

# **PERANGKAT PEMBELAJARAN DAN BAHAN AJAR**

## **KALKULUS**



**Oleh :**

**DWIPRIMA ELVANNY MYORI, S.Si, M.Si**

**PROGRAM STUDI PENDIDIKAN TEKNIK ELEKTRO**

**JURUSAN TEKNIK ELEKTRO**

**FAKULTAS TEKNIK**

**UNIVERSITAS NEGERI PADANG**

**2013**

## **SILABUS RANCANGAN PEMBELAJARAN SATU SEMESTER**

Nama Mata Kuliah : Kalkulus SKS : 3 (tiga)  
Program Studi : Pendidikan Teknik Elektro Kode : ELO103  
Fakultas : Teknik  
Dosen : Dwiprima Elvanny Myori, S.Si.,M.Si.

### **Learning Outcomes (Capaian Pembelajaran) Mata Kuliah terkait KKNI :**

1. Berpikir kritis dalam menyelesaikan permasalahan dalam bidang teknik elektro, dengan memilih metode pendekatan matematis, yaitu dengan menyederhanakan suatu masalah sehingga dapat diselesaikan lebih mudah.
2. Menguasai konsep teoritis bidang teknik elektro, serta mampu memformulasikan penyelesaian masalah yang dihadapi secara prosedural, khususnya yang berkaitan dengan kalkulus.
3. Mampu menyajikan beberapa alternatif solusi dalam permasalahan di bidang teknik elektro, dalam bentuk model yang dapat digunakan sebagai dasar pengambilan keputusan secara tepat.
4. Mampu menyelesaikan permasalahan kalkulus secara akurat dalam bentuk laporan atau kertas kerja.
5. Mampu menerapkan ilmu dasar kalkulus pada bidang teknik elektro.

**Soft skills/Karakter** : Berpikir kritis, disiplin, tekun, tanggung jawab, ketelitian, kerja sama, dan percaya diri

Matriks Pembelajaran :

<b>Minggu Ke :</b>	<b>Learning Outcomes (Capaian Pembelajaran)</b>	<b>Pengalaman belajar</b>	<b>Materi/Pokok Bahasan</b>	<b>Metode/strategi Pembelajaran</b>	<b>Kriteria/Teknik Penilaian</b>	<b>Daftar Pustaka</b>
<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6</b>	<b>7</b>
1	Mengetahui, memahami dan mampu menjelaskan sistem bilangan riil	<ul style="list-style-type: none"> <li>➤ Mendengar</li> <li>➤ Melihat</li> <li>➤ Membaca modul</li> <li>➤ Berdiskusi</li> <li>➤ Mengerjakan latihan</li> </ul>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Definisi bilangan riil</li> <li>2. Sifat-sifat bilangan riil</li> </ol>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Ceramah</li> <li>2. Tanya Jawab</li> <li>3. Diskusi</li> </ol>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Lisan</li> <li>2. Sikap</li> <li>3. Kinerja diskusi</li> <li>4. Latihan</li> <li>5. Tugas</li> </ol>	1, 2
2	Mengetahui, memahami dan menjelaskan pertidaksamaan dan mampu menyelesaikan suatu pertidaksamaan	<ul style="list-style-type: none"> <li>➤ Mendengar</li> <li>➤ Melihat</li> <li>➤ Membaca modul</li> <li>➤ Berdiskusi</li> <li>➤ Mengerjakan latihan</li> </ul>	Pertidaksamaan	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Ceramah</li> <li>2. Tanya Jawab</li> <li>3. Diskusi</li> </ol>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Lisan</li> <li>2. Sikap</li> <li>3. Kinerja diskusi</li> <li>4. Latihan</li> <li>5. Tugas</li> </ol>	1, 2
3	Mampu menjelaskan sifat-sifat nilai mutlak, mampu menyelesaikan pertidaksamaan	<ul style="list-style-type: none"> <li>➤ Mendengar</li> <li>➤ Melihat</li> <li>➤ Membaca modul</li> <li>➤ Berdiskusi</li> <li>➤ Mengerjakan latihan</li> </ul>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Nilai mutlak</li> <li>2. Akar kuadrat</li> <li>3. Kuadrat</li> </ol>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Ceramah</li> <li>2. Tanya Jawab</li> <li>3. Diskusi</li> </ol>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Lisan</li> <li>2. Sikap</li> <li>3. Kinerja diskusi</li> <li>4. Latihan</li> <li>5. Tugas</li> </ol>	1, 2

	yang melibatkan nilai mutlak, mampu menyelesaikan pertidaksamaan dengan menggunakan rumus kuadrat dan sifat kuadrat pada pertidaksamaan					
4	Memahami tentang koordinat Cartesius, mampu menyelesaikan permasalahan pada sistem koordinat	<ul style="list-style-type: none"> <li>➤ Mendengar</li> <li>➤ Melihat</li> <li>➤ Membaca modul</li> <li>➤ Berdiskusi</li> <li>➤ Mengerjakan latihan</li> </ul>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Sistem koordinat</li> <li>2. Garis lurus</li> <li>3. Grafik persamaan</li> </ol>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Ceramah</li> <li>2. Tanya Jawab</li> <li>3. Diskusi</li> </ol>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Lisan</li> <li>2. Sikap</li> <li>3. Kinerja diskusi</li> <li>4. Latihan</li> <li>5. Tugas</li> </ol>	1, 2
5	Memahami dan menjelaskan tentang fungsi dan grafik fungsi, serta mampu menyelesaikan operasi dari suatu fungsi	<ul style="list-style-type: none"> <li>➤ Mendengar</li> <li>➤ Melihat</li> <li>➤ Membaca modul</li> <li>➤ Berdiskusi</li> <li>➤ Mengerjakan latihan</li> </ul>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Fungsi</li> <li>2. Grafik fungsi</li> <li>3. Operasi-operasi pada fungsi</li> </ol>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Ceramah</li> <li>2. Tanya Jawab</li> <li>3. Diskusi</li> </ol>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Lisan</li> <li>2. Sikap</li> <li>3. Kinerja diskusi</li> <li>4. Latihan</li> <li>5. Tugas</li> </ol>	1, 2

6	Memahami dan menjelaskan tentang fungsi trigonometri dan mampu menyelesaikan operasi pada fungsi trigonometri	<ul style="list-style-type: none"> <li>➤ Mendengar</li> <li>➤ Melihat</li> <li>➤ Membaca modul</li> <li>➤ Berdiskusi</li> <li>➤ Mengerjakan latihan</li> </ul>	Fungsi trigonometri	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Ceramah</li> <li>2. Tanya Jawab</li> <li>3. Diskusi</li> </ol>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Lisan</li> <li>2. Sikap</li> <li>3. Kinerja diskusi</li> <li>4. Latihan</li> <li>5. Tugas</li> </ol>	1, 2, 3
7	Memahami dan menjelaskan tentang limit fungsi dan mampu menentukan nilai limit dari suatu fungsