Jurnal Matematika UNAND
Vol. **3** No. **1** Hal. 68 – 77
ISSN : 2303–2910

BILANGAN RADO 2-WARNA UNTUK $\sum_{i=1}^{m-1} a_i x_i = x_m$

DWIPRIMA ELVANNY MYORI

Jurusan Teknik Elektro,
Fakultas Teknik,
Universitas Negeri Padang
elvannymyori@gmail.com

Abstrak. Diberikan L yang merepresentasikan persamaan $\sum_{i=1}^{m-1} a_i x_i = x_m$ dengan $x_i \in [1, n]$, $a_i, n \in \mathbb{Z}^+$. Bilangan Rado $R(a_1, a_2, \ldots, a_{m-1})$ adalah bilangan asli terkecil $R(a_1, a_2, \ldots, a_{m-1})$ dengan $n \geq R(a_1, a_2, \ldots, a_{m-1})$ sedemikian sehingga untuk setiap 2-pewarnaan pada $[1, n]$ terdapat suatu solusi monokromatik untuk sistem L. Paper ini mengkaji kembali bahwa bilangan Rado 2-warna untuk $\sum_{i=1}^{m-1} a_i x_i = x_m$ adalah $a(a + b)^2 + b$, dimana $x_i \in [1, n]$, $a_i, n \in \mathbb{Z}^+$, $a = \min\{a_1, \ldots, a_{m-1}\}$, dan $b = \sum_{i=1}^{m-1} a_i - a$.

Kata Kunci: Bilangan Rado, pewarnaan, solusi monokromatik

1. Pendahuluan

Pada tahun 1916, Issai Schur memberikan suatu teorema, selanjutnya dikenal sebagai **Teorema Schur**, yang menyatakan bahwa untuk setiap $k \geq 2$, terdapat suatu bilangan asli terkecil n sedemikian sehingga untuk setiap k-pewarnaan pada $[1, n]$, terdapat suatu solusi monokromatik untuk

$$x_1 + x_2 = x_3$$

dimana $x_1, x_2, x_3 \in [1, n]$.

Bilangan asli terkecil n yang memenuhi Teorema Schur tersebut dinamakan dengan **bilangan Schur k-warna**, dinotasikan dengan $S(k)$. Beberapa hasil dari bilangan Schur yang telah ditemukan yaitu $S(1) = 2$, $S(2) = 5$, $S(3) = 14$, $S(4) = 45$ dan $161 \leq S(5) \leq 315$.

Teorema Schur kemudian diperumum seperti yang diberikan oleh teorema berikut.

Teorema 1.1. [*3*] *Misalkan $L(k_j)$ merepresentasikan suatu persamaan k_j variabel, yaitu*

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_{k_j - 1} = x_{k_j},$$

dimana $x_1, x_2, \ldots, x_{k_j} \in \mathbb{Z}$. Misalkan $r \geq 1$ adalah banyak pewarnaan, dan $k_j \geq 3$ untuk $1 \leq j \leq r$. Maka terdapat suatu bilangan bulat positif terkecil $S = S(k_1, k_2, \ldots, k_r)$ sedemikian sehingga untuk setiap r-pewarnaan pada $[1, S]$ terdapat suatu solusi untuk $L(k_j)$ dengan warna j, untuk suatu $j \in \{1, 2, \ldots, r\}$.

Bilangan $S(k_1, k_2, \ldots, k_r)$ dikenal dengan **bilangan Schur diperumum**. Teorema 1.1 menyatakan bahwa untuk setiap r-pewarnaan pada $[1, S]$ terdapat suatu solusi monokromatik untuk persamaan dengan k_1 variabel, atau k_2 variabel,atau k_3 variabel, dan seterusnya sampai k_r variabel.

Richard Rado memperumum permasalahan yang dikemukakan oleh Issai Schur ke dalam bentuk persamaan yang lebih luas.

