)\beta_2 - \gamma_2\beta_1\varphi\delta]} \quad \text{....(40)}$$

Jadi, titik ekuilibrium endemic 2 adalah

$$E_2 = (p, s_1, s_2, 0, q)$$

dengan

$$p = (b + \delta q)\left(\frac{R_{02}}{\beta_1 + R_{02}(\mu + d_1)}\right) = (b + \delta q)\varphi$$

$$s_1 = \frac{\gamma_2 + \mu + d_3}{\beta_2} = \frac{1}{R_{02}}$$

$$s_2 = \frac{\beta_1}{\beta_2 R_{01}}[R_{01}b\varphi - 1]\left(1 + \frac{\varphi\delta\gamma_2\beta_1}{(\mu + \delta + d_5)\beta_2 - \gamma_2\beta_1\varphi\delta}\right) + \frac{\varphi\delta\gamma_1\beta_1}{R_{02}[(\mu + \delta + d_5)\beta_2 - \gamma_2\beta_1\varphi\delta]}$$

$$q = \frac{\gamma_1 R_{01}\beta_2 + R_{02}\gamma_2\beta_1(R_{01}b\varphi - 1)}{R_{01}R_{02}[(\mu + \delta + d_5)\beta_2 - \gamma_2\beta_1\varphi\delta]}$$

dan $\varphi = \frac{R_{02}}{\beta_1 + R_{02}(\mu + d_1)}$

4. Jika $s_1 \neq 0$, $s_2 \neq 0$ dan $s_3 \neq 0$ maka

$b - \beta_1 p s_1 + \delta q - (\mu + d_1)p = 0$..(41)

$\beta_1 p s_1 - \beta_2 s_1 s_2 - (\gamma_1 + \mu + d_2)s_1 = 0$...(42)

$\beta_2 s_1 s_2 - \beta_3 s_2 s_3 - (\gamma_2 + \mu + d_3)s_2 = 0$..(43)

$\beta_3 s_2 s_3 - (\gamma_3 + \mu + d_4)s_3 = 0$..(44)

$\gamma_3 s_3 + \gamma_1 s_1 + \gamma_2 s_2 - (\mu + \delta + d_5)q = 0$.......................................(45)

dari (44)

$$\left(\beta_3 s_2 - (\gamma_3 + \mu + d_4)\right)s_3 = 0$$

Karena $s_3 \neq 0$ maka $\beta_3 s_2 - (\gamma_3 + \mu + d_4) = 0$

$s_2 = \frac{\gamma_3 + \mu + d_4}{\beta_3} = \frac{1}{R_{03}}$...(46)

Substitusi (46) ke (42)

$$\left(\beta_1 p - \beta_2 s_2 - (\gamma_1 + \mu + d_2)\right)s_1 = 0$$

Karena $s_1 \neq 0$ maka $\beta_1 p - \beta_2 s_2 - (\gamma_1 + \mu + d_2) = 0$

$$\beta_1 p = \beta_2 \frac{1}{R_{03}} + (\gamma_1 + \mu + d_2)$$

$$p = \frac{\beta_2}{\beta_1}\frac{1}{R_{03}} + \frac{(\gamma_1 + \mu + d_2)}{\beta_1}$$

$$p = \frac{\beta_2}{\beta_1}\frac{1}{R_{03}} + \frac{1}{R_{01}} = \frac{\beta_2 R_{01} + \beta_1 R_{03}}{\beta_1 R_{01} R_{03}} \qquad (47)$$

Substitusi (47) ke (41)

$$b - \beta_1 p s_1 + \delta q - (\mu + d_1)p = 0$$

$$\beta_1 p s_1 = b + \delta q - (\mu + d_1)p$$

$$s_1 = \frac{b + \delta q - (\mu + d_1)p}{\beta_1 p}$$

$$s_1 = \frac{b}{\beta_1}\left(\frac{\beta_1 R_{01} R_{03}}{\beta_2 R_{01} + \beta_1 R_{03}}\right) + \frac{\delta}{\beta_1}\left(\frac{\beta_1 R_{01} R_{03}}{\beta_2 R_{01} + \beta_1 R_{03}}\right) q - \frac{(\mu + d_1)}{\beta_1}$$

$$s_1 = b\psi + \delta\psi q - \eta \qquad (48)$$

dengan

$$\psi = \frac{R_{01} R_{03}}{\beta_2 R_{01} + \beta_1 R_{03}}$$

dan

$$\eta = \frac{(\mu + d_1)}{\beta_1}$$

Dari (43)

$$\left(\beta_2 s_1 - \beta_3 s_3 - (\gamma_2 + \mu + d_3)\right) s_2 = 0$$

Karena $s_2 \neq 0$ maka $\beta_2 s_1 - \beta_3 s_3 - (\gamma_2 + \mu + d_3) = 0$

$$\beta_2 s_1 = \beta_3 s_3 + (\gamma_2 + \mu + d_3)$$

$$s_1 = \frac{\beta_3 s_3}{\beta_2} + \frac{(\gamma_2 + \mu + d_3)}{\beta_2}$$

$$s_1 = \frac{\beta_3 s_3}{\beta_2} + \frac{1}{R_{02}} \qquad (49)$$

Substitusi (48) ke (49)

$$b\psi + \delta\psi q - \eta = \frac{\beta_3 s_3}{\beta_2} + \frac{1}{R_{02}}$$

$$\delta\psi q = \frac{\beta_3 s_3}{\beta_2} + \frac{1}{R_{02}} - b\psi + \eta$$

$$\delta\psi q = \frac{\beta_3 s_3 R_{02} + \beta_2 - \beta_2 R_{02} b\psi + \eta\beta_2 R_{02}}{\beta_2 R_{02}}$$

$$q = \frac{R_{02}(\beta_3 s_3 + \eta\beta_2) + \beta_2(1 - R_{02}b\psi)}{\delta\psi\beta_2 R_{02}} \quad \text{...(50)}$$

