PERANGKAT PEMBELAJARAN DAN BAHAN AJAR

MATEMATIKA TEKNIK

Oleh :

DWIPRIMA ELVANNY MYORI, S.Si, M.Si

PROGRAM STUDI TEKNIK ELEKTRO INDUSTRI

JURUSAN TEKNIK ELEKTRO

FAKULTAS TEKNIK

UNIVERSITAS NEGERI PADANG

2014

SILABUS RANCANGAN PEMBELAJARAN SATU SEMESTER

Nama Mata Kuliah	: Matematika Teknik	SKS	: 4 (empat)
Program Studi	: Teknik Elektro Industri	Kode	: TEI 099
Fakultas	: Teknik		
Dosen	: Dwiprima Elvanny Myori, S.Si.,M.Si.		

Learning Outcomes (Capaian Pembelajaran) Mata Kuliah terkait KKNI :

1. Berpikir kritis dalam menyelesaikan permasalahan dalam bidang teknik elektro, dengan memilih metode pendekatan matematis, yaitu dengan menyederhanakan suatu masalah sehingga dapat diselesaikan lebih mudah.
2. Menguasai konsep teoritis bidang teknik elektro, serta mampu memformulasikan penyelesaian masalah yang dihadapi secara prosedural, khususnya yang berkaitan dengan matematika teknik.
3. Mampu menyajikan beberapa alternatif solusi dalam permasalahan di bidang teknik elektro, dalam bentuk model yang dapat digunakan sebagai dasar pengambilan keputusan secara tepat.
4. Mampu menyelesaikan permasalahan matematika teknik secara akurat dalam bentuk laporan atau kertas kerja.
5. Mampu menerapkan ilmu dasar matematika teknik pada bidang teknik elektro.

Soft skills/Karakter : Berpikir kritis, disiplin, tekun, tanggung jawab, ketelitian, kerja sama, dan percaya diri

Matriks Pembelajaran :

Minggu Ke :	Learning Outcomes (Capaian Pembelajaran)	Pengalaman belajar	Materi/Pokok Bahasan	Metode/strategi Pembelajaran	Kriteria/Teknik Penilaian	Daftar Pustaka
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
1	Mengetahui, memahami dan mampu menjelaskan fungsi variabel banyak.	➢ Mendengar ➢ Melihat ➢ Membaca modul ➢ Berdiskusi ➢ Mengerjakan latihan	1. Fungsi variabel banyak 2. Turunan parsial	3. Ceramah 4. Tanya Jawab 5. Diskusi	1. Lisan 2. Sikap 3. Kinerja diskusi 4. Latihan 5. Tugas	1, 3
2	Mengetahui, memahami dan mampu menyelesaikan turunan parsial tingkat tinggi dan fungsi implisit	➢ Mendengar ➢ Melihat ➢ Membaca modul ➢ Berdiskusi ➢ Mengerjakan latihan	1. Turunan parsial fungsi dua variabel/lebih 2. Fungsi implisit	3. Ceramah 4. Tanya Jawab 5. Diskusi	1. Lisan 2. Sikap 3. Kinerja diskusi 4. Latihan 5. Tugas	1, 3
3	Mampu menyelesaikan permasalahan fungsi vektor, limit dan kekontinuan fungsi vektor	➢ Mendengar ➢ Melihat ➢ Membaca modul ➢ Berdiskusi ➢ Mengerjakan latihan	1. Fungsi vektor 2. Limit dan kekontinuan fungsi vektor	1. Ceramah 2. Tanya Jawab 3. Diskusi	1. Lisan 2. Sikap 3. Kinerja diskusi 4. Latihan 5. Tugas	1, 3

4	Mampu menjelaskan dan menyelesaikan permasalahan turunan fungsi vektor, gradien, divergensi dan curl.	➢ Mendengar ➢ Melihat ➢ Membaca modul ➢ Berdiskusi ➢ Mengerjakan latihan	1. Turunan fungsi vektor 2. Gradien 3. Divergensi 4. Curl	1. Ceramah 2. Tanya Jawab 3. Diskusi	1. Lisan 2. Sikap 3. Kinerja diskusi 4. Latihan 5. Tugas	1, 2
5	Memahami, mampu menjelaskan dan menyelesaikan permasalahan integral parsial.	➢ Mendengar ➢ Melihat ➢ Membaca modul ➢ Berdiskusi ➢ Mengerjakan latihan	Integral dalam ruang dimensi n	1. Ceramah 2. Tanya Jawab 3. Diskusi	1. Lisan 2. Sikap 3. Kinerja diskusi 4. Latihan 5. Tugas	1, 2
6	Memahami dan mampu menjelaskan permasalahan integral garis dan integral permukaan	➢ Mendengar ➢ Melihat ➢ Membaca modul ➢ Berdiskusi ➢ Mengerjakan latihan	1. Integral garis 2. Integral permukaan	3. Ceramah 4. Tanya Jawab 5. Diskusi	1. Lisan 2. Sikap 3. Kinerja diskusi 4. Latihan 5. Tugas	1, 2
7	Memahami dan mampu menjelaskan integral volume dan teorema	➢ Mendengar ➢ Melihat ➢ Membaca modul ➢ Berdiskusi ➢ Mengerjakan	1. Integral volume 2. Teorema Divergensi Gauss	1. Ceramah 2. Tanya Jawab 3. Diskusi	1. Lisan 2. Sikap 3. Kinerja diskusi 4. Latihan	1, 2

	divergensi Gauss	latihan			5. Tugas	
8	Memahami dan menjelaskan tentang teorema Green dan teorema Stokes	➢ Mendengar ➢ Melihat ➢ Membaca modul ➢ Berdiskusi ➢ Mengerjakan latihan	1. Teorema Green 2. Teorema Stokes	1. Ceramah 2. Tanya Jawab 3. Diskusi	1. Lisan 2. Sikap 3. Kinerja diskusi 4. Latihan 5. Tugas	1, 2
9	Memahami dan menjelaskan tentang fungsi periodik dan deret Fourier	➢ Mendengar ➢ Melihat ➢ Membaca modul ➢ Berdiskusi ➢ Mengerjakan latihan	1. Fungsi periodik 2. Deret Fourier	1. Ceramah 2. Tanya Jawab 3. Diskusi	1. Lisan 2. Sikap 3. Kinerja diskusi 4. Latihan 5. Tugas	1, 2, 3
10	Memahami dan mampu menentukan deret Fourier dari fungsi periodik dengan periode $p = 2L$, fungsi ganjil dan fungsi genap	➢ Mendengar ➢ Melihat ➢ Membaca modul ➢ Berdiskusi ➢ Mengerjakan latihan	1. Deret Fourier dari fungsi periodik dengan periode $p = 2L$ 2. Deret Fourier dari fungsi ganjil dan fungsi genap	1. Ceramah 2. Tanya Jawab 3. Diskusi	1. Lisan 2. Sikap 3. Kinerja diskusi 4. Latihan 5. Tugas	1, 2
11	Memahami dan mampu menjelaskan tentang deret setengah	➢ Mendengar ➢ Melihat ➢ Membaca modul ➢ Berdiskusi ➢ Mengerjakan	1. Deret setengah jangkauan 2. Deret fourier kompleks	1. Ceramah 2. Tanya Jawab 3. Diskusi	1. Lisan 2. Sikap 3. Kinerja diskusi 4. Latihan	1, 3

	jangkauan dan deret Fourier kompleks	latihan			5. Tugas	
12	Memahami dan mampu menyelesaikan permasalahan transformasi Fourier	➢ Mendengar ➢ Melihat ➢ Membaca modul ➢ Berdiskusi ➢ Mengerjakan latihan	Transformasi fourier dan sifat-sifatnya	1. Ceramah 2. Tanya Jawab 3. Diskusi	1. Lisan 2. Sikap 3. Kinerja diskusi 4. Latihan 5. Tugas	1, 3
13	Memahami dan menjelaskan tentang transformasi fourier sinus dan kosinus.	➢ Mendengar ➢ Melihat ➢ Membaca modul ➢ Berdiskusi ➢ Mengerjakan latihan	Transformasi Fourier sinus dan kosinus	1. Ceramah 2. Tanya Jawab 3. Diskusi	1. Lisan 2. Sikap 3. Kinerja diskusi 4. Latihan 5. Tugas	1, 3
14	Memahami dan mampu menyelesaikan permasalahan pemodelan State Space	➢ Mendengar ➢ Melihat ➢ Membaca modul ➢ Berdiskusi ➢ Mengerjakan latihan	Pemodelan State Space	1. Ceramah 2. Tanya Jawab 3. Diskusi	6. Lisan 7. Sikap 8. Kinerja diskusi 9. Latihan 10. Tugas	1, 3

Daftar pustaka :

1. Kreyzig, Erwin., “Matematika Teknik Lanjut”, Jakarta : Penerbit Erlangga, 1987.
2. Purcell, J., Edwin, dan Dale Varberg, “Kalkulus dan Geometri Analitis”, Jakarta : Penerbit Erlangga, 1990.

3. Rahma, Ammy, “Buku Kerja Matematika”, STKIP PGRI Sumbar.
4. Sinha, Naresh, K .“ Linear Systems “, John Wiley and Sons Inc, 1991.
5. Stewart, James. “Kalkulus”, (terjemahan Chriswan Sungkono), Jakarta : Penerbit Salemba Teknika, 2011.
6. Stroud, K. A, Dexter , J. Booth. “Advanced Engineering Mathematics”, Fourth Edition, New York : Palgrave Macmillan, 2003.

SYLLABUS

Course Title	: Engineering Mathematics	Credit Hours	: 4
Major	: Industrial Electrical Engineering	Course Code	: TEI 099
Faculty	: Engineering		
Lecturer	: Dwiprima Elvanny Myori, S.Si.,M.Si.		

Learning Outcomes based on KKNI :

1. Critical thinking and be able to solve the electrical engineering problems using mathematic method, and create them simply and easy.
2. Mastering the theoritical concept on electrical engineering, and having the ability to formulate problem solving in engineering mathematics.
3. Be able to overcome some alternative solutions for electrical engineering problems, in the form of a model that can be used as a basis for decision making appropriately.
4. Be able to solve problem in engineering mathematics accurately.
5. Be able to apply engineering mathematics on electrical engineering.

Soft skills/Character : Critical thinking, discipline, diligent, responsible, precision, cooperation and confident.

Learning matrices :

Week No.	**Learning Outcomes**	**Learning Experiences**	**Topics/Subject**	**Learning Methods**	**Assessment Criteria**	**References**
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
1	Know, understand and be able to explain multivariable function.	➢ Listen ➢ Pay attention ➢ Read the module ➢ Discuss ➢ Do the task	1. Multivariable functions 2. Partial differentiations	1. Lectures 2. Q & A 3. Discussion	1. Oral Test 2. Attitude 3. Discussion performance 4. Exercises 5. Assignments	1, 6
2	Be able to explain and to solve the second and third partial derivative problems and function problems.	➢ Listen ➢ Pay attention ➢ Read the module ➢ Discuss ➢ Do the task	1. Second and third partial differentials 2. Implicit functions	1. Lectures 2. Q & A 3. Discussion	1. Oral Test 2. Attitude 3. Discussion performance 4. Exercises 5. Assignments	1, 6
3	Be able to explain vector functions and be able to solve limit and continuity of vector function.	➢ Listen ➢ Pay attention ➢ Read the module ➢ Discuss ➢ Do the task	1. Vector function 2. Limit and continuity of vector function	1. Lectures 2. Q & A 3. Discussion	1. Oral Test 2. Attitude 3. Discussion performance 4. Exercises 5. Assignment	2, 5
4	Be able to explain and to solve derivative of	➢ Listen ➢ Pay attention ➢ Read the module	1. Derivative of vector function 2. Gradient	1. Lectures 2. Q & A 3. Discussion	1. Oral Test 2. Attitude 3. Discussion	2, 3, 5

	vector function, gradient, divergence, and curl.	➢ Discuss ➢ Do the task	3. Divergence 4. Curl		performance 4. Exercises 5. Assignments	
5	Understand, be able to explain, and to solve the partial integral problems.	➢ Listen ➢ Pay attention ➢ Read the module ➢ Discuss ➢ Do the task	Partial integrations	1. Lectures 2. Q & A 3. Discussion	1. Oral Test 2. Attitude 3. Discussion performance 4. Exercises 5. Assignments	2, 3, 5
6	Be able to understand and to explain line and surface integrals.	➢ Listen ➢ Pay attention ➢ Read the module ➢ Discuss ➢ Do the task	1. Line integral 2. Surface integral	1. Lectures 2. Q & A 3. Discussion	1. Oral Test 2. Attitude 3. Discussion performance 4. Exercises 5. Assignments	2, 3, 5
7	Understand, be able to explain volume integral and Gauss divergence theorem.	➢ Listen ➢ Pay attention ➢ Read the module ➢ Discuss ➢ Do the task	1. Volume integral 2. Gauss divergence theorem	1. Lectures 2. Q & A 3. Discussion	1. Oral Test 2. Attitude 3. Discussion performance 4. Exercises 5. Assignments	2, 3, 5
8	Be able to understand and to explain Green and	➢ Listen ➢ Pay attention ➢ Read the module	1. Green theorem 2. Stokes theorem	1. Lectures 2. Q & A 3. Discussion	1. Oral Test 2. Attitude 3. Discussion	2, 3, 5

	Stokes theorem.	➢ Discuss ➢ Do the task			performance 4. Exercises 5. Assignments	
9	Understand and be able to explain periodic function and Fourier series.	➢ Listen ➢ Pay attention ➢ Read the module ➢ Discuss ➢ Do the task	1. Periodic function 2. Fourier series	1. Lectures 2. Q & A 3. Discussion	1. Oral Test 2. Attitude 3. Discussion performance 4. Exercises 5. Assignments	1, 6
10	Be able to explain and to determine Fourier series of periodic function with $p = 2L$, odd and even functions.	➢ Listen ➢ Pay attention ➢ Read the module ➢ Discuss ➢ Do the task	1. Fourier series of function with periods $p = 2L$ 2. Fourier series of odd and even functions	1. Lectures 2. Q & A 3. Discussion	1. Oral Test 2. Attitude 3. Discussion performance 4. Exercises 5. Assignments	1, 6
11	Be able to explain and to determine half-range series and complex Fourier series.	➢ Listen ➢ Pay attention ➢ Read the module ➢ Discuss ➢ Do the task	1. Half-range series 2. Complex Fourier series	1. Lectures 2. Q & A 3. Discussion	1. Oral Test 2. Attitude 3. Discussion performance 4. Exercises 5. Assignments	1, 6
12	Be able to explain and to determaine Fourier transform.	➢ Listen ➢ Pay attention ➢ Read the module ➢ Discuss	1. Fourier transform 2. Properties of the Fourier transform	1. Lectures 2. Q & A 3. Discussion	1. Oral Test 2. Attitude 3. Discussion performance	1, 6

		➢ Do the task			4. Exercises 5. Assignments	
13	Be able to explain and to determine cosine and sine Fourier transform	➢ Listen ➢ Pay attention ➢ Read the module ➢ Discuss ➢ Do the task	Cosine and sine Fourier transform	1. Lectures 2. Q & A 3. Discussion	1. Oral Test 2. Attitude 3. Discussion performance 4. Exercises 5. Assignments	1, 6
14	Be able to explain and to solve State Space problems.	➢ Listen ➢ Pay attention ➢ Read the module ➢ Discuss ➢ Do the task	State Space	1. Lectures 2. Q & A 3. Discussion	1. Oral Test 2. Attitude 3. Discussion performance 4. Exercises 5. Assignments	4

References :

1. Kreyzig, Erwin., “Matematika Teknik Lanjut”, Jakarta : Erlangga, 1987.
2. Purcell, J., Edwin, dan Dale Varberg, “Kalkulus dan Geometri Analitis”, Jakarta : Erlangga, 1990.
3. Rahma, Ammy, “Buku Kerja Matematika”, STKIP PGRI Sumbar.
4. Sinha, Naresh, K .“ Linear Systems “, John Wiley and Sons Inc, 1991.
5. Stewart, James. “Kalkulus”, (translated by Chriswan Sungkono), Jakarta : Salemba Teknika, 2011.
6. Stroud, K. A, Dexter , J. Booth. “Advanced Engineering Mathematics”, Fourth Edition, New York : Palgrave Macmillan, 2003.

SATUAN ACARA PEMBELAJARAN
(SAP)

Nama Bahan Kajian : Fungsi Variabel Banyak
Program Studi : Teknik Elektro Industri
Pertemuan ke- : 1
Dosen : Dwiprima Elvanny Myori, S.Si., M.Si.

Learning Outcomes (Capaian Pembelajaran) Mata Kuliah terkait KKNI :
Memahami tentang fungsi variabel banyak dan memahami tentang turunan parsial dan dapat menyelesaikan permasalahan turunan dari fungsi variabel banyak.

Soft skills/Karakter : Berpikir kritis, disiplin, tekun, tanggung jawab, ketelitian, kerja sama, dan percaya diri dalam mengetahui, memahami dan menjelaskan fungsi variabel banyak.

Materi :
1. Fungsi dua variabel atau lebih.
2. Turunan parsial fungsi dua dan tiga variabel.

TAHAP KEGIATAN	KEGIATAN DOSEN	KEGIATAN MAHASISWA	TEKNIK PENILAIAN	MEDIA
Pendahuluan	1. Memperkenalkan diri, memberi salam. 2. Menjelaskan learning outcomes. 3. Menjelaskan garis besar materi yang akan diberikan dan sistem penilaian. 4. Memotivasi karakter religius.	1. Memperhatikan. 2. Mencatat penjelasan yang diberikan. 3. Memperhatikan dan mencatat cakupan materi.	1. Sikap 2. Lisan	• Modul • White Board • Laptop • LCD
Penyajian	1. Meminta pendapat mahasiswa tentang fungsi variabel banyak. 2. Memberikan reinforcement atas jawaban mahasiswa.	1. Mengajukan pendapat tentang fungsi variabel banyak. 2. Menerima reinforcement	1. Sikap 2. Lisan	• Modul • White Board • Laptop • LCD

	3. Menjelaskan definisi fungsi variabel banyak beserta contohnya. 4. Menjelaskan turunan parsial fungsi dua dan tiga variabel dengan menggunakan limit. 5. Menjelaskan aturan turunan parsial tanpa menggunakan limit. 6. Memberikan mahasiswa beberapa soal tentang turunan parsial dan meminta untuk menyelesaikannya. 7. Membahas bersama dan menyimpulkan jawaban mahasiswa. 8. Memberikan kesempatan kepada mahasiswa untuk bertanya tentang materi yang telah dibahas. 9. Memberikan dan menjelaskan jawaban dari pertanyaan yang diajukan mahasiswa	3. Memperhatikan dan mencatat penjelasan yang diberikan. 4. Memperhatikan dan mencatat penjelasan yang diberikan. 5. Memperhatikan dan mencatat penjelasan yang diberikan. 6. Menyelesaikan persoalan. 7. Memperhatikan dan mencatat 8. Mengajukan pertanyaan 9. Memperhatikan dan mencatat		
Penutup	1. Menyimpulkan bersama mahasiswa tentang materi yang telah disampaikan. 2. Menugaskan mahasiswa untuk membaca referensi materi yang akan dibahas pada pertemuan berikutnya 3. Memberikan tugas untuk dikumpulkan pada pertemuan berikutnya	1. Memperhatikan 2. Memperhatikan dan mencatat materi yang ditugaskan. 3. Memperhatikan dan mencatat materi penugasan	1. Sikap 2. Tulisan	• Modul • White Board • Laptop • LCD

Rubrik Penilaian

1. Lisan

No	Pertanyaan	Skor			
		1	2	3	4
1	Jelaskan definisi fungsi!				
2	Jelaskan definisi fungsi variabel banyak!				
3	Berikan contoh fungsi implisit dan fungsi eksplisit!				
4	Jelaskan aturan dalam menyelesaikan turunan parsial!				

2. Tulisan

1. Cari daerah asal dan daerah hasil dari
$$f(x,y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$$
2. Cari daerah asal dari
$$g(x,y,z) = \ln(z-y) + xy\sin z$$
3. Tentukan semua turunan parsial pertama dari fungsi berikut.
   a. $f(x,y) = (2x-y)^4$
   b. $f(x,y) = 36 - x^2 - y^2$
   c. $f(x,y) = xy^2 - 2x^2 + 3y^3$
   d. $f(x,y,z) = xy - yz + xz$
   e. $f(x,y,z) = zy\sqrt{x^2+y^2}$
   f. $f(x,y,z) = \sqrt[3]{x^2+y^2+z^3}$

3. Sikap/Karakter

No	Indikator / Nama Mahasiswa	Indikator Sikap										Nilai Total
		1. Ingin tahu	2. Percaya diri	3. Tanggung jawab	4. Disiplin	5. Teliti	6. Kerjasama	7. Mendengarkan penjelasan	8. Bertanya	9. Menjawab	10. Menanggapi	
1												
2												
3												
	dst											
	Rata-rata											

Daftar pustaka :

1. Kreyzig, Erwin., “Matematika Teknik Lanjut”, Jakarta : Penerbit Erlangga, 1987.
2. Stroud, K. A, Dexter , J. Booth. “Advanced Engineering Mathematics”, Fourth Edition, New York : Palgrave Macmillan, 2003.

SATUAN ACARA PEMBELAJARAN (SAP)

Nama Bahan Kajian : Turunan Parsial Tingkat Tinggi
Program Studi : Teknik Elektro Industri
Pertemuan ke- : 2
Dosen : Dwiprima Elvanny Myori, S.Si., M.Si.

Learning Outcomes (Capaian Pembelajaran) Mata Kuliah terkait KKNI :
Mengetahui, memahami dan menjelaskan turunan parsial tingkat tinggi dan mampu menyelesaikan permasalahan turunan parsial tingkat tinggi serta mampu menyelesaikan permasalahan persamaan diferensial fungsi implisit.

Soft skills/Karakter : Berpikir kritis, disiplin, tekun, tanggung jawab, ketelitian, kerja sama, dan percaya diri dalam mengetahui, memahami dan menjelaskan turunan parsial tingkat tinggi dan persamaan diferensial fungsi implisit .

Materi :
1. Turunan parsial tingkat tinggi
2. Persamaan diferensial fungsi implisit

TAHAP KEGIATAN	KEGIATAN DOSEN	KEGIATAN MAHASISWA	TEKNIK PENILAIAN	MEDIA
Pendahuluan	1. Memperkenalkan diri, memberi salam. 2. Menjelaskan learning outcomes. 3. Menjelaskan garis besar materi yang akan diberikan dan sistem penilaian. 4. Memotivasi karakter religius.	1. Memperhatikan. 2. Mencatat penjelasan yang diberikan. 3. Memperhatikan dan mencatat cakupan materi.	1. Sikap 2. Lisan	• Modul • White Board • Laptop • LCD
Penyajian	1. Menjelaskan definisi turunan parsial tingkat tinggi. 2. Menjelaskan dan memberikan contoh aturan turunan parsial	1. Memperhatikan dan mencatat penjelasan yang diberikan. 2. Memperhatikan dan mencatat penjelasan yang	1. Sikap 2. Lisan	• Modul • White Board • Laptop • LCD

	tingkat tinggi. 3. Menjelaskan tentang pendiferensialan fungsi implisit dan hubungannya dengan turunan parsial. 4. Memberikan mahasiswa suatu fungsi dan meminta mahasiswa untuk menentukan turunan parsial tingkat tingginya. 5. Membahas bersama dan menyimpulkan jawaban mahasiswa. 6. Memberikan kesempatan kepada mahasiswa untuk bertanya tentang materi yang telah dibahas. 7. Memberikan dan menjelaskan jawaban dari pertanyaan yang diajukan mahasiswa.	diberikan. 3. Memperhatikan dan mencatat penjelasan yang diberikan. 4. Menyelesaikan persoalan dan mengemukakan pendapat. 5. Memperhatikan dan mencatat. 6. Mengajukan pertanyaan. 7. Memperhatikan dan mencatat.		
Penutup	1. Menyimpulkan bersama mahasiswa tentang materi yang telah disampaikan. 2. Menugaskan mahasiswa untuk membaca referensi materi yang akan dibahas pada pertemuan berikutnya 3. Memberikan tugas untuk dikumpulkan pada pertemuan berikutnya.	1. Memperhatikan. 2. Memperhatikan dan mencatat materi yang ditugaskan. 3. Memperhatikan dan mencatat materi penugasan	1. Sikap 2. Tulisan	• Modul • White Board • Laptop • LCD

Rubrik Penilaian

1. Lisan

No	Pertanyaan	Skor			
		1	**2**	**3**	**4**
1	Apa itu turunan parsial tingkat tinggi?				
2	Apa itu fungsi implisit?				
3	Apa hubungan pendiferensialan implisit dengan turunan parsial tingkat tinggi?				
4	Ada berapa macam aturan dalam menentukan turunan parsial tingkat tinggi?				

2. Tulisan

1. Tentukan seluruh turunan parsial kedua dari masing-masing fungsi berikut.
   a. $f(x,y) = x^4 - 3x^2y^3$
   b. $z = \frac{x}{(x+y)}$
   c. $v = \ln(3x + 5y)$
2. Carilah turunan parsial yang diminta.
   a. $f(x,y) = 3xy^4 + x^3y^2$; f_{xxy}, f_{yyy}
   b. $f(x,t) = x^2e^{-ct}$; f_{ttt}, f_{txx}
3. Tentukan $\frac{dz}{dt}$ dan $\frac{dw}{dt}$ dari fungsi-fungsi berikut.
   a. $z = x\ln(x + 2y), x = \sin t, y = \cos t$
   b. $w = xy + yz^2, x = e^t, y = e^t \sin t, z = e^t \cos t$
4. Gunakan Aturan Rantai untuk menentukan $\frac{\partial z}{\partial s}$ dan $\frac{\partial z}{\partial t}$.
   a. $z = e^{xy} \cos\theta, x = st, \theta = \sqrt{s^2 + t^2}$
   b. $z = {}^{x}\!/_{y}, x = se^t, y = 1 + se^{-t}$

3. Sikap/Karakter

No	Indikator / Nama Mahasiswa	Indikator Sikap										Nilai Total
		1. Ingin tahu	2. Percaya diri	3. Tanggung jawab	4. Disiplin	5. Teliti	6. Kerjasama	7. Mendengarkan penjelasan	8. Bertanya	9. Menjawab	10. Menanggapi	
1												
2												
3												
	dst											
	Rata-rata											

Daftar pustaka :

1. Kreyzig, Erwin., "Matematika Teknik Lanjut", Jakarta : Penerbit Erlangga, 1987.
2. Stroud, K. A, Dexter , J. Booth. "Advanced Engineering Mathematics", Fourth Edition, New York : Palgrave Macmillan, 2003.

<u>SATUAN ACARA PEMBELAJARAN</u>
<u>(SAP)</u>

Nama Bahan Kajian : Fungsi vektor
Program Studi : Teknik Elektro Industri
Pertemuan ke- : 3
Dosen : Dwiprima Elvanny Myori, S.Si., M.Si.

Learning Outcomes (Capaian Pembelajaran) Mata Kuliah terkait KKNI :
Mampu menjelaskan fungsi vektor, mampu menyelesaikan limit dan kekontinuan dari suatu fungsi vektor.

Soft skills/Karakter : Berpikir kritis, disiplin, tekun, tanggung jawab, ketelitian, kerja sama, dan percaya diri dalam mengetahui, memahami dan menjelaskan fungsi vektor.