Definisi 1.2. *Misalkan L adalah suatu sistem persamaan linier dengan m variabel dan $k \geq 2$.* ***Bilangan Rado k-warna*** *untuk L adalah bilangan bulat terkecil n sedemikian sehingga untuk setiap pewarnaan $\Delta : [1, n] \to [0, k-1]$ terdapat suatu solusi monokromatik untuk sistem L.*

Jika tidak terdapat bilangan bulat terkecil n, maka bilangan Rado k-warna untuk L didefinisikan tak hingga. Bilangan Rado k-warna untuk L dinotasikan dengan $R(a_1, a_2, \cdots, a_m)$, dimana $a_1, a_2, \cdots, a_m \in \mathbb{Z}$ adalah koefisien pada sistem L.

Rado memberikan syarat perlu dan syarat cukup untuk menentukan apakah suatu sistem persamaan linier memiliki solusi monokromatik untuk setiap pewarnaan pada suatu himpunan bilangan bulat positif. Salah satu syarat yang ditemukan Rado diberikan dalam bentuk teorema berikut.

Teorema 1.3. *Misalkan $m \geq 2$ dan $a_i \in \mathbb{Z} - \{0\}$, $1 \leq i \leq m$. Sistem persamaan linier homogen*

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_m x_m = 0$$

memiliki solusi monokromatik jika dan hanya jika terdapat suatu subhimpunan tak kosong $D \subseteq \{a_i : 1 \leq i \leq m\}$ sedemikian sehingga $\sum_{d \in D} d = 0$.

Rado juga telah membuktikan bahwa jika $a_1, a_2, \ldots, a_m \in \mathbb{Z}$ memuat bilangan bulat positif dan negatif, dan paling sedikit tiga dari a_i, $(1 \leq i \leq m)$ adalah tak nol, maka persamaan linier homogen

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_m x_m = 0$$

memiliki solusi monokromatik dengan $x_1, \ldots, x_m \in [1, n]$ untuk sebarang $n \in \mathbb{Z}^+$ dan suatu 2-pewarnaan pada $[1, n]$. Pada kasus tertentu, jika $a_1, \ldots, a_{m-1}$ adalah bilangan bulat positif dengan $m \geq 3$, maka terdapat bilangan bulat terkecil $n_0 = R(a_1, a_2, \ldots, a_{m-1})$ sedemikian sehingga untuk sebarang $n \geq n_0$ dan suatu 2-pewarnaan pada $[1, n]$, persamaan Diophantine

$$a_1 x_1 + \cdots + a_{m-1} x_{m-1} = x_m \tag{1.1}$$

memiliki solusi monokromatik dengan $x_1, \ldots, x_m \in [1, n]$.

Pada [2], Brian Hopkins dan Daniel Schaal memperoleh hubungan antara $R(a, b)$ dan $R(a_1, \ldots, a_{m-1})$ yang dinyatakan dalam teorema berikut.

Teorema 1.4. [2] *Misalkan $m \geq 3$ adalah suatu bilangan bulat, $a_1, \ldots, a_{m-1} \in \mathbb{Z}^+$, dan $L(a_1, a_2, \ldots, a_{m-1})$ merepresentasikan $a_1 y_1 + a_2 y_2 + \ldots + a_{m-1} y_{m-1} = y_m$. Maka*

$$R(a, b) \geq R(a_1, \ldots, a_{m-1}), \tag{1.2}$$

dimana

$$a = \min\{a_1, \ldots, a_{m-1}\} \text{ dan } b = \sum_{i=1}^{m-1} a_i - a. \tag{1.3}$$

Pada makalah yang sama, Brian Hopkins dan Daniel Schaal menunjukkan batas bawah terbesar bilangan Rado 2-warna untuk $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_{m-1}x_{m-1} = x_m$ yang dinyatakan dalam teorema berikut.

Teorema 1.5. [2] *Misalkan $m \geq 3$ suatu bilangan bulat, $a_1, a_2, \cdots, a_{m-1} \in \mathbb{Z}^+$, dan $L(a_1, a_2, \cdots, a_{m-1})$ merepresentasikan $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_{m-1}x_{m-1} = x_m$. Maka*

$$R(a_1, a_2, \cdots, a_{m-1}) \geq a(a+b)^2 + b,$$

dimana

$$a = \min\{a_1, a_2, \cdots, a_{m-1}\} \text{ dan } b = \sum_{i=1}^{m-1} a_i - a.$$

Meskipun kajian tentang bilangan Rado telah dimulai pada waktu yang cukup lama, namun tidak banyak matematikawan yang mengkaji topik tersebut. Hal ini disebabkan oleh penentuan bilangan Rado k-warna untuk suatu sistem persamaan merupakan suatu masalah yang rumit untuk dikaji. Hingga saat ini, penelitian dalam topik bilangan Rado untuk 2-warna masih dilakukan dan masih banyak masalah terbuka yang terdapat dalam topik tersebut. Oleh karena itu, pada paper ini akan dikaji kembali tentang bilangan Rado 2-warna untuk $\sum_{i=1}^{m-1} a_ix_i = x_m$.