Substitusi (46), (49) dan (50) ke (45)

$$\gamma_3 s_3 + \gamma_1 s_1 + \gamma_2 s_2 - (\mu + \delta + d_5)q = 0$$

$$\gamma_3 s_3 + \gamma_1\left(\frac{\beta_3 s_3}{\beta_2} + \frac{1}{R_{02}}\right) + \frac{\gamma_2}{R_{03}} - (\mu + \delta + d_5)\left(\frac{R_{02}(\beta_3 s_3 + \eta\beta_2) + \beta_2(1 - R_{02}b\psi)}{\delta\psi\beta_2 R_{02}}\right)$$

$$= 0$$

$$s_3\left(\gamma_3 + \frac{\beta_3\gamma_1}{\beta_2} - \frac{(\mu + \delta + d_5)\beta_3 R_{02}}{\delta\psi\beta_2 R_{02}}\right)$$

$$= -\frac{\gamma_1}{R_{02}} - \frac{\gamma_2}{R_{03}} + \frac{(\mu + \delta + d_5)}{\delta\psi\beta_2 R_{02}}(\beta_2 R_{02}\eta + \beta_2(1 - R_{02}b\psi))$$

$$s_3\left(\gamma_3 + \frac{\beta_3\gamma_1}{\beta_2} - \beta_3 m\right) = -\frac{\gamma_1}{R_{02}} - \frac{\gamma_2}{R_{03}} + \frac{m}{R_{02}}(\beta_2 R_{02}\eta + \beta_2(1 - R_{02}b\psi))$$

$$s_3\left(\frac{\gamma_3\beta_2 + \beta_3\gamma_1 - \beta_2\beta_3 m}{\beta_2}\right) = \frac{1}{R_{02}}(m\beta_2[1 + R_{02}(\eta - b\psi)] - \gamma_1) - \frac{\gamma_2}{R_{03}}$$

$$s_3 = \frac{\beta_2\{R_{03}(m\beta_2[1 + R_{02}(\eta - b\psi)] - \gamma_1) - \gamma_2 R_{02}\}}{R_{02}R_{03}(\gamma_3\beta_2 + \beta_3\gamma_1 - \beta_2\beta_3 m)} \quad \text{..(51)}$$

Substitusi (51) ke (49)

$$s_1 = \frac{\beta_3 s_3}{\beta_2} + \frac{1}{R_{02}}$$

$$s_1 = \frac{\beta_3}{\beta_2}\frac{\beta_2\{R_{03}(m\beta_2[1 + R_{02}(\eta - b\psi)] - \gamma_1) - \gamma_2 R_{02}\}}{R_{02}R_{03}(\gamma_3\beta_2 + \beta_3\gamma_1 - \beta_2\beta_3 m)} + \frac{1}{R_{02}}$$

$$s_1 = \frac{\beta_3 R_{02}[R_{03}m\beta_2(\eta - b\psi) - \gamma_2] + R_{03}\gamma_3\beta_2}{R_{02}R_{03}(\gamma_3\beta_2 + \beta_3\gamma_1 - \beta_2\beta_3 m)} \quad \text{...(52)}$$

Substitusi (51) ke (50)

$$q = \frac{R_{02}(\beta_3 s_3 + \eta\beta_2) + \beta_2(1 - R_{02}b\psi)}{\delta\psi\beta_2 R_{02}}$$

$$q = \left(\frac{R_{02}\beta_3}{\delta\psi\beta_2 R_{02}}\right)s_3 + \frac{R_{02}\beta_2\eta + \beta_2(1 - R_{02}b\psi)}{\delta\psi\beta_2 R_{02}}$$

$$q = \left(\frac{R_{02}\beta_3}{\delta\psi\beta_2 R_{02}}\right)\frac{\beta_2\{R_{03}(m\beta_2[1 + R_{02}(\eta - b\psi)] - \gamma_1) - \gamma_2 R_{02}\}}{R_{02}R_{03}(\gamma_3\beta_2 + \beta_3\gamma_1 - \beta_2\beta_3 m)} + \frac{R_{02}(\eta - b\psi) + 1}{\delta\psi R_{02}}$$

$$q = \frac{R_{02}R_{03}(\eta - b\psi)(\gamma_3\beta_2 + \beta_3\gamma_1) + R_{03}\gamma_3\beta_2 - \beta_3\gamma_2 R_{02}}{\delta\psi R_{02}R_{03}(\gamma_3\beta_2 + \beta_3\gamma_1 - \beta_2\beta_3 m)} \quad \text{....................................(53)}$$

Jadi, titik ekuilibrium endemik 3 adalah

$$E_3 = (p, s_1, s_2, s_3, q)$$

dengan

$$p = \frac{\beta_2 R_{01} + \beta_1 R_{03}}{\beta_1 R_{01} R_{03}}$$

$$s_1 = \frac{\beta_3 R_{02}[R_{03} m \beta_2(\eta - b\psi) - \gamma_2] + R_{03}\gamma_3\beta_2}{R_{02}R_{03}(\gamma_3\beta_2 + \beta_3\gamma_1 - \beta_2\beta_3 m)}$$

$$s_2 = \frac{\gamma_3 + \mu + d_4}{\beta_3} = \frac{1}{R_{03}}$$

$$s_3 = \frac{\beta_2\{R_{03}(m\beta_2[1 + R_{02}(\eta - b\psi)] - \gamma_1) - \gamma_2 R_{02}\}}{R_{02}R_{03}(\gamma_3\beta_2 + \beta_3\gamma_1 - \beta_2\beta_3 m)}$$

$$q = \frac{R_{02}R_{03}(\eta - b\psi)(\gamma_3\beta_2 + \beta_3\gamma_1) + R_{03}\gamma_3\beta_2 - \beta_3\gamma_2 R_{02}}{\delta\psi R_{02}R_{03}(\gamma_3\beta_2 + \beta_3\gamma_1 - \beta_2\beta_3 m)}$$

$$\psi = \frac{R_{01}R_{03}}{\beta_2 R_{01} + \beta_1 R_{03}}$$

$$\eta = \frac{(\mu + d_1)}{\beta_1}$$

dan

$$m = \frac{\mu + \delta + d_5}{\delta\psi\beta_2}$$

MODEL DINAMIKA DARI PENGARUH ROKOK PADA SUATU POPULASI

Riry Sriningsih, M.Sc
Staf Pengajar FMIPA UNP

ABSTRAC

Mathematical model of the effect of smoking in a population derived from a mathematical model of the epidemic spread of the disease. The basic idea that initially healthy individuals, but individual health becomes impaired because of illness. Disease in one individual because the individual lifestyle. In this study, the observed pattern of individual life is the habit of smoking behavior. Smoking is considered to give pleasure to the smoker. But on the other hand, smoking can cause adverse effects to the smoker and those around him. In this model the population is divided into 5 groups: the population has the potential smokers, light smokers, moderate smokers, heavy smokers and quit smokers. The model has two types of equilibrium point is the equilibrium point that is free from cigarettes and endemic equilibrium point. If $R_0 > 1$ then the population of smokers always exists. It can be seen from how big the interaction between smokers (mild, moderate and severe) with a potential smokers.