Materi :
1. Fungsi vektor
2. Limit dan kekontinuan fungsi vektor

TAHAP KEGIATAN	KEGIATAN DOSEN	KEGIATAN MAHASISWA	TEKNIK PENILAIAN	MEDIA
Pendahuluan	1. Memperkenalkan diri, memberi salam 2. Menjelaskan learning outcomes 3. Menjelaskan garis besar materi yang akan diberikan dan sistem penilaian 4. Memotivasi karakter religius	1. Memperhatikan 2. Mencatat penjelasan yang diberikan 3. Memperhatikan dan mencatat cakupan materi	1. Sikap 2. Lisan	• Modul • White Board • Laptop • LCD
Penyajian	1. Menjelaskan definisi fungsi vektor. 2. Menjelaskan limit dari suatu fungsi vektor. 3. Menjelaskan syarat suatu fungsi vektor	1. Memperhatikan dan mencatat penjelasan yang diberikan. 2. Memperhatikan dan mencatat penjelasan yang diberikan. 3. Memperhatikan dan mencatat	1. Sikap 2. Lisan	• Modul • White Board • Laptop • LCD

	dapat dikatakan kontinu di suatu titik. 4. Memeberikan dan menjelaskan contoh limit dan kekontinuan suatu fungsi vektor pada suatu titik.. 5. Memberikan mahasiswa suatu fungsi vektor dan meminta menentukan limit dan kekontinuannya pada suatu titik. 6. Membahas bersama dan menyimpulkan jawaban mahasiswa. 7. Memberikan kesempatan kepada mahasiswa untuk bertanya tentang materi yang telah dibahas. 8. Memberikan dan menjelaskan jawaban dari pertanyaan yang diajukan mahasiswa.	penjelasan yang diberikan. 4. Memperhatikan dan mencatat penjelasan yang diberikan. 5. Menyelesaikan persoalan dan mengemukakan pendapat. 6. Memperhatikan dan mencatat. 7. Mengajukan pertanyaan . 8. Memperhatikan dan mencatat.		
Penutup	1. Menyimpulkan bersama mahasiswa tentang materi yang telah disampaikan. 2. Menugaskan mahasiswa untuk membaca referensi materi yang akan dibahas pada. pertemuan berikutnya 3. Memberikan tugas untuk dikumpulkan pada pertemuan berikutnya.	1. Memperhatikan. 2. Memperhatikan dan mencatat materi yang ditugaskan. 3. Memperhatikan dan mencatat materi penugasan.	1. Sikap 2. Tulisan	• Modul • White Board • Laptop • LCD

Rubrik Penilaian

1. Lisan

No	Pertanyaan	Skor			
		1	2	3	4
1	Apa itu fungsi vektor? Berikan contoh!				
2	Jelaskan perbedaan fungsi vektor dengan fungsi skalar!				
3	Jelaskan definisi limit fungsi vektor pada suatu titik!				
4	Jelaskan syarat suatu fungsi dapat dikatakan kontinu pada suatu titik!				

2. Tulisan

1. Tentukan nilai limit dari fungsi vektor berikut.
   a. $\lim_{t\to 0}[(5-2t^2)\boldsymbol{i} - \cos t\, \boldsymbol{j}]$
   b. $\lim_{t\to 0}\left[\left(\frac{t^2+4t+4}{t+4}\right)\boldsymbol{i} + (t-2)\boldsymbol{j} - (2t+3)\boldsymbol{k}\right]$
2. Tunjukkan kekontinuan fungsi vektor berikut di titik yang diberikan.
   a. $\boldsymbol{r_1}(t) = (t^2-1)\boldsymbol{i} - (2t+2)\boldsymbol{j}$ di $t = -1$
   b. $\boldsymbol{r_2}(t) = \left(\frac{t^2-4}{t-2}\right)\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} + (t+1)\boldsymbol{k}$ di titik $t = 2$

3. Sikap/Karakter

No	Indikator / Nama Mahasiswa	Indikator Sikap										Nilai Total
		1. Ingin tahu	2. Percaya diri	3. Tanggung jawab	4. Disiplin	5. Teliti	6. Kerjasama	7. Mendengarkan penjelasan	8. Bertanya	9. Menjawab	10. Menanggapi	
1												
2												
3												
	dst											
	Rata-rata											

Daftar pustaka :

1. Purcell, J., Edwin, dan Dale Varberg, “Kalkulus dan Geometri Analitis”, Jakarta : Penerbit Erlangga, 1990.
2. Rahma, Ammy, “Buku Kerja Matematika”, STKIP PGRI Sumbar.
3. Stewart, James. “Kalkulus”, (terjemahan Chriswan Sungkono), Jakarta : Penerbit Salemba Teknika, 2011.

<u>SATUAN ACARA PEMBELAJARAN</u>
<u>(SAP)</u>

Nama Bahan Kajian : Gradien, Divergensi dan Curl
Program Studi : Teknik Elektro Industri
Pertemuan ke- : 4
Dosen : Dwiprima Elvanny Myori, S.Si., M.Si.

Learning Outcomes (Capaian Pembelajaran) Mata Kuliah terkait KKNI :
Memahami tentang turunan fungsi vektor, gradien, divergensi dan curl, mampu menyelesaikan turunan, gradien, divergensi dan curl dari suatu fungsi vektor.

Soft skills/Karakter : Berpikir kritis, disiplin, tekun, tanggung jawab, ketelitian, kerja sama, dan percaya diri dalam mengetahui, memahami dan menjelaskan gradien, divergensi dan curl.

Materi :
1. Turunan fungsi vektor
2. Gradien
3. Divergensi
4. Curl

TAHAP KEGIATAN	KEGIATAN DOSEN	KEGIATAN MAHASISWA	TEKNIK PENILAIAN	MEDIA
Pendahuluan	1. Memperkenalkan diri, memberi salam. 2. Menjelaskan learning outcomes. 3. Menjelaskan garis besar materi yang akan diberikan dan sistem penilaian. 4. Memotivasi karakter religius.	1. Memperhatikan. 2. Mencatat penjelasan yang diberikan. 3. Memperhatikan dan mencatat cakupan materi.	1. Sikap 2. Lisan	• Modul • White Board • Laptop • LCD
Penyajian	1. Menjelaskan aturan turunan fungsi vektor. 2. Memberikan contoh penyelesaian turunan fungsi vektor dengan	1. Memperhatikan dan mencatat penjelasan yang diberikan. 2. Memperhatikan dan mencatat penjelasan yang	1. Sikap 2. Lisan	• Modul • White Board • Laptop • LCD

	menggunakan aturan turunan fungsi vektor. 3. Menjelaskan gradien, divergensi dan curl, serta memberikan contoh penyelesaiannya. 4. Memberikan mahasiswa suatu fungsi vektor dan meminta mahasiswa menentukan turunannya. 5. Memberikan dan meminta mahasiswa menyelesaikan permasalahan gradien, divergensi dan curl. 6. Membahas bersama dan menyimpulkan jawaban mahasiswa. 7. Memberikan kesempatan kepada mahasiswa untuk bertanya tentang materi yang telah dibahas. 8. Memberikan dan menjelaskan jawaban dari pertanyaan yang diajukan mahasiswa.	diberikan. 3. Memperhatikan dan mencatat penjelasan yang diberikan. 4. Menyelesaikan persoalan dan mengemukakan pendapat. 5. Menyelesaikan persoalan dan mengemukakan pendapat. 6. Memperhatikan dan mencatat. 7. Mengajukan pertanyaan. 8. Memperhatikan dan mencatat.		
Penutup	1. Menyimpulkan bersama mahasiswa tentang materi yang telah disampaikan. 2. Menugaskan mahasiswa untuk membaca referensi materi yang akan dibahas pada pertemuan berikutnya 3. Memberikan tugas untuk dikumpulkan pada pertemuan berikutnya.	1. Memperhatikan. 2. Memperhatikan dan mencatat materi yang ditugaskan. 3. Memperhatikan dan mencatat materi penugasan.	1. Sikap 2. Tulisan	• Modul • White Board • Laptop • LCD

Rubrik Penilaian

1. Lisan

No	Pertanyaan	Skor			
		1	2	3	4
1	Sebutkan dan jelaskan aturan turunan fungsi vektor!				
2	Apa itu operator del?				
3	Apa itu gradien, divergensi dan curl?				
4	Jelaskan hubungan gradien dengan turunan berarah!				

2. Tulisan

1. Misalkan $\phi(x, y, z) = e^{xyz}$, tentukanlah
   a. $\nabla\phi$ pada titik $(1, 2, 1)$
   b. $|\nabla\phi|$ pada titik $(1, 2, 1)$
   c. $\boldsymbol{n}$, jika $\boldsymbol{n}$ vektor satuan dari $\nabla\phi$ pada titik $(1, 2, 1)$
2. Carilah turunan berarah dari $f = 4xz^3 - 3x^2y^2z$ pada $(2, -1, 2)$ dalam arah $2\boldsymbol{i} - 3\mathbf{j} + 6\boldsymbol{k}$.
3. Misalkan

$$\boldsymbol{F}(x, y, z) = x^2yz\mathbf{i} + 3xyz^3\mathbf{j} + (x^2 - z^2)\mathbf{k}.$$

Tentukan div $\boldsymbol{F}$ dan curl $\boldsymbol{F}$.

3. Sikap/Karakter

No	Indikator / Nama Mahasiswa	Indikator Sikap										Nilai Total
		1. Ingin tahu	2. Percaya diri	3. Tanggung jawab	4. Disiplin	5. Teliti	6. Kerjasama	7. Mendengarkan penjelasan	8. Bertanya	9. Menjawab	10. Menanggapi	
1												
2												
3												
	dst											
	Rata-rata											

Daftar pustaka :

1. Purcell, J., Edwin, dan Dale Varberg, “Kalkulus dan Geometri Analitis”, Jakarta : Penerbit Erlangga, 1990.
2. Rahma, Ammy, “Buku Kerja Matematika”, STKIP PGRI Sumbar.
3. Stewart, James. “Kalkulus”, (terjemahan Chriswan Sungkono), Jakarta : Penerbit Salemba Teknika, 2011.

SATUAN ACARA PEMBELAJARAN
(SAP)

Nama Bahan Kajian : Integral dalam ruang berdimensi-n
Program Studi : Teknik Elektro Industri
Pertemuan ke- : 5
Dosen : Dwiprima Elvanny Myori, S.Si., M.Si.

Learning Outcomes (Capaian Pembelajaran) Mata Kuliah terkait KKNI :
Memahami dan menjelaskan tentang fungsi dan grafik fungsi, serta mampu menyelesaikan integral dalam ruang berdimensi-n.

Soft skills/Karakter : Berpikir kritis, disiplin, tekun, tanggung jawab, ketelitian, kerja sama, dan percaya diri dalam mengetahui, memahami dan menjelaskan integral dalam ruang berdimensi-n.

Materi :
1. Integral lipat dua
2. Integral lipat tiga

TAHAP KEGIATAN	KEGIATAN DOSEN	KEGIATAN MAHASISWA	TEKNIK PENILAIAN	MEDIA
Pendahuluan	1. Memperkenalkan diri, memberi salam. 2. Menjelaskan learning outcomes. 3. Menjelaskan garis besar materi yang akan diberikan dan sistem penilaian. 4. Memotivasi karakter religius.	1. Memperhatikan. 2. Mencatat penjelasan yang diberikan. 3. Memperhatikan dan mencatat cakupan materi.	1. Sikap 2. Lisan	• Modul • White Board • Laptop • LCD
Penyajian	1. Menjelaskan definisi integral lipat dua. 2. Menjelaskan sifat-sifat integral lipat dua.	1. Memperhatikan dan mencatat penjelasan yang diberikan. 2. Memperhatikan dan mencatat penjelasan yang diberikan.	1. Sikap 2. Lisan	• Modul • White Board • Laptop • LCD

	3. Memberikan contoh penyelesaian integral lipat dua. 4. Menjelaskan definsi integral lipat tiga. 5. Memeberikan contoh penyelesaian integral lipat tiga. 6. Memberikan dan meminta mahasiswa menyelesaikan permasalahan integral lipat dua dan lipat tiga. 7. Membahas bersama dan menyimpulkan jawaban mahasiswa. 8. Memberikan kesempatan kepada mahasiswa untuk bertanya tentang materi yang telah dibahas. 9. Memberikan dan menjelaskan jawaban dari pertanyaan yang diajukan mahasiswa.	3. Memperhatikan dan mencatat penjelasan yang diberikan. 4. Memperhatikan dan mencatat penjelasan yang diberikan. 5. Memperhatikan dan mencatat penjelasan yang diberikan. 6. Menyelesaikan persoalan dan mengemukakan pendapat. 7. Memperhatikan dan mencatat 8. Mengajukan pertanyaan. 9. Memperhatikan dan mencatat.		
Penutup	1. Menyimpulkan bersama mahasiswa tentang materi yang telah disampaikan. 2. Menugaskan mahasiswa untuk membaca referensi materi yang akan dibahas pada pertemuan berikutnya 3. Memberikan tugas untuk dikumpulkan pada pertemuan berikutnya.	1. Memperhatikan. 2. Memperhatikan dan mencatat materi yang ditugaskan. 3. Memperhatikan dan mencatat materi penugasan.	1. Sikap 2. Tulisan	• Modul • White Board • Laptop • LCD

Rubrik Penilaian

1. Lisan

No	Pertanyaan	Skor			
		1	**2**	**3**	**4**
1	Apa itu integral lipat dua?				
2	Apa itu integral lipat tiga?				
3	Sebutkan sifat-sifat integral lipat dua!				
4	Kapan integral lipat dua dan integral lipat tiga digunakan?				

2. Tulisan

1. Misalkan $R = \{(x, y)|1 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq 2\}$. Hitunglah $\iint_R f(x, y)\, dA$, dimana f adalah sebagai berikut

$$f(x, y) = \begin{cases} 2, 1 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 1 \\ 1, 1 \leq x \leq 3, 1 \leq y \leq 2 \\ 3, 3 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq 2 \end{cases}$$

2. Hitunglah setiap integral berulang berikut
   a. $\int_{-1}^{1} \int_{1}^{2} (x^2 + y^2)\, dx\, dy$
   b. $\int_{0}^{3} \int_{0}^{1} 2x\sqrt{x^2 + y}\, dx\, dy$
   c. $\int_{0}^{\pi/2} \int_{0}^{\sin\theta} r\, dr\, d\theta$
   d. $\int_{0}^{2} \int_{1}^{z} \int_{0}^{x/2} 2xyz\, dy\, dx\, dz$
3. Hitunglah integral lipat dua di R berikut

$$\iint_R (x^2 + y^2)\, dA; R = \{(x, y)|-1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2\}$$

4. Tentukan integral

$$\iiint_S f(x, y, z)\, dV$$

dengan

$$S = \left\{(x, y, z) \middle| 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 3, 0 \leq z \leq \frac{1}{6}(12 - 3x - 2y)\right\}$$

3. Sikap/Karakter

No	Indikator / Nama Mahasiswa	Indikator Sikap										Nilai Total
		1. Ingin tahu	**2. Percaya diri**	**3. Tanggung jawab**	**4. Disiplin**	**5. Teliti**	**6. Kerjasama**	**7. Mendengarkan penjelasan**	**8. Bertanya**	**9. Menjawab**	**10. Menanggapi**	
1												
2												
3												
	dst											
	Rata-rata											

Daftar pustaka :

1. Purcell, J., Edwin, dan Dale Varberg, "Kalkulus dan Geometri Analitis", Jakarta : Penerbit Erlangga, 1990.
2. Stewart, James. "Kalkulus", (terjemahan Chriswan Sungkono), Jakarta : Penerbit Salemba Teknika, 2011.

SATUAN ACARA PEMBELAJARAN
(SAP)

Nama Bahan Kajian : Integral garis dan permukaan
Program Studi : Teknik Elektro Industri
Pertemuan ke- : 6
Dosen : Dwiprima Elvanny Myori, S.Si., M.Si.

Learning Outcomes (Capaian Pembelajaran) Mata Kuliah terkait KKNI :
Memahami dan dapat menyelesaikan permasalahan integral garis dan permukaan.

Soft skills/Karakter : Berpikir kritis, disiplin, tekun, tanggung jawab, ketelitian, kerja sama, dan percaya diri dalam mengetahui, memahami dan menjelaskan integral garis dan permukaan.

Materi :
1. Integral garis.
2. Integral permukaan.

TAHAP KEGIATAN	KEGIATAN DOSEN	KEGIATAN MAHASISWA	TEKNIK PENILAIAN	MEDIA
Pendahuluan	1. Memperkenalkan diri, memberi salam. 2. Menjelaskan learning outcomes. 3. Menjelaskan garis besar materi yang akan diberikan dan sistem penilaian. 4. Memotivasi karakter religius.	1. Memperhatikan. 2. Mencatat penjelasan yang diberikan. 3. Memperhatikan dan mencatat cakupan materi.	1. Sikap 2. Lisan	• Modul • White Board • Laptop • LCD
Penyajian	1. Meminta pendapat mahasiswa tentang integral garis. 2. Memberikan reinforcement atas jawaban mahasiswa. 3. Menjelaskan definisi integral garis dan memberikan	1. Mengajukan pendapat tentang integral garis. 2. Menerima reinforcement 3. Memperhatikan dan mencatat penjelasan yang diberikan.	1. Sikap 2. Lisan	• Modul • White Board • Laptop • LCD

	contohnya. 4. Menjelaskan definisi integral permukaan dan memberikan contohnya. 5. Memberikan mahasiswa beberapa soal tentang integral garis dan permukaan, dan meminta untuk menyelesaikannya. 6. Membahas bersama dan menyimpulkan jawaban mahasiswa. 7. Memberikan kesempatan kepada mahasiswa untuk bertanya tentang materi yang telah dibahas. 8. Memberikan dan menjelaskan jawaban dari pertanyaan yang diajukan mahasiswa	4. Memperhatikan dan mencatat penjelasan yang diberikan. 5. Menyelesaikan persoalan. 6. Memperhatikan dan mencatat 7. Mengajukan pertanyaan 8. Memperhatikan dan mencatat		
Penutup	1. Menyimpulkan bersama mahasiswa tentang materi yang telah disampaikan. 2. Menugaskan mahasiswa untuk membaca referensi materi yang akan dibahas pada pertemuan berikutnya 3. Memberikan tugas untuk dikumpulkan pada pertemuan berikutnya.	1. Memperhatikan. 2. Memperhatikan dan mencatat materi yang ditugaskan. 3. Memperhatikan dan mencatat materi penugasan.	1. Sikap 2. Tulisan	• Modul • White Board • Laptop • LCD

Rubrik Penilaian

1. Lisan

No	**Pertanyaan**	**Skor**			
		1	**2**	**3**	**4**
1	Jelaskan tentang integral garis!				
2	Apa perbedaan integral vektor dan integral garis?				
3	Jelaskan tentang integral permukaan!				
4	Bagaimana cara yang lebih sederhana dalam menghitung integral permukaan?				

2. Tulisan

1. Jika $\boldsymbol{A} = (3x^2 - 6yz)i + (2y + 3xz)j + (1 - 4xyz^2)k$, hitung $\int_C \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{r}$ dari (0,0,0) sampai (1,1,1) sepanjang lintasan berikut.
   a. Garis lurus dari (0,0,0) ke (0,0,1), kemudian (0,1,1) ke (1,1,1).
   b. Garis lurus yang menghubungkan (0,0,0) dan (1,1,1).
2. Hitunglah integral garis

$$\int_C (x^2 - y^2)dx + 2xy\, dy$$

   di sepanjang kurva C yang persamaan parametriknya adalah $x = t^2, y = t^3, 0 \leq t \leq \frac{3}{2}$.

3. Tentukan luas permukaan dari bidang $2x + y + 2z = 16$ yang terpotong oleh
   a. $x = 0, y = 0, x = 2, y = 3$
   b. $x = 0, y = 0$, dan $x^2 + y^2 = 64$

3. Sikap/Karakter

No	Indikator / Nama Mahasiswa	Indikator Sikap										Nilai Total
		1. Ingin tahu	2. Percaya diri	3. Tanggung jawab	4. Disiplin	5. Teliti	6. Kerjasama	7. Mendengarkan penjelasan	8. Bertanya	9. Menjawab	10. Menanggapi	
1												
2												
3												
	dst											
	Rata-rata											

Daftar pustaka :

1. Purcell, J., Edwin, dan Dale Varberg, “Kalkulus dan Geometri Analitis”, Jakarta : Penerbit Erlangga, 1990.
2. Rahma, Ammy, “Buku Kerja Matematika”, STKIP PGRI Sumbar.
3. Stewart, James. “Kalkulus”, (terjemahan Chriswan Sungkono), Jakarta : Penerbit Salemba Teknika, 2011.

SATUAN ACARA PEMBELAJARAN
(SAP)

Nama Bahan Kajian : Integral volume dan teorema divergensi Gauss
Program Studi : Teknik Elektro Industri
Pertemuan ke- : 7
Dosen : Dwiprima Elvanny Myori, S.Si., M.Si.

Learning Outcomes (Capaian Pembelajaran) Mata Kuliah terkait KKNI :
Memahami dan dapat menyelesaikan permasalahan integral volume dan teorema divergensi Gauss.

Soft skills/Karakter : Berpikir kritis, disiplin, tekun, tanggung jawab, ketelitian, kerja sama, dan percaya diri dalam mengetahui, memahami dan menjelaskan integral volume dan teorema divergensi Gauss.

Materi :
1. Integral volume.
2. Teorema Divergensi Gauss.

TAHAP KEGIATAN	KEGIATAN DOSEN	KEGIATAN MAHASISWA	TEKNIK PENILAIAN	MEDIA
Pendahuluan	1. Memperkenalkan diri, memberi salam. 2. Menjelaskan learning outcomes. 3. Menjelaskan garis besar materi yang akan diberikan dan sistem penilaian. 4. Memotivasi karakter religius.	1. Memperhatikan. 2. Mencatat penjelasan yang diberikan. 3. Memperhatikan dan mencatat cakupan materi.	1. Sikap 2. Lisan	• Modul • White Board • Laptop • LCD
Penyajian	1. Meminta pendapat mahasiswa tentang integral volume. 2. Memberikan reinforcement atas jawaban mahasiswa. 3. Menjelaskan definisi	1. Mengajukan pendapat tentang integral volume. 2. Menerima reinforcement. 3. Memperhatikan	1. Sikap 2. Lisan	• Modul • White Board • Laptop • LCD

	integral volume dan memberikan contohnya. 4. Menjelaskan teorema divergensi Gauss dan memberikan beberapa contoh. 5. Memberikan mahasiswa beberapa soal tentang integral volume dan teorema divergensi Gauss, dan meminta untuk menyelesaikannya. 6. Membahas bersama dan menyimpulkan jawaban mahasiswa. 7. Memberikan kesempatan kepada mahasiswa untuk bertanya tentang materi yang telah dibahas. 8. Memberikan dan menjelaskan jawaban dari pertanyaan yang diajukan mahasiswa.	dan mencatat penjelasan yang diberikan. 4. Memperhatikan dan mencatat penjelasan yang diberikan. 5. Menyelesaikan persoalan. 6. Memperhatikan dan mencatat. 7. Mengajukan pertanyaan. 8. Memperhatikan dan mencatat.		
Penutup	1. Menyimpulkan bersama mahasiswa tentang materi yang telah disampaikan. 2. Menugaskan mahasiswa untuk membaca referensi materi yang akan dibahas pada pertemuan berikutnya 3. Memberikan tugas untuk dikumpulkan pada pertemuan berikutnya.	1. Memperhatikan. 2. Memperhatikan dan mencatat materi yang ditugaskan. 3. Memperhatikan dan mencatat materi penugasan.	1. Sikap 2. Tulisan	• Modul • White Board • Laptop • LCD

Rubrik Penilaian

1. Lisan

No	Pertanyaan	Skor			
		1	2	3	4
1	Jelaskan definsi integral volume!				
2	Jelaskan hubungan integral permukaan dengan teorema divergensi gauss!				
3	Jelaskan tentang teorema divergensi Gauss!				
4	Berikan contoh yang berkaitan dengan teorema divergensi Gauss!				

2. Tulisan

1. Hitung $\iiint_V \overline{\nabla} \cdot \bar{F}\, dV$ dimana V adalah ruang tertutup yang dibatasi oleh $x = 0, x = 1, y = 0, y = 1, z = 0, z = 1$ dengan $\bar{F} = 4xz\bar{\imath} - y^2\bar{\jmath} + yz\bar{k}$.
2. Hitunglah volume benda yang dibatasi oleh permukaan $2x + 2y + z = 4, z = 0, y = 0,$ dan $x = 0$ yang terletak di kuadran pertama jika diketahui $\bar{F} = y\bar{\imath} + 2z\bar{\jmath} - x\bar{k}$.
3. Hitung $\iint_S \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{n}\, dS$ untuk $\boldsymbol{A} = (2xy + z)\boldsymbol{i} + y^2\boldsymbol{j} - (x + 3y)\boldsymbol{k}$ pada daerah yang dibatasi oleh $2x + 2y + z = 6, x = 0, y = 0, z = 0$.
4. Jika S adalah permukaan tertutup sebarang yang menutupi sebuah volume V dan $\boldsymbol{A} = ax\boldsymbol{i} + by\boldsymbol{j} + cz\boldsymbol{k}$, maka buktikan bahwa $\iint_S \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{n}\, dS = (a + b + c)V$.

3. **Sikap/Karakter**

No	Indikator / Nama Mahasiswa	Indikator Sikap										Nilai Total
		1. Ingin tahu	2. Percaya diri	3. Tanggung jawab	4. Disiplin	5. Teliti	6. Kerjasama	7. Mendengarkan penjelasan	8. Bertanya	9. Menjawab	10. Menanggapi	
1												
2												
3												
	dst											
	Rata-rata											

Daftar pustaka :

1. Purcell, J., Edwin, dan Dale Varberg, “Kalkulus dan Geometri Analitis”, Jakarta : Penerbit Erlangga, 1990.
2. Rahma, Ammy, “Buku Kerja Matematika”, STKIP PGRI Sumbar.
3. Stewart, James. “Kalkulus”, (terjemahan Chriswan Sungkono), Jakarta : Penerbit Salemba Teknika, 2011.

SATUAN ACARA PEMBELAJARAN
(SAP)

Nama Bahan Kajian : Teorema Stokes dan Teorema Green
Program Studi : Teknik Elektro Industri
Pertemuan ke- : 8
Dosen : Dwiprima Elvanny Myori, S.Si., M.Si.

Learning Outcomes (Capaian Pembelajaran) Mata Kuliah terkait KKNI :
Memahami dan dapat menyelesaikan permasalahan teorema Stokes dan teorema Green.

Soft skills/Karakter : Berpikir kritis, disiplin, tekun, tanggung jawab, ketelitian, kerja sama, dan percaya diri dalam mengetahui, memahami dan menjelaskan teorema Stokes dan teorema Green.

Materi :
1. Teorema Stokes.
2. Teorema Green.

TAHAP KEGIATAN	KEGIATAN DOSEN	KEGIATAN MAHASISWA	TEKNIK PENILAIAN	MEDIA
Pendahuluan	1. Memperkenalkan diri, memberi salam. 2. Menjelaskan learning outcomes. 3. Menjelaskan garis besar materi yang akan diberikan dan sistem penilaian. 4. Memotivasi karakter religius.	1. Memperhatikan. 2. Mencatat penjelasan yang diberikan. 3. Memperhatikan dan mencatat cakupan materi.	1. Sikap 2. Lisan	• Modul • White Board • Laptop • LCD
Penyajian	1. Menjelaskan teorema Stokes dan memberikan contoh yang terkait dengan teorema Stokes. 2. Menjelaskan teorema Green dan	1. Memperhatikan dan mencatat penjelasan yang diberikan. 2. Memperhatikan dan mencatat	1. Sikap 2. Lisan	• Modul • White Board • Laptop • LCD

	memberikan beberapa contoh. 3. Memberikan mahasiswa beberapa soal tentang teorema Stokes dan teorema Green, dan meminta untuk menyelesaikannya. 4. Membahas bersama dan menyimpulkan jawaban mahasiswa. 5. Memberikan kesempatan kepada mahasiswa untuk bertanya tentang materi yang telah dibahas. 6. Memberikan dan menjelaskan jawaban dari pertanyaan yang diajukan mahasiswa.	penjelasan yang diberikan. 3. Menyelesaikan persoalan. 4. Memperhatikan dan mencatat. 5. Mengajukan pertanyaan. 6. Memperhatikan dan mencatat.		
Penutup	1. Menyimpulkan bersama mahasiswa tentang materi yang telah disampaikan. 2. Menugaskan mahasiswa untuk membaca referensi materi yang akan dibahas pada pertemuan berikutnya 3. Memberikan tugas untuk dikumpulkan pada pertemuan berikutnya.	1. Memperhatikan. 2. Memperhatikan dan mencatat materi yang ditugaskan. 3. Memperhatikan dan mencatat materi penugasan.	1. Sikap 2. Tulisan	• Modul • White Board • Laptop • LCD

Rubrik Penilaian

1. Lisan

No	Pertanyaan	Skor			
		1	**2**	**3**	**4**
1	Jelaskan hubungan integral garis dengan teorema Stokes!				
2	Jelaskan hubungan integral garis dengan teorema Green!				
3	Berikan contoh yang berkaitan dengan teorema Stokes!				