2. Bilangan Rado 2-warna untuk $\sum_{i=1}^{m-1} a_ix_i = x_m$

Misalkan $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ dan $[a, b] = \{x \in \mathbb{N} : a \leq x \leq b\}$ untuk $a, b \in \mathbb{N}$. **Pewarnaan** pada himpunan bilangan A adalah pemberian warna pada bilangan-bilangan di A, sehingga A memiliki subhimpunan yang diperoleh dengan mengelompokkan bilangan-bilangan tersebut sesuai warna yang diberikan. Suatu fungsi $\Delta : [1, n] \to [0, k-1]$ untuk $k, n \in \mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, \ldots\}$ didefinisikan sebagai **k-pewarnaan** pada $[1, n]$, dimana $\Delta(x)$ adalah **warna** dari $x \in [1, n]$.

Jika diberikan suatu k-pewarnaan pada $[1, n]$, maka solusi dari persamaan Diophantine linier

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_mx_m = 0, \quad a_1, a_2, \ldots, a_m \in \mathbb{Z}$$

dengan $x_1, x_2, \ldots, x_m \in [1, n]$ dikatakan **monokromatik** jika

$$\Delta(x_1) = \Delta(x_2) = \cdots = \Delta(x_m).$$

Jadi, $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ dikatakan sebagai solusi monokromatik jika memenuhi dua persyaratan, yaitu $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ memenuhi persamaan linier yang diberikan dan setiap variabel tersebut memiliki warna yang sama.

Berikut diberikan lema yang digunakan untuk membuktikan teorema utama.

Lema 2.1. *Misalkan $k, l, n \in \mathbb{Z}^+$ dengan $l < n$, dan $\Delta : [1, n] \to [0, 1]$ adalah suatu 2-pewarnaan pada $[1, n]$. Asumsikan bahwa $kx + ly = z$ tidak memiliki solusi* *monokromatik dengan* $x, y, z \in [1, n]$. *Asumsikan juga bahwa* $u \in [1, n-l]$, $\Delta(u) = \delta$ *dan* $\Delta(u + l) = 1 - \delta$, *dimana* $\delta \in \{0, 1\}$.

(i) *Jika* $w \in \mathbb{Z}^+$, $w \leq (n - ku)/l$ *dan* $\Delta(w) = \delta$, *maka* $\Delta(w - hk) = \delta$, *dimana* $h \in \mathbb{N}$ *dan* $w - hk > 0$.

(ii) *Jika* $w \in [1, n]$ *dan* $\Delta(w) = 1 - \delta$, *maka* $\Delta(w + hk) = 1 - \delta$, *dimana* $h \in \mathbb{N}$ *dan* $w + hk \leq (n - ku)/l$.

Bukti. Misalkan $k, l, n \in \mathbb{Z}^+$ dengan $l < n$, dan $\Delta : [1, n] \to [0, 1]$ adalah suatu 2-pewarnaan pada $[1, n]$.

(i) Karena $\Delta(w) = \delta = \Delta(u)$ dan $w \leq (n - ku)/l$, atau dapat ditulis $ku + lw \leq n$, maka diperoleh $\Delta(ku + lw) = 1 - \delta$. Perhatikan dua kasus berikut.

Kasus 1. $h = 1$

Perhatikan bahwa $\Delta(u + l) = 1 - \delta$ dan $k(u + l) + l(w - k) = ku + lw$. Akibatnya, jika $w - k > 0$, maka diperoleh $\Delta(w - k) = \delta$.