Keywords: stability analysis, mathematical modeling, model SIR, cigarette

RINGKASAN

Model matematika pengaruh kebiasaan merokok dalam suatu populasi berasal dari model matematika epidemi penyebaran penyakit. Ide dasarnya bahwa, individu yang pada awalnya sehat, namun kesehatan individu menjadi terganggu karena adanya penyakit. Penyakit pada individu salah satunya disebabkan karena pola hidup individu tersebut. Pada penelitian ini, pola hidup individu yang diamati adalah prilaku kebiasaan merokok. Merokok dianggap dapat memberikan kenikmatan bagi si perokok. Namun di lain pihak, merokok dapat menimbulkan dampak buruk bagi si perokok maupun orang-orang di sekitarnya. Pada model ini populasi dibagi menjadi 5 kelompok yaitu populasi yang berpotensi untuk menjadi perokok, populasi perokok ringan, perokok sedang, perokok berat dan populasi yang sembuh dari kebiasaan merokok. Model mempunyai 2 jenis titik ekuilibrium yaitu titik ekuilibrium yang bebas dari rokok dan titik ekuilibrium endemic. Jika $R_0 > 1$ maka populasi perokok akan selalu ada. Hal ini dapat dilihat dari seberapa besar interaksi antara perokok (ringan, sedang dan berat) dengan populasi yang berpotensi menjadi perokok

Kata kunci: analisa kestabilan, model matematika, model SIR, rokok

A. Pendahuluan

Merokok merupakan suatu kegiatan yang sering dilakukan manusia. Kegiatan tersebut dijumpai hampir di setiap tempat/lokasi. Merokok dianggap dapat memberikan kenikmatan bagi si perokok. Namun di lain pihak, merokok dapat menimbulkan dampak buruk bagi si perokok maupun orang-orang di sekitarnya.

Dampak buruk yang diakibatkan kebiasaan merokok disebabkan karena dalam sebatang rokok terkandung sekitar 4000 macam zat kimia. Racun utama pada rokok adalah tar, nikotin, dan karbon monoksida. Saat merokok, serangkaian bahan kimiawi ini menjelajah ke organ vital tubuh seperti otak, paru-paru, jantung dan pembuluh darah. Akibatnya, tubuh menjadi terpolusi bahan kimiawi yang dapat memicu **kanker** dan **kecanduan.** Merokok juga dapat mematikan indra pengecap dan pencium sehingga tidak mampu lagi merasakan lezatnya makanan seperti biasanya. Rokok juga meningkatkan resiko kefatalan bagi penderita pneumonia dan gagal jantung, tekanan darah tinggi, bahkan dampak yang paling fatal adalah kematian.

Oleh karena banyaknya dampak negatif yang ditimbulkan oleh rokok ini, maka perlu dibentuk sebuah model matematika dengan menggunakan asumsi-asumsi tertentu.

B. Metode Penelitian

Pendekatan yang digunakan untuk menyelesaikan model adalah studi literatur, yaitu dengan mengaitkan teori-teori yang diperlukan dalam menyelesaikan model. Hasilnya kemudian diinterpretasikan dalam kehidupan nyata. Adapun teori yang digunakan pada penelitian ini yaitu:

1. Bilangan Reproduksi Dasar (*Basic Reproduction Number*)

Penentuan kestabilan sistem untuk model epidemology, dapat ditentukan melalui nilai atau besaran yang disebut sebagai *basic reproductin number* (R_0). Bilangan reproduksi dasar didefinisikan sebagai angka harapan banyaknya infeksi kedua pada populasi *susceptible.* Bilangan reproduksi dasar (R_0) merupakan parameter penting dalam matematika epidemilogi yang merupakan ambang batas (*threshold*) terjadinya penyebaran penyakit. Jika $R_0 < 1$ maka jumlah individu yang terinfeksi berkurang, sedangkan jika $R_0 > 1$ maka jumlah individu yang terinfeksi bertambah.

(Brauer, 2008 : 159)

2. Sistem Persamaan Diferensial

Diberikan suatu sistem persamaan diferensial biasa, yaitu

Misal

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2, \cdots, x_n) \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2, \cdots, x_n) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= f_n(x_1, x_2, \cdots, x_n) \end{aligned} \quad \text{.......................................(1)}$$

dengan kondisi awal $x_i(t_0) = x_{i0}$, i = 1, 2, ..., n

Sistem (1) dapat ditulis sebagai $\dot{x} = f(x)$ .... (2)

dengan $x \in R^n$, $f = (f_1, \ldots, f_n)^T$ dan kondisi awal $x(t_0) = x_0 \in R^n$

Selanjutnya notasi $x(t) = x(x_0, t)$ menyatakan solusi Sistem (2) yang melalui x_0.

Definisi 1 : (Perko, 1991, hal.101)

Titik $\hat{x} \in R^n$ disebut titik kesetimbangan Sistem (2) jika $f(\hat{x}) = 0$

a. Kestabilan Titik Kesetimbangan Persamaan Diferensial Linier

Misal diberikan suatu sistem linier dalam bentuk

$$\dot{x} = f(x) \quad \text{...(3)}$$

dengan f linier, $f : E \to R^n, E \subset R^n$

Sistem (3) dapat dinyatakan dalam bentuk matrik

$$\dot{x} = Ax \quad \text{...(4)}$$

dengan $x \in R^n$, dan A matrik berukuran n x n.

Apabila matrik A yang digunakan adalah matrik berukuran 2 x 2, artinya sistem terdiri dari dua persamaan diferensial linier. Kestabilan titik kesetimbangan Sistem (3) dapat diperoleh melalui nilai-nilai eigennya.

Definisi 2 : (Perko, 1991)

1. Titik kesetimbangan $\hat{x}$ dikatakan stabil jika untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$, terdapat bilangan $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, sedemikian sehingga untuk setiap solusi $x(t)$ yang memenuhi $\|x(t_0) - \hat{x}\| < \delta$ berlaku $\|x(t) - \hat{x}\| < \varepsilon$, $\forall\, t \geq t_0$
2. Titik kesetimbangan $\hat{x}$ dikatakan tak stabil, jika $\hat{x}$ tidak stabil
3. Titik kesetimbangan $\hat{x}$ dikatakan stabil asimtotik, jika titik kesetimbangan stabil $\hat{x}$ dan terdapat $\delta_0 > 0$ sehingga untuk setiap solusi $x(t)$ yang memenuhi $\|x(t_0) - \hat{x}\| < \delta_0$ berlaku $\lim_{t \to \infty} x(t) = \hat{x}$

Untuk menentukan kestabilan titik kesetimbangan (3) dengan Definisi 2 seringkali mengalami kesulitan. Oleh karena itu, berikutnya akan diberikan teorema bagaimana cara-cara menentukan kestabilan titik kesetimbangan (3)

Teorema 1: (Wiggins, 1990)

Sistem (3) stabil asimtotis jika dan hanya jika bagian real semua nilai eigen dari A negatif, yaitu $(\mathrm{Re}(\lambda_i)) < 0, i = 1,2$

b. Kestabilan Titik Kesetimbangan Sistem Persamaan Diferensial Nonlinier Orde 1 dengan Koefisien Konstan

Misal diberikan suatu sistem persamaan diferensial non linear

$$\dot{x} = f(x) \quad \text{...(5)}$$

$f : E \to R^n$ dengan $E \subset R^n$, f fungsi non linear dan kontinu.