4	Berikan contoh yang berkaitan dengan teorema Green!				

2. Tulisan

1. Gunakan Teorema Stokes untuk menghitung $\iint_S (\nabla \times \boldsymbol{A}) \cdot d\boldsymbol{S}$ dengan $\boldsymbol{A} = 3y\boldsymbol{i} - xz\boldsymbol{j} + yz^2\boldsymbol{k}$, dimana S adalah permukaan paraboloida $2z = x^2 + y^2$ yang dibatasi oleh $z = 2$ dan C sebagai batasnya.
2. Hitunglah $\oint_C \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}$ dimana $\boldsymbol{F} = xz\boldsymbol{i} + 2z\boldsymbol{j} - xy\boldsymbol{k}$ dan C adalah perpotongan bidang $y = z + 2$ dengan silinder $x^2 + y^2 = 4$.
3. Hitunglah $\oint_C [(x^2 - xy^3)dx + (y^2 - 2xy)dy]$ dimana C adalah suatu persegi dengan titik sudut $(0,0), (0,2), (2,2)$, dan $(2,0)$.
4. Hitunglah $\int_C [(2x - y + 4)dx + (5y + 3x - 6)dy]$ di sekeliling suatu segitiga pada bidang xy dengan titik sudut $(0,0), (3,0)$, dan $(3,2)$ yang dijalani berlawanan arah dengan arah jarum jam.

3. Sikap/Karakter

No	Indikator / Nama Mahasiswa	Indikator Sikap										Nilai Total
		1. Ingin tahu	2. Percaya diri	3. Tanggung jawab	4. Disiplin	5. Teliti	6. Kerjasama	7. Mendengarkan penjelasan	8. Bertanya	9. Menjawab	10. Menanggapi	
1												
2												
3												
	dst											
	Rata-rata											

Daftar pustaka :

1. Purcell, J., Edwin, dan Dale Varberg, “Kalkulus dan Geometri Analitis”, Jakarta : Penerbit Erlangga, 1990.
2. Rahma, Ammy, “Buku Kerja Matematika”, STKIP PGRI Sumbar.
3. Stewart, James. “Kalkulus”, (terjemahan Chriswan Sungkono), Jakarta : Penerbit Salemba Teknika, 2011.

SATUAN ACARA PEMBELAJARAN
(SAP)

Nama Bahan Kajian : Fungsi periodik dan deret Fourier
Program Studi : Teknik Elektro Industri
Pertemuan ke- : 9
Dosen : Dwiprima Elvanny Myori, S.Si., M.Si.

Learning Outcomes (Capaian Pembelajaran) Mata Kuliah terkait KKNI :
Memahami dan dapat menyelesaikan permasalahan fungsi periodik dan deret Fourier.

Soft skills/Karakter : Berpikir kritis, disiplin, tekun, tanggung jawab, ketelitian, kerja sama, dan percaya diri dalam mengetahui, memahami dan menjelaskan fungsi periodik dan deret Fourier.

Materi :
1. Fungsi periodik
2. Deret Fourier

TAHAP KEGIATAN	KEGIATAN DOSEN	KEGIATAN MAHASISWA	TEKNIK PENILAIAN	MEDIA
Pendahuluan	1. Memperkenalkan diri, memberi salam. 2. Menjelaskan learning outcomes. 3. Menjelaskan garis besar materi yang akan diberikan dan sistem penilaian. 4. Memotivasi karakter religius.	1. Memperhatikan. 2. Mencatat penjelasan yang diberikan. 3. Memperhatikan dan mencatat cakupan materi.	1. Sikap 2. Lisan	• Modul • White Board • Laptop • LCD
Penyajian	1. Menjelaskan tentang fungsi periodik dan memberikan contoh. 2. Menjelaskan deret Fourier dan memberikan beberapa contoh. 3. Memberikan mahasiswa beberapa	1. Memperhatikan dan mencatat penjelasan yang diberikan. 2. Memperhatikan dan mencatat penjelasan yang diberikan. 3. Menyelesaikan persoalan.	1. Sikap 2. Lisan	• Modul • White Board • Laptop • LCD

	soal tentang fungsi periodik dan deret Fourier, dan meminta untuk menyelesaikannya. 4. Membahas bersama dan menyimpulkan jawaban mahasiswa. 5. Memberikan kesempatan kepada mahasiswa untuk bertanya tentang materi yang telah dibahas. 6. Memberikan dan menjelaskan jawaban dari pertanyaan yang diajukan mahasiswa.	4. Memperhatikan dan mencatat. 5. Mengajukan pertanyaan. 6. Memperhatikan dan mencatat.		
Penutup	1. Menyimpulkan bersama mahasiswa tentang materi yang telah disampaikan. 2. Menugaskan mahasiswa untuk membaca referensi materi yang akan dibahas pada pertemuan berikutnya 3. Memberikan tugas untuk dikumpulkan pada pertemuan berikutnya.	1. Memperhatikan. 2. Memperhatikan dan mencatat materi yang ditugaskan. 3. Memperhatikan dan mencatat materi penugasan.	1. Sikap 2. Tulisan	• Modul • White Board • Laptop • LCD

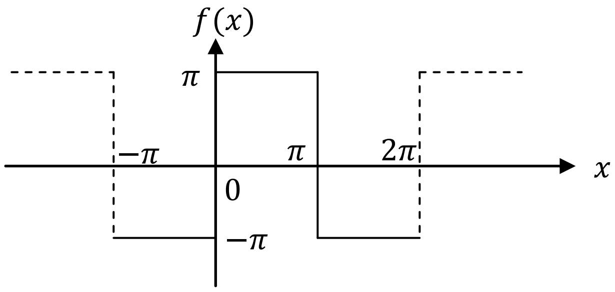
Rubrik Penilaian

1. Lisan

No	**Pertanyaan**	**Skor**			
		1	**2**	**3**	**4**
1	Jelaskan definisi deret Fourier!				
2	Apa itu fungsi periodik dan periode?				
3	Apa itu koefisien Fourier?				
4	Berikan contoh yang berkaitan dengan deret Fourier!				

2. Tulisan

1. Tentukan deret Fourier dari $f(x)$ yang berada pada interval $(-\pi, \pi)$ seperti digambarkan berikut.



2. Tentukan deret Fourier untuk merepresentasikan fungsi periodik berikut

$$f(x) = |x|, -\pi < x < \pi,$$

dimana $f(x + 2\pi) = f(x)$.

3. Sikap/Karakter

No	Indikator / Nama Mahasiswa	Indikator Sikap										Nilai Total
		1. Ingin tahu	2. Percaya diri	3. Tanggung jawab	4. Disiplin	5. Teliti	6. Kerjasama	7. Mendengarkan penjelasan	8. Bertanya	9. Menjawab	10. Menanggapi	
1												
2												
3												
	dst											
	Rata-rata											

Daftar pustaka :

1. Kreyzig, Erwin., “Matematika Teknik Lanjut”, Jakarta : Penerbit Erlangga, 1987.
2. Stroud, K. A, Dexter , J. Booth. “Advanced Engineering Mathematics”, Fourth Edition, New York : Palgrave Macmillan, 2003.

SATUAN ACARA PEMBELAJARAN
(SAP)

Nama Bahan Kajian : Deret Fourier fungsi khusus
Program Studi : Teknik Elektro Industri
Pertemuan ke- : 10
Dosen : Dwiprima Elvanny Myori, S.Si., M.Si.

Learning Outcomes (Capaian Pembelajaran) Mata Kuliah terkait KKNI :
Memahami dan dapat menyelesaikan permasalahan deret Fourier dari fungsi dengan periode $p = 2L$, serta mampu menentukan deret Fourier dari fungsi genap dan fungsi ganjil..

Soft skills/Karakter : Berpikir kritis, disiplin, tekun, tanggung jawab, ketelitian, kerja sama, dan percaya diri dalam mengetahui, memahami dan menjelaskan deret Fourier dari fungsi dengan periode $p = 2L$ dan deret Fourier dari fungsi genap dan fungsi ganjil.

Materi :
1. Fungsi periodik
2. Deret Fourier

TAHAP KEGIATAN	KEGIATAN DOSEN	KEGIATAN MAHASISWA	TEKNIK PENILAIAN	MEDIA
Pendahuluan	1. Memperkenalkan diri, memberi salam. 2. Menjelaskan learning outcomes. 3. Menjelaskan garis besar materi yang akan diberikan dan sistem penilaian. 4. Memotivasi karakter religius.	1. Memperhatikan. 2. Mencatat penjelasan yang diberikan. 3. Memperhatikan dan mencatat cakupan materi.	1. Sikap 2. Lisan	• Modul • White Board • Laptop • LCD
Penyajian	1. Menjelaskan tentang deret Fourier dari fungsi dengan periode $p = 2L$ dan memberikan contoh.	1. Memperhatikan dan mencatat penjelasan yang diberikan.	1. Sikap 2. Lisan	• Modul • White Board • Laptop • LCD

	2. Menjelaskan definisi fungsi genap dan fungsi ganjil. 3. Menjelaskan deret Fourier dari fungsi genap dan ganjil, serta memberikan beberapa contoh. 4. Memberikan mahasiswa beberapa soal tentang deret Fourier dari fungsi dengan periode $p = 2L$, fungsi genap dan ganjil, dan meminta untuk menyelesaikannya. 5. Membahas bersama dan menyimpulkan jawaban mahasiswa. 6. Memberikan kesempatan kepada mahasiswa untuk bertanya tentang materi yang telah dibahas. 7. Memberikan dan menjelaskan jawaban dari pertanyaan yang diajukan mahasiswa.	2. Memperhatikan dan mencatat penjelasan yang diberikan. 3. Memperhatikan dan mencatat penjelasan yang diberikan. 4. Menyelesaikan persoalan. 5. Memperhatikan dan mencatat. 6. Mengajukan pertanyaan. 7. Memperhatikan dan mencatat.		
Penutup	1. Menyimpulkan bersama mahasiswa tentang materi yang telah disampaikan. 2. Menugaskan mahasiswa untuk membaca referensi materi yang akan dibahas pada pertemuan berikutnya 3. Memberikan tugas untuk dikumpulkan pada pertemuan berikutnya.	1. Memperhatikan. 2. Memperhatikan dan mencatat materi yang ditugaskan. 3. Memperhatikan dan mencatat materi penugasan.	1. Sikap 2. Tulisan	• Modul • White Board • Laptop • LCD

Rubrik Penilaian

1. Lisan

No	Pertanyaan	Skor			
		1	2	3	4
1	Berikan contoh deret Fourier dari fungsi dengan periode $p = 2L$!				
2	Apa itu fungsi genap dan fungsi ganjil?				
3	Apa perbedaan dalam menentukan deret Fourier dari fungsi genap dan deret Fourier dari fungsi ganjil?				
4	Berikan contoh yang berkaitan dengan deret Fourier dari fungsi genap dan fungsi ganjil!				

2. Tulisan

1. Tentukan deret Fourier untuk merepresentasikan fungsi periodik berikut

$$f(x) = |x|, -1 < x < 1,$$

dimana $f(x+2) = f(x)$.

2. Tentukan deret Fourier untuk merepresentasikan fungsi periodik berikut

$$f(x) = x, -\pi < x < \pi,$$

dimana $f(x+2\pi) = f(x)$.

3. Sikap/Karakter

No	Indikator / Nama Mahasiswa	Indikator Sikap										Nilai Total
		1. Ingin tahu	2. Percaya diri	3. Tanggung jawab	4. Disiplin	5. Teliti	6. Kerjasama	7. Mendengarkan penjelasan	8. Bertanya	9. Menjawab	10. Menanggapi	
1												
2												
3												
	dst											

	Rata-rata	

Daftar pustaka :

1. Kreyzig, Erwin., “Matematika Teknik Lanjut”, Jakarta : Penerbit Erlangga, 1987.
2. Stroud, K. A, Dexter , J. Booth. “Advanced Engineering Mathematics”, Fourth Edition, New York : Palgrave Macmillan, 2003.

<u>SATUAN ACARA PEMBELAJARAN</u>
<u>(SAP)</u>

Nama Bahan Kajian : Deret setengah jangkauan dan deret fourier kompleks
Program Studi : Teknik Elektro Industri
Pertemuan ke- : 11
Dosen : Dwiprima Elvanny Myori, S.Si., M.Si.

Learning Outcomes (Capaian Pembelajaran) Mata Kuliah terkait KKNI :
Memahami dan dapat menyelesaikan permasalahan deret setengah jangkauan dan deret fourier kompleks.

Soft skills/Karakter : Berpikir kritis, disiplin, tekun, tanggung jawab, ketelitian, kerja sama, dan percaya diri dalam mengetahui, memahami dan menjelaskan deret setengah jangkauan dan deret Fourier kompleks.

Materi :
1. Deret setengah jangkauan
2. Deret Fourier kompleks

TAHAP KEGIATAN	KEGIATAN DOSEN	KEGIATAN MAHASISWA	TEKNIK PENILAIAN	MEDIA
Pendahuluan	1. Memperkenalkan diri, memberi salam. 2. Menjelaskan learning outcomes. 3. Menjelaskan garis besar materi yang akan diberikan dan sistem penilaian. 4. Memotivasi karakter religius.	1. Memperhatikan. 2. Mencatat penjelasan yang diberikan. 3. Memperhatikan dan mencatat cakupan materi.	1. Sikap 2. Lisan	• Modul • White Board • Laptop • LCD
Penyajian	1. Menjelaskan tentang deret setengah jangkauan dan memberikan contoh. 2. Menjelaskan tentang deret Fourier kompleks dan	1. Memperhatikan dan mencatat penjelasan yang diberikan. 2. Memperhatikan dan mencatat penjelasan yang	1. Sikap 2. Lisan	• Modul • White Board • Laptop • LCD

	memberikan beberapa contoh. 3. Memberikan mahasiswa beberapa soal tentang deret setengah jangkauan dan deret Fourier kompleks, dan meminta untuk menyelesaikannya. 4. Membahas bersama dan menyimpulkan jawaban mahasiswa. 5. Memberikan kesempatan kepada mahasiswa untuk bertanya tentang materi yang telah dibahas. 6. Memberikan dan menjelaskan jawaban dari pertanyaan yang diajukan mahasiswa.	diberikan. 3. Menyelesaikan persoalan. 4. Memperhatikan dan mencatat. 5. Mengajukan pertanyaan. 6. Memperhatikan dan mencatat.		
Penutup	1. Menyimpulkan bersama mahasiswa tentang materi yang telah disampaikan. 2. Menugaskan mahasiswa untuk membaca referensi materi yang akan dibahas pada pertemuan berikutnya 3. Memberikan tugas untuk dikumpulkan pada pertemuan berikutnya.	1. Memperhatikan. 2. Memperhatikan dan mencatat materi yang ditugaskan. 3. Memperhatikan dan mencatat materi penugasan.	1. Sikap 2. Tulisan	• Modul • White Board • Laptop • LCD

Rubrik Penilaian

1. Lisan

No	Pertanyaan	Skor			
		1	2	3	4
1	Apa itu deret setengah jangkauan?				
2	Apa perbedaan deret setengah jangkauan dengan deret Fourier dari				

	fungsi genap atau ganjil?				
3	Apa itu deret Fourier kompleks?				
4	Berikan contoh yang berkaitan dengan deret Fourier kompleks!				

2. Tulisan

1. Diberikan fungsi $f(x)$ yang didefinisikan sebagai

$$f(x) = 4 - x, \qquad 0 < x < 4.$$

Tentukan deret setengah jangkauan sinus dan kosinus untuk merepresentasikan fungsi tersebut.

2. Suatu fungsi $f(x)$ didefinisikan sebagai berikut

$$f(x) = \begin{cases} 3, & -2 < x < 0 \\ -5, & 0 < x < 2' \end{cases}$$

dengan $f(x+4) = f(x)$. Representasikan deret Fourier kompleks dari fungsi tersebut.

3. Sikap/Karakter

No	**Indikator** / **Nama Mahasiswa**	**Indikator Sikap**										**Nilai Total**
		1. Ingin tahu	**2. Percaya diri**	**3. Tanggung jawab**	**4. Disiplin**	**5. Teliti**	**6. Kerjasama**	**7. Mendengarkan penjelasan**	**8. Bertanya**	**9. Menjawab**	**10. Menanggapi**	
1												
2												
3												
	dst											
	Rata-rata											

Daftar pustaka :

1. Kreyzig, Erwin., “Matematika Teknik Lanjut”, Jakarta : Penerbit Erlangga, 1987.
2. Stroud, K. A, Dexter , J. Booth. “Advanced Engineering Mathematics”, Fourth Edition, New York : Palgrave Macmillan, 2003.

SATUAN ACARA PEMBELAJARAN
(SAP)

Nama Bahan Kajian : Transformasi Fourier
Program Studi : Teknik Elektro Industri
Pertemuan ke- : 12
Dosen : Dwiprima Elvanny Myori, S.Si., M.Si.

Learning Outcomes (Capaian Pembelajaran) Mata Kuliah terkait KKNI :
Memahami dan dapat menyelesaikan permasalahan transformasi Fourier dan sifat-sifatnya.

Soft skills/Karakter : Berpikir kritis, disiplin, tekun, tanggung jawab, ketelitian, kerja sama, dan percaya diri dalam mengetahui, memahami dan menjelaskan transformasi Fourier.

Materi :

1. Transformasi Fourier

TAHAP KEGIATAN	KEGIATAN DOSEN	KEGIATAN MAHASISWA	TEKNIK PENILAIAN	MEDIA
Pendahuluan	1. Memperkenalkan diri, memberi salam. 2. Menjelaskan learning outcomes. 3. Menjelaskan garis besar materi yang akan diberikan dan sistem penilaian. 4. Memotivasi karakter religius.	1. Memperhatikan. 2. Mencatat penjelasan yang diberikan. 3. Memperhatikan dan mencatat cakupan materi.	1. Sikap 2. Lisan	• Modul • White Board • Laptop • LCD
Penyajian	1. Menjelaskan definisi transformasi Fourier dan memberikan contoh. 2. Menjelaskan tentang transformasi Fourier dari beberapa fungsi khusus.	1. Memperhatikan dan mencatat penjelasan yang diberikan. 2. Memperhatikan dan mencatat penjelasan yang diberikan.	1. Sikap 2. Lisan	• Modul • White Board • Laptop • LCD

	3. Menjelaskan tentang sifat-sifat transformasi Fourier. 4. Memberikan mahasiswa beberapa soal tentang transformasi Fourier dan meminta untuk menyelesaikannya. 5. Membahas bersama dan menyimpulkan jawaban mahasiswa. 6. Memberikan kesempatan kepada mahasiswa untuk bertanya tentang materi yang telah dibahas. 7. Memberikan dan menjelaskan jawaban dari pertanyaan yang diajukan mahasiswa.	3. Memperhatikan dan mencatat penjelasan yang diberikan. 4. Menyelesaikan persoalan. 5. Memperhatikan dan mencatat. 6. Mengajukan pertanyaan. 7. Memperhatikan dan mencatat.		
Penutup	1. Menyimpulkan bersama mahasiswa tentang materi yang telah disampaikan. 2. Menugaskan mahasiswa untuk membaca referensi materi yang akan dibahas pada pertemuan berikutnya 3. Memberikan tugas untuk dikumpulkan pada pertemuan berikutnya.	1. Memperhatikan. 2. Memperhatikan dan mencatat materi yang ditugaskan. 3. Memperhatikan dan mencatat materi penugasan.	1. Sikap 2. Tulisan	• Modul • White Board • Laptop • LCD

Rubrik Penilaian

1. Lisan

No	Pertanyaan	Skor			
		1	2	3	4
1	Apa itu transformasi Fourier?				
2	Sebutkan sifat-sifat transformasi Fourier!				

3	Fungsi apa saja yang dapat diselesaikan dengan cara cepat pada transformasi Fourier?				
4	Berikan contoh yang berkaitan dengan transformasi Fourier!				

2. Tulisan

1. Tentukan transformasi Fourier dari fungsi berikut

$$f(t) = \begin{cases} e^{at}, & -1 < t < 1 \\ 0, & \text{selainnya} \end{cases}$$

2. Hitunglah transformasi Fourier dari fungsi berikut

$$f(t) = \begin{cases} -1, & \text{untuk} -1 < t < 0 \\ 1, & \text{untuk } 0 < t < 1 \\ 0, & \text{selainnya} \end{cases}$$

3. Sikap/Karakter

No	**Indikator** / **Nama Mahasiswa**	**Indikator Sikap**										**Nilai Total**
		1. Ingin tahu	**2. Percaya diri**	**3. Tanggung jawab**	**4. Disiplin**	**5. Teliti**	**6. Kerjasama**	**7. Mendengarkan penjelasan**	**8. Bertanya**	**9. Menjawab**	**10. Menanggapi**	
1												
2												
3												
	dst											
	Rata-rata											

Daftar pustaka :

1. Kreyzig, Erwin., "Matematika Teknik Lanjut", Jakarta : Penerbit Erlangga, 1987.
2. Stroud, K. A, Dexter , J. Booth. "Advanced Engineering Mathematics", Fourth Edition, New York : Palgrave Macmillan, 2003.

SATUAN ACARA PEMBELAJARAN
(SAP)

Nama Bahan Kajian : Transformasi Fourier sinus dan kosinus
Program Studi : Teknik Elektro Industri
Pertemuan ke- : 13
Dosen : Dwiprima Elvanny Myori, S.Si., M.Si.

Learning Outcomes (Capaian Pembelajaran) Mata Kuliah terkait KKNI :
Memahami dan dapat menyelesaikan permasalahan transformasi Fourier sinus dan kosinus.

Soft skills/Karakter : Berpikir kritis, disiplin, tekun, tanggung jawab, ketelitian, kerja sama, dan percaya diri dalam mengetahui, memahami dan menjelaskan transformasi Fourier sinus dan kosinus.

Materi :

1. Transformasi Fourier sinus
2. Transformasi Fourier kosinus

TAHAP KEGIATAN	KEGIATAN DOSEN	KEGIATAN MAHASISWA	TEKNIK PENILAIAN	MEDIA
Pendahuluan	1. Memperkenalkan diri, memberi salam. 2. Menjelaskan learning outcomes. 3. Menjelaskan garis besar materi yang akan diberikan dan sistem penilaian. 4. Memotivasi karakter religius.	1. Memperhatikan. 2. Mencatat penjelasan yang diberikan. 3. Memperhatikan dan mencatat cakupan materi.	1. Sikap 2. Lisan	• Modul • White Board • Laptop • LCD
Penyajian	1. Menjelaskan tentang transformasi Fourier sinus dan kosinus, serta memberikan beberapa contoh. 2. Memberikan dan menjelaskan tabel	1. Memperhatikan dan mencatat penjelasan yang diberikan. 2. Memperhatikan dan mencatat	1. Sikap 2. Lisan	• Modul • White Board • Laptop • LCD

	transformasi Fourier. 3. Memberikan mahasiswa beberapa soal tentang transformasi Fourier sinus dan kosinus, dan meminta untuk menyelesaikannya. 4. Membahas bersama dan menyimpulkan jawaban mahasiswa. 5. Memberikan kesempatan kepada mahasiswa untuk bertanya tentang materi yang telah dibahas. 6. Memberikan dan menjelaskan jawaban dari pertanyaan yang diajukan mahasiswa.	penjelasan yang diberikan. 3. Menyelesaikan persoalan. 4. Memperhatikan dan mencatat. 5. Mengajukan pertanyaan. 6. Memperhatikan dan mencatat.		
Penutup	1. Menyimpulkan bersama mahasiswa tentang materi yang telah disampaikan. 2. Menugaskan mahasiswa untuk membaca referensi materi yang akan dibahas pada pertemuan berikutnya 3. Memberikan tugas untuk dikumpulkan pada pertemuan berikutnya.	1. Memperhatikan. 2. Memperhatikan dan mencatat materi yang ditugaskan. 3. Memperhatikan dan mencatat materi penugasan.	1. Sikap 2. Tulisan	• Modul • White Board • Laptop • LCD

Rubrik Penilaian

1. Lisan

No	Pertanyaan	Skor			
		1	2	3	4
1	Jelaskan perbedaan transformasi Fourier sinus dan kosinus!				
2	Berikan contoh transformasi Fourier sinus dan transformasi kosinus!				

2. Tulisan

1. Tentukan transformasi Fourier kosinus dan sinus dari

$$f(t) = \begin{cases} 1, \text{untuk } 0 < t < a \\ 0, \quad \text{untuk } t \geq a \end{cases}$$

2. Tentukan transformasi Fourier kosinus dari

$$f(t) = \begin{cases} 1, & \text{untuk } 0 < t < 1 \\ -1, & \text{untuk } 1 < t < 2 \\ 0, & \text{untuk } t > 2 \end{cases}$$

3. Sikap/Karakter

No	**Indikator** / **Nama Mahasiswa**	**Indikator Sikap**										**Nilai Total**
		1. Ingin tahu	**2. Percaya diri**	**3. Tanggung jawab**	**4. Disiplin**	**5. Teliti**	**6. Kerjasama**	**7. Mendengarkan penjelasan**	**8. Bertanya**	**9. Menjawab**	**10. Menanggapi**	
1												
2												
3												
	dst											
	Rata-rata											

Daftar pustaka :

1. Kreyzig, Erwin., "Matematika Teknik Lanjut", Jakarta : Penerbit Erlangga, 1987.
2. Stroud, K. A, Dexter , J. Booth. "Advanced Engineering Mathematics", Fourth Edition, New York : Palgrave Macmillan, 2003.

<u>SATUAN ACARA PEMBELAJARAN</u>
<u>(SAP)</u>

Nama Bahan Kajian : Pemodelan *State Space*
Program Studi : Teknik Elektro Industri
Pertemuan ke- : 14
Dosen : Dwiprima Elvanny Myori, S.Si., M.Si.

Learning Outcomes (Capaian Pembelajaran) Mata Kuliah terkait KKNI :
Memahami dan dapat menyelesaikan permasalahan pemodelan *State Space*.

Soft skills/Karakter : Berpikir kritis, disiplin, tekun, tanggung jawab, ketelitian, kerja sama, dan percaya diri dalam mengetahui, memahami dan menjelaskan pemodelan *State Space*.

Materi :

1. Pemodelan *State Space*.

TAHAP KEGIATAN	KEGIATAN DOSEN	KEGIATAN MAHASISWA	TEKNIK PENILAIAN	MEDIA
Pendahuluan	1. Memperkenalkan diri, memberi salam. 2. Menjelaskan learning outcomes. 3. Menjelaskan garis besar materi yang akan diberikan dan sistem penilaian. 4. Memotivasi karakter religius.	1. Memperhatikan. 2. Mencatat penjelasan yang diberikan. 3. Memperhatikan dan mencatat cakupan materi.	1. Sikap 2. Lisan	• Modul • White Board • Laptop • LCD
Penyajian	1. Menjelaskan tentang pemodelan *State Space*, serta memberikan beberapa contoh. 2. Memberikan mahasiswa beberapa soal tentang pemodelan *State Space*, dan meminta	1. Memperhatikan dan mencatat penjelasan yang diberikan. 2. Menyelesaikan persoalan.	1. Sikap 2. Lisan	• Modul • White Board • Laptop • LCD

	untuk menyelesaikannya. 3. Membahas bersama dan menyimpulkan jawaban mahasiswa. 4. Memberikan kesempatan kepada mahasiswa untuk bertanya tentang materi yang telah dibahas. 5. Memberikan dan menjelaskan jawaban dari pertanyaan yang diajukan mahasiswa.	3. Memperhatikan dan mencatat. 4. Mengajukan pertanyaan. 5. Memperhatikan dan mencatat.		
Penutup	1. Menyimpulkan bersama mahasiswa tentang materi yang telah disampaikan. 2. Menugaskan mahasiswa untuk membaca referensi materi yang akan dibahas pada pertemuan berikutnya 3. Memberikan tugas untuk dikumpulkan pada pertemuan berikutnya.	1. Memperhatikan. 2. Memperhatikan dan mencatat materi yang ditugaskan. 3. Memperhatikan dan mencatat materi penugasan.	1. Sikap 2. Tulisan	• Modul • White Board • Laptop • LCD

Rubrik Penilaian

1. Lisan

No	Pertanyaan	Skor			
		1	**2**	**3**	**4**
1	Apa itu state?				
2	Apa itu vektor state?				
3	Jelaskan definisi state space!				
4	Sebutkan 3 jenis variabel yang diperlukan untuk analisis persamaan state space!				
5	Berikan contoh kaitan fungsi alih dan persamaan state space!				