Kasus 2. $h > 1$

Perhatikan bahwa $\Delta(u + l) = 1 - \delta$,

$$k(u + l) + l(w - hk) = ku + l(w - (h - 1)k),$$

dan $w - (h - 1)k \in \mathbb{Z}^+$. Akibatnya, jika $w - (h - 1)k$ diganti dengan w dan $w - hk > 0$, maka diperoleh $\Delta(w - hk) = \delta$.

(ii) Karena $\Delta(w) = 1 - \delta = \Delta(u + l)$ dan $w + k \leq (n - ku)/l$, atau dapat ditulis $k(u + l) + lw \leq n$, maka diperoleh $\Delta(k(u + l) + lw) = \delta$. Perhatikan dua kasus berikut.

Kasus 1. $h = 1$

Perhatikan bahwa $\Delta(u) = \delta$ dan $ku + l(w + k) = k(u + l) + lw$. Akibatnya, $\Delta(w + k) = 1 - \delta$.

Kasus 2. $h > 1$

Perhatikan bahwa $\Delta(u) = \delta$,

$$ku + l(w + hk) = k(u + l) + l(w + (h - 1)k),$$

dan $w + (h - 1)k \in [1, n]$. Akibatnya, jika $w + (h - 1)k$ diganti dengan w, maka diperoleh $\Delta(w + hk) = 1 - \delta$. □

Teorema berikut memperlihatkan bentuk yang lebih sederhana dari Teorema 2.3.

Teorema 2.2. *Misalkan* $a, b, n \in \mathbb{Z}^+$, $a \leq b$ *dan* $n \geq av^2 + b$, *dimana* $v = a + b$. *Asumsikan bahwa* $b(b - 1) \not\equiv 0$ $(mod\ a)$ *dan* $\Delta : [1, n] \to [0, 1]$ *adalah suatu* 2-*pewarnaan pada* $[1, n]$ *dengan* $\Delta(1) = 0$ *dan* $\Delta(a) = \Delta(b) = \delta$ *dimana* $\delta \in \{0, 1\}$. *Maka terdapat solusi monokromatik untuk*

$$ax + by = z, \qquad x, y, z \in [1, n]. \tag{2.1}$$

Bukti. Misalkan $a, b, n \in \mathbb{Z}^+$, $a \leq b$ dan $n \geq av^2 + b$, dimana $v = a + b$. Misalkan $b(b - 1) \not\equiv 0$ $(mod\ a)$ dan $\Delta : [1, n] \to [0, 1]$ adalah suatu 2-pewarnaan pada $[1, n]$ dengan $\Delta(1) = 0$ dan $\Delta(a) = \Delta(b) = \delta$ dimana $\delta \in \{0, 1\}$.

(1) Misalkan $\delta = 0$.

Asumsikan bahwa Persamaan 2.1 tidak memiliki solusi monokromatik. Perhatikan bahwa

$$\Delta(1) = 0, \ \Delta(a) = \Delta(b) = \delta = 0.$$

Akibatnya, $\Delta(a.1 + b.1) = 1$. Selanjutnya, perhatikan bahwa

$$a(v-1)+b(v-1) = (a+b)(v-1) = v(v-1) = v^2 - v \leq av^2 + b \leq n. \quad (2.2)$$

Hal ini berarti bahwa $a(v-1) + b(v-1)$ berada di dalam selang $[1, n]$. Kemudian dari Persamaan 2.2 diperoleh beberapa klaim berikut.

Klaim 1.1 $\Delta(ai + bj) = 1$ untuk sebarang $i, j \in [1, a]$.
Klaim 1.2 $\Delta(c) = 0$ untuk sebarang $c \in [1, v-1]$.
Klaim 1.3 $\Delta(ai + bj) = 1$ untuk sebarang $i, j \in [1, v-1]$.

Selanjutnya, misalkan d adalah pembagi bersama terbesar (*greatest common divisor*) dari a dan b. Karena $a \nmid b$, maka diperoleh $d < a < b$. Oleh karena itu, $a' = a/d > 1$, $b' = b/d > 1$, dan terdapat suatu bilangan $s \in [1, b'-1]$ sedemikian sehingga $a's \equiv 1 (mod\ b')$. Karena $1 < a's < a'b'$, maka diperoleh $t = (a's - 1)/b' \in [1, a'-1]$ dan $b't < a'b' \leq av$.