Perilaku solusi pada persekitaran titik kesetimbangan Sistem non linear (5) dapat ditentukan melalui linierisasi pada persekitaran titik kesetimbangan sistem tersebut.

Definisi 3 : (Kocak, 1991, hal.267)

Diberikan $f = (f_1, f_2, \cdots, f_n)$ pada (5) dengan $f_i \in C'(E)$, i = 1,2,..., n

Matrik :

$$
Jf(\hat{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(x) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(x) \end{bmatrix}
$$

dinamakan matrik Jacobian dari f pada titik x

Definisi 4 : (Perko, 1991, hal.101)

Sistem $\dot{x} = J(f(\hat{x}))x$ disebut linierisasi dari (5) di $\hat{x}$

Setelah proses linierisasi dilakukan pada (5), selanjutnya perilaku kestabilan pada titik kesetimbangan ditentukan seperti pada sistem linier.

Teorema 2 : (Wiggins, 1990, hal.8)

Jika semua nilai eigen dari matriks Jacobian $J(f(\hat{x}))$ mempunyai bagian real negatif, maka titik kesetimbangan $\hat{x}$ dari (5) stabil asimtotis

3. Kriteria Kestabilan Routh Hurwitz

Kriteria ini menunjukkan adakah akar-akar tak stabil persamaan polinom orde n tanpa perlu menyelesaikannya. Untuk sistem kendali, kestabilan mutlak langsung dapat diketahui dari koefisien-koefisien persamaan karakteristik. Prosedur:

1. Tulis persamaan orde n dalam bentuk sebagai berikut:
   $a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n = 0, a_n \neq 0, a_i \in \mathbb{R}, i = 0, 1, \ldots, n$
2. Jika ada koefisien yang bernilai nol atau negative disamping adanya koefisien positif, maka hal ini menunjukkan ada satu akar atau akar-akar imajiner atau memiliki bagian real positif (system tidak stabil). Kondisi perlu (tetapi belum cukup) untuk stabil adalah semua koefisien persamaan polinom bertanda sama
3. Table Routh Hurwitz

s^n	a_0	a_2	…
s^{n-1}	a_1	a_3	…
s^{n-2}	b_1	b_2	…
			…
s^1	f_1		
s^0	g_1		

Dengan koefisien

$$b_i = \frac{a_1 a_{2i} - a_0 a_{2i+1}}{a_1}, c_i = \frac{b_1 a_{2i+1} - a_1 b_{i+1}}{b_1}, d_i = \frac{c_1 b_{i+1} - b_1 c_{i+1}}{c_1}, \ldots \& \ i = 1,2, \ldots$$

4. Kriteria kestabilan Routh Hurwitz: banyaknya akar tak stabil sama dengan banyaknya perubahan tanda pada kolom pertama table Routh Hurwitz

Syarat perlu dan cukup untuk stabil adalah semua koefisien persamaan karakteristik dan semua suku pada kolom pertama table Routh bertanda sama

C. HASIL DAN PEMBAHASAN

1. Model Matematika PSQP dari Pengaruh Rokok Pada Suatu Populasi

Berdasarkan permasalahan yang diamati, selanjutnya ditentukanlah asumsi-asumsi yang mungkin yaitu:

1. Populasi konstan dan tertutup
2. Populasi dalam sistem dibagi atas 3 kelompok dasar yaitu populasi yang berpotensi untuk menjadi perokok (P), populasi perokok (S) dan populasi yang telah berhenti merokok (Q)
3. Populasi perokok dibedakan menjadi 3 kelompok yaitu perokok ringan (S_1), perokok sedang (S_2) dan perokok berat (S_3)
4. Perokok adalah seseorang yang merokok sedikitnya 1 batang/hari selama sekurang-kurangnya 1 tahun
5. Potensial menjadi perokok adalah orang yang belum pernah mencoba rokok dan pernah mencoba tetapi tidak rutin merokok sebanyak 1 batang/hari selama 1 tahun
6. Perokok ringan adalah seseorang yang mengkonsumsi rokok antara 1 – 10 batang/hari, perokok sedang adalah seorang yang mengkonsumsi rokok antara 11 – 20 batang/hari dan perokok berat adalah seorang yang mengkonsumsi rokok lebih dari 20 batang/hari
7. Seseorang yang sudah berhenti dari kebiasaannya merokok dimungkinkan dapat kembali untuk menjadi seseorang yang berpotensi menjadi perokok
8. Setiap individu yang baru masuk ke sistem diasumsikan berpotensi menjadi perokok
9. Adanya kematian pada masing-masing populasi yang disebabkan karena pengaruh rokok (berhubungan dengan penyakit yang ditimbulkan oleh rokok)
10. Adanya kematian alami
11. Penularan kebiasaan merokok terjadi karena adanya interaksi antara populasi yang berpotensi menjadi perokok dengan populasi perokok serta adanya unsur ajakan yang kuat dan keinginan untuk mencoba dari populasi yang berpotensi menjadi perokok tersebut
12. Populasi yang berpotensi menjadi perokok dapat menjadi perokok mulai dari menjadi perokok ringan, sedang dan selanjutnya berat.

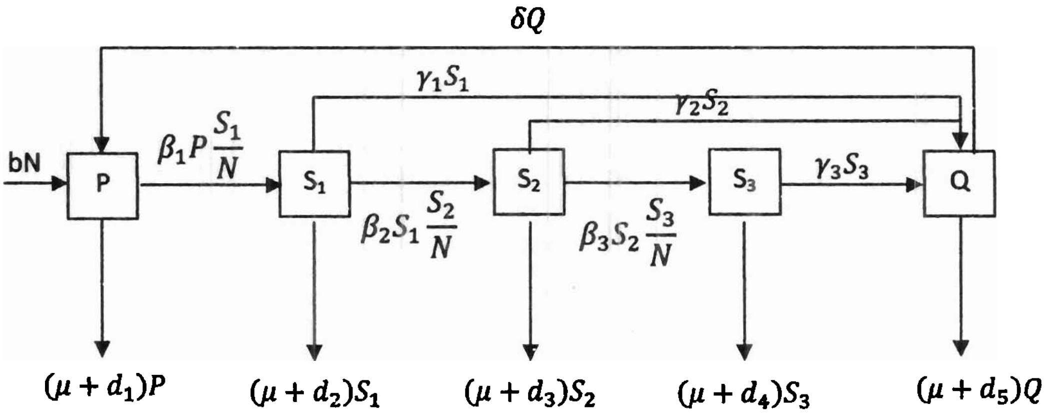
Adapun variabel pada penelitian ini adalah jumlah total populasi (N), populasi yang berpotensi menjadi perokok (P), populasi perokok ringan (S_1), populasi perokok sedang (S_2), populasi perokok berat (S_3), populasi yang telah berhenti dari kebiasaan merokok (Q) dan waktu (t). Parameternya adalah