2. Sikap/Karakter

No	Indikator / Nama Mahasiswa	Indikator Sikap										Nilai Total
		1. Ingin tahu	2. Percaya diri	3. Tanggung jawab	4. Disiplin	5. Teliti	6. Kerjasama	7. Mendengarkan penjelasan	8. Bertanya	9. Menjawab	10. Menanggapi	
1												
2												
3												
	dst											
	Rata-rata											

Daftar pustaka :

1. Sinha, Naresh, K .“ Linear Systems “, John Wiley and Sons Inc, 1991.

BAHAN AJAR

MATEMATIKA TEKNIK

Oleh :

DWIPRIMA ELVANNY MYORI, S.Si, M.Si

PROGRAM STUDI TEKNIK ELEKTRO INDUSTRI

JURUSAN TEKNIK ELEKTRO

FAKULTAS TEKNIK

UNIVERSITAS NEGERI PADANG

2014

DAFTAR ISI

KATA PENGANTAR .... **i**

DAFTAR ISI .... **ii**

I. PENDAHULUAN

A. Deskripsi 1

B. Petunjuk penggunaan bahan ajar 2

C. Tujuan Akhir 2

II. PEMBELAJARAN

A. Rencana Belajar Mahasiswa 3

B. Kegiatan Belajar 5

1. Kegiatan Belajar 1
   - a. Tujuan Belajar 5
   - b. Uraian Materi 5
   - c. Soal 11
2. Kegiatan Belajar 2
   - a. Tujuan Belajar 12
   - b. Uraian Materi 12
   - c. Soal 17
3. Kegiatan Belajar 3
   - a. Tujuan Belajar 18
   - b. Uraian Materi 18
   - c. Soal 21
4. Kegiatan Belajar 4
   - a. Tujuan Belajar 22
   - b. Uraian Materi 22
   - c. Soal 26
5. Kegiatan Belajar 5
   - a. Tujuan Belajar 27

b. Uraian Materi 27
c. Soal 32
6. Kegiatan Belajar 6
a. Tujuan Belajar 33
b. Uraian Materi 33
c. Soal 37
7. Kegiatan Belajar 7
a. Tujuan Belajar 39
b. Uraian Materi 39
c. Soal 43
8. Kegiatan Belajar 8
a. Tujuan Belajar 44
b. Uraian Materi 44
c. Soal 47
9. Kegiatan Belajar 9
a. Tujuan Belajar 48
b. Uraian Materi 48
c. Soal 53
10. Kegiatan Belajar 10
a. Tujuan Belajar 54
b. Uraian Materi 54
c. Soal 58
11. Kegiatan Belajar 11
a. Tujuan Belajar 59
b. Uraian Materi 59
c. Soal 64
12. Kegiatan Belajar 12
a. Tujuan Belajar 65
b. Uraian Materi 65
c. Soal 69

13. Kegiatan Belajar 13
a. Tujuan Belajar 70
b. Uraian Materi 70
c. Soal 72
14. Kegiatan Belajar 14
a. Tujuan Belajar 73
b. Uraian Materi 73

IV. PENUTUP 79
V. DAFTAR PUSTAKA 80

KATA PENGANTAR

Alhamdulillah, segala puji dan syukur hanya ke hadirat Allah SWT atas segala karunia yang telah diberikan. Shalawat dan salam kita haturkan kepada junjungan alam, Rasulullah Muhammad SAW yang telah menjadi tauladan bagi kita semua dalam bersikap.

Matematika Teknik merupakan salah satu mata kuliah pada Program Studi Teknik Elektro Industri Fakultas Teknik Universitas Negeri Padang. Bahan ajar ini dirancang untuk menunjang mata kuliah Matematika Teknik. Diharapkan bahan ajar ini dapat mmelengkapi referensi Matematika Teknik yang sudah ada dan akan menjadi buku pegangan dalam pelaksanaan mata kuliah Matematika Teknik.

Tidak lupa penulis ucapkan terima kasih kepada semua pihak yang telah memberikan kepercayaan dan dukungan semangat kepada penulis untuk membuat bahan ajar ini yang tidak mungkin penulis ucapkan satu per satu. Penulis akan sangat berterima kasih atas kritik dan saran yang membangun untuk kesempurnaan bahan ajar ini dan juga untuk menjadi catatan bagi penulis agar menjadi lebih baik ke depannya.

Padang, Oktober 2014

Dwiprima Elvanny Myori

I. PENDAHULUAN

A. Deskripsi

Menurut kamus besar Bahasa Indonesia, matematika adalah ilmu tentang bilangan-bilangan, hubungan antar bilangan dan prosedur operasionalyang digunakan dalam penyelesaian masalah bilangan. Dalam perkembangannya bilangan ini diaplikasikan ke bidang ilmu-ilmu lain sesuai penggunaannya. Menurut James dan James (1976), matematika diartikan sebagai ilmu logika mengenai bentuk, susunan, besaran, dan konsep-konsep yang saling berubungan satu sama lainnya dengan jumlah yang terbagi ke dalam tiga bidang yaitu aljabar, analisis, dan geometri. Sedangkan menurut Reys dkk. (1984), matematika diartikan sebagai analisis suatu pola dan hubungannya, suatu jalan atau pola berpikir, suatu seni, suatu bahasa, dan suatu alat. Berdasarkan pengertian-pengertian tentang matematika tersebut maka matematika dapat diartikan sebagai suatu ilmu yang mempelajari bilangan dan bangun serta konsep-konsep yang berkenaan dengan kebenarannya secara logika menggunakan simbol-simbol yang umum serta aplikasi dalam bidang lainnya.

Konsep dasar matematika mengajarkan untuk dapat berpikir secara sistematis dan logis. Banyak pemahaman yang salah ketika seseorang menganggap bahwa matematika hanya berhitung dan *problem solving* saja. Proses untuk dapat melakukan analisis yang mendalam dan baik terhadap segala sesuatu yang dihadapi dalam keseharian dapat dilatih melalui pemahaman konsep matematika yang benar dan tepat.

Matematika teknik merupakan salah satu yang perlu dikuasai dengan oleh mahasiswa teknik, sehingga mahasiswa memiliki pola pikir yang ilmiah dan kritis, logis dan sistematis. Matematika teknik juga membantu mahasiswa mampu merancang model matematis sederhana dan terampil dalam teknis matematika yang didukung oleh konsep, penalaran, rumus dan metode yang benar.

Untuk itu, bahan ajar ini mencoba untuk menjelaskan konsep dasar dalam bidang matematika teknik. Diharapkan setelah membaca bahan ajar ini, mahasiswa memahami konsep-konsep dasar dalam matematika teknik dan dapat mengembangkannya menjadi konsep yang lebih lanjut, mahasiswa juga diharapkan dapat menyederhanakan dan menyelesaikan suatu permasalahan dengan menggunakan konsep-konsep yang sudah ada.

Mata kuliah ini ditawarkan kepada mahasiswa semester II Program Studi Teknik Elektro Industri FT UNP dengan beban sebanyak 4 SKS. Mata kuliah ini ditawarkan untuk memberikan pengetahuan dan pengalaman kepada mahasiswa dalam memahami konsep-konsep matematis yang akan digunakan pada mata kuliah lainnya.

Bahan ajar ini berusaha sejauh mungkin memberikan dasar-dasar teori maupun contoh soal beserta penyelesaiannya yang diperlukan pada mata kuliah lainnya.

B. Prasyarat

Untuk dapat memahami bahan ajar ini, pembaca harus telah menguasai perhitungan matematika dasar. Lebih spesifik lagi, bahan ajar ini diperuntukkan bagi mahasiswa Teknik Elektro Industri FT UNP pada semester II.

C. Petunjuk Penggunaan Bahan ajar

Bahan ajar ini tersusun secara sistematis yang dibagi menjadi 14 kegiatan pembelajaran, di mana setiap kegiatan pembelajaran adalah satu kali tatap muka di kelas dengan waktu 4×50 menit.

Materi pada bahan ajar ini dimulai dari turunan dan integral parsial, teorema integral, deret Fourier, transformasi Fourier dan pemodelan *State Space*. Masing-masing kegiatan pembelajaran dilengkapi dengan contoh soal dan penyelesainnya serta soal sebagai latihan pembaca.

D. Tujuan Akhir

Setelah menyelesaikan mata kuliah ini mahasiswa mempunyai pemahaman konseptual yang benar tentang topik-topik utama dalam Matematika serta teorema dan sifat-sifat matematis lainnya.

II. PEMBELAJARAN

A. Rencana Belajar Mahasiswa

No	MATERI	Kegiatan	Sumber Bacaan	Jumlah Pertemuan
1	Fungsi variabel banyak dan turunan parsial	Ceramah, diskusi, dan latihan	1, 6	1 ×
2	Turunan parsial tingkat tinggi dan pendiferensialan implisit	Ceramah, diskusi, dan latihan	1, 6	1 ×
3	Limit dan kekontinuan fungsi vektor	Ceramah, diskusi, dan latihan	2, 5	1 ×
4	Turunan fungsi vektor, gradien, divergensi dan curl	Ceramah, diskusi, dan latihan	2,3,5	1 ×
5	Integral dalam ruang dimensi-n	Ceramah, diskusi, dan latihan	2,3,5	1 ×
6	Integral garis dan permukaan	Ceramah, diskusi, dan latihan	2,3,5	1 ×
7	Integral volume dan teorema divergensi Gauss	Ceramah, diskusi, dan latihan	2,3,5	1 ×
8	Ujian tengah semester	Tertulis		1 ×
9	Teorema Stokes dan teorema Green	Ceramah, diskusi, dan latihan	2,3,5	1 ×
10	Fungsi periodik dan deret Fourier	Ceramah, diskusi, dan latihan	1, 6	1 ×
11	Deret fourier dari fungsi dengan periode $p = 2L$, fungsi genap, fungsi ganjil	Ceramah, diskusi, dan latihan	1, 6	1 ×
12	Deret setengah jangkauan dan deret Fourier kompleks	Ceramah, diskusi, dan latihan	1, 6	1 ×
13	Tranformasi Fourier	Ceramah, diskusi, dan latihan	1, 6	1 ×
14	Tranformasi Fourier sinus dan	Ceramah, diskusi, dan latihan	1, 6	1 ×

	kosinus			
15	Pemodelan *State Space*	Ceramah, diskusi, dan latihan	4	$1 \times$
16	Ujian akhir semester	Tertulis		$1 \times$
	JUMLAH PERTEMUAN			**16** $\times$

Padang, Oktober 2014

Mengetahui,
Ketua Program Studi
Teknik Elektro Industri

Dosen Pembina,

Aslimeri, S.T., M.T.
NIP. 19560501 198301 1 001

Dwiprima Elvanny M, S.Si., M.Si.
NIP. 19881101 201212 2 001

1. Kegiatan Belajar 1

a. Tujuan Belajar

1. Mahasiswa dapat memahami tentang fungsi variabel banyak.
2. Mahasiswa dapat memahami tentang turunan parsial dan dapat menyelesaikan permasalahan turunan dari fungsi variabel banyak.

b. Uraian Materi

Fungsi Dua Variabel atau Lebih

Definisi 1.1

Sebuah fungsi f dari dua variabel adalah aturan yang menghubungkan setiap pasangan bilangan riil yang berurutan (x, y) dalam suatu himpunan D dengan sebuah bilangan riil unik yang dilambangkan oleh $f(x, y)$. Himpunan D adalah **daerah asal** dari f dan **daerah hasil** adalah himpunan nilai yang digunakan f.

Berdasarkan definisi fungsi dua variabel dapat diperumum menjadi sebagai berikut.

Definisi 1.2

Fungsi n variabel adalah aturan yang menghubungkan suatu angka $z = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ pada susunan n bilangan riil $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ (disebut n-tuple).

Fungsi dua variabel atau lebih dapat ditulis dalam bentuk eksplisit atau implisit.

- Jika fungsi dua variabel dinyatakan dalam bentuk eksplisit, maka secara umum ditulis dalam bentuk
$$\mathrm{z} = f(x, y).$$
- Jika fungsi dituliskan dalam bentuk implisit, maka secara umum ditulis dalam bentuk
$$f(x, y, z) = 0.$$

Contoh 1.1

1. $z = 2x + y$ (fungsi eksplisit)
2. $z = \ln|x^2 - 2y^4|$ (fungsi eksplisit)
3. $z = 1 - 2\sqrt{\frac{1}{2\sin x - \sin y}}$ (fungsi eksplisit)
4. $xy + xz - yz = 0$ (fungsi implisit)
5. $xy - e^x \sin y = 0$ (fungsi implisit)

6. $\ln|x^2 - y^2| - \arctan\frac{y}{x} = 0$ (fungsi implisit)
7. $\arctan\frac{y}{x} - 2z = 0$ (fungsi implisit)

Semua fungsi dalam bentuk eksplisit dengan mudah dapat dinyatakan dalam bentuk implisit, akan tetapi tidak semua bentuk implisit dapat dinyatakan dalam bentuk eksplisit.

Jika suatu fungsi f dinyatakan oleh sebuah rumus dan tidak ada daerah asaln yang ditentukan, maka daerah asal dari f dianggap sebagai himpunan dari semua pasangan (x, y) dengan persamaan yang diberikan adalah sebuah bilangan riil yang terdefinisi dengan baik.

Contoh 1.2

Cari daerah asal dari fungsi-fungsi berikut, lalu hitung $f(3,2)$.

a. $f(x, y) = \frac{\sqrt{x+y+1}}{x-1}$
b. $f(x, y) = x\ln(y^2 - x)$

Penyelesaian.

a. Pernyataan untuk f masuk akal jika penyebutnya bukan 0 dan besaran dalam akar pangkatnya bukan negatif. Jadi, daerah asal dari f adalah
$$D = \{(x, y)|x + y + 1 \geq 0, x \neq 1\}$$
dan
$$f(3,2) = \frac{\sqrt{3+2+1}}{3-1} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$
b. Karena $\ln(y^2 - x)$ terdefinisi hanya ketika $y^2 - x > 0$, daerah asal dari f adalah $D = \{(x, y)|x < y^2\}$ dan
$$f(3,2) = 3\ln(2^2 - 3) = 3\ln 1 = 0.$$

Turunan Parsial Fungsi Dua dan Tiga Variabel

Misal $z = f(x, y)$ adalah fungsi dengan variabel bebas x dan y. Karena x dan y variabel bebas, maka terdapat beberapa kemungkinan, yaitu :

1. y dianggap tetap, sedangkan x berubah-ubah.
2. x dianggap tetap, sedangkan y berubah-ubah.
3. x dan y berubah bersama-sama sekaligus.

Definisi 1.2

Misal $z = f(x, y)$ adalah fungsi dua variabel yang terdefinisi pada interval tertentu, **turunan parsial** pertama z terhadap x dan y, dinotasikan $\frac{\partial z}{\partial x}$ dan $\frac{\partial z}{\partial y}$, didefinisikan oleh

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

dan

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y},$$

asalkan limitnya ada.

Contoh 1.3

Tentukan turunan parsial pertama dari

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Penyelesaian.

Pertama, turunan parsial terhadap variabel x, yaitu :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{(x + \Delta x)^2 + y^2} - \sqrt{x^2 + y^2}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{(x + \Delta x)^2 + y^2} - \sqrt{x^2 + y^2}}{\Delta x} \cdot \frac{\sqrt{(x + \Delta x)^2 + y^2} + \sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{(x + \Delta x)^2 + y^2} + \sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x)^2 + y^2 - (x^2 + y^2)}{\Delta x \sqrt{(x + \Delta x)^2 + y^2} + \sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x \sqrt{(x + \Delta x)^2 + y^2} + \sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x + \Delta x}{\sqrt{(x + \Delta x)^2 + y^2} + \sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$= \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Jadi,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Kedua, turunan parsial terhadap variabel y yaitu :

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\sqrt{x^2 + (y + \Delta y)^2} - \sqrt{x^2 + y^2}}{\Delta y}$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\sqrt{x^2 + (y + \Delta y)^2} - \sqrt{x^2 + y^2}}{\Delta y} \cdot \frac{\sqrt{x^2 + (y + \Delta y)^2} + \sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + (y + \Delta y)^2} + \sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{x^2 + (y + \Delta y)^2 - (x^2 + y^2)}{\Delta y \sqrt{x^2 + (y + \Delta y)^2} + \sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{2y\Delta y + \Delta y^2}{\Delta y \sqrt{x^2 + (y + \Delta y)^2} + \sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{2y + \Delta y}{\sqrt{x^2 + (y + \Delta y)^2} + \sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$= \frac{2y}{2\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Contoh 1.4

Tentukan turunan parsial pertama dari

$$z = \sin(x + y)$$

Penyelesaian.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x + \Delta x + y) - \sin(x + y)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\cos\frac{1}{2}(x + \Delta x + y + x + y)\sin\frac{1}{2}(x + \Delta x + y - x - y)}{\Delta x}$$

$$= 2\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos\left(x + y + \frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}$$

$$= 2\lim_{\Delta x \to 0} \cos\left(x + y + \frac{\Delta x}{2}\right) \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}$$

$$= 2 \lim_{\Delta x \to 0} \cos\left(x + y + \frac{\Delta x}{2}\right) \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \frac{1}{2}$$

$$= 2\cos(x + y)\,(1)(1/2)$$

$$= \cos(x + y)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x + y + \Delta y) - \sin(x + y)}{\Delta y}$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{2\cos\frac{1}{2}(x + y + \Delta y + x + y)\sin\frac{1}{2}(x + y + \Delta y - x - y)}{\Delta y}$$

$$= 2 \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\cos\left(x + y + \frac{\Delta y}{2}\right)\sin\frac{\Delta y}{2}}{\Delta y}$$

$$= 2 \lim_{\Delta y \to 0} \cos\left(x + y + \frac{\Delta y}{2}\right) \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\sin\frac{\Delta y}{2}}{\Delta y}$$

$$= 2 \lim_{\Delta y \to 0} \cos\left(x + y + \frac{\Delta y}{2}\right) \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin \frac{\Delta y}{2}}{\frac{\Delta y}{2}} \cdot \frac{1}{2}$$

$$= 2\cos(x + y)\,(1)(1/2)$$

$$= \cos(x + y)$$

Berikut aturan untuk memudahkan dalam menentukan turunan parsial dari $z = f(x, y)$.

1. Untuk menentukan $\frac{\partial z}{\partial x}$, anggaplah y sebagai konstanta dan turunkan $f(x, y)$ terhadap x.
2. Untuk menentukan $\frac{\partial z}{\partial y}$, anggaplah x sebagai konstanta dan turunkan $f(x, y)$ terhadap y.

Contoh 1.5

Tentukan turunan parsial dari $z = f(x, y) = x^3 + x^2y^3 - 2y^2$.

Penyelesaian.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 + 2xy^3$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 3x^2y^2 - 4y$$

Contoh 1.6

Tentukan turunan dari $z = x^2 \sin(xy^2)$.

Penyelesaian.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \sin(xy^2)\frac{\partial}{\partial x}x^2 + x^2\frac{\partial}{\partial x}\sin(xy^2)$$

$$= 2x\sin(xy^2) + x^2 \cdot y^2 \cdot \cos(xy^2)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^2\frac{\partial}{\partial y}\sin(xy^2) = x^2\cos(xy^2)\frac{\partial}{\partial y}(xy^2) = 2x^3y\cos(xy^2)$$

Dengan cara yang sama, andaikan $w = f(x, y, z)$ adalah fungsi tiga variabel yang terdefinisi dalam selang tertentu. Turunan parsial pertama dinyatakan dengan $\frac{\partial w}{\partial x}$, $\frac{\partial w}{\partial y}$, dan $\frac{\partial w}{\partial z}$ yang secara berurut didefinisikan oleh

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{f(x + \Delta x, y, z) - f(x, y, z)}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0}\frac{f(x, y + \Delta y, z) - f(x, y, z)}{\Delta y}$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \lim_{\Delta z \to 0}\frac{f(x, y, z + \Delta z) - f(x, y, z)}{\Delta z}$$

Asalkan limitnya ada.

Contoh 1.7

Tentukan turunan parsial pertama dari

$$f(x, y, z) = xy + 2yz + 3zx.$$

Penyelesaian.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y + 3z, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = x + 2z,$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 2y + 3x$$

c. Soal

1. Cari daerah asal dan daerah hasil dari

$$f(x,y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$$

2. Cari daerah asal dari

$$g(x,y,z) = \ln(z - y) + xy \sin z$$

3. Tentukan semua turunan parsial pertama dari fungsi berikut.
   a. $f(x,y) = (2x - y)^4$
   b. $f(x,y) = 36 - x^2 - y^2$
   c. $f(x,y) = xy^2 - 2x^2 + 3y^3$
   d. $f(x,y,z) = xy - yz + xz$
   e. $f(x,y,z) = zy\sqrt{x^2 + y^2}$
   f. $f(x,y,z) = \sqrt[3]{x^2 + y^2 + z^3}$

2. Kegiatan Belajar 2

a. Tujuan Belajar

1. Mahasiswa mampu menyelesaikan permasalahan turunan parsial tingkat tinggi.
2. Mahasiswa dapat menyelesaikan permasalahan diferensial fungsi implisit.

b. Uraian Materi

Turunan parsial fungsi dua peubah atau lebih dapat ditentukan oleh turunan parsial ke-n, untuk $n \geq 2$ turunan parsialnya dinamakan **turunan parsial tingkat tinggi**.

Dengan menggunakan analogi fungsi satu peubah dapat ditentukan turunan parsial tingkat 2, 3, dan seterusnya.

Jadi, andaikan $z = f(x, y)$, maka turunan parsial tingkat dua adalah

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \text{dan } \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}.$$

Demikian pula, jika $w = f(x, y, z)$, maka turunan parsial tingkat dua adalah

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z}, \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z}, \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x}, \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial x}, \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial y}.$$

Banyaknya turunan ditentukan oleh rumus m^n, dimana m banyaknya variabel dan n menunjukkan turunan ke-n.

Contoh 2.1

Tentukan $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ dan $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ dari

$$z = \frac{xy}{x - y}.$$

Penyelesaian.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y(x - y) - xy \cdot 1}{(x - y)^2} = \frac{-y^2}{(x - y)^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x(x - y) - xy \cdot (-1)}{(x - y)^2} = \frac{x^2}{(x - y)^2}$$

Sehingga,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{-y^2}{(x-y)^2}\right)$$

$$= \frac{0 \cdot (x-y)^2 - (-y^2) \cdot 2 \cdot (x-y) \cdot 1}{(x-y)^4} = \frac{2xy^2 - 2y^3}{(x-y)^4}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x^2}{(x-y)^2}\right) = \frac{0 \cdot (x-y)^2 - x^2 \cdot 2 \cdot (x-y) \cdot (-1)}{(x-y)^4}$$

$$= \frac{-2x^3 - yx^2}{(x-y)^4}$$

Aturan Rantai

Versi pertama

Jika $z = f(x, y)$, dimana x dan y adalah fungsi-fungsi dari t, maka dapat diperoleh dz/dt, yaitu pada teorema berikut.

Teorema A.
Misalkan $x = x(t)$ dan $y = y(t)$ dapat didiferensialkan di t, dan misalkan $z = f(x, y)$ dapat didiferensialkan di $(x(t), y(t))$ dan

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

Contoh 2.2

Misalkan $z = x^3 y$, dimana $x = 2t$ dan $y = t^2$. Tentukan dz/dt.

Penyelesaian.

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

$$= (3x^2 y)(2) + (x^3)(2t)$$

$$= 6(2t)^2(t^2) + 2(2t)^3(t) = 40t^4$$

Contoh 2.3

Ketika sebuah silinder lingkaran tegak yang padat dipanaskan. Jari-jari r dan tingginya h akan meningkat, sehingga luas permukaannya S juga meningkat. Andaikan pada waktu sesaat ketika $r = 10$ cm, dan

$h = 100$ cm, r meningkat 0,2 cm per jam dan h meningkat 0,5 cm per jam. Seberapa cepatkah peningkatan S pada waktu tersebut?

Penyelesaian.

Rumus untuk luas permukaan total dari sebuah silinder adalah

$$S = 2\pi rh + 2\pi r^2$$

Jadi,

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\partial S}{\partial r}\frac{dr}{dt} + \frac{\partial S}{\partial h}\frac{dh}{dt}$$

$$= (2\pi h + 4\pi r)(0{,}2) + (2\pi r)(0{,}5)$$

Di $r = 10$ dan $h = 100$,

$$\frac{dS}{dt} = (2\pi \cdot 100 + 4\pi \cdot 10)(0{,}2) + (2\pi \cdot 10)(0{,}5) = 58\pi \ \text{cm}^2/\text{jam}$$

Contoh 2.4

Andaikan $w = x^2y + y + xz$ dimana $x = \cos\theta$, $y = \sin\theta$, dan $z = \theta^2$. Tentukan $dw/d\theta$, dan hitunglah nilai tersebut di $\theta = \pi/3$.

Penyelesaian.

$$\frac{dw}{d\theta} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{d\theta} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{d\theta} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{dz}{d\theta}$$

$$= (2xy + z)(-\sin\theta) + (x^2 + 1)(\cos\theta) + (x)(2\theta)$$

$$= -2\cos\theta\sin^2\theta - \theta^2\sin\theta + \cos^3\theta + \cos\theta + 2\theta\cos\theta$$

Di $\theta = \pi/3$,

$$\frac{dw}{d\theta} = -2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} - \frac{\pi^2}{9} \cdot \frac{\sqrt{3}}{9} + \left(\frac{1}{4} + 1\right)\frac{1}{2} + \frac{2\pi}{3} \cdot \frac{1}{2}$$

$$= -\frac{1}{8} - \frac{\pi^2\sqrt{3}}{18} + \frac{\pi}{3}$$

Versi kedua

Teorema B.

Misalkan $x = x(s,t)$ dan $y = y(s,t)$ mempunyai turunan parsial pertama di (s,t), dan misalkan $z = f(x,y)$ dapat didiferensialkan di $(x(s,t), y(s,t))$. Maka $z = f(x(s,t), y(s,t))$ mempunyai turunan parsial pertama yang dinyatakan dengan

(i) $\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}$

(ii) $\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}$.

Contoh 2.5

Jika $z = 3x^2 - y^2$, di mana $x = 2s + 7t$ dan $y = 5st$, tentukan $\partial s/\partial t$ dan nyatakan dalam s dan t.

Penyelesaian.

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} = (6x)(7) + (-2y)(5s)$$

$$= 42(2s + 7t) - 10st(5s)$$

$$= 84s + 294t - 50s^2t$$

Contoh 2.6

Jika $w = x^2 + y^2 + z^2 + xy$, dimana $x = st$, $y = s - t$, dan $z = s + 2t$, tentukan $\partial w/\partial t$.

Penyelesaian.

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t}$$

$$= (2x + y)(s) + (2y + x)(-1) + (2z)(2)$$

$$= (2st + s - t)(s) + (2s - 2t + st)(-1) + (2s + 4t)2$$

$$= 2s^2t + s^2 - 2st + 2s + 10t$$

Fungsi Implisit

Andaikan $F(x,y) = 0$ mendefinisikan y secara implisit sebagai sebuah fungsi untuk x, misalnya, $y = g(x)$, tetapi fungsi g tersebut sulit atau tidak mungkin untuk ditentukan. Salah satu metode untuk menyelesaikan permasalahan ini yaitu dengan mendiferensialkan kedua ruas dari $F(x, y) = 0$ terhadap x dengan menggunakan Aturan Rantai, diperoleh

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dx} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0.$$

Dengan menyelesaikan dy/dx akan dihasilkan rumus

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial y}.$$

Contoh 2.7

Tentukan dy/dx jika $x^3 + x^2y - 10y^4 = 0$ dengan menggunakan

a. Aturan Rantai
b. Pendiferensialan implisit

Penyelesaian.

a. Misalkan $F(x, y) = x^3 + x^2y - 10y^4$. Maka

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial y} = -\frac{3x^2 + 2xy}{x^2 - 40y^3}$$

b. Diferensialkan kedua ruas terhadap x untuk menghasilkan

$$3x^2 + x^2\frac{dy}{dx} + 2xy - 40y^3\frac{dy}{dx} = 0$$

Dengan menyelesaikan $\frac{dy}{dx}$ memberikan hasil yang sama seperti yang dihasilkan dengan menggunakan Aturan Rantai.

Jika z adalah sebuah fungsi implisit dari x dan y yang didefinisikan oleh persamaan $F(x, y, z) = 0$, maka pendiferensialan pada kedua ruas terhadap x, dengan mempertahankan agar nilai y tetap, akan menghasilkan

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

Dengan menyelsaikan rumus di atas diperoleh

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial z}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\partial F/\partial y}{\partial F/\partial z}$$

Contoh 2.8

Jika $F(x,y,z) = x^3e^{y+z} - y\sin(x-z) = 0$ mendefinisikan z secara implisit sebagai fungsi dari x dan y, tentukan $\partial z/\partial x$.