Perhatikan bahwa

$$a(av + b's) + b(av - b't) = av(a+b) + b'd = av^2 + b \leq n.$$

Karena $\Delta(v^2) = \Delta(av+bv) \neq \Delta(v) = 1$, maka diperoleh $\Delta(v^2) = 0 = \Delta(1)$. Akibatnya, $\Delta(av^2 + b) = 1$. Oleh karena itu,

$$\Delta(av + b's) = 0 \text{ atau } \Delta(av - b't) = 0. \quad (2.3)$$

Karena $a + s, a - t \in [1, v-1]$, maka berdasarkan Klaim 1.3 diperoleh

$$\Delta(av + bs) = \Delta(a(a+b) + bs) = \Delta(a^2 + b(a+s)) = 1$$

$$= \Delta(a^2 + b(a-t)) = \Delta(av - bt).$$

Jika $b = b'$, maka terjadi kontradiksi dengan Persamaan 2.3. Jadi, haruslah $b' \neq b$. Akibatnya, $d > 1$.

Selanjutnya, dari Persamaan 2.3 perhatikan dua kasus berikut.

Kasus 1.1 $\Delta(av + b's) = 0$.

Pilih $s_1 \in \mathbb{Z}^+$ sedemikian sehingga $1 \leq as_1 - b't \leq a$. Karena

$$as_1 \leq a + b't \leq a + b(a-1) \leq ab,$$

maka diperoleh $s_1 \leq b$. Berdasarkan Klaim 1.3 diperoleh

$$\Delta(aa + ba) = \Delta(as_1 + b.1) = 1,$$

dan

$$a(a^2 + ab) + b(as_1 + b) \leq a^2 v + b(a + ba) \leq av^2 + b \leq n.$$

Oleh karena itu, $\Delta(a(a^2 + ab) + b(as_1 + b)) = 0$. Karena

$$a(a^2 + ab) + b(as_1 + b) = a(av + b's) + b(as_1 - b't + b - 1)$$

dan berdasarkan Klaim 1.2 diperoleh $\Delta(as_1 - b't + b - 1) = 0$, maka terdapat suatu solusi monokromatik untuk Persamaan 2.1. Hal ini kontradiksi dengan asumsi yang menyatakan bahwa Persamaan 2.1 tidak memiliki solusi monokromatik.

Kasus 1.2 $\Delta(av - b't) = 0$.

Pilih $s_2 \in \mathbb{Z}$ sedemikian sehingga $0 \le a't - as_2 \le a - 1$. Perhatikan bahwa

$$0 \le s_2 \le t \le a' - 1 < a - 1.$$

Berdasarkan Klaim 1.2, $\Delta(a't - as_2 + b) = 0 = \Delta(av - b't)$. Karena

$$a(av - b't) + b(a't - as_2 + b) = a^2 v - abs_2 + b^2 \le av^2 + b \le n,$$

maka diperoleh $\Delta(a^2 v - abs_2 + b^2) = 1$. Karena

$$a^2 v - abs_2 + b^2 = a(a^2 + b) + b(a(a - 1 - s_2) + b)$$

dan berdasarkan Klaim 1.3 diperoleh

$$\Delta(a^2 + b) = \Delta(a(a - 1 - s_2) + b) = 1,$$

maka terdapat suatu solusi monokromatik untuk Persamaan 2.1. Hal ini kontradiksi dengan asumsi yang menyatakan bahwa Persamaan 2.1 tidak memiliki solusi monokromatik.

Jadi, untuk setiap 2-pewarnaan pada $[1, n]$ dengan $\Delta(a) = \Delta(b) = 0$, haruslah terdapat solusi monokromatik untuk Persamaan 2.1.

(2) Misalkan $\delta = 1$.

Asumsikan bahwa Persamaan 2.1 tidak memiliki solusi monokromatik. Karena $\Delta(a) = \Delta(b) = 1$, $av = aa + ba$, dan $bv = ab + bb$, maka diperoleh

$$\Delta(av) = \Delta(bv) = 0. \tag{2.4}$$

Jadi, terdapat suatu bilangan $u_1 \le b(v - 1)$ sedemikian sehingga

$$\Delta(u_1) = 1 \text{ dan } \Delta(u_1 + b) = 0,$$

dan juga terdapat suatu bilangan $u_2 \le a(v - 1)$ sedemikian sehingga

$$\Delta(u_2) = 1 \text{ dan } \Delta(u_2 + a) = 0.$$

Perhatikan bahwa

$$a^2 + a + 1 \le \frac{a^2}{b} v + a + 1 = \frac{(av^2 + b) - ab(v - 1)}{b} \le \frac{n - au_1}{b}.$$

Misalkan $k = a$, $l = b$, $u = u_1$, dan $w = 1$.