$b =$ tingkat kelahiran

$\beta_1 =$ tingkat penularan kebiasaan merokok dari populasi perokok ringan ke populasi yang berpotensi menjadi perokok

β_2 = tingkat penularan dari populasi perokok sedang ke populasi perokok ringan
β_3 = tingkat penularan dari populasi perokok berat ke populasi perokok sedang
γ_1 = tingkat kesembuhan dari kebiasaan merokok pada populasi perokok ringan
γ_2 = tingkat kesembuhan dari kebiasaan merokok pada populasi perokok sedang
γ_3 = tingkat kesembuhan dari kebiasaan merokok pada populasi perokok berat
μ = tingkat kematian alami masing-masing populasi
d_1 = tingkat kematian dari populasi yang berpotensi untuk menjadi perokok yang berkaitan dengan penyakit yang disebabkan oleh rokok
d_2 = tingkat kematian dari populasi perokok ringan yang berkaitan dengan penyakit yang disebabkan oleh rokok
d_3 = tingkat kematian dari populasi perokok sedang yang berkaitan dengan penyakit yang disebabkan oleh rokok
d_4 = tingkat kematian dari populasi perokok berat yang berkaitan dengan penyakit yang disebabkan oleh rokok
d_5 = tingkat kematian dari populasi yang sembuh dari kebiasaan merokok yang berkaitan dengan penyakit yang disebabkan oleh rokok
δ = tingkat penurunan kesadaran untuk tidak merokok lagi (perokok yang sudah berhenti dari kebiasaan merokok menjadi berpotensi kembali menjadi perokok)
c = rata-rata banyaknya kontak tiap satuan waktu
q = peluang individu menjadi perokok (ringan, sedang dan berat)

Berdasarkan asumsi-asumsi di atas dapat digambarkan diagram transfer model sebagai berikut:



Gambar 1. Diagram Transfer Pengaruh Rokok Pada Suatu Populasi

Selanjutnya, berdasarkan diagram di atas dapat diformulasikan modelnya setelah dinormalisasikan sebagai berikut:

$\frac{dp}{dt} = b - \beta_1 p s_1 + \delta q - (\mu + d_1)p$ ....(12)
$\frac{ds_1}{dt} = \beta_1 p s_1 - \beta_2 s_1 s_2 - (\gamma_1 + \mu + d_2)s_1$ ....(13)
$\frac{ds_2}{dt} = \beta_2 s_1 s_2 - \beta_3 s_2 s_3 - (\gamma_2 + \mu + d_3)s_2$ ....(14)
$\frac{ds_3}{dt} = \beta_3 s_2 s_3 - (\gamma_3 + \mu + d_4)s_3$ ....(15)
$\frac{dq}{dt} = \gamma_3 s_3 + \gamma_1 s_1 + \gamma_2 s_2 - (\mu + \delta + d_5)q$ ....(16)
$p(t) + s_1(t) + s_2(t) + s_3(t) + q(t) = 1$ ....(17)
dan daerah penyelesaian

$$\Omega = \left\{(p, s_1, s_2, s_3, q) \middle| \begin{matrix} p \geq 0, s_1 \geq 0, s_2 \geq 0, s_3 \geq 0, q \geq 0, \\ p + s_1 + s_2 + s_3 + q \leq n \leq 1 \end{matrix} \right\}$$

2. **Analisis Stabilitas Model**

   a. **Titik Ekuilibrium Model**

   Persamaan (12) sampai dengan (16) mempunyai beberapa titik ekuilibrium. Titik ekuilibrium tersebut diberikan oleh teorema berikut:

   Teorema 3:

   1. $E_0 = \left(\frac{b}{\mu+d_1}, 0,0,0,0\right)$ merupakan titik ekuilibrium bebas dari kebiasaan merokok
   2. $E_1 = (p, s_1, 0,0, q)$ merupakan titik ekuilibrium endemik 1 dengan $p = \frac{\gamma_1+\mu+d_2}{\beta_1} = \frac{1}{R_{01}}$, $s_1 = \frac{(\mu+\delta+d_5)(\mu+d_1-R_{01}b)}{\delta\gamma_1 R_{01}-\beta_1(\mu+\delta+d_5)}$, $q = \frac{\gamma_1(\mu+d_1-R_{01}b)}{\delta\gamma_1 R_{01}-\beta_1(\mu+\delta+d_5)}$
   3. $E_2 = (p, s_1, s_2, 0, q)$ merupakan titik ekuilibrium endemik 2 dengan

$$p = (b + \delta q)\left(\frac{R_{02}}{\beta_1 + R_{02}(\mu + d_1)}\right) = (b + \delta q)\varphi$$

$$s_1 = \frac{\gamma_2 + \mu + d_3}{\beta_2} = \frac{1}{R_{02}}$$

$$s_2 = \frac{\beta_1}{\beta_2 R_{01}}[R_{01}b\varphi - 1]\left(1 + \frac{\varphi\delta\gamma_2\beta_1}{(\mu + \delta + d_5)\beta_2 - \gamma_2\beta_1\varphi\delta}\right) + \frac{\varphi\delta\gamma_1\beta_1}{R_{02}[(\mu + \delta + d_5)\beta_2 - \gamma_2\beta_1\varphi\delta]}$$

$$q = \frac{\gamma_1 R_{01}\beta_2 + R_{02}\gamma_2\beta_1(R_{01}b\varphi - 1)}{R_{01}R_{02}[(\mu + \delta + d_5)\beta_2 - \gamma_2\beta_1\varphi\delta]}$$

   dan

$$\varphi = \frac{R_{02}}{\beta_1 + R_{02}(\mu + d_1)}$$

   4. $E_3 = (p, s_1, s_2, s_3, q)$ merupakan titik ekuilibrium endemic 3 dengan

$$p = \frac{\beta_2 R_{01} + \beta_1 R_{03}}{\beta_1 R_{01} R_{03}}, s_1 = \frac{\beta_3 R_{02}[R_{03} m\beta_2(\eta - b\psi) - \gamma_2] + R_{03}\gamma_3\beta_2}{R_{02}R_{03}(\gamma_3\beta_2 + \beta_3\gamma_1 - \beta_2\beta_3 m)}$$

$$s_2 = \frac{\gamma_3 + \mu + d_4}{\beta_3} = \frac{1}{R_{03}}, s_3 = \frac{\beta_2\{R_{03}(m\beta_2[1 + R_{02}(\eta - b\psi)] - \gamma_1) - \gamma_2 R_{02}\}}{R_{02}R_{03}(\gamma_3\beta_2 + \beta_3\gamma_1 - \beta_2\beta_3 m)}$$

$$q = \frac{R_{02}R_{03}(\eta - b\psi)(\gamma_3\beta_2 + \beta_3\gamma_1) + R_{03}\gamma_3\beta_2 - \beta_3\gamma_2 R_{02}}{\delta\psi R_{02}R_{03}(\gamma_3\beta_2 + \beta_3\gamma_1 - \beta_2\beta_3 m)}, \psi = \frac{R_{01}R_{03}}{\beta_2 R_{01} + \beta_1 R_{03}}$$