Penyelesaian.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial z} = -\frac{3x^2e^{y+z} - y\cos(x-z)}{x^3e^{y+z} + y\cos(x-z)}$$

c. Soal

1. Tentukan seluruh turunan parsial kedua dari masing-masing fungsi berikut.
   a. $f(x,y) = x^4 - 3x^2y^3$
   b. $z = \frac{x}{(x+y)}$
   c. $v = \ln(3x+5y)$
2. Carilah turunan parsial yang diminta.
   a. $f(x,y) = 3xy^4 + x^3y^2$; f_{xxy} , f_{yyy}
   b. $f(x,t) = x^2e^{-ct}$; f_{ttt} , f_{txx}
3. Tentukan $\frac{dz}{dt}$ dan $\frac{dw}{dt}$ dari fungsi-fungsi berikut.
   a. $z = x\ln(x+2y)$, $x = \sin t$, $y = \cos t$
   b. $w = xy + yz^2$, $x = e^t$, $y = e^t\sin t$, $z = e^t\cos t$
4. Gunakan Aturan Rantai untuk menentukan $\frac{\partial z}{\partial s}$ dan $\frac{\partial z}{\partial t}$.
   a. $z = e^{xy}\cos\theta$, $x = st$, $\theta = \sqrt{s^2+t^2}$
   b. $z = {}^{x}\!/_{y}$, $x = se^t$, $y = 1 + se^{-t}$

3. Kegiatan Belajar 3

a. Tujuan Belajar

1. Mahasiswa dapat memahami tentang fungsi vektor.
2. Mahasiswa dapat menyelesaiakan permasalahan limit dan kekontinuan fungsi vektor.

b. Uraian Materi

Fungsi Vektor

Jika sembarang nilai skalar t dikaitkan dengan suatu vektor $\boldsymbol{r}$ maka$\boldsymbol{r}$ bisa dinyatakan sebagai **fungsi vektor** dari t atau dapat dinyatakan sebagai $\boldsymbol{r}(t)$, yaitu suatu vektor yang komponen-komponennya merupakan fungsi dari nilai skalar t.

Dalam $\mathbb{R}^2$, fungsi vektor $\boldsymbol{r}(t)$ ditulis dengan,

$$\boldsymbol{r}(t) = f(t)\boldsymbol{i} + g(t)\boldsymbol{j}$$

Dalam $\mathbb{R}^3$, fungsi vektor $\boldsymbol{r}(t)$ ditulis dengan,

$$\boldsymbol{r}(t) = f(t)\,\boldsymbol{i} + g(t)\,\boldsymbol{j} + h(t)\,\boldsymbol{k}$$

Jika sembarang titik (x, y, z) di $\mathbb{R}^3$ dikaitkan dengan suatu vektor $\boldsymbol{r}$, maka $\boldsymbol{r}$ bisa dinyatakan dalam bentuk fungsi vektor sebagai berikut:

$$\bar{r}(x, y, z) = f(x, y, z)\boldsymbol{i} + g(x, y, z)\boldsymbol{j} + h(x, y, z)\boldsymbol{k}$$

Contoh fungsi vektor, misalnya persamaan dari gerakan bebas suatu partikel dalam ruang.

Jika setiap titik dalam suatu ruang $(\mathbb{R}^3)$ dikaitkan dengan suatu vektor, maka ruang tersebut disebut **medan vektor**.

Contoh : aliran fluida (gas, panas, air dan sebagainya) dalam suatu ruangan.

Sembarang fungsi yang tidak dikaitkan dengan vektor disebut **fungsi skalar**, dan suatu ruang yang setiap titiknya tidak dikaitkan dengan suatu vektor disebut **medan skalar**.

Contoh : temperatur sembarang titik dalam suatu ruang.

Limit dan Kekontinuan Fungsi Vektor

Limit fungsi vektor $\boldsymbol{r}(t) = f(t)\boldsymbol{i} + g(t)\boldsymbol{j}$ di titik $t = c$ ada jika dan hanya jika limit fungsi $f = f(t)$ di $t = c$ dan limit fungsi $g = g(t)$ di $t = c$ ada.

Sehingga dapat ditulis menjadi

$$\lim_{t\to c} \boldsymbol{r}(t) = \left(\lim_{t\to c} f(t)\right)\boldsymbol{i} + \left(\lim_{t\to c} g(t)\right)\boldsymbol{j}$$

Hal ini juga berlaku untuk fungsi vektor dalam $\mathbb{R}^3$. Misalkan limit fungsi $\boldsymbol{r}(t) = f(t)\,\boldsymbol{i} + g(t)\,\boldsymbol{j} + h(t)\,\boldsymbol{k}$ di titik $t = c$ ada. Maka dapat dituliskan

$$\lim_{t\to c} \boldsymbol{r}(t) = \left(\lim_{t\to c} f(t)\right)\boldsymbol{i} + \left(\lim_{t\to c} g(t)\right)\boldsymbol{j} + \left(\lim_{t\to c} h(t)\right)\boldsymbol{k}$$

Contoh 3.1

Tentukan nilai limit dari fungsi vektor berikut.

1. $\lim_{t\to 0}\left[(4t^2 - 1)\boldsymbol{i} - \left(\frac{\sin t}{t}\right)\boldsymbol{j}\right]$
2. $\lim_{t\to \infty}\left[\left(\frac{2t}{t-1}\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{\sin t}{t}\right)\boldsymbol{j} - \left(\frac{5t+1}{t^2}\right)\boldsymbol{k}\right]$

Penyelesaian.

1. Perhatikan bahwa

$$\lim_{t\to 0}(4t^2 - 1)\boldsymbol{i} = (4\cdot 0 - 1)\boldsymbol{i} = -\boldsymbol{i}$$

$$\lim_{t\to 0}\left(\frac{\sin t}{t}\right)\boldsymbol{j} = 1\cdot\boldsymbol{j} = \boldsymbol{j}$$

Akibatnya,

$$\lim_{t\to 0}\left[(4t^2 - 1)\boldsymbol{i} - \left(\frac{\sin t}{t}\right)\boldsymbol{j}\right] = \lim_{t\to 0}(4t^2 - 1)\boldsymbol{i} - \lim_{t\to 0}\left(\frac{\sin t}{t}\right)\boldsymbol{j} = -\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j}$$

2. Perhatikan bahwa

$$\lim_{t\to\infty}\left(\frac{2t}{t-1}\right)\boldsymbol{i} = \lim_{t\to\infty}\left(\frac{2}{1-1/t}\right)\boldsymbol{i} = \left(\frac{2}{1-0}\right)\boldsymbol{i} = 2\boldsymbol{i}$$

$$\lim_{t\to\infty}\left(\frac{\sin t}{t}\right)\boldsymbol{j} = 0\cdot\boldsymbol{j} = 0$$

$$\lim_{t\to\infty}\left(\frac{5t+1}{t^2}\right)\boldsymbol{k} = 0\cdot\boldsymbol{k} = 0$$

Akibatnya, diperoleh

$$\lim_{t\to\infty}\left[\left(\frac{2t}{t-1}\right)\boldsymbol{i}+\left(\frac{\sin t}{t}\right)\boldsymbol{j}-\left(\frac{5t+1}{t^2}\right)\boldsymbol{k}\right]$$
$$=\lim_{t\to\infty}\left(\frac{2t}{t-1}\right)\boldsymbol{i}+\lim_{t\to\infty}\left(\frac{\sin t}{t}\right)\boldsymbol{j}-\lim_{t\to\infty}\left(\frac{5t+1}{t^2}\right)\boldsymbol{k}$$
$$=2\boldsymbol{i}+0-0=2\boldsymbol{i}$$

Fungsi vektor $\boldsymbol{r}(t)$ dikatakan **kontinu** di titik $t=c$ jika memenuhi syarat berikut :

(i) $\boldsymbol{r}(t)$ terdefinisi di $t=c$,

(ii) $\lim_{t\to c}\boldsymbol{r}(t)$ ada,

(iii) $\boldsymbol{r}(c)=\lim_{t\to c}\boldsymbol{r}(t)$.

Jika salah satu syarat tersebut tidak terpenuhi, maka $\boldsymbol{r}(t)$ dikatakan **tidak kontinu (diskontinu)** di $t=c$.

Contoh 3.2

Tunjukkan kekontinuan fungsi vektor berikut di titik yang diberikan.

1. $\boldsymbol{r_1}(t)=(4t^2-1)\boldsymbol{i}-\left(\frac{\sin t}{t}\right)\boldsymbol{j}$ di $t=0$.
2. $\boldsymbol{r_2}(t)=(2t+3)\boldsymbol{i}+4t\boldsymbol{j}+\sin t\,\boldsymbol{k}$ di titik $t=0$.

Penyelesaian.

1. Perhatikan bahwa

$$\boldsymbol{r_1}(0)=(4\cdot 0-1)\boldsymbol{i}-\left(\frac{\sin 0}{0}\right)\boldsymbol{j}=\text{tidak terdefinisi}$$

$$\lim_{t\to 0}\left[(4t^2-1)\boldsymbol{i}-\left(\frac{\sin t}{t}\right)\boldsymbol{j}\right]=\lim_{t\to 0}(4t^2-1)\boldsymbol{i}-\lim_{t\to 0}\left(\frac{\sin t}{t}\right)\boldsymbol{j}=-\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}$$

Karena $\boldsymbol{r_1}(0)$ tidak terdefinisi di $t=0$ dan $\boldsymbol{r_1}(0)\neq\lim_{t\to 0}\boldsymbol{r_1}(t)$, maka fungsi$\boldsymbol{r_1}(t)$ tidak kontinu di $t=0$.

2. Perhatikan bahwa

$$\boldsymbol{r_2}(0)=(2\cdot 0+3)\boldsymbol{i}+(4\cdot 0)\boldsymbol{j}+\sin 0\,\boldsymbol{k}=3\boldsymbol{i}$$

$$\lim_{t\to 0}[(2t+3)\boldsymbol{i}+4t\boldsymbol{j}+\sin t\,\boldsymbol{k}]=\lim_{t\to 0}(2t+3)\boldsymbol{i}+\lim_{t\to 0}4t\boldsymbol{j}+\lim_{t\to 0}\sin t\,\boldsymbol{k}$$
$$=3\boldsymbol{i}$$

Karena $\boldsymbol{r_2}(0)$ terdefinisi, $\lim_{t\to 0}[(2t+3)\boldsymbol{i} + 4t\boldsymbol{j} + \sin t\,\boldsymbol{k}]$ ada, dan $\boldsymbol{r_2}(0) = \lim_{t\to 0}[(2t+3)\boldsymbol{i} + 4t\boldsymbol{j} + \sin t\,\boldsymbol{k}]$, maka dapat disimpulkan bahwa fungsi vektor $\boldsymbol{r_2}(t)$ kontinu di titik $t = 0$.

c. Soal

1. Tentukan nilai limit dari fungsi vektor berikut.
   a. $\lim_{t\to 0}[(5-2t^2)\boldsymbol{i} - \cos t\,\boldsymbol{j}]$
   b. $\lim_{t\to 0}\left[\left(\frac{t^2+4t+4}{t+4}\right)\boldsymbol{i} + (t-2)\boldsymbol{j} - (2t+3)\boldsymbol{k}\right]$
   c. $\lim_{t\to 0}\left[(1+t^3)\boldsymbol{i} + te^{-1}\boldsymbol{j} + \frac{\sin t}{t}\boldsymbol{k}\right]$
2. Tunjukkan kekontinuan fungsi vektor berikut di titik yang diberikan.
   a. $\boldsymbol{r_1}(t) = (t^2-1)\boldsymbol{i} - (2t+2)\boldsymbol{j}$ di $t = -1$
   b. $\boldsymbol{r_2}(t) = \left(\frac{t^2-4}{t-2}\right)\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} + (t+1)\boldsymbol{k}$ di titik $t = 2$
   c. $\boldsymbol{r_3}(t) = \sqrt{t+3}\boldsymbol{i} + \frac{t-1}{t^2-1}\boldsymbol{j} + \frac{\tan t}{t}\boldsymbol{k}$ di titik $t = 1$

4. Kegiatan Belajar 4

a. Tujuan Belajar

1. Mahasiswa dapat memahami dan mampu menyelesaiakan permasalahan turunan fungsi vektor.
2. Mahasiswa dapat memahami tentang gradien, divergensi dan curl.

b. Uraian Materi

Turunan Fungsi Vektor

Turunan fungsi $\boldsymbol{r}(t)$ di titik $t = c$ didefinisikan dengan

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \boldsymbol{r}'(c) = \lim_{t\to c} \frac{\boldsymbol{r}(t) - \boldsymbol{r}(c)}{t - c}.$$

Hal ini menyatakan bahwa, jika $\boldsymbol{r}(t) = f(t)\boldsymbol{i} + g(t)\boldsymbol{j}$, dengan f dan g adalah fungsi yang dapat diturunkan (diferensiabel), maka

$$\boldsymbol{r}'(t) = f'(t)\boldsymbol{i} + g'(t)\boldsymbol{j}.$$

Hal ini juga berlaku untuk fungsi vektor pada $\mathbb{R}^3$, yaitu jika $\boldsymbol{r}(t) = f(t)\,\boldsymbol{i} + g(t)\,\boldsymbol{j} + h(t)\,\boldsymbol{k}$, dengan f, g, dan h adalah fungsi yang dapat diturunkan (diferensiabel), maka

$$\boldsymbol{r}'(t) = f'(t)\boldsymbol{i} + g'(t)\boldsymbol{j} + h'(t)\boldsymbol{k}.$$

Aturan Turunan Fungsi Vektor

Misalkan $\boldsymbol{u}$ dan $\boldsymbol{v}$ adalah fungsi vektor yang dapat diturunkan, c adalah skalar, dan f sebuah fungsi bilangan riil, maka

(i) $\frac{d}{dt}[\boldsymbol{u}(t) + \boldsymbol{v}(t)] = \boldsymbol{u}'(t) + \boldsymbol{v}'(t)$

(ii) $\frac{d}{dt}[c\boldsymbol{u}(t)] = c\boldsymbol{u}'(t)$

(iii) $\frac{d}{dt}[f(t)\boldsymbol{u}(t)] = f'(t)\boldsymbol{u}(t) + f(t)\boldsymbol{u}'(t)$

(iv) $\frac{d}{dt}[\boldsymbol{u}(t) \cdot \boldsymbol{v}(t)] = \boldsymbol{u}'(t) \cdot \boldsymbol{v}(t) + \boldsymbol{u}(t) \cdot \boldsymbol{v}'(t)$

(v) $\frac{d}{dt}[\boldsymbol{u}(t) \times \boldsymbol{v}(t)] = \boldsymbol{u}'(t) \times \boldsymbol{v}(t) + \boldsymbol{u}(t) \times \boldsymbol{v}'(t)$

(vi) $\frac{d}{dt}\left[\boldsymbol{u}\big(f(t)\big)\right] = f'(t)\boldsymbol{u}'(f(t))$ (Aturan Rantai)

Contoh 4.1

Tentukan turunan dari fungsi berikut.

1. $\boldsymbol{r_1}(t) = \left(\frac{t}{t+1}\right)\boldsymbol{i} + (5t-2)\boldsymbol{j}$ di titik $t = 1$
2. $\boldsymbol{r_2}(t) = (1+t^3)\boldsymbol{i} + te^{-t}\boldsymbol{j} + \sin 2t\,\boldsymbol{k}$

Penyelesaian.

1. Perhatikan bahwa

$$\boldsymbol{r_1}'(t) = \frac{1}{(t+1)^2}\boldsymbol{i} + 5\boldsymbol{j}$$

Sehingga,

$$\boldsymbol{r_1}'(1) = \frac{1}{(1+1)^2}\boldsymbol{i} + 5\boldsymbol{j} = \boldsymbol{i} + 5\boldsymbol{j}$$

2. Diperoleh bahwa

$$\boldsymbol{r_2}'(t) = 3t^2\boldsymbol{i} + (1-t)e^{-t}\boldsymbol{j} + 2\cos 2t\,\boldsymbol{k}.$$

Operator Del

Operator del merupakan operator pada diferensial vektor yang disimbolkan dengan ∇(nabla), yang didefinisikan dalam bentuk turunan parsial, yaitu:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{k}$$

Operator del ini bermanfaat untuk mencari gradien, divergensi, dan curl.

Gradien

Gradien berfungsi mengubah fungsi skalar menjadi fungsi vektor.

Misalkan $f(x,y,z)$ terdefinisi dan diferensiabel pada setiap titik (x,y,z) dalam ruang $\mathbb{R}^3$, maka gradien f atau grad f atau ∇f didefinisikan oleh

$$\nabla f = \left(\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{k}\right)f = \frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{k}$$

Sifat-sifat gradien :

Misalkan $f(x,y,z)$ dan $g(x,y,z)$ adalah fungsi-fungsi skalar yang diferensiabel pada setiap titik (x,y,z) dan c adalah bilangan real, maka berlaku :

i. $\nabla(f+g) = \nabla f + \nabla g$

ii. $\nabla(cf) = c\nabla(f)$

iii. $\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f$

Contoh 4.2

Jika $f = 2xz^4 - x^2y$, tentukan ∇f pada titik $(1,0,-2)$.

Penyelesaian.

$$\begin{aligned}\nabla f &= \frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{k} \\ &= \frac{\partial(2xz^4 - x^2y)}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial(2xz^4 - x^2y)}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial(2xz^4 - x^2y)}{\partial z}\boldsymbol{k} \\ &= (2z^4 - 2xy)\boldsymbol{i} - x^2\boldsymbol{j} + 8xz^3\boldsymbol{k}\end{aligned}$$

Jadi, $\nabla f(1,0,-2) = 32\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} - 64\boldsymbol{k}$.

Turunan Berarah

Rumus gradien dikembangkan untuk mendefinisikan turunan berarah. Misalkan f diferensiabel di (x,y,z), maka f memiliki turunan berarah di (x,y,z) pada arah vektor satuan $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3)$, yang diberikan oleh :

$$D_{\boldsymbol{u}}f = \nabla f \cdot \boldsymbol{u}$$

Divergensi

Divergensi berfungsi mengubah fungsi vektor menjadi fungsi skalar.

Misalkan $\boldsymbol{V}(x,y,z) = V_1\boldsymbol{i} + V_2\boldsymbol{j} + V_3\boldsymbol{k}$ terdefinisi dan diferensiabel pada setiap titik (x,y,z). Divergensi dari $\boldsymbol{V}$ atau $div\,\boldsymbol{V}$ atau $\nabla\cdot\boldsymbol{V}$, didefinisikan oleh

$$\nabla\cdot\boldsymbol{V} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{k}\right)\cdot(V_1\boldsymbol{i} + V_2\boldsymbol{j} + V_3\boldsymbol{k}) = \frac{\partial V_1}{\partial x} + \frac{\partial V_2}{\partial y} + \frac{\partial V_3}{\partial z}$$

Sifat-sifat divergensi :

Misalkan $\bar{F}(x,y,z)$ dan $\bar{G}(x,y,z)$ adalah vektor-vektor yang kontinu dan diferensiabel terhadap x, y, dan z. $f(x,y,z)$ adalah fungsi skalar yang kontinu dan diferensiabel terhadap x, y, dan z, serta a dan b adalah bilangan riil, maka berlaku :

i. $\nabla \cdot (a\boldsymbol{F} + b\boldsymbol{G}) = a\nabla \cdot \boldsymbol{F} + b\nabla \cdot \boldsymbol{G}$

ii. $\nabla \cdot (f\boldsymbol{F}) = f(\nabla \cdot \boldsymbol{F}) + (\nabla f) \cdot \boldsymbol{F}$

iii. $\nabla \cdot (\boldsymbol{F} \times \boldsymbol{G}) = (\nabla \times \boldsymbol{F}) \cdot \boldsymbol{G} - \boldsymbol{F} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{G})$

iv. $\nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{F}) = 0$

Contoh 4.3

Jika $\boldsymbol{A} = 3xyz^2\boldsymbol{i} + 2xy^3\boldsymbol{j} - x^2yz\boldsymbol{k}$ dan $f = 3x^2 - yz$. Tentukan :

a. $\nabla \cdot \boldsymbol{A}$

b. $\boldsymbol{A} \cdot \nabla f$

Penyelesaian.

a. $\nabla \cdot \boldsymbol{A} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{k}\right) \cdot (3xyz^2\boldsymbol{i} + 2xy^3\boldsymbol{j} - x^2yz\boldsymbol{k})$

$= 3yz^2 + 6xy^2 - x^2y$

b. $\boldsymbol{A} \cdot \nabla f = (3xyz^2\boldsymbol{i} + 2xy^3\boldsymbol{j} - x^2yz\boldsymbol{k}) \cdot \left(\frac{\partial(3x^2-yz)}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial(3x^2-yz)}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial(3x^2-yz)}{\partial z}\boldsymbol{k}\right)$

$= (3xyz^2\boldsymbol{i} + 2xy^3\boldsymbol{j} - x^2yz\boldsymbol{k}) \cdot (6x\boldsymbol{i} - z\boldsymbol{j} - y\boldsymbol{k})$

$= 18x^2yz^2 - 2xy^3z + x^2y^2z$

Curl

Jika vektor $\boldsymbol{F}(x,y,z) = F_1\boldsymbol{i} + F_2\boldsymbol{j} + F_3\boldsymbol{k}$ terdefinisi dan diferensiabel pada setiap titik (x,y,z), maka curl dari $\boldsymbol{F}$ atau $\nabla \times \boldsymbol{F}$ didefinisikan oleh :

$$\nabla \times \boldsymbol{F} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{k}\right) \times (F_1\boldsymbol{i} + F_2\boldsymbol{j} + F_3\boldsymbol{k})$$

$$= \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix}$$

$$\text{curl } \boldsymbol{F} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}\right)\boldsymbol{j} + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}$$

Sifat-sifat curl :

Misalkan $\boldsymbol{F}(x,y,z)$ dan $\boldsymbol{G}(x,y,z)$ adalah fungsi vektor-vektor yang kontinu dan diferensiabel terhadap x, y dan z, $f(x,y,z)$ adalah fungsi skalar yang kontinu dan diferensiabel terhadap x, y dan z, dan a adalah bilangan riil, maka berlaku :

i. $\nabla \times (\boldsymbol{F} + \boldsymbol{G}) = (\nabla \times \boldsymbol{F}) + (\nabla \times \boldsymbol{G})$

ii. $\nabla \times a\boldsymbol{F} = a(\nabla \times \boldsymbol{F})$

iii. $\nabla \times f\boldsymbol{F} = (\nabla f) \times \boldsymbol{F} + f(\nabla \times \boldsymbol{F})$

iv. $\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{F}) = \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{F}) - \nabla^2 \boldsymbol{F}$

v. $\nabla \times (\nabla f) = 0$

vi. $\nabla \times (\boldsymbol{F} \times \boldsymbol{G}) = (\boldsymbol{G} \cdot \nabla)\boldsymbol{F} - \boldsymbol{G}(\nabla \cdot \boldsymbol{F}) - (\boldsymbol{F} \cdot \nabla)\boldsymbol{G} + \boldsymbol{F}(\nabla \cdot \boldsymbol{G})$

Contoh 4.4

Jika $\boldsymbol{F} = 2xy^2 i + xyzj + yz^2 k$, tentukan $\nabla \times \boldsymbol{F}$.

Penyelesaian.

$$\nabla \times \boldsymbol{F} = (z^2 - xy)\boldsymbol{i} + (yz - 4xy)\boldsymbol{k}$$

c. Soal

1. Misalkan $\phi(x, y, z) = e^{xyz}$, tentukanlah
   a. $\nabla\phi$ pada titik $(1, 2, 1)$
   b. $|\nabla\phi|$ pada titik $(1, 2, 1)$
   c. $\boldsymbol{n}$, jika $\boldsymbol{n}$ vektor satuan dari $\nabla\phi$ pada titik $(1, 2, 1)$
2. Carilah turunan berarah dari $f = 4xz^3 - 3x^2y^2z$ pada $(2, -1, 2)$ dalam arah $2\boldsymbol{i} - 3\mathbf{j} + 6\boldsymbol{k}$.
3. Misalkan
   $$\boldsymbol{F}(x, y, z) = x^2yz\mathbf{i} + 3xyz^3\mathbf{j} + (x^2 - z^2)\mathbf{k}.$$
   Tentukan div $\boldsymbol{F}$ dan curl $\boldsymbol{F}$.

5. Kegiatan Belajar 5

a. Tujuan Belajar

Mahasiswa dapat memahami dan menjelaskan tentang integral dalam ruang berdimensi n.

b. Uraian Materi

Integral Lipat Dua

Misalkan f adalah fungsi dengan dua variabel yang didefinisikan pada sebuah persegi panjang tertutup R. Fungsi f dikatakan dapat diintegralkan di R, jika

$$\lim_{|P|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\bar{x}_k, \bar{y}_k)\Delta A_k$$

ada.

$\iint_R \; f(x,y)\, dA$ disebut **integral lipat dua** dari f atas R, yang dapat dinyatakan dengan

$$\iint\limits_R f(x,y)\, dA = \lim_{|P|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\bar{x}_k, \bar{y}_k)\Delta A_k$$

Teorema Keintegralan

Jika f terbatas pada suatu persegi panjang tertutup R dan jika fungsi ini kontinu di situ, kecuali pada sejumlah hingga kurva mulus, maka f dapat diintegralkan pada R. Secara khusus, jika f kontinu di seluruh R, maka f dapat diintegralkan di sana.

Adapun sifat-sifat integral lipat dua sebagai berikut :

1. Integral lipat dua bersifat linier
   a. $\iint_R \; kf(x,y)\, dA = k \iint_R \; f(x,y)\, dA$
   b. $\iint_R \; [f(x,y) + g(x,y)]\, dA = \iint_R \; f(x,y)\, dA + \iint_R \; g(x,y)\, dA$
2. Integral lipat dua bersifat aditif

$$\iint\limits_R f(x,y)\, dA = \iint\limits_{R_1} f(x,y)\, dA + \iint\limits_{R_2} f(x,y)\, dA$$

3. Sifat perbandingan berlaku. Jika $f(x,y) \leq g(x,y)$ untuk seluruh (x,y) di R, maka

$$\iint_R f(x,y)\,dA \leq \iint_R g(x,y)\,dA$$

Contoh 5.1

Misalkan f adalah fungsi tangga, yaitu

$$f(x,y) = \begin{cases} 1, 0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 1 \\ 2, 0 \leq x \leq 3, 1 \leq y \leq 2 \\ 3, 0 \leq x \leq 3, 2 \leq y \leq 3 \end{cases}$$

Hitunglah $\iint_R \; f(x,y)\,dA$, dimana $R = \{(x,y)|0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 3\}$.

Penyelesaian.

Dari fungsi tersebut dapat dibuat persegi panjang R_1, R_2 dan R_3 sebagai berikut

$$R_1 = \{(x,y)|0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 1\}$$

$$R_2 = \{(x,y)|0 \leq x \leq 3, 1 \leq y \leq 2\}$$

$$R_3 = \{(x,y)|0 \leq x \leq 3, 2 \leq y \leq 3\}$$

Kemudian dengan menggunakan sifat penjumlahan pada integral lipat dua, maka diperoleh

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \iint_{R_1} f(x,y)\,dA + \iint_{R_2} f(x,y)\,dA + \iint_{R_3} f(x,y)\,dA$$

$$= 1 \cdot A(R_1) + 2 \cdot A(R_2) + 3 \cdot A(R_3)$$

$$= 1 \cdot 3 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 3 = 18$$

Contoh 5.2

Hitunglah $\int_0^3 \int_1^2 (2x + 3y)\,dx\,dy$.

Penyelesaian.

Pada permasalahan ini, integral yang di sebelah dalam (integral terhadap variabel x) diselesaikan terlebih dulu dengan menganggap y sebagai konstanta, sehingga

$$\int_1^2 (2x + 3y)\,dx = [x^2 + 3yx]_1^2 = 3 + 3y$$

Akibatnya,

$$\int_0^3 \int_1^2 (2x + 3y)\, dx\, dy = \int_0^3 (3 + 3y)\, dy = \left[3y + \frac{3}{2}y^2\right]_0^3 = \frac{45}{2}$$

Contoh 5.3

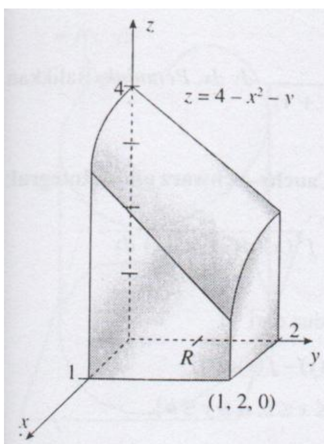
Hitunglah $\int_1^2 \int_0^3 (2x + 3y)\, dy\, dx$.