Karena $\Delta(1) = 0$ dan $1 + a < a^2 + a + 1$, maka berdasarkan Lema 2.1(ii) diperoleh $\Delta(1 + a) = 0$. Jadi,

$$\Delta(av + v) = \Delta(a(a + 1) + b(a + 1)) = 1. \tag{2.5}$$

Selanjutnya, misalkan $b = aq + r$, dimana $q, r \in \mathbb{N}$ dan $r < a$. Karena $a \le b$ dan $a \nmid b(b - 1)$, maka $q \ge 1$ dan $r \ge 2$. Oleh karena itu, diperoleh beberapa klaim berikut.

Klaim 2.1 $\Delta(r) = 0$. Akibatnya, $\Delta(a^2) = 0$.
Klaim 2.2 $\Delta(r) = \Delta(ar) = 1$. Akibatnya, $\Delta(av + a) = 0$.
Klaim 2.3 $\Delta(a^2 + a) = 1$. Akibatnya, $\Delta(a) = \Delta(2a) = \cdots = \Delta(a^2) = 1$.
Klaim 2.4 Untuk $w \in [1, n]$ dan $h \in \mathbb{N}$ dengan $w + hb \leq av + b$, diperoleh $\Delta(w) = 0$. Akibatnya, $\Delta(w + hb) = 0$.
Klaim 2.5 $\Delta(av + a) = 0$.
Klaim 2.6 Terdapat $u \in [1, ab - a]$ sedemikian sehingga $\Delta(u) = 1$ dan $\Delta(u + a) = 0$.
Misalkan d adalah pembagi bersama terbesar (*greatest common divisor*) dari a dan b. Karena $a \nmid b$, maka $d < a$. Akibatnya, $1 < a' = a/d < b' = b/d$. Misalkan $w = db$ dan $h = a - d$. Jika $\Delta(w) = \Delta(db) = 0$, maka berdasarkan Klaim 2.4 diperoleh

$$\Delta(db + (a - d)b) = \Delta(ab) = \Delta(w + hb) = 0 < 1 = \Delta(a).$$

Oleh karena itu, terdapat $u \in \{a, 2a, \ldots, (b - 1)a\}$ sedemikian sehingga $\Delta(u) = 1$ dan $\Delta(u + a) = 0$. Jika $\Delta(db) = 1$, maka perhatikan dua kasus berikut.

Kasus 2.1 $\Delta(d) = 1$.

Karena $\Delta(d) \neq \Delta(1)$, maka $d > 1$. Perhatikan bahwa

$$\Delta(dv) = \Delta(ad + bd) = 1 - \Delta(d) = 0.$$

Perhatikan juga bahwa

$$a'b' - a' - b' = (a' - 1)(b' - 1) - 1 \geq 0$$

dan

$$u \leq dv - a = d^2(a' + b') - a \leq d^2a'b' - a = ab - a.$$

Karena $\Delta(db) = 1$, untuk suatu $u \in \{db, db + a, \ldots, db + (d - 1)a\}$, maka diperoleh $\Delta(u) = 1 > \Delta(u + a) = 0$.

Kasus 2.2 $\Delta(d) = 0$.

Pilih $s \in [0, b - 1]$ sedemikian sehingga $as \equiv d \ (mod\ b)$. Karena $d < a < b$, maka $s \neq 0$ dan $s \neq 1$. Untuk $t = (as - d)/b$, diperoleh $0 < t < a$. Misalkan $w = d$ dan $h = t$. Karena $\Delta(d) = \Delta(w) = 0$ dan $d + bt = w + hb = as < ab \leq av + b$, maka berdasarkan Klaim 2.4 diperoleh $\Delta(d + bt) = \Delta(as) = \Delta(w + hb) = 0$. Perhatikan kembali bahwa $\Delta(a) = 1$. Jadi, terdapat $u \in \{a, \ldots, (s - 1)a\}$ sedemikian sehingga $\Delta(u) = 1$ dan $\Delta(u + a) = 0$. Akibatnya, $u \leq (s - 1)a < ab - a$.