$\eta = \frac{(\mu+d_1)}{\beta_1}$ dan $m = \frac{\mu+\delta+d_5}{\delta\psi\beta_2}$

b. Kestabilan titik ekuilibrium

Untuk menyelidiki kestabilan titik ekuilibrium sistem persamaan (12) sampai dengan (16), diberikan Lemma berikut:

Lemma 1:

Matrikas Jacobian fungsi f dari sistem persamaan (12) sampai dengan (16) di titik $x = (p, s_1, s_2, s_3, q)$, yaitu:

$$J(f(x)) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial p} & \frac{\partial f_1}{\partial s_1} & \frac{\partial f_1}{\partial s_2} & \frac{\partial f_1}{\partial s_3} & \frac{\partial f_1}{\partial q} \\ \frac{\partial f_2}{\partial p} & \frac{\partial f_2}{\partial s_1} & \frac{\partial f_2}{\partial s_2} & \frac{\partial f_2}{\partial s_3} & \frac{\partial f_2}{\partial q} \\ \frac{\partial f_3}{\partial p} & \frac{\partial f_3}{\partial s_1} & \frac{\partial f_3}{\partial s_2} & \frac{\partial f_3}{\partial s_3} & \frac{\partial f_3}{\partial q} \\ \frac{\partial f_4}{\partial p} & \frac{\partial f_4}{\partial s_1} & \frac{\partial f_4}{\partial s_2} & \frac{\partial f_4}{\partial s_3} & \frac{\partial f_4}{\partial q} \\ \frac{\partial f_5}{\partial p} & \frac{\partial f_5}{\partial s_1} & \frac{\partial f_5}{\partial s_2} & \frac{\partial f_5}{\partial s_3} & \frac{\partial f_5}{\partial q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & -\beta_1 p & 0 & 0 & \delta \\ \beta_1 s_1 & a_{22} & -\beta_2 s_1 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_2 s_2 & a_{33} & -\beta_3 s_2 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_3 s_3 & a_{44} & 0 \\ 0 & \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & a_{55} \end{bmatrix}$$

dengan

$$a_{11} = -(\beta_1 s_1 + \mu + d_1)$$

$$a_{22} = \beta_1 p - \beta_2 s_2 - (\mu + \gamma_1 + d_2)$$

$$a_{33} = \beta_2 s_1 - \beta_3 s_3 - (\mu + \gamma_2 + d_3)$$

$$a_{44} = \beta_3 s_2 - (\mu + \gamma_3 + d_4)$$

$$a_{55} = -(\mu + \delta + d_5)$$

1) **Kestabilan titik ekuilibrium bebas dari rokok**

Untuk menyelidiki kestabilan titik ekuilibrium ini dapat dilihat dari teorema berikut:

Teorema 4:

1. Jika $\frac{\beta_1 b}{\mu+d_1} < \mu + \gamma_1 + d_2 \leftrightarrow \frac{\beta_1 b}{(\mu+d_1)(\mu+\gamma_1+d_2)} < 1 \leftrightarrow R_0 < 1$ maka nilai-nilai eigen dari matriks Jacobian di titik E_0 lebih kecil dari nol. Dengan kata lain titik ekuilibrium E_0 stabil asimtotik lokal
2. Jika $R_0 > 1$ maka ada nilai eigen dari matriks Jacobian di titik E_0 lebih besar dari nol ($\lambda_2 > 0$) sehingga titik ekuilibrium E_0 tidak stabil

Bukti:

Berdasarkan Lemma 1 didapatkan matriks Jacobian $J(f(E_0))$ dari fungsi f di titik ekuilibrium yang bebas dari rokok (kebiasaan merokok) $E_0 = \left(\frac{b}{\mu+d_1}, 0,0,0,0\right)$ sebagai berikut:

$$J(f(E_0)) = \begin{bmatrix} -(\mu+d_1) & -\beta_1\left(\frac{b}{\mu+d_1}\right) & 0 & 0 & \delta \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(\mu+\gamma_2+d_3) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -(\mu+\gamma_3+d_4) & 0 \\ 0 & \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & -(\mu+\delta+d_5) \end{bmatrix}$$

dengan

$$a_{22} = \beta_1\left(\frac{b}{\mu+d_1}\right) - (\mu+\gamma_1+d_2)$$

Selanjutnya diperoleh:

$$|\lambda I - J(f(E_0))| = 0$$

$$\lambda_1 = -(\mu+d_1)$$

$$\lambda_2 = \left(\beta_1\left(\frac{b}{\mu+d_1}\right) - (\mu+\gamma_1+d_2)\right)$$

$$\lambda_3 = -(\mu+\gamma_2+d_3)$$

$$\lambda_4 = -(\mu+\gamma_3+d_4)$$

$$\lambda_5 = -(\mu+\delta+d_5)$$

Interpretasi di titik ekuilibrium $E_0 = \left(\frac{b}{\mu+d_1}, 0,0,0,0\right)$

a) Jika tingkat penularan kebiasaan merokok dari individu perokok kepada populasi yang berpotensi menjadi perokok dan tingkat kelahiran dalam populasi lebih sedikit daripada tingkat kematian dan kesembuhan dalam populasi maka dengan bertambahnya waktu populasi akan terbebas dari individu yang merokok (tidak ada lagi individu yang merokok)
b) Jika tingkat penularan kebiasaan merokok dari individu perokok kepada populasi yang berpotensi menjadi perokok dan tingkat kelahiran dalam populasi lebih banyak daripada tingkat kematian dan kesembuhan dalam populasi maka dengan bertambahnya waktu populasi orang yang merokok semakin bertambah

2) **Kestabilan titik ekuilibrium tidak bebas dari rokok**
Untuk menyelidiki kestabilan titik ekuilibrium ini dapat dilihat dari teorema berikut:
Teorema 5:
Titik ekuilibrium E_1 stabil apabila $R_0 > 1$ dan $s_1 > 0$