Penyelesaian.

$$\int_1^2 \int_0^3 (2x + 3y)\, dy\, dx = \int_1^2 \left[2xy + \frac{3}{2}y^2\right]_0^3 dx = \int_1^2 \left(6x + \frac{27}{2}\right) dx$$

$$= \left[3x^2 + \frac{27}{2}x\right]_1^2 = \frac{45}{2}$$

Contoh 5.4



Tentukan volume V suatu benda padat di bawah permukaan $z = 4 - x^2 - y$ dan di atas persegi panjang

$$R = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2\}.$$

Penyelesaian.

$$V = \iint_R (4 - x^2 - y)\, dA = \int_0^2 \int_0^1 (4 - x^2 - y)\, dx\, dy$$

$$= \int_0^2 \left[4x - \frac{x^3}{3} + yx\right]_0^1 dy = \int_0^2 \left[4 - \frac{1}{3} - y\right] dy$$

$$= \left[4y - \frac{1}{3}y - \frac{1}{2}y^2\right]_0^2 = \frac{16}{3}$$

Contoh 5.5

Hitunglah integral berulang

$$\int_{3}^{5}\int_{-x}^{x^2}(4x+10y)\,dy\,dx$$

Penyelesaian.

$$\int_{3}^{5}\int_{-x}^{x^2}(4x+10y)\,dy\,dx=\int_{3}^{5}[4xy+5y^2]_{-x}^{x^2}\,dx$$

$$=\int_{3}^{5}(5x^4+4x^3-x^2)\,dx=\left[x^5+x^4-\frac{x^3}{3}\right]_3^5=3393\,\frac{1}{3}$$

Contoh 5.6

Tentukan volume V dari benda padat di atas persegi panjang kutub

$$R=\left\{(r,\theta)\middle|1\le r\le 3,0\le\theta\le\frac{\pi}{4}\right\}$$

dan di bawah permukaan $z=e^{x^2+y^2}$.

Penyelesaian.

Karena $x^2+y^2=r^2$, maka

$$V=\iint_R e^{x^2+y^2}\,dA=\int_0^{\pi/4}\int_1^3 e^{r^2}r\,dr\,d\theta=\int_0^{\pi/4}\left[\frac{1}{2}e^{r^2}\right]_1^3 d\theta$$

$$=\int_0^{\pi/4}\frac{1}{2}(e^9-e)\,d\theta=\frac{\pi}{8}(e^9-e)$$

Integral lipat dua biasanya digunakan untuk :

a. Menghitung volume antara permukaan $z=f(x,y)$ dan bidang xy

b. Menghitung luas daerah di bidang xy dimana $f(x,y)=1$

c. Menghitung massa, pusat massa, momen inersia

Integral Lipat Tiga

Integral lipat tiga dapat didefinisikan (*triple integral*) dengan

$$\iiint\limits_B f(x,y,z)\,dV = \lim_{|P|\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\bar{x}_k,\bar{y}_k,\bar{z}_k)\Delta V_k$$

asalkan limitnya ada.

Contoh 5.7

Hitunglah $\iiint_B \; x^2yz\,dV$ dimana B adalah kotak

$$B = \{(x,y,z)|1 \le x \le 2, 0 \le y \le 1, 0 \le z \le 2\}$$

Penyelesaian.

$$\iiint\limits_B x^2yz\,dV = \int_0^2\int_0^1\int_1^2 x^2yz\,dx\,dy\,dz$$

$$= \int_0^2\int_0^1 \left[\frac{1}{3}x^3yz\right]_1^2 dy\,dz = \int_0^2\int_0^1 \frac{7}{3}yz\,dy\,dz$$

$$= \frac{7}{3}\int_0^2 \left[\frac{1}{2}y^2z\right]_0^1 dz = \frac{7}{3}\int_0^2 \frac{1}{2}z\,dz = \frac{7}{3}\left[\frac{z^2}{2}\right]_0^2 = \frac{7}{3}$$

Contoh 5.8

Hitunglah integral berulang

$$\int_{-2}^{5}\int_{0}^{3x}\int_{y}^{x+2} 4\,dz\,dy\,dx$$

Penyelesaian.

$$\int_{-2}^{5}\int_{0}^{3x}\int_{y}^{x+2} 4\,dz\,dy\,dx = \int_{-2}^{5}\int_{0}^{3x} [4z]_y^{x+2}\,dy\,dx$$

$$= \int_{-2}^{5}\int_{0}^{3x} (4x - 4y + 8)\,dy\,dx$$

$$= \int_{-2}^{5} [4xy - 2y^2 + 8y]_0^{3x}\, dx$$

$$= \int_{-2}^{5} (-6x^2 + 24x)\, dx = -14$$

Integral lipat tiga biasanya digunakan untuk :

a. Menghitung volume daerah dalam silinder

b. Menentukan titik koordinat

c. Soal

1. Misalkan $R = \{(x, y)|1 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq 2\}$. Hitunglah $\iint_R f(x, y)\, dA$, dimana f adalah sebagai berikut

$$f(x, y) = \begin{cases} 2, 1 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 1 \\ 1, 1 \leq x \leq 3, 1 \leq y \leq 2 \\ 3, 3 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq 2 \end{cases}$$

2. Hitunglah setiap integral berulang berikut
   a. $\int_{-1}^{1} \int_{1}^{2} (x^2 + y^2)\, dx\, dy$
   b. $\int_{0}^{3} \int_{0}^{1} 2x\sqrt{x^2 + y}\, dx\, dy$
   c. $\int_{0}^{\pi/2} \int_{0}^{\sin\theta} r\, dr\, d\theta$
   d. $\int_{0}^{2} \int_{1}^{z} \int_{0}^{x/2} 2xyz\, dy\, dx\, dz$
3. Hitunglah integral lipat dua di R berikut

$$\iint_R (x^2 + y^2)\, dA; R = \{(x, y)|-1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2\}$$

4. Tentukan integral

$$\iiint_S f(x, y, z)\, dV$$

dengan $S = \left\{(x, y, z)\middle|0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 3, 0 \leq z \leq \frac{1}{6}(12 - 3x - 2y)\right\}$

6. Kegiatan Belajar 6

a. Tujuan Belajar

Mahasiswa dapat memahami dan menjelaskan tentang integral garis dan permukaan.

b. Uraian Materi

Integral Vektor

Misalkan $\boldsymbol{A}(t) = A_1(t)\boldsymbol{i} + A_2(t)\boldsymbol{j} + A_3(t)\boldsymbol{k}$, dimana $\boldsymbol{A}(t)$ sebuah vektor yang bergantung pada variabel atau parameter t dan $A_1(t), A_2(t), A_3(t)$ kontinu dalam suatu selang yang ditentukan. Maka integral dari $\boldsymbol{A}(t)$ pada selang (a, b) yaitu

$$\int_a^b \boldsymbol{A}(t)\,dt = \int_a^b A_1(t)\,dt\,\boldsymbol{i} + \int_a^b A_2(t)\,dt\,\boldsymbol{j} + \int_a^b A_3(t)\,dt\,\boldsymbol{k}.$$

Jika terdapat sebuah vektor $\boldsymbol{B}(t)$, sehingga $\boldsymbol{A}(t) = \frac{d}{dt}(\boldsymbol{B}(t))$, maka

$$\int_a^b \boldsymbol{A}(t)\,dt = \int_a^b \frac{d}{dt}(\boldsymbol{B}(t))\,dt = \boldsymbol{B}(t)]_a^b = \boldsymbol{B}(b) - \boldsymbol{B}(a).$$

Integral Garis

Integral garis dari suatu fungsi vektor $\boldsymbol{A}(t)$ sepanjang kurva C yang terdefinisi pada $a \leq t \leq b$, didefinisikan sebagai berikut

$$\int_C \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r} = \int_a^b \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r}$$

$$= \int_a^b (A_1\boldsymbol{i} + A_2\boldsymbol{j} + A_3\boldsymbol{k})\cdot(\boldsymbol{i}\,dx + \boldsymbol{j}\,dy + \boldsymbol{k}\,dz)$$

$$= \int_a^b (A_1\,dx + A_2\,dy + A_3\,dz)$$

Contoh 6.1

Jika $\boldsymbol{R}(u) = u^3\boldsymbol{i} + (u^2 - 1)\boldsymbol{j} + 5\boldsymbol{k}$, tentukan $\int_0^1 \boldsymbol{R}(u)\,du$.

Penyelesaian.

$$\int_0^1 \boldsymbol{R}(u)\,du = \int_0^1 [u^3\boldsymbol{i} + (u^2 - 1)\boldsymbol{j} + 5\boldsymbol{k}]\,du$$

$$= \boldsymbol{i}\int_0^1 u^3\,du + \boldsymbol{j}\int_0^1 (u^2-1)\,du + \boldsymbol{k}\int_0^1 5\,du$$

$$= \boldsymbol{i}\left[\frac{1}{4}u^4\right]_0^1 + \boldsymbol{j}\left[\frac{1}{3}u^3 - u\right]_0^1 + \boldsymbol{k}[5u]_0^1$$

$$= \boldsymbol{i}\left[\frac{1}{4} - 0\right] + \boldsymbol{j}\left[\frac{1}{3} - 1\right] + \boldsymbol{k}[5]$$

$$= \frac{1}{4}\boldsymbol{i} - \frac{2}{3}\boldsymbol{j} + 5\boldsymbol{k}$$

Contoh 6.2

Jika $\boldsymbol{A}(t) = t\,\boldsymbol{i} - t^2\boldsymbol{j} + (t-1)\boldsymbol{k}$ dan $\boldsymbol{B}(t) = 2t^2\,\boldsymbol{i} + 6t\,\boldsymbol{k}$, hitung $\int_0^2 \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}\,dt$.

Penyelesaian.

$$\int_0^2 \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}\,dt = \int_0^2 [t\,i - t^2\,j + (t-1)k]\cdot[2t^2\,i + 6t\,k]\,dt$$

$$= \int_0^2 [2t^3 + (6t^2 - 6t)]\,dt$$

$$= \left[\frac{1}{2}t^4 + 2t^3 - 3t^2\right]_0^2$$

$$= 12$$

Contoh 6.3

Jika $\boldsymbol{A} = (3x^2 - 6yz)i + (2y + 3xz)j + (1 - 4xyz^2)k$, hitung $\int_C \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r}$ dari $(0,0,0)$ sampai $(1,1,1)$ sepanjang lintasan $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$

Penyelesaian.

$$\int_C \boldsymbol{A}\cdot d\bar{r} = \int_C [(3x^2 - 6yz)i + (2y + 3xz)j + (1 - 4xyz^2)k] \cdot (dx\,i + dy\,j + dz\,k)$$

$$= \int_C [(3x^2 - 6yz)dx + (2y + 3xz)dy + (1 - 4xyz^2)dz]$$

$$\int_C \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r} = \int_C (3t^2 - 6t^2\cdot t^3)dt + (2t^2 + 3t\cdot t^3)dt^2 + (1 - 4t\cdot t^2\cdot (t^3)^2)dt^3$$

$$= \int_0^1 (3t^2 - 6t^5)dt + (2t^2 + 3t^4)2t\,dt + (1 - 4t^9)3t^2 dt$$

$$= \int_0^1 [(3t^2 - 6t^5) + (4t^3 + 6t^5) + (3t^2 - 12t^{11})]dt$$

$$= [(t^3 - t^6) + (t^4 + t^6) + (t^3 - t^{12})]_0^1$$

$$= 2$$

Integral Permukaan

Misalkan S suatu permukaan 2 sisi yang demikian mulus dan $\boldsymbol{n}$ adalah vektor normal satuan positif, maka fluks (massa yang mengalir per satuan waktu) dari $\boldsymbol{A}(x, y, z)$ melalui permukaan S adalah $\boldsymbol{n} = \frac{\nabla S}{|\nabla S|}$.

$$\text{Fluks } \boldsymbol{F} \text{ yang melintasi } S = \iint_S \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}\,dS$$

yang disebut **integral permukaan**.

Untuk menghitung integral permukaan akan lebih sederhana dengan memproyeksikan S terhadap salah satu bidang koordinat, kemudian hitung integral lipat dua dari proyeksinya.

Misalkan permukaan S memiliki proyeksi pada xy, maka integral permukaannya

$$\iint_S \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}\,dS = \iint_S \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}\frac{dx\,dy}{|\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{k}|}$$

Proyeksi pada xz, maka

$$\iint_S \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{n}\, dS = \iint_S \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{n} \frac{dx\, dz}{|\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{j}|}$$

Proyeksi pada yz, maka

$$\iint_S \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{n}\, dS = \iint_S \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{n} \frac{dy\, dz}{|\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{i}|}$$

Contoh 6.4

Hitung $\iint_S \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{n}\, dS$ dimana $\boldsymbol{A} = 18z\, i - 12\, j + 3y\, k$. S adalah bagian dari bidang $2x + 3y + 6z = 12$ yang terletak pada oktan pertama dan $\boldsymbol{n}$ adalah normal satuan pada S.

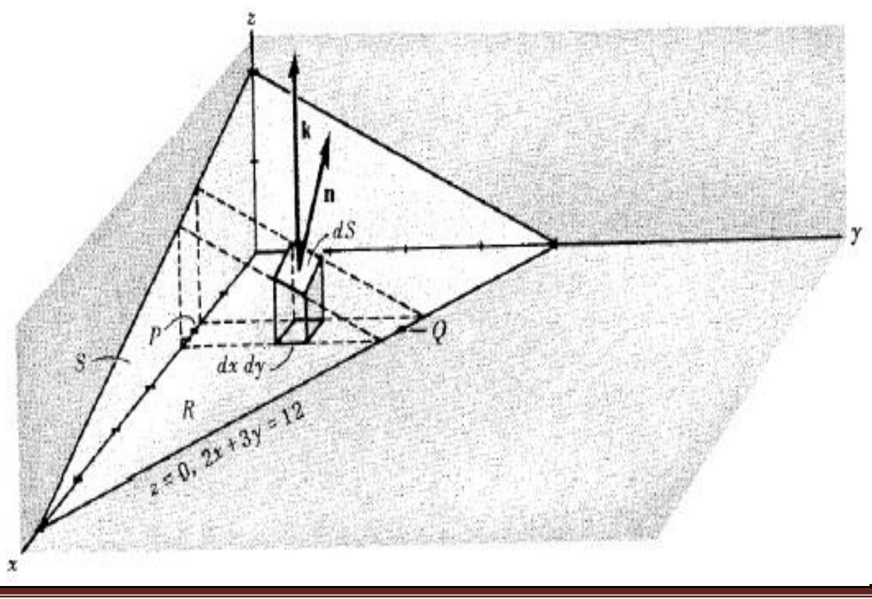
Penyelesaian.

Satuan normal untuk S adalah

$$\nabla(2x + 3y + 6z - 12) = 2i + 3j + 6k$$

$$\boldsymbol{n} = \frac{2i + 3j + 6k}{\sqrt{2^2 + 3^2 + 6^2}} = \frac{2i + 3j + 6k}{7}$$

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{n} = (18z\, i - 12\, j + 3y\, k) \cdot \left(\frac{2i + 3j + 6k}{7}\right) = \frac{36 - 12x}{7}$$



Permukaan S proyeksi terhadap bidang xy, yaitu R, sehingga permukaan integral yang diinginkan adalah

$$\iint_S \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{n}\, dS = \iint_R \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{n} \frac{dx\, dy}{|\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{k}|}$$

$$= \iint_R \left(\frac{36 - 12x}{7}\right) \frac{dx\, dy}{\left|\left(\frac{2i + 3j + 6k}{7}\right) \cdot \boldsymbol{k}\right|}$$

$$= \iint_R \left(\frac{36 - 12x}{7}\right) \frac{dx\, dy}{6/7}$$

$$= \int_0^6 \int_0^{\frac{12-2x}{3}} (6 - 2x)\, dx\, dy$$

$$= \int_0^6 \left(24 - 12x + \frac{4x^2}{3}\right) dx$$

$$= 24$$

c. Soal

1. Jika $\boldsymbol{A} = (3x^2 - 6yz)i + (2y + 3xz)j + (1 - 4xyz^2)k$, hitung $\int_C \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{r}$ dari $(0,0,0)$ sampai $(1,1,1)$ sepanjang lintasan berikut.
   a. Garis lurus dari $(0,0,0)$ ke $(0,0,1)$, kemudian ke $(0,1,1)$ dan setelah itu ke $(1,1,1)$.
   b. Garis lurus yang menghubungkan $(0,0,0)$ dan $(1,1,1)$.
2. Hitunglah integral garis

$$\int_C (x^2 - y^2)dx + 2xy\, dy$$

   di sepanjang kurva C yang persamaan parametriknya adalah $x = t^2, y = t^3, 0 \leq t \leq \frac{3}{2}$.

3. Tentukan luas permukaan dari bidang $2x + y + 2z = 16$ yang terpotong oleh
   a. $x = 0, y = 0, x = 2, y = 3$
   b. $x = 0, y = 0$, dan $x^2 + y^2 = 64$

7. **Kegiatan Belajar 7**

a. **Tujuan Belajar**

Mahasiswa dapat memahami dan menjelaskan tentang integral volume dan Teorema Divergensi Gauss.

b. **Uraian Materi**

Integral Volume

Pandang sebuah permukaan tertutup dalam ruang yang menutup volume V, maka

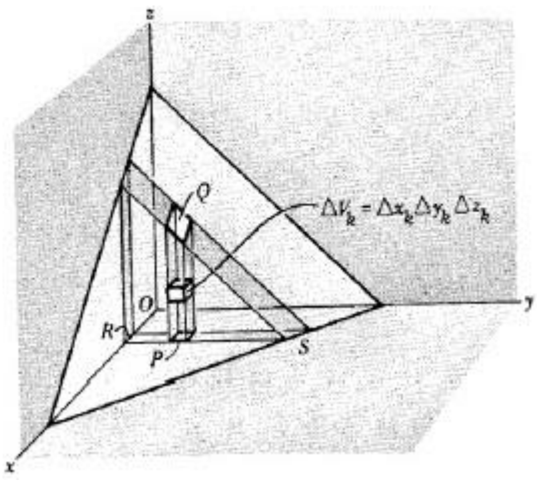
$$\iiint \boldsymbol{A}\, dV = \iiint \boldsymbol{A}\ dx\, dy\, dz$$

dan

$$\iiint_V \phi\, dV = \iiint \phi\, dx\, dy\, dz$$

$\iiint_V\ \phi\, dV$ dinyatakan sebagai **limit dari jumlah**, yaitu bagi ruang V ke dalam M buah kubus-kubus dengan volume

$$\Delta V_k = \Delta x_k \Delta y_k \Delta z_k, k = 1,2,\cdots, M.$$



Misalkan (x_k, y_k, z_k) sebuah titik dalam kubus tersebut. Definisikan $\phi(x_k, y_k, z_k) = \phi_k$. Pandang jumlah

$$\sum_{k=1}^{n} \phi_k \Delta V_k$$

yang diambil untuk semua kubus yang mungkin dalam ruang yang ditinjau.

Limit dari jumlah ini, bila $M \to \infty$ sehingga kuantitas-kuantitas terbesar ΔV_k akan mendekati nol, dan jika limit ini ada, dinyatakan oleh

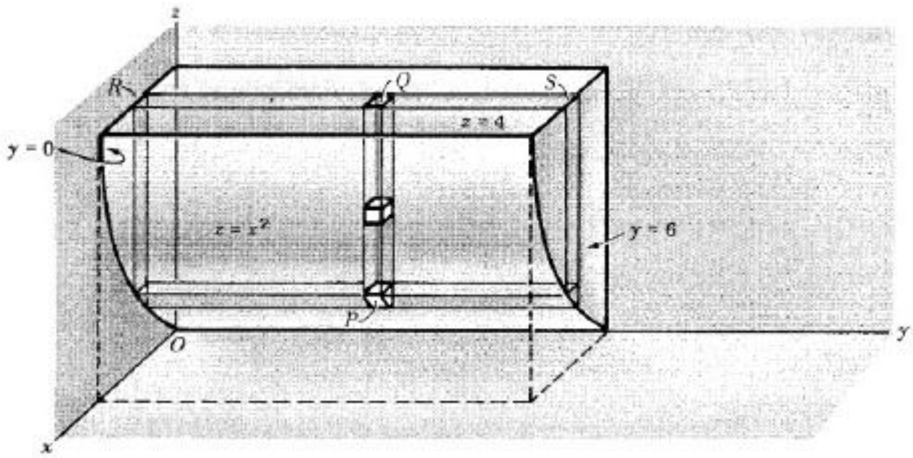
$$\iiint_V \phi\, dV$$

adalah integral volume.

Contoh 7.1

Misalkan $\boldsymbol{F} = 2xz\,\boldsymbol{i} - x\boldsymbol{j} + y^2\boldsymbol{k}$. Hitunglah $\iiint_V \boldsymbol{F}\,dV$ dimana V adalah ruang yang dibatasi oleh permukaan-permukaan $x = 0, y = o, y = 6, z = x^2, z = 4$.

Penyelesaian.



$$\iiint_V \boldsymbol{F}\,dV = \int_{x=0}^{2}\int_{y=0}^{6}\int_{z=x^2}^{4} 2xz\boldsymbol{i} - x\boldsymbol{j} + y^2\boldsymbol{k}\,dz\,dy\,dx$$

$$= \boldsymbol{i}\int_{x=0}^{2}\int_{y=0}^{6}\int_{z=x^2}^{4} 2xz\,dz\,dy\,dx - \boldsymbol{j}\int_{x=0}^{2}\int_{y=0}^{6}\int_{z=x^2}^{4} x\,dz\,dy\,dx$$

$$+ \boldsymbol{k}\int_{x=0}^{2}\int_{y=0}^{6}\int_{z=x^2}^{4} y^2\,dz\,dy\,dx$$

Integral untuk komponen $\boldsymbol{i}$,

$$\boldsymbol{i}\int_{x=0}^{2}\int_{y=0}^{6}\int_{z=x^2}^{4} 2xz\,dz\,dy\,dx = \boldsymbol{i}\int_{x=0}^{2}\int_{y=0}^{6} [xz^2]_{x^2}^{4}\,dy\,dx$$

$$= \boldsymbol{i}\int_{x=0}^{2}\int_{y=0}^{6} [16x - x^5]\,dy\,dx$$

$$= \boldsymbol{i}\int_{x=0}^{2} [16xy - x^5y]_0^6\,dx$$

$$= \boldsymbol{i} \int_{x=0}^{2} [96x - 6x^5]\, dx$$

$$= \boldsymbol{i}[48x^2 - x^5]_0^2 = 128\boldsymbol{i}$$

Integral untuk komponen $\boldsymbol{j}$,

$$-\boldsymbol{j} \int_{x=0}^{2} \int_{y=0}^{6} \int_{z=x^2}^{4} x\, dz\, dy\, dx = -\boldsymbol{j} \int_{x=0}^{2} \int_{y=0}^{6} [4x - x^3]\, dy\, dx$$

$$= -\boldsymbol{j} \int_{x=0}^{2} [24x - 6x^3]\, dx = -24\boldsymbol{j}$$

Integral untuk komponen $\bar{k}$,

$$\boldsymbol{k} \int_{x=0}^{2} \int_{y=0}^{6} \int_{z=x^2}^{4} y^2\, dz\, dy\, dx = \boldsymbol{k} \int_{x=0}^{2} \int_{y=0}^{6} [4y^2 - x^2y^2]\, dy\, dx$$

$$= \boldsymbol{k} \int_{x=0}^{2} [288 - 12x^2]\, dx = 384\boldsymbol{k}$$

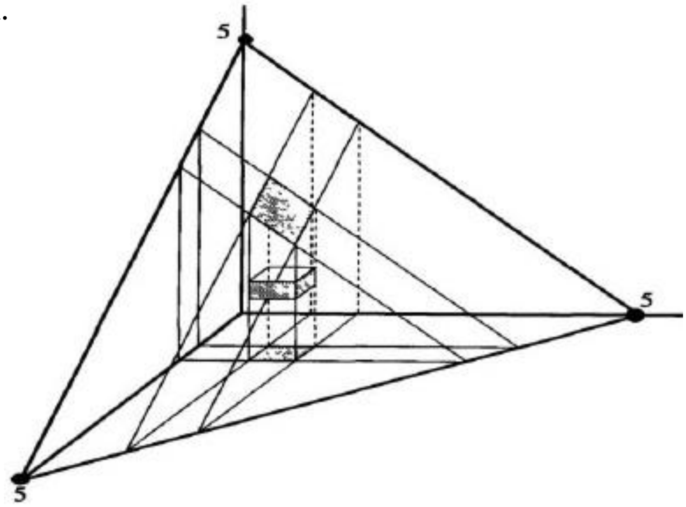
Jadi, diperoleh

$$\iiint_V \boldsymbol{F}\, dV = 128\boldsymbol{i} - 24\boldsymbol{j} + 384\boldsymbol{k}$$

Contoh 7.2

Hitung $\iiint_V f(x)\, dV$ dimana $f(x) = x^2 + y^2 + z^2$. V adalah ruang tertutup yang dibatasi oleh $x + y + z = 5, x = 0, y = 0, z = 0$.

Penyelesaian.



$$\iiint_V (x^2 + y^2 + z^2)\, dV = \int_{x=0}^{5} \int_{y=0}^{5-x} \int_{z=0}^{5-x-y} (x^2 + y^2 + z^2)\, dz\, dy\, dx$$

$$= \int_{x=0}^{5} \int_{y=0}^{5-x} \left[(x^2 + y^2)(5 - x - y) + \frac{(5 - x - y)^3}{3}\right] dy\, dx$$

$$= \int_{x=0}^{5} \left[\frac{x^2(5 - x)^2}{2} + \frac{(5 - x)^4}{6}\right] dx = \frac{625}{4}$$

Jadi, $\iiint_V \ f(x)\, dV = \frac{625}{4}$.

Teorema Divergensi Gauss

Jika V adalah voluem yang dibatasi oleh suatu permukaan tertutup S dan $\boldsymbol{A}$ sebuah fungsi vektor dengan turunan yang kontinu, maka

$$\iiint_V \nabla \cdot \boldsymbol{A}\, dV = \iint_S \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{n}\, dS = \oiint_S \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{S}$$

Hal ini berarti bahwa, **integral permukaan** dari sebuah vektor $\boldsymbol{A}$ yang mengelilingi sebuah permukaan tertutup sama dengan integral dari divergensi $\boldsymbol{A}$ dalam volume yang diselubungi oleh permukaan di atas. Jadi, dalam mencari integral permukaan dapat juga digunakan Teorema Divergensi Gauss.

Contoh 7.3

Hitung $\iint_S \ \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{n}\, dS$ dimana $\boldsymbol{A} = (2x - z)\boldsymbol{i} + x^2 y\boldsymbol{j} - xz^2\boldsymbol{k}$ dan S adalah permukaan kubus yang dibatasi oleh $x = 0, x = 1, y = 0, y = 1, z = 0, z = 1$.

Penyelesaian.

Karena $\iint_S \ \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{n}\, dS = \iiint_V \ \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{A}\, dV$, maka

$$\iiint_V \ \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{A}\, dV = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \left(\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{k}\right) \cdot [(2x - z)\boldsymbol{i} + x^2\boldsymbol{j} - xz^2\boldsymbol{k}]\, dxdydz$$

$$= \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 (2 + x^2 - 2xz)\, dxdydz$$

$$= \int_0^1 \int_0^1 \left(\frac{7}{3} - z\right) dydz$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{7}{3} - z\right) dz = \frac{11}{6}$$

Jadi, $\iint_S \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{n}\, dS = \iiint_V \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{A}\, dV = \frac{11}{6}$.

Contoh 7.4

Hitunglah $\iint_S \boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{n}\, dS$ dimana S adalah suatu permukaan tertutup.