Selanjutnya, misalkan $u \in [1, ab - a]$, $k = b$, $l = a$, dan $w = av + v$, maka

$$w = av + v = v^2 - (b - 1)v \leq v^2 - b(b - 1)$$

$$< \frac{(av^2 + b) - b(ab - a)}{a} \leq \frac{n - bu}{a} = \frac{n - ku}{l}.$$

Dari persamaan 2.5, diketahui bahwa $\Delta(av + v) = \Delta(w) = 1$. Akibatnya, berdasarkan Lema 2.1(i) diperoleh

$$\Delta((av + v) - b) = \Delta(av + a) = \Delta(w - 1.k) = 1.$$

Hal ini kontradiksi dengan Klaim 2.5.

Jadi, untuk setiap 2-pewarnaan pada $[1, n]$ dengan $\Delta(a) = \Delta(b) = 1$, haruslah terdapat solusi monokromatik untuk Persamaan 2.1. $\square$

Selanjutnya, pada teorema berikut akan dikaji mengenai bilangan Rado 2-warna untuk $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_{m-1}x_{m-1} = x_m$.

Teorema 2.3. *Misalkan* $m \geq 3$, $m \in \mathbb{Z}$, *dan* $a_1, \ldots, a_{m-1} \in \mathbb{Z}^+$. *Maka bilangan Rado 2-warna untuk* $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_{m-1}x_{m-1} = x_m$ *adalah*

$$R(a_1, \ldots, a_{m-1}) = a(a + b)^2 + b, \tag{2.6}$$

dimana $a = \min\{a_1, \ldots, a_{m-1}\}$ *dan* $b = \sum_{i=1}^{m-1} a_i - a$.

Bukti. Pada Teorema 1.4 dan Teorema 1.5, telah ditunjukkan bahwa

$$R(a, b) \geq R(a_1, a_2, \cdots, a_{m-1}) \geq ab^2 + (2a^2 + 1)b + a^3 = av^2 + b,$$

dimana $a = min\{a_1, \ldots, a_{m-1}\}$ dan $b = \sum_{i=1}^{m} a_i - a$. Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa

$$R(a, b) \leq av^2 + b,$$

dimana $v = a + b = a_1 + \cdots + a_{m-1}$. Karena $m \geq 3$, maka diperoleh

$$b = a_1 + \cdots + a_{m-1} - a \geq \max\{a_1, \ldots, a_{m-1}\} \geq a.$$

Misalkan $n \geq av^2 + b$ adalah suatu bilangan bulat dan $\Delta : [1, n] \to [0, 1]$ adalah suatu 2-pewarnaan pada $[1, n]$. Asumsikan bahwa $\Delta(1) = 0$ dan tidak terdapat suatu solusi monokromatik untuk Persamaan 2.1.

Karena $a.1 + b.1 = v$, maka diperoleh

$$\Delta(v) = \Delta(a.1 + b.1) = 1. \tag{2.7}$$

Dan juga karena $av + bv = v^2$, maka diperoleh

$$\Delta(v^2) = \Delta(av + bv) = 0. \tag{2.8}$$

Hal ini berakibat bahwa

$$\Delta(av^2 + b.1) = 1.$$

Selanjutnya, perhatikan beberapa klaim berikut.
Klaim 3.1 $\Delta(a) = \Delta(b) \neq \Delta(av) = \Delta(bv)$.
Klaim 3.2 $\Delta(ab + bv + (1 - \delta)av) = 0$ untuk setiap $\delta \in [0, 1]$.
Klaim 3.3 Untuk setiap $i = 1, \ldots, a$, diperoleh