Bukti:

Berdasarkan Lemma 1 didapatkan matriks Jacobian $J(f(E_1))$ dari fungsi f di titik ekuilibrium yang tidak bebas dari rokok (kebiasaan merokok) $E_1 = (p, s_1, 0,0, q)$ dengan $p = \frac{\gamma_1+\mu+d_2}{\beta_1} = \frac{1}{R_{01}}$, $s_1 = \frac{(\mu+\delta+d_5)(\mu+d_1-R_{01}b)}{\delta\gamma_1 R_{01}-\beta_1(\mu+\delta+d_5)}$, $q = \frac{\gamma_1(\mu+d_1-R_{01}b)}{\delta\gamma_1 R_{01}-\beta_1(\mu+\delta+d_5)}$ sebagai berikut:

$$J(f(E_1)) = \begin{bmatrix} a_{11} & -\beta_1 p & 0 & 0 & \delta \\ \beta_1 s_1 & a_{22} & -\beta_2 s_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} & 0 \\ 0 & \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & a_{55} \end{bmatrix}$$

dengan

$$a_{11} = -(\beta_1 s_1 + \mu + d_1)$$

$$a_{22} = \beta_1 p - (\mu + \gamma_1 + d_2)$$

$$a_{33} = \beta_2 s_1 - (\mu + \gamma_2 + d_3)$$

$$a_{44} = -(\mu + \gamma_3 + d_4)$$

$$a_{55} = -(\mu + \delta + d_5)$$

Selanjutnya,

$$|\lambda I - J(f(E_1))| = 0$$

Berdasarkan kriteria R-H, titik ekuilibrium E_1 stabil apabila $a_0 > 0, a_1 < 0$ dan $a_1 a_2 < a_3$. Agar hal ini terjadi maka $s_1 > 0 \leftrightarrow R_0 > 1$. Jadi titik ekuilibrium E_1 stabil

Teorema 6:
Titik ekuilibrium E_2 stabil apabila $R_0 > 1$, $s_1 > 0$ dan $s_2 > 0$

Bukti:

Berdasarkan Lemma 1 didapatkan matriks Jacobian $J(f(E_2))$ dari fungsi f di titik ekuilibrium yang tidak bebas dari rokok (kebiasaan merokok) $E_2 = (p, s_1, s_2, 0, q)$

dengan

$$p = (b + \delta q)\left(\frac{R_{02}}{\beta_1 + R_{02}(\mu + d_1)}\right) = (b + \delta q)\varphi, s_1 = \frac{\gamma_2 + \mu + d_3}{\beta_2} = \frac{1}{R_{02}}$$

$$s_2 = \frac{\beta_1}{\beta_2 R_{01}}[R_{01} b\varphi - 1]\left(1 + \frac{\varphi\delta\gamma_2\beta_1}{(\mu + \delta + d_5)\beta_2 - \gamma_2\beta_1\varphi\delta}\right) + \frac{\varphi\delta\gamma_1\beta_1}{R_{02}[(\mu + \delta + d_5)\beta_2 - \gamma_2\beta_1\varphi\delta]}$$

$q = \frac{\gamma_1 R_{01}\beta_2 + R_{02}\gamma_2\beta_1(R_{01}b\varphi - 1)}{R_{01}R_{02}[(\mu+\delta+d_5)\beta_2 - \gamma_2\beta_1\varphi\delta]}$, dan $\varphi = \frac{R_{02}}{\beta_1 + R_{02}(\mu+d_1)}$ sebagai berikut:

$$J(f(E_2)) = \begin{bmatrix} a_{11} & -\beta_1 p & 0 & 0 & \delta \\ \beta_1 s_1 & a_{22} & -\beta_2 s_1 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_2 s_2 & a_{33} & -\beta_3 s_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} & 0 \\ 0 & \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & a_{55} \end{bmatrix}$$

dengan

$$a_{11} = -(\beta_1 s_1 + \mu + d_1)$$

$$a_{22} = \beta_1 p - (\beta_2 s_2 + \mu + \gamma_1 + d_2)$$

$$a_{33} = \beta_2 s_1 - (\mu + \gamma_2 + d_3)$$

$$a_{44} = \beta_3 s_2 - (\mu + \gamma_3 + d_4)$$

$$a_{55} = -(\mu + \delta + d_5)$$

Selanjutnya,

$$|\lambda I - J(f(E_2))| = 0$$

Berdasarkan kriteria R-H, titik ekuilibrium E_2 stabil apabila $a_0 > 0, a_1 < 0$,

$a_1 a_2 < a_3$ dan $a_1 a_2 a_3 < a_3^2 + a_1^2 a_4$. Agar hal ini terjadi maka $s_1 > 0$ dan $s_2 > 0$.

$s_2 > 0 \leftrightarrow R_0 > 1$. Jadi titik ekuilibrium E_2 stabil

Teorema 7:
Titik ekuilibrium E_3 stabil apabila $R_0 > 1$, $s_1 > 0$, $s_2 > 0$ dan $s_3 > 0$
Bukti:
Berdasarkan Lemma 1 didapatkan matriks Jacobian $J(f(E_3))$ dari fungsi f di titik ekuilibrium yang tidak bebas dari rokok (kebiasaan merokok) $E_3 = (p, s_1, s_2, s_3, q)$ dengan

$$p = \frac{\beta_2 R_{01} + \beta_1 R_{03}}{\beta_1 R_{01} R_{03}}, s_1 = \frac{\beta_3 R_{02}[R_{03} m\beta_2(\eta - b\psi) - \gamma_2] + R_{03}\gamma_3\beta_2}{R_{02}R_{03}(\gamma_3\beta_2 + \beta_3\gamma_1 - \beta_2\beta_3 m)}$$

$$s_2 = \frac{\gamma_3 + \mu + d_4}{\beta_3} = \frac{1}{R_{03}}, s_3 = \frac{\beta_2\{R_{03}(m\beta_2[1 + R_{02}(\eta - b\psi)] - \gamma_1) - \gamma_2 R_{02}\}}{R_{02}R_{03}(\gamma_3\beta_2 + \beta_3\gamma_1 - \beta_2\beta_3 m)}$$

$$q = \frac{R_{02}R_{03}(\eta - b\psi)(\gamma_3\beta_2 + \beta_3\gamma_1) + R_{03}\gamma_3\beta_2 - \beta_3\gamma_2 R_{02}}{\delta\psi R_{02}R_{03}(\gamma_3\beta_2 + \beta_3\gamma_1 - \beta_2\beta_3 m)}$$