Penyelesaian.

$$\iint_S \boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{n}\, dS = \iiint_V \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{r}\, dV$$

$$= \iiint_V \left(\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{k}\right) \cdot [x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} - z\boldsymbol{k}]\, dV$$

$$= \iiint_V \left(\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z}\right) dV = 3 \iiint_V dV = 3V$$

c. Soal

1. Hitung $\iiint_V \overline{\nabla} \cdot \bar{F}\, dV$ dimana V adalah ruang tertutup yang dibatasi oleh $x = 0, x = 1, y = 0, y = 1, z = 0, z = 1$ dengan $\bar{F} = 4xz\bar{\imath} - y^2\bar{\jmath} + yz\bar{k}$.
2. Hitunglah volume benda yang dibatasi oleh permukaan $2x + 2y + z = 4, z = 0, y = 0$, dan $x = 0$ yang terletak di kuadran pertama jika diketahui $\bar{F} = y\bar{\imath} + 2z\bar{\jmath} - x\bar{k}$.
3. Hitung $\iint_S \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{n}\, dS$ untuk $\boldsymbol{A} = (2xy + z)\boldsymbol{i} + y^2\boldsymbol{j} - (x + 3y)\boldsymbol{k}$ pada daerah yang dibatasi oleh $2x + 2y + z = 6, x = 0, y = 0, z = 0$.
4. Jika S adalah permukaan tertutup sebarang yang menutupi sebuah volume V dan $\boldsymbol{A} = ax\boldsymbol{i} + by\boldsymbol{j} + cz\boldsymbol{k}$, maka buktikan bahwa $\iint_S \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{n}\, dS = (a + b + c)V$.

8. Kegiatan Belajar 8

a. Tujuan Belajar

Mahasiswa dapat memahami dan menjelaskan tentang Teorema Stokes dan Teorema Green.

b. Uraian Materi

Teorema Stokes

Misalkan S adalah permukaan berarah dalam ruang dengan batas-batasnya adalah kurva C yang tertutup, dan misalkan $\boldsymbol{F}(x, y, z)$ adalah fungsi vektor kontinu yang mempunyai turunan parsial pertama yang kontinu dalam domain yang memuat S, maka

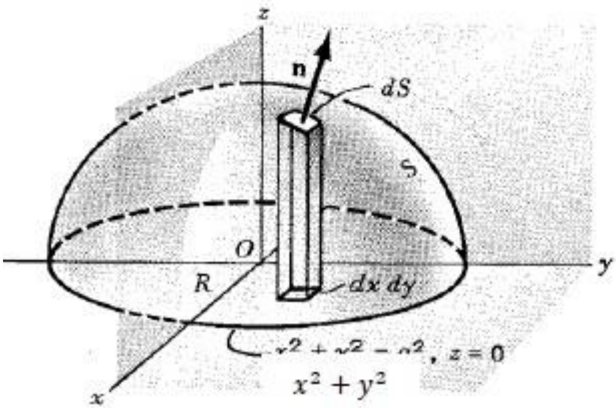
$$\oint_C \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = \iint_S (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{F}) \cdot d\boldsymbol{S}$$

Hal ini berarti bahwa, **integral garis** dari sebuah vektor **F** yang mengelilingi sebuah kurva tertutup sederhana C sama dengan integral permukaan dari curl **F** melalui sebarang permukaan S dengan C sebagai batasnya.

Contoh 8.1

Hitunglah $\iint_S (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}) \cdot d\boldsymbol{S}$ dengan menggunakan Teorema Stokes jika diketahui $\boldsymbol{A} = (2x - y)\boldsymbol{i} - yz^2\boldsymbol{j} - y^2z\boldsymbol{k}$, dimana S adalah separuh dari permukaan bola $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ bagian atas dan C batasnya.

Penyelesaian.



Batas C dari S adalah suatu lingkaran dengan persamaan $x^2 + y^2 = 1, z = 0$ dan persamaan parameternya adalah $x = \cos t\,, y = \sin t\,, z = 0$, dimana $0 \leq t \leq 2\pi$. Karena $\iint_S\ (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}) \cdot d\boldsymbol{S} = \oint_C\ \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{r}$, maka

$$\oint_C \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{r} = \oint_C \big((2x - y)\boldsymbol{i} - yz^2\boldsymbol{j} - y^2z\boldsymbol{k}\big) \cdot d(x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k})$$

$$= \oint_0^{2\pi} (2x - y)dx - yz^2dy - y^2zdz$$

$$= \oint_0^{2\pi} (2\cos t - \sin t)(-\sin t)dt$$

$$= \oint_0^{2\pi} (-2\sin t\cos t + \sin^2 t)dt$$

$$= \oint_0^{2\pi} \left(-\sin 2t + \frac{1}{2} - \frac{\cos 2t}{2}\right) dt$$

$$= \left[\frac{1}{2}\cos 2t + \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t\right]_0^{2\pi} = \pi$$

Jadi, $\iint_S\ (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}) \cdot d\boldsymbol{S} =\ \pi$.

Teorema Green

Jika R adalah suatu daerah tertutup dalam bidang xy yang dibatasi oleh sebuah kurva tertutup sederhana C, M dan N adalah fungsi-fungsi kontinu dari x dan y yang memiliki turunan-turunan kontinu dalam R, maka

$$\oint_C Mdx + Ndy = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dxdy$$

Jika $\boldsymbol{A}$ menyatakan medan gaya yang bekerja pada sebuah partikel dimana $\boldsymbol{A} = M\boldsymbol{i} + N\boldsymbol{j}$, maka $\oint_C\ \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{r}$ adalah usaha yang dilakukan dalam menggerakkan partikel tersebut mengelilingi suatu lintasan tertutup C, yaitu

$$\oint_C \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{r} = \oint_C (M\boldsymbol{i} + N\boldsymbol{j}) \cdot d(x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}) = \oint_C Mdx + Ndy$$

Dengan menggunakan Teorema Green, maka usaha yang dilakukan adalah

$$\iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dxdy$$

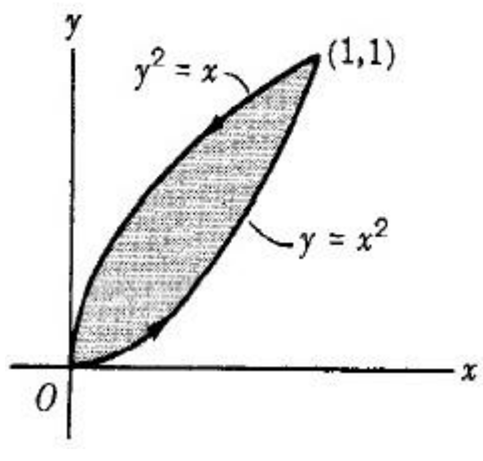
Jadi, selain perhitungan dengan menggunakan integral garis, menentukan besar usaha yang dilakukan juga dapat dihitung menggunakan Teorem Green.

Contoh 8.2

Periksa Teorema Green pada bidang untuk $\oint_C (2xy - x^2)dx + (x + y^2)dy$ dimana C adalah kurva tertutup dari daerah yang dibatasi oleh $y = x^2$ dan $y^2 = x$.

Penyelesaian.

Kurva-kurva bidang tersebut berpotongan di $(0,0)$ dan $(1,1)$. Arah positif dalam menjalani C ditunjukkan pada gambar



Sepanjang $y = x^2$ integral garisnya sama dengan

$$\int_{x=0}^{1} [(2x)(x^2) - x^2]dx + [x + (x^2)^2]\, d(x^2)$$

$$= \int_0^1 (2x^3 + x^2 + 2x^5)\, dx = \frac{7}{6}$$

Sepanjang $y^2 = x$ integral garisnya sama dengan

$$\int_{y=1}^{0} [(2y^2)y - (y^2)^2]\, d(y^2) + (y^2 + y^2)dy$$

$$= \int_{y=1}^{0} (4y^4 - 2y^5 + 2y^2)\, dy = -\frac{17}{15}$$

Jadi, integral garis yang diinginkan adalah $\frac{7}{6} - \frac{17}{15} = \frac{1}{30}$.

Dengan menggunakan Teorema Green,

$$\iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dxdy = \iint_R \left(\frac{\partial(x + y^2)}{\partial x} - \frac{\partial(2xy - x^2)}{\partial y}\right) dxdy$$

$$= \iint_R (1 - 2x)\, dxdy = \int_{x=0}^{1} \int_{y=x^2}^{\sqrt{x}} (1 - 2x)\, dy\, dx$$

$$= \int_{x=0}^{1} \left(x^{1/2} - 2x^{3/2} - x^2 + 2x^3\right) dx = \frac{1}{30}.$$

c. Soal

1. Gunakan Teorema Stokes untuk menghitung $\iint_S (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}) \cdot d\boldsymbol{S}$ dengan $\boldsymbol{A} = 3y\boldsymbol{i} - xz\boldsymbol{j} + yz^2\boldsymbol{k}$, dimana S adalah permukaan paraboloida $2z = x^2 + y^2$ yang dibatasi oleh $z = 2$ dan C sebagai batasnya.
2. Hitunglah $\oint_C \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}$ dimana $\boldsymbol{F} = xz\boldsymbol{i} + 2z\boldsymbol{j} - xy\boldsymbol{k}$ dan C adalah perpotongan bidang $y = z + 2$ dengan silinder $x^2 + y^2 = 4$.
3. Hitunglah $\oint_C [(x^2 - xy^3)dx + (y^2 - 2xy)dy]$ dimana C adalah suatu persegi dengan titik sudut $(0,0), (0,2), (2,2)$, dan $(2,0)$.
4. Hitunglah $\int_C [(2x - y + 4)dx + (5y + 3x - 6)dy]$ di sekeliling suatu segitiga pada bidang xy dengan titik sudut $(0,0), (3,0)$, dan $(3,2)$ yang dijalani berlawanan arah dengan arah jarum jam.

9. Kegiatan Belajar 9

a. Tujuan Belajar

Mahasiswa dapat memahami tentang fungsi periodik dan deret fourier.

b. Uraian Materi

Deret Fourier adalah deret tak hingga yang merepresentasikan fungsi periodik dalam bentuk sinus dan kosinus.

Deret ini merupakan alat yang sangat penting untuk memecahkan masalah yang melibatkan persamaan diferensial biasa maupun parsial.

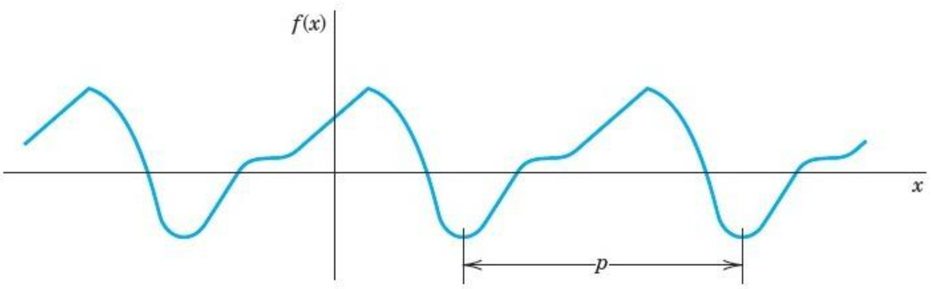
Fungsi Periodik

Fungsi $f(x)$ dikatakan **fungsi periodik** jika fungsi itu terdefinisi pada semua bilangan riil x, kecuali pada beberapa titik, dan jika terdapat bilangan positif p sedemikian sehingga

$$f(x+p) = f(x), \qquad (1)$$

untuk semua x. Bilangan p ini dinamakan **periode** dari fungsi $f(x)$.

Grafik dari fungsi periodik memiliki karakteristik yaitu dapat diperoleh dari pengulangan periodik grafiknya pada sebarang interval dengan panjang p.



Jika $f(x)$ memiliki periode p, maka $f(x)$ juga memiliki periode $2p$, karena persamaan (1) mengakibatkan

$$f(x+2p) = f([x+p]+p) = f(x+p) = f(x),$$

dan seterusnya. Sehingga untuk setiap bilangan bulat n, maka berlaku

$$f(x+np) = f(x),$$

untuk semua x.

Jika $f(x)$ dan $g(x)$ memiliki periode p, maka

$$h(x) = af(x) + bg(x),$$

dimana a dan b konstanta, juga mempunyai periode p.

Fungsi-fungsi yang memiliki periode $p = 2\pi$, yaitu

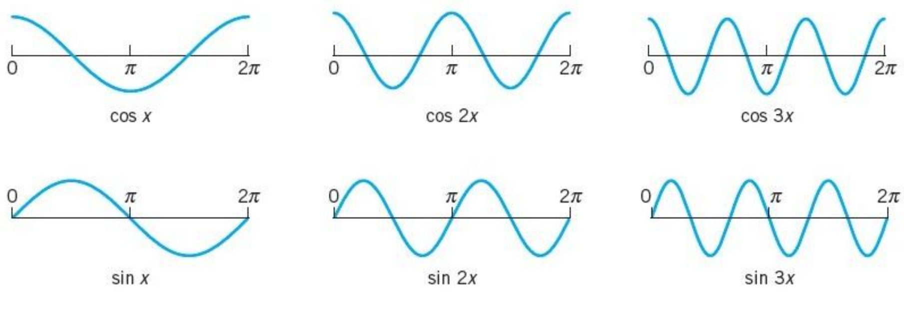
$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \cdots, \cos nx, \sin nx, \cdots,$$

dapat membentuk suatu deret yang dinamakan dengan **deret trigonometrik**, yaitu

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

dengan a_0, a_n, b_n adalah bilangan riil, dan disebut sebagai **koefisien** deret tersebut.

Himpunan fungsi berperiode 2π yang menyusun deret di atas disebut dengan **sistem trigonometrik**.



Jika koefisien dari deret trigonometrik tersebut merupakan deret konvergen, maka jumlahnya akan menjadi suatu fungsi dengan periode 2π.

Misalkan $f(x)$ merupakan suatu fungsi berperiode 2π yang direpresentasikan oleh suatu deret trigonometrik,

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

Deret ini konvergen dan mempunyai $f(x)$ sebagai jumlahnya. Deret ini disebut sebagai **deret Fourier** dari $f(x)$ dan a_0, a_n, b_n disebut sebagai **koefisien Fourier**.

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx\, dx, \qquad n = 1, 2, \cdots$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx\, dx, \qquad n = 1, 2, \cdots$$

Contoh 9.1

Tentukan deret Fourier untuk fungsi berikut

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < -\frac{\pi}{2} \\ 4, & -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}, \\ 0, & \frac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases}$$

dimana $f(x + 2\pi) = f(x)$.

Penyelesaian.

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx = \frac{1}{2\pi} \left\{ \int_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}} 0\, dx + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 4\, dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 0\, dx \right\} = \frac{1}{2\pi} [4x]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 2$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \left\{ \int_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}} 0 \cdot \cos nx \, dx + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 4 \cdot \cos nx \, dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 0 \cdot \cos nx \, dx \right\}$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[\frac{4}{n} \sin nx \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{\pi} \left[\frac{4}{n} \sin \frac{n\pi}{2} - \frac{4}{n} \sin \left(-\frac{n\pi}{2} \right) \right]$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[\frac{4}{n} \sin \frac{n\pi}{2} + \frac{4}{n} \sin \frac{n\pi}{2} \right] = \frac{8}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2}$$

$$\therefore a_n = \begin{cases} 0, & \text{jika } n \text{ genap} \\ \dfrac{8}{n\pi}, & \text{jika } n = 1,5,9,\cdots \\ -\dfrac{8}{n\pi}, & \text{jika } n = 3,7,1,\cdots \end{cases}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \left\{ \int_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}} 0 \cdot \sin nx \, dx + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 4 \cdot \sin nx \, dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 0 \cdot \sin nx \, dx \right\}$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[-\frac{4}{n} \cos nx \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{\pi} \left[-\frac{4}{n} \cos \frac{n\pi}{2} + \frac{4}{n} \cos \frac{n\pi}{2} \right] = 0$$

$$\therefore b_n = 0$$

Jadi, diperoleh deret Fourier untuk fungsi tersebut adalah

$$f(x) = 2 + \frac{8}{\pi} \left(\cos x - \frac{1}{3} \cos 3x + \frac{1}{5} \cos 5x - \frac{1}{7} \cos 7x + \cdots \right)$$

Contoh 9.2

Tentukan deret Fourier untuk merepresentasikan fungsi periodik berikut

$$f(x) = \frac{x}{2}, \qquad 0 < x < 2\pi,$$

dimana $f(x + 2\pi) = f(x)$.

Penyelesaian.

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{x}{2}\,dx = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{x^2}{4}\right]_0^{2\pi} = \frac{\pi}{2}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{x}{2}\cos nx\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x\cos nx\ dx$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left\{\left[\frac{x\sin nx}{n}\right]_0^{2\pi} - \frac{1}{n}\int_0^{2\pi} \sin nx\ dx\right\} = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{x}{2}\sin nx\ dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x\sin nx\ dx$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left\{\left[-\frac{x\cos nx}{n}\right]_0^{2\pi} + \frac{1}{n}\int_0^{2\pi} \cos nx\ dx\right\} = -\frac{1}{n}$$

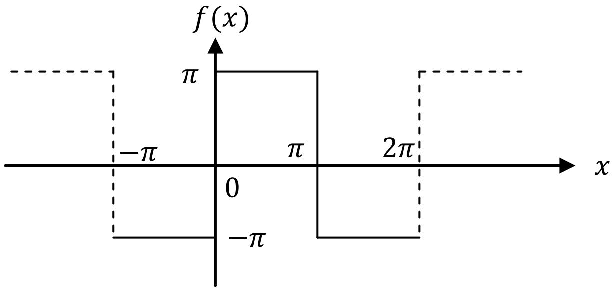
Jadi, diperoleh deret Fourier dari fungsi di atas yaitu

$$f(x) = \frac{\pi}{2} + \left(-\frac{1}{1}\sin x - \frac{1}{2}\sin 2x - \frac{1}{3}\sin 3x - \cdots\right)$$

$$= \frac{\pi}{2} - \left(\sin x + \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x + \cdots\right)$$

c. Soal

1. Tentukan deret Fourier dari $f(x)$ yang berada pada interval $(-\pi, \pi)$ seperti digambarkan berikut.



2. Tentukan deret Fourier untuk merepresentasikan fungsi periodik berikut

$$f(x) = |x|, -\pi < x < \pi,$$

dimana $f(x + 2\pi) = f(x)$.

10. Kegiatan Belajar 10

a. Tujuan Belajar

1. Mahasiswa dapat memahami dan mampu menentukan deret fourier dari fungsi dengan periode $p = 2L$.
2. Mahasiswa dapat memahami dan mampu menentukan deret fourier dari fungsi genap dan fungsi ganjil.

b. Uraian Materi

Fungsi dengan Periode $\boldsymbol{p = 2L}$

Jika fungsi $f(x)$ memiliki periode $p = 2L$, maka deret Fourier dari fungsi tersebut adalah

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right),$$

dimana koefisien Fouriernya adalah

$$a_0 = \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} f(x) \; dx$$

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} \; dx\,, \qquad n = 1,2,\cdots$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} \; dx\,, \qquad n = 1,2,\cdots$$

Selang integrasi tersebut di atas dapat diganti dengan selang yang lainnya yang panjangnya $p = 2L$, misal $0 \leq x \leq 2L$.

Contoh 10.1

Tentukan deret Fourier dari fungsi berikut

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{jika} -2 < x < -1 \\ k, & \text{jika} -1 < x < 1 \\ 0, & \text{jika } 1 < x < 2 \end{cases}$$

Penyelesaian.

Dari fungsi tersebut diperoleh bahwa $p = 4$, sehinggan $L = 2$.

$$a_0 = \frac{1}{4}\left\{\int_{-2}^{-1} 0 \ dx + \int_{-1}^{1} k \ dx + \int_{1}^{2} 0 \ dx\right\} = \frac{k}{2}$$

$$a_n = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x)\cos\frac{n\pi x}{2}\ dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} k\cos\frac{n\pi x}{2}\ dx = \frac{k}{2}\left[\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}\right]_{-1}^{1}$$

$$= \frac{k}{2}\left[\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2} - \frac{2}{n\pi}\sin\left(-\frac{n\pi}{2}\right)\right] = \frac{k}{2}\left[\frac{4}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}\right] = \frac{2k}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}$$

$$\therefore a_n = \begin{cases} 0, & \text{jika } n \text{ genap} \\ \dfrac{2k}{n\pi}, & \text{jika } n = 1,5,9,\cdots \\ -\dfrac{2k}{n\pi}, & \text{jika } n = 3,7,11,\cdots \end{cases}$$

$$b_n = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x)\sin\frac{n\pi x}{2}\ dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} k\sin\frac{n\pi x}{2}\ dx = \frac{k}{2}\left[-\frac{2}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}\right]_{-1}^{1}$$

$$= 0$$

Jadi, diperoleh deret Fourier dari fungsi tersebut adalah

$$f(x) = \frac{k}{2} + \frac{2k}{\pi}\left(\cos\frac{\pi}{2}x - \frac{1}{3}\cos\frac{3\pi}{2}x + \frac{1}{5}\cos\frac{5\pi}{2}x - \cdots\right)$$

Contoh 10.2

Diketahui fungsi $f(x)$ sebagai berikut

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1 \\ 0, & 1 < x < 2 \end{cases}$$

Periodik dengan periode 2, sehingga $f(x + 2) = f(x)$.

$$p = 2 \ \Rightarrow L = 1$$

$$a_0 = \frac{1}{2}\int_0^2 f(x)\ dx = \frac{1}{2}\left\{\int_0^1 1\ dx + \int_1^2 0\ dx\right\} = \frac{1}{2}$$

$$a_n = \frac{1}{1}\int_0^2 f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\ dx = \int_0^1 \cos\frac{n\pi x}{1}\ dx = \left[\frac{1}{n\pi}\sin n\pi x\right]_0^1 = 0$$

$$b_n = \frac{1}{1}\int_0^2 f(x)\sin\frac{n\pi x}{1}\ dx = \int_0^1 1\cdot\sin n\pi x\ dx + \int_1^2 0\cdot\sin n\pi x\ dx$$

$$= -\frac{1}{n\pi}[\cos n\pi x]_0^1 = -\frac{1}{n\pi}(\cos n\pi x - 1)$$

$$\therefore\ b_n = \begin{cases} \dfrac{2}{n\pi}, & n \text{ ganjil} \\ 0, & n \text{ genap} \end{cases}$$

Jadi, deret Fourier dari fungsi di atas adalah

$$f(x) = \frac{1}{2} + \left(\frac{2}{\pi}\sin\pi x + \frac{2}{3\pi}\sin 3\pi x + \frac{2}{5\pi}\sin 5\pi x + \cdots\right).$$

Fungsi Genap dan Fungsi Ganjil

Jika $f(x)$ adalah **fungsi genap**, maka

$$f(-x) = f(x).$$

Jika $f(x)$ adalah **fungsi ganjil**, maka

$$f(-x) = -f(x),$$

untuk semua x.

Jika $f(x)$ genap, maka

$$\int_{-L}^{L} f(x)dx = 2\int_0^L f(x)dx.$$

Jika $f(x)$ ganjil, maka

$$\int_{-L}^{L} f(x)dx = 0.$$

Teorema.

Jika $f(x)$ genap dengan periode $2L$, maka

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{L}$$

dengan

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_0^L f(x)\ dx$$

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\ dx, \qquad n = 1,2,\cdots$$

Jika $f(x)$ ganjil dengan periode $2L$, maka

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{L}$$

dengan

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\ dx.$$

Contoh 10.3

Diberikan fungsi berikut

$$f(x) = x^2, \qquad -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2},$$

dengan periode 1, sehingga $p = 2L = 1 \ \Rightarrow L = \frac{1}{2}$.

Nyatakan fungsi tersebut ke dalam deret Fourier.

Penyelesaian.

$f(x) = x^2$ adalah fungsi genap, karena $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$.

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_0^L f(x)\ dx = 2\int_0^{\frac{1}{2}} x^2\ dx = 2.\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{12}$$

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\;dx = 4\int_0^{\frac{1}{2}} x^2\cos 2n\pi x\;dx$$

$$= 4\left\{x^2\frac{1}{2n\pi}\sin 2n\pi x + 2x\frac{1}{(2n\pi)^2}\cos 2n\pi x - \frac{2}{(2n\pi)^3}\sin 2n\pi x\right\}\Bigg]_0^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{n^2\pi^2}\cos n\pi$$

Jadi, deret Fourier untuk fungsi tersebut adalah

$$f(x) = \frac{1}{12} + \frac{1}{\pi^2}\left(-\cos 2\pi x + \frac{1}{4}\cos 4\pi x - \frac{1}{9}\cos 6\pi x + \cdots\right)$$

c. Soal

1. Tentukan deret Fourier untuk merepresentasikan fungsi periodik berikut

$$f(x) = |x|, -1 < x < 1,$$

   dimana $f(x+2) = f(x)$.

2. Tentukan deret Fourier untuk merepresentasikan fungsi periodik berikut

$$f(x) = x, -\pi < x < \pi,$$

   dimana $f(x+2\pi) = f(x)$.

11. Kegiatan Belajar 11

a. Tujuan Belajar

Mahasiswa dapat memahami dan menjelaskan tentang deret setengah jangkauan dan deret fourier kompleks.

b. Uraian Materi

Deret Setengah Jangkauan

Misalkan suatu fungsi dengan periode $2L$ didefinisikan pada selang 0 ke L. Karena $f(x)$ didefinisikan hanya pada setengah selang, maka diperoleh deret kosinus Fourier untuk $f(x)$, yang merepresentasikan perluasan genap $f(x)$ pada selang $-L \leq x \leq L$, atau dapat diperoleh perluasan deret sinus Fourier untuk $f(x)$, yang merepresentasikan perluasan ganjil $f(x)$ pada selang $-L \leq x \leq L$. Masing-masing deret ini disebut **deret setengah jangkauan** fungsi $f(x)$, yang diberikan hanya pada setengah selang keperiodikan deret tersebut.

Deret setengah jangkauan kosinus adalah

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{L}$$

dengan

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_0^L f(x)dx$$

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx\,, \qquad n = 1,2,\cdots$$

Deret setengah jangkauan sinus adalah

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{L}$$

dengan

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx, \qquad n = 1,2,\cdots$$

Contoh 11.1

Diberikan fungsi $f(x)$ yang didefinisikan sebagai

$$f(x) = 2x, \qquad 0 < x < \pi,$$

dengan $f(x + 2\pi) = f(x)$.

Tentukan deret setengah jangkauan kosinus untuk merepresentasikan fungsi tersebut.

Penyelesaian.

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} 2x\,dx = \frac{1}{\pi}\,x^2\Big]_0^{\pi} = \frac{1}{\pi}\pi^2 = \pi$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} 2x\cos\frac{n\pi x}{\pi}\,dx = \frac{4}{\pi}\left[x\,\frac{1}{n}\sin nx + \frac{1}{n^2}\cos nx\right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{4}{\pi n^2}(\cos n\pi - 1)$$

$$\cos n\pi = \begin{cases} 1, & n \text{ genap} \\ -1, & n \text{ ganjil} \end{cases}$$

Sehingga

$$a_n = \begin{cases} 0, & n \text{ genap} \\ -\dfrac{8}{\pi n^2}, & n \text{ ganjil} \end{cases}$$

Jadi, deret setengah jangkauan kosinus untuk fungsi tersebut adalah

$$f(x) = \pi - \frac{8}{\pi}\left(\cos x + \frac{1}{9}\cos 3x + \frac{1}{25}\cos 5x + \cdots\right)$$

Contoh 11.2

Tentukan deret setengah jangkauan sinus untuk merepresentasikan fungsi $f(x)$ yang didefinisikan sebagai

$$f(x) = 1 + x, \qquad 0 < x < \pi$$

dengan $f(x + 2\pi) = f(x)$.

Penyelesaian.

$$p = 2\pi$$

$$L = \pi$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(1+x)\sin\frac{n\pi x}{\pi}\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(1+x)\sin nx\,dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\int_0^{\pi}\sin nx\;\;dx + \int_0^{\pi}x\sin nx\;\;dx\right]$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[-\frac{1}{n}\cos nx\right]_0^{\pi} + \left[-x\frac{1}{n}\cos nx - \frac{1}{n^2}\sin nx\right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[-\frac{1}{n}(\cos n\pi - 1) - \frac{\pi}{n}\cos n\pi\right] = \frac{2}{n\pi}[1-(1+\pi)\cos n\pi]$$

$$b_n = \begin{cases} \dfrac{4+2\pi}{\pi n}, & n \text{ ganjil} \\ -\dfrac{2}{n}, & n \text{ genap} \end{cases}$$

Jadi,

$$f(x) = \frac{2}{\pi}(2+\pi)\sin x - \sin 2x + \frac{2}{3\pi}(2+\pi)\sin 3x - \cdots$$

Deret Fourier Kompleks

Diketahui bahwa

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$$

$$e^{-j\theta} = \cos\theta - j\sin\theta$$

Dari kedua persamaan di atas diperoleh bahwa

$$\cos\theta = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2} \quad \text{dan} \quad \sin\theta = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j}$$

Persamaan di atas jika disubtitusi ke dalam deret Fourier yang diketahui sebelumnya yaitu

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right),$$

maka diperoleh suatu **deret Fourier kompleks**, yaitu

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j\frac{n\pi x}{L}}$$

dimana

$$c_0 = \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} f(x)\, dx$$

$$c_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} f(x)\, e^{-j\frac{n\pi x}{L}} dx, \qquad n = \pm 1, \pm 2, \cdots$$

Contoh 11.3

Tentukan deret Fourier kompleks untuk

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -L < x < -\frac{a}{2} \\ 1, & -\frac{a}{2} < x < \frac{a}{2} \\ 0, & \frac{a}{2} < x < L \end{cases},$$

dimana $f(x + 2L) = f(x)$.