$$\Delta(ib(v - 1) + ab + b + (1 - \delta)av) = 0 \tag{2.9}$$

Misalkan $i = a$ pada Persamaan 2.9, maka diperoleh

$$\Delta(abv + b + (1 - \delta)av) = 0 = \Delta(1).$$

Jika $\delta = 1$, maka $\Delta(a(bv) + b.1 = 0 = \Delta(1)$. Akibatnya,

$$\Delta(ab + bb) = \Delta(bv) = 1 = \Delta(b).$$

Hal ini kontradiksi dengan Klaim 3.1. Jadi, $\delta = 0$ dan

$$\Delta(aa + b(av + a + 1)) = \Delta(abv + b + av) = 0 = \Delta(a).$$

Hal ini berakibat bahwa $\Delta(av + a + 1) = 1$. Jika $a = 1$, maka

$$\Delta(av^2 + b) = \Delta(abv + b + av) = 0.$$

Karena dari Persamaan 2.8 $\Delta(av^2 + b) = 1$, dan

$$a(av - b) + b(av + a + 1) = av^2 + b,$$

maka diperoleh $a \geq 2$ dan $\Delta(av-b) = 0$. Misalkan $k = u = b$, $l = a$, dan $w = av-b$. Karena $\Delta(b) = 0 < \Delta(b + a) = 1$ dan

$$w = av - b = v^2 - b(v + 1) < v^2 - b(b - 1) \leq v^2 - \frac{b(b-1)}{a} \leq \frac{n - b^2}{a} = \frac{n - ku}{l},$$

maka berdasarkan Lema 2.1(i) diperoleh

$$\Delta(av - b - (a - 2)b) = \Delta(a^2 + b) = \Delta(w - hk) = 0.$$

Hal ini kontradiksi dengan $\Delta(a) = 0 = \Delta(1)$ yang berakibat bahwa

$$\Delta(a^2 + b) = \Delta(aa + b.1) = 1.$$

Jadi, haruslah terdapat suatu solusi monokromatik untuk $ax + by = z$, dimana $x, y, z \in [1, n]$. Akibatnya, diperoleh bahwa $R(a, b) \leq av^2 + b$, dengan $v = a + b$. Karena $R(a, b) \geq R(a_1, a_2, \cdots, a_{m-1}) \geq av^2 + b$ dan $R(a, b) \leq av^2 + b$, maka dapat disimpulkan bahwa $R(a_1, a_2, \cdots, a_{m-1}) = av^2 + b$. □

3. Kesimpulan

Tulisan ini mengkaji kembali hasil dari [2] yang membahas tentang bilangan Rado 2-warna untuk $\sum_{i=1}^{m-1} a_i x_i = x_m$. Bilangan Rado 2-warna $R(a_1, a_2, \ldots, a_{m-1})$ untuk $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_{m-1}x_{m-1} = x_m$, dengan $x_i \in [1, n]$ dan $a_i, n \in \mathbb{Z}^+$ adalah $R(a_1, a_2, \ldots, a_{m-1}) = a(a+b)^2 + b$, dimana $a = \min\{a_1, \ldots, a_{m-1}\}$ dan $b = \sum_{i=1}^{m-1} a_i - a$.

4. Ucapan Terima Kasih

Terima kasih penulis ucapkan kepada Bapak Syafrizal Sy, Ibu Lyra Yulianti, Bapak Muhafzan, Bapak Admi Nazra, dan Bapak Narwen yang telah memberikan masukan serta saran sehingga paper ini dapat diselesaikan dengan baik.

Daftar Pustaka

[1] Guo, S., dan Sun, Z. (2008): Determination of The Two-Color Rado Number for $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_mx_m = x_0$, *J. Combin. Theory Ser. A* **115**: 345 – 353
[2] Hopkins, B., dan Schaal, D. (2005): On Rado Numbers for $\sum_{i=1}^{m-1} a_i x_i = x_m$, *Adv. in Appl. Math*, **35**: 433 – 441
[3] Landman, B. M., dan Robertson, A. (2004): *Ramsey Theory on the Integers.* American Mathematical Society, Providence, RI

[4] Rosen, K. H. (2003): *Discrete Mathematics and Its Applications*. Fifth Edition. McGraw-Hill, Inc., New York

[5] Rosen, K. H.(2005): *Elementary Number Theory and Its Applications*. Fifth Edition. Pearson, New York

[6] Soifer, A. (2011): *Ramsey Theory (Yesterday, Today and Tomorrow)*. Springer, New York