$\psi = \frac{R_{01}R_{03}}{\beta_2 R_{01} + \beta_1 R_{03}}$, $\eta = \frac{(\mu+d_1)}{\beta_1}$ $dan\ m = \frac{\mu+\delta+d_5}{\delta\psi\beta_2}$ sebagai berikut:

$$J(f(E_3)) = \begin{bmatrix} a_{11} & -\beta_1 p & 0 & 0 & \delta \\ \beta_1 s_1 & a_{22} & -\beta_2 s_1 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_2 s_2 & a_{33} & -\beta_3 s_2 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_3 s_3 & a_{44} & 0 \\ 0 & \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & a_{55} \end{bmatrix}$$

dengan

$$a_{11} = -(\beta_1 s_1 + \mu + d_1)$$

$$a_{22} = \beta_1 p - (\beta_2 s_2 + \mu + \gamma_1 + d_2)$$

$$a_{33} = \beta_2 s_1 - (\beta_3 s_3 + \mu + \gamma_2 + d_3)$$

$$a_{44} = \beta_3 s_2 - (\mu + \gamma_3 + d_4)$$

$$a_{55} = -(\mu + \delta + d_5)$$

Selanjutnya,

$$|\lambda I - J(f(E_3))| = 0$$

Berdasarkan kriteria R-H, titik ekuilibrium E_3 stabil apabila $a_0 > 0, a_1 < 0$. Agar hal ini terjadi maka $s_1 > 0$ $s_2 > 0$ dan $s_3 > 0$, $R_0^* > 1$. Jadi titik ekuilibrium E_3 stabil

D. KESIMPULAN DAN SARAN

Kesimpulan

Berdasarkan hasil yang diperoleh, disimpulkan bahwa:

1. Model PSQP dari pengaruh rokok pada suatu populasi adalah sebagai berikut:

$$\frac{dp}{dt} = b - \beta_1 p s_1 + \delta q - (\mu + d_1)p$$
$$\frac{ds_1}{dt} = \beta_1 p s_1 - \beta_2 s_1 s_2 - (\gamma_1 + \mu + d_2)s_1$$
$$\frac{ds_2}{dt} = \beta_2 s_1 s_2 - \beta_3 s_2 s_3 - (\gamma_2 + \mu + d_3)s_2$$
$$\frac{ds_3}{dt} = \beta_3 s_2 s_3 - (\gamma_3 + \mu + d_4)s_3$$
$$\frac{dq}{dt} = \gamma_3 s_3 + \gamma_1 s_1 + \gamma_2 s_2 - (\mu + \delta + d_5)q$$
$$p(t) + s_1(t) + s_2(t) + s_3(t) + q(t) = 1$$

dan daerah penyelesaian

$$\Omega = \left\{(p, s_1, s_2, s_3, q) \middle| \begin{matrix} p \geq 0, s_1 \geq 0, s_2 \geq 0, s_3 \geq 0, q \geq 0, \\ p + s_1 + s_2 + s_3 + q \leq n \leq 1 \end{matrix} \right\}$$

2. Sistem memiliki 2 titik ekuilibrium yaitu titik ekulibrium bebas dari rokok dan titik ekuilibrium yang tak bebas dari kebiasaan merokok. Titik tersebut adalah $E_0 = \left(\frac{b}{\mu + d_1}, 0,0,0,0\right)$ merupakan titik ekuilibrium bebas dari kebiasaan merokok, $E_1 = (p, s_1, 0,0, q)$ merupakan titik ekuilibrium endemik 1, $E_2 = (p, s_1, s_2, 0, q)$ merupakan titik ekuilibrium endemik 2

dan $E_3 = (p, s_1, s_2, s_3, q)$ merupakan titik ekuilibrium endemic 3. Analisa kestabilan titik ekuilibrium tersebut adalah

a. Jika $R_0 < 1$ maka titik ekuilibrium E_0 stabil asimtotik local dan jika $R_0 > 1$ maka titik ekuilibrium E_0 tidak stabil
b. Titik ekuilibrium E_1 stabil apabila $R_0 > 1$ dan $s_1 > 0$
c. Titik ekuilibrium E_2 stabil apabila $R_0 > 1$, $s_1 > 0$ dan $s_2 > 0$
d. Titik ekuilibrium E_3 stabil apabila $R_0 > 1$, $s_1 > 0$, $s_2 > 0$ dan $s_3 > 0$

Dinamika model dipengaruhi oleh laju interaksi antara individu yang berpotensi menjadi perokok menjadi individu perokok dan laju penurunan kesadaran dari individu yang sudah berhenti merokok. Jika laju interaksi dan laju penurunan kesadaran lebih besar dari laju kematian dan kesembuhan maka populasi tidak akan pernah bebas dari kebiasaan merokok

Saran

Berdasarkan hasil penelitian, disarankan untuk melakukan penelitian bagaimana cara menanggulangi pertambahan jumlah populasi perokok. Dengan menambah asumsi untuk melihat adakah pengaruh denda atau pajak terhadap pertambahan jumlah populasi perokok.

E. DAFTAR PUSTAKA

Brauer Fred dkk. 2008. Mathematical Epidemiology, Mathematical Biosciences Subseries. Spinger

Castillo, Chavez. 2000. *Mathematical Models in Population Biology and Epidemiology.* Canada.

Gunawan, A. Y dan M. E. Nurtamam. 2008. *Model Dinamik Sederhana untuk Masalah Peningkatan Populasi Perokok.* Jurnal Indonesia, Math, vol. 14, pp. 63-72.

Hethcote, Herbert W. 1981. *Periodicity and Stability in Epidemic Models: a Survey.* Academic Press, Inc.

Hethcote, Herbert W., Ma Zhien., Liao Shengbing. 2002. *Effects of Quarantine in Six Endemic Models for Infectious Diseases.* Mathematical Biosciences

Kocak, H and Hale, K. 1991. *Dynamics and Bifurcations.* Springer-Verlag, New York.

Mena-Lorca, Jaime and Herbert W. Hethcote. 1992. *Dynamic Models of Infectious Diseases as Regulators of Population Sizes.* Jounal of Mathemtical Biology, Spinger-Verlag

Perko, L. 1991. *Differential Equations and Dynamical Systems.* Springer-Verlag, New York.

Suhardi. 1995. Perilaku Merokok di Indonesia menurut Susenas dan SKRT 1995. Jurnal Cermin Kedokteran Indonesia: 23-25

Susanta, b & Bambang Soedijono. 1993. Model Matematika. Jakarta: Karunika Jakarta UT.

Wiggins, S. 1990. *Intriduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*. Springer-Verlag, New York.

Zaman, Gul. 2011. *Qualitative Behavior of Giving Up Smoking Model.* Bulletin of Malaysian Mathematical Sciences Society, pp. 403-415

Zaman, Gul. 2011. Research Article *Optimal Campaign in the Smoking Dynamics.*