Penyelesaian.

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j\frac{n\pi x}{L}}$$

$$c_0 = \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} f(x)\, dx = \frac{1}{2L} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} 1\, dx = \frac{1}{2L} \left(\frac{a}{2} + \frac{a}{2} \right) = \frac{a}{2L}$$

$$c_n = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)\, e^{-j\frac{n\pi x}{L}} dx = \frac{1}{2L}\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} 1 \cdot e^{-j\frac{n\pi x}{L}} dx = \frac{1}{2L} \cdot -\frac{L}{jn\pi} e^{-j\frac{n\pi x}{L}}\Big]_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}$$

$$= \frac{1}{n\pi}\left(\frac{e^{-j\frac{n\pi a}{2L}} - e^{j\frac{n\pi a}{2L}}}{2j}\right) = \frac{1}{n\pi}\sin\frac{n\pi a}{2L}$$

$$\therefore f(x) = \frac{a}{2L} + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} \frac{1}{n\pi}\sin\frac{n\pi a}{2L}\, e^{j\frac{n\pi x}{L}}$$

Contoh 11.4

Tentukan deret Fourier kompleks untuk

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < a \\ 0, & a < x < 2L' \end{cases}$$

dimana $f(x + 2L) = f(x)$.

Penyelesaian.

$$c_0 = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)\, dx = \frac{1}{2L}\int_{0}^{a} 1\, dx = \frac{1}{2L}(a - 0) = \frac{a}{2L}$$

$$c_n = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)\, e^{-j\frac{n\pi x}{L}} dx = \frac{1}{2L}\int_{0}^{a} 1 \cdot e^{-j\frac{n\pi x}{L}} dx$$

$$= \frac{1}{2L} \cdot -\frac{L}{jn\pi}\left(e^{-j\frac{n\pi a}{L}} - e^{0}\right)$$

$$= \frac{1}{n\pi} e^{-j\frac{n\pi a}{2L}}\left(\frac{e^{-j\frac{n\pi a}{2L}} - e^{j\frac{n\pi a}{2L}}}{2j}\right) = \frac{1}{n\pi} e^{-j\frac{n\pi a}{2L}} \sin\frac{n\pi a}{2L}$$

$$\therefore f(x) = \frac{a}{2L} + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} \frac{1}{n\pi} e^{-j\frac{n\pi a}{2L}} \sin\frac{n\pi a}{2L}\, e^{j\frac{n\pi x}{L}}$$

c. Soal

1. Diberikan fungsi $f(x)$ yang didefinisikan sebagai

$$f(x) = 4 - x, \qquad 0 < x < 4.$$

   Tentukan deret setengah jangkauan sinus dan kosinus untuk merepresentasikan fungsi tersebut.

2. Suatu fungsi $f(x)$ didefinisikan sebagai berikut

$$f(x) = \begin{cases} 3, & -2 < x < 0 \\ -5, & 0 < x < 2 \end{cases}'$$

   dengan $f(x + 4) = f(x)$. Representasikan deret Fourier kompleks dari fungsi tersebut.

12. Kegiatan Belajar 12

a. Tujuan Belajar

Mahasiswa dapat memahami dan mampu menjelaskan tentang transformasi fourier dan sifat-sifatnya.

b. Uraian Materi

Misalkan $f(x)$ dan $f'(x)$ berlaku

a. $f(x)$ dan $f'(x)$ adalah fungsi kontinu bagian demi bagian pada setiap selang berhingga,
b. $f(x)$ terintegralkan pada $(-\infty,\infty)$, yaitu $\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|\,dx$ adalah hingga,

maka

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{j\omega t}\ d\omega$$

dimana

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(t)e^{-j\omega t}\ dt.$$

$F(\omega)$ inilah yang disebut sebagai **transformasi Fourier** dari $f(t)$, yang ditulis juga $\bar{F}(f(t)) = F(\omega)$.

Proses invers **transformasi Fourier** dapat dilakukan melalui persamaan

$$f(x) = F^{-1}(\omega).$$

Contoh 12.1

Tentukan transformasi Fourier dari

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < -\frac{a}{2} \\ 1, & -\frac{a}{2} < t < \frac{a}{2} \\ 0, & \frac{a}{2} < t \end{cases}$$

Penyelesaian.

$$F(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}1\cdot e^{-j\omega t}\;dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[-\frac{1}{j\omega}e^{-j\omega t}\;\right]_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[-\frac{1}{j\omega}\left(e^{-j\frac{\omega a}{2}}-e^{j\frac{\omega a}{2}}\right)\right]=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{e^{-j\frac{\omega a}{2}}-e^{j\frac{\omega a}{2}}}{-2j\omega}\right)$$

$$=\frac{a}{\sqrt{2\pi}}\frac{\sin(\omega a/2)}{\omega a/2}$$

Contoh 12.2

Tentukan transformasi Fourier dari

$$f(t)=\begin{cases}1, & 0<t<a\\ 0, & \text{selainnya}\end{cases}$$

Penyelesaian.

$$F(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{a}1\cdot e^{-j\omega t}\,dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[-\frac{1}{j\omega}e^{-j\omega t}\;\right]_{0}^{a}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[-\frac{1}{j\omega}\left(e^{-j\omega a}\;-e^{0}\right)\right]$$

$$=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}e^{-j\frac{\omega a}{2}}\left(\frac{e^{-j\frac{\omega a}{2}}-e^{j\frac{\omega a}{2}}}{-2j\omega}\right)=\frac{a}{\sqrt{2\pi}}e^{-j\frac{\omega a}{2}}\frac{\sin\left(\frac{\omega a}{2}\right)}{\frac{\omega a}{2}}$$

Transformasi Fourier Beberapa Fungsi Khusus

1. Fungsi Genap

Jika $f(t)$ adalah fungsi genap, maka

$$f(-t)=f(t)$$

$$f(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)e^{j\omega t}\,d\omega$$

dimana

$$F(\omega)=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\infty}f(t)\cos\omega t\,dt.$$

2. Fungsi Ganjil

Jika $f(t)$ adalah fungsi ganjil, maka

$$f(-t) = -f(t)$$

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t}\, d\omega$$

dimana

$$F(\omega) = -j \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\infty} f(t) \sin \omega t\, dt$$

3. Fungsi Segiempat (*top-hat function*)

Fungsi segiempat didefinisikan sebagai

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < -\frac{a}{2} \\ \frac{1}{a}, & -\frac{a}{2} < t < \frac{a}{2} \\ 0, & t > \frac{a}{2} \end{cases}$$

Transformasi Fourier untuk fungsi segiempat adalah

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sin\left(\frac{\omega a}{2}\right)}{\frac{\omega a}{2}}.$$

4. Fungsi Segitiga

Fungsi segitiga didefinisikan sebagai

$$f(t) = \begin{cases} 1 + t, & -1 < t < 0 \\ 1 - t, & 0 < t < 1 \\ 0, & |t| > 1 \end{cases}$$

Transformasi Fourier untuk fungsi segitiga adalah

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sin^2\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\left(\frac{\omega}{2}\right)^2}.$$

Sifat-sifat Transformasi Fourier

1. Kelinieran

   Jika $\bar{F}[f_1(t)] = F_1(\omega)$ dan $\bar{F}[f_2(t)] = F_2(\omega)$, maka
   $$\bar{F}[Af_1(t) + Bf_2(t)] = F_1(\omega) + BF_2(\omega).$$

2. Pergeseran Waktu

   Jika $\bar{F}[f(t)] = F(\omega)$, maka $\bar{F}[f(t - t_0)] = e^{j\omega\, t_0}F(\omega)$.

3. Pergeseran Frekuensi

   Jika $\bar{F}[f(t)] = F(\omega)$, maka $\bar{F}\left[f(t)e^{j\,\omega_0 t}\right] = F(\omega - \omega_0)$.

4. Penskalaan Waktu

   Jika $\bar{F}[f(t)] = F(\omega)$, maka
   $$\bar{F}[f(kt)] = \frac{1}{|k|}F\left(\frac{\omega}{k}\right).$$

5. Simetri

   Jika $\bar{F}[f(t)] = F(\omega)$, maka $\bar{F}[F(t)] = f(-\omega)$.

6. Diferensiasi

   Jika $f(t) \to 0$, $t \to \pm\infty$, dan jika $\bar{F}[f(t)] = F(\omega)$, maka
   $$\bar{F}[f'(t)] = j\omega F(\omega).$$

7. Integrasi
   $$\bar{F}\left[\int_{-\infty}^{t} f(x)dx\right] = \frac{F(\omega)}{j\omega} + \pi F(0)\delta(\omega).$$

Contoh 12.3

Misalkan $\bar{F}[f_1(t)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{\sin(\omega)}{\omega}$ dan $\bar{F}[f_2(t)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{\sin^2(\omega)}{\omega^2}$. Tentukan transformasi Fourier dari $f(t) = 2f_1(t) - 6f_2(t)$!

Penyelesaian.

$$\bar{F}[f(t)] = 2\bar{F}[f_1(t)] - 6\bar{F}[f_2(t)] = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{\sin(\omega)}{\omega} - 6 \cdot \frac{\sin^2(\omega)}{\omega^2}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\frac{\sin(\omega)}{\omega}\left(1 - 3\frac{\sin(\omega)}{\omega}\right)$$

Contoh 12.4

Jika $\bar{F}[f(t)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{\sin(\omega)}{\omega}$, maka

$$\bar{F}[f(t-5)] = \frac{e^{j5\omega}}{\sqrt{2\pi}}\frac{\sin(\omega)}{\omega}$$

dan

$$\bar{F}[f(t+3)] = \frac{e^{-j3\omega}}{\sqrt{2\pi}}\frac{\sin(\omega)}{\omega}.$$

c. Soal

1. Tentukan transformasi Fourier dari fungsi berikut

$$f(t) = \begin{cases} e^{at}, & -1 < t < 1 \\ 0, & \text{selainnya} \end{cases}$$

2. Hitunglah transformasi Fourier dari fungsi berikut

$$f(t) = \begin{cases} -1, & \text{untuk} -1 < t < 0 \\ 1, & \text{untuk } 0 < t < 1 \\ 0, & \text{selainnya} \end{cases}$$

13. Kegiatan Belajar 13

a. Tujuan Belajar

Mahasiswa dapat memahami dan mampu menjelaskan tentang transformasi fourier kosinus dan sinus.

b. Uraian Materi

Transformasi Fourier Kosinus dan Sinus

Diberikan fungsi $f(t)$ sebagai berikut

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t}\, d\omega \text{, dimana}$$

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t}\, dt$$

Transformasi Fourier Kosinus didefinisikan sebagai berikut

$$F_c(\omega) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\infty} f(t) \cos \omega t\, dt$$

Transformasi Fourier Sinus didefinisikan sebagai berikut

$$F_s(\omega) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\infty} f(t) \sin \omega t\, dt$$

Contoh 13.1

Tentukan transformasi Fourier kosinus dan sinus dari

$$f(t) = \begin{cases} 1, \text{ untuk } 0 < t < a \\ 0, \qquad \text{untuk } t \geq a \end{cases}$$

Penyelesaian.

Transformasi Fourier kosinus dari fungsi tersebut diperoleh

$$F_c(\omega) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\infty} f(t) \cos \omega t\, dt = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{a} \cos \omega t\, dt$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{\sin \omega t}{\omega} \right]_0^a = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{\sin \omega a}{\omega} \right)$$

dan transformasi Fourier sinusnya adalah

$$F_s(\omega) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty f(t) \sin \omega t \, dt = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^a \sin \omega t \, dt$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \left[-\frac{1 - \cos \omega t}{\omega} \right]_0^a = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{2 \sin^2 \omega a}{\omega} \right)$$

Konvolusi

Konvolusi dari dua buah fungsi yaitu $f(t)$ dan $g(t)$ didefinisikan sebagai

$$f(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) g(t - x) dx$$

dimana $*$ adalah notasi untuk operasi konvolusi.

Contoh 13.2

Misalkan $f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & \mathrm{t} > 0 \end{cases}$ dan $g(t) = \begin{cases} \sec^2 t \,, & |t| < \frac{\pi}{4} \\ 0, & \text{selainnya.} \end{cases}$

Tentukan $h(t) = f(t) * g(t)$.

Penyelesaian.

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) g(t - x) dx$$

$$= \int_{-\infty}^{-\frac{\pi}{4}} 0 \cdot 0 \, dx + \int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} 0 \cdot \sec^2(t - x) \, dx + \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} 1 \cdot \sec^2(t - x) \, dx$$

$$+ \int_{\frac{\pi}{4}}^{\infty} 1 \cdot 0 dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} 1 \cdot \sec^2(t - x) \, dx = [-\tan(t - x)]_0^{\frac{\pi}{4}} = \tan\left(t - \frac{\pi}{4}\right) - \tan(t).$$

TABEL TRANSFORMASI FOURIER

No.	$f(t)$	$\bar{F}[f(t)] = F(\omega)$
1.	$\begin{cases} 1, & -a < t < a \\ 0, & \text{selainnya} \end{cases}$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin \omega a}{\omega}$
2.	$\begin{cases} 1, & a < t < b \\ 0, & \text{selainnya} \end{cases}$	$\frac{e^{-ja\omega} - e^{-jb\omega}}{j\omega\sqrt{2\pi}}$
3.	$\frac{1}{t^2 + a^2}, \quad a > 0$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-a\|\omega\|}}{a}$
4.	$\begin{cases} t, & 0 < t < a \\ 2t - a, & a < t < 2a \\ 0, & \text{selainnya} \end{cases}$	$\frac{-1 + 2e^{ja\omega} - e^{-2ja\omega}}{\sqrt{2\pi}\omega^2}$
5.	$\begin{cases} e^{-at}, & t > 0 \\ 0, & \text{selainnya} \end{cases}$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}(a + j\omega)}$
6.	$\begin{cases} e^{at}, & b < t < c \\ 0, & \text{selainnya} \end{cases}$	$\frac{e^{(a-j\omega)c} - e^{(a-j\omega)b}}{\sqrt{2\pi}(a - j\omega)}$
7.	$\begin{cases} e^{jat}, & -b < t < b \\ 0, & \text{selainnya} \end{cases}$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin b(\omega - a)}{\omega - a}$
8.	$\begin{cases} e^{jat}, & b < t < c \\ 0, & \text{selainnya} \end{cases}$	$\frac{j}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{jb(a-\omega)} - e^{jc(a-\omega)}}{a - \omega}$
9.	$e^{-at^2}, \quad a > 0$	$\frac{1}{\sqrt{2a}} e^{-\omega^2/4a}$
10.	$\frac{\sin at}{t}, \quad a > 0$	$\begin{cases} \sqrt{\frac{\pi}{2}}, & \|\omega\| < a \\ 0, & \|\omega\| < a \end{cases}$

c. Soal

1. Tentukan transformasi Fourier kosinus dan sinus dari

$$f(t) = \begin{cases} 1, & \text{untuk } 0 < t < a \\ 0, & \text{untuk } t \geq a \end{cases}$$

2. Tentukan transformasi Fourier kosinus dari

$$f(t) = \begin{cases} 1, & \text{untuk } 0 < t < 1 \\ -1, & \text{untuk } 1 < t < 2 \\ 0, & \text{untuk } t > 2 \end{cases}$$

14. Kegiatan Belajar 14

a. Tujuan Belajar

Mahasiswa dapat memahami tentang pemodelan *State Space*.

b. Uraian Materi

State suatu sistem dinamik adalah sekumpulan minimum variabel (disebut variabel-variabel state) sedemikian sehingga dengan mengetahui variabel-variabel tersebut pada $t = t_0$, bersama dengan informasi input untuk $t \geq t_0$, maka perilaku sistem pada $t \geq t_0$ dapat ditentukan secara utuh.

Variabel-variabel state suatu sistem dinamik adalah sekumpulan minimum variabel yang menentukan state sistem dinamik tersebut. Variabel state tidak harus merupakan besaran yang dapat diukur atau diamati secara fisik (merupakan keunggulan metoda ini). Secara praktis, pilih besaran yang dapat diukur sebagai variabel state (agar dapat diumpanbalikkan) .

Bila dibutuhkan n variabel state untuk mendeskripsikan secara utuh perilaku suatu sistem, maka n variabel tersebut dapat dipandang sebagai n komponen dari suatu vektor $\boldsymbol{x}$.

Suatu **vektor state** adalah suatu vektor yang menentukan secara unik state sistem $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t})$ untuk $t \geq t_0$ bila state pada $t = t_0$ diberikan dan input $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{t})$ pada $t \geq t_0$ juga diberikan.

State space adalah ruang berdimensi n dengan sumbu-sumbu $x_1, x_2, \ldots\ x_n$. Setiap state dapat terletak disuatu titik dalam ruang tsb.

Pada persamaan state space perlu 3 jenis variabel dalam analisis:

1. Variabel-variabel input,
2. Variabel-variabel output,
3. Variabel-variabel state.

Representasi state space untuk suatu sistem tidak unik, tetapi jumlah variabel state nya adalah sama untuk sistem yang sama.

Model State Space

Representasi State Space untuk sistem *Multiple Input Multiple Output* (MIMO) yaitu sebagai berikut.

Input :

$$u_1(t), u_2(t), \cdots, u_r(t)$$

Output :

$$y_1(t), y_2(t), \cdots, y_m(t)$$

Definisikan n output integrator sebagai variabel state

$$x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)$$

Sistem dapat dideskripsikan menjadi

$$\begin{gathered}\dot{x}_1(t) = f_1(x_1, x_2, \cdots, x_n;\ u_1, u_2, \cdots, u_r; t)\\ \dot{x}_2(t) = f_2(x_1, x_2, \cdots, x_n;\ u_1, u_2, \cdots, u_r; t)\\ \vdots\\ \dot{x}_n(t) = f_n(x_1, x_2, \cdots, x_n;\ u_1, u_2, \cdots, u_r; t)\end{gathered}$$

Output sistem dapat dinyatakan menjadi sebagai berikut

$$\begin{gathered}y_1(t) = g_1(x_1, x_2, \cdots, x_n;\ u_1, u_2, \cdots, u_r; t)\\ y_2(t) = g_2(x_1, x_2, \cdots, x_n;\ u_1, u_2, \cdots, u_r; t)\\ \vdots\\ y_m(t) = g_m(x_1, x_2, \cdots, x_n;\ u_1, u_2, \cdots, u_r; t)\end{gathered}$$

Jika didefinisikan dalam bentuk matriks,

$$\boldsymbol{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, t) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2, \cdots, x_n;\ u_1, u_2, \cdots, u_r; t) \\ f_2(x_1, x_2, \cdots, x_n;\ u_1, u_2, \cdots, u_r; t) \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \cdots, x_n;\ u_1, u_2, \cdots, u_r; t) \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{y}(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix}, \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, t) = \begin{pmatrix} g_1(x_1, x_2, \cdots, x_n;\ u_1, u_2, \cdots, u_r; t) \\ g_2(x_1, x_2, \cdots, x_n;\ u_1, u_2, \cdots, u_r; t) \\ \vdots \\ g_n(x_1, x_2, \cdots, x_n;\ u_1, u_2, \cdots, u_r; t) \end{pmatrix}$$

maka persamaan state dan persamaan output menjadi

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, t)$$

$$\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, t)$$

Sistem di atas disebut **sistem varying** jika fungsi f dan g mengandung variabel t.

Jika persamaan tersebut diliniearisasikan di sekitar titik operasinya, maka persamaan state dan output linier menjadi

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}(t)\boldsymbol{u}(t)$$

$$\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{C}(t)\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{D}(t)\boldsymbol{u}(t)$$

dengan

$\boldsymbol{A}(t)$ adalah matriks state

$\boldsymbol{B}(t)$ adalah matriks input

$\boldsymbol{C}(t)$ adalah matriks output

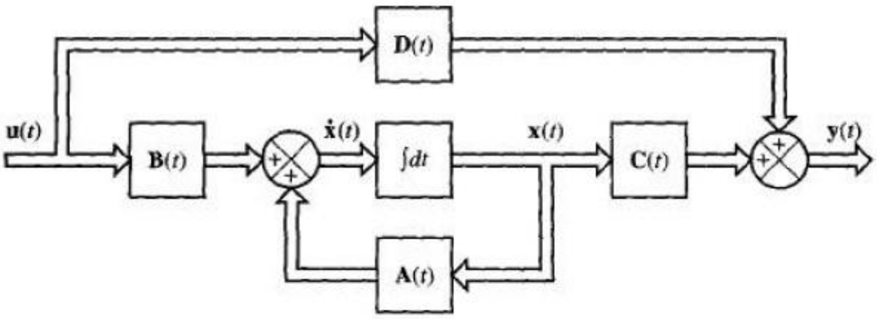
$\boldsymbol{D}(t)$ adalah matriks transmisi langsung

Untuk sistem time-invariant, maka menjadi

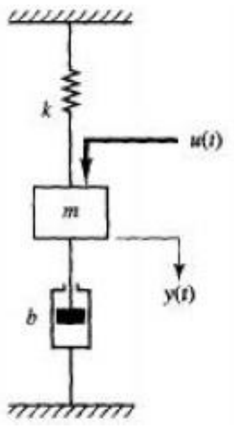
$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t)$$

$$\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(t)$$

Diagram bloknya,



Contoh 14.1



Persamaan sistem :

$$m\ddot{y} + b\dot{y} + ky = u$$

Definisikan variabel state

$$x_1(t) = y(t)$$

$$x_2(t) = \dot{y}(t)$$

Sehingga diperoleh,

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = \frac{1}{m}(-ky - b\dot{y}) + \frac{1}{m}u$$

dengan persamaan output

$$y = x_1$$

Persamaan state dalam bentuk vektor

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{pmatrix} u$$

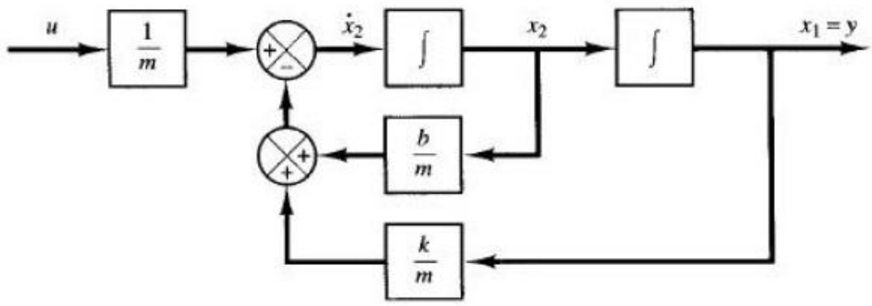
Persamaan output dalam bentuk vektor

$$y = (1 \quad 0) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Sehingga,

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{C} = (1 \quad 0), \qquad \boldsymbol{D} = 0$$

Blok diagram sistem :



Kaitan Fungsi Alih dan Persamaan State Space

Fungsi alih suatu sistem

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = G(s)$$

Representasi State Space sistem tersebut

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{Ax} + \boldsymbol{Bu}$$

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{Cx} + \boldsymbol{Du}$$

Sehingga bentuk laplacenya yaitu

$$s\boldsymbol{X}(s) - \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}(s) + \boldsymbol{B}U(s)$$

$$Y(s) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{X}(s) + \boldsymbol{D}U(s)$$

Misalkan kondisi awal $= 0$, maka diperoleh

$$s\boldsymbol{X}(s) - \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}(s) = \boldsymbol{B}U(s)$$

$$(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{X}(s) = \boldsymbol{B}U(s)$$

$$\boldsymbol{X}(s) = (s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}U(s)$$

Persamaan outputnya menjadi

$$\boldsymbol{Y}(s) = [\boldsymbol{C}(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B} + \boldsymbol{D}]U(s)$$

Dengan membandingkan fungsi alih dan persamaan output, diperoleh

$$G(s) = \boldsymbol{C}(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B} + \boldsymbol{D}$$

Contoh 14.2

Dari Contoh 14.1, diketahui bahwa persamaan state dan output yaitu

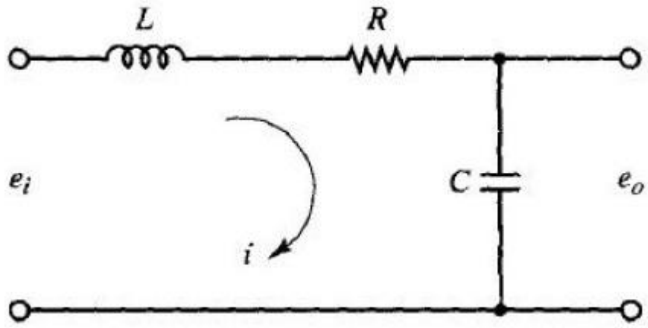
$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{pmatrix} u$$

$$y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Diperoleh,

$$\begin{aligned} G(s) &= \boldsymbol{C}(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B} + \boldsymbol{D} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \left\{ \begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{pmatrix} \right\}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{pmatrix} + 0 \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s & -1 \\ \frac{k}{m} & s + \frac{b}{m} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{ms^2 + bs + k} \end{aligned}$$

Contoh 14.3



Model matematisnya,

$$L\frac{di}{dt}+Ri+\frac{1}{C}\int i\,dt=e_i$$

$$\frac{1}{C}\int i\,dt=e_0$$

Transformasi Laplacenya yaitu

$$LsI(s)+RI(s)+\frac{1}{C}\frac{1}{s}I(s)=E_i(s)$$

$$\frac{1}{C}\frac{1}{s}I(s)=E_0(s)$$

Diperoleh fungsi alih,

$$\frac{E_0(s)}{E_i(s)}=\frac{1}{LCs^2+RCs+1}$$

Dari model matematis semula diperoleh,

$$\ddot{e}_0+\frac{R}{L}\dot{e}_0+\frac{1}{LC}e_0=\frac{1}{LC}e_i$$

Definisikan variabel state

$$x_1=e_0$$

$$x_2=\dot{e}_0$$

dan variabel input dan output

$$u=e_i$$

$$y=e_0=x_1$$

Diperoleh,

$$\begin{pmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -\frac{1}{LC} & -\frac{R}{L}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\ \frac{1}{LC}\end{pmatrix}u$$

$$y=\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}$$

III. PENUTUP

Dengan adanya bahan ajar ini, diharapkan dapat membantu mahasiswa memahami materi dalam mata kuliah Matematika Teknik dan juga dapat membantu dosen dalam penyampaian materi perkuliahan secara lebih sederhana. Mahasiswa diharapkan lebih aktif dalam proses perkuliahan dan memiliki rasa ingin tahu yang tinggi.

Keberhasilan mahasiswa dalam mengikuti dan memahami materi mata kuliah selama proses pembelajaran berlangsung, didasarkan pada keaktifan mahasiswa dalam mengikuti proses pembelajaran dan kontribusi nilai ujian ditentukan berdasarkan :

1. Presensi kehadiran/nilai partisipasi : 10%
2. Tugas mandiri : 25%
3. UTS : 30%
4. UAS : 35%

Seiring dengan perkembangan ilmu pengetahuan dan teknologi, diharapkan pembaca dapat mengembangkan ilmu-ilmu dasar pada bahan ajar ini menjadi suatu temuan baru atau kajian yang lebih lanjut. Dan juga dengan adanya kekurangan yang penulis miliki, bahan ajar ini masih jauh dari kata sempurna. Oleh karena itu, sangat diharapkan kritik dan saran yang membangun dari pembaca demi kesempurnaannya bahan ajar ini.

IV. DAFTAR PUSTAKA

1. Kreyzig, Erwin., “Matematika Teknik Lanjut”, Jakarta : Penerbit Erlangga, 1987.
2. Purcell, J., Edwin, dan Dale Varberg, “Kalkulus dan Geometri Analitis”, Jakarta : Penerbit Erlangga, 1990.
3. Rahma, Ammy, “Buku Kerja Matematika”, STKIP PGRI Sumbar.
4. Sinha, Naresh, K .“ Linear Systems “, John Wiley and Sons Inc, 1991.
5. Stewart, James. “Kalkulus”, (terjemahan Chriswan Sungkono), Jakarta : Penerbit Salemba Teknika, 2011.
6. Stroud, K. A, Dexter , J. Booth. “Advanced Engineering Mathematics”, Fourth Edition, New York : Palgrave Macmillan, 2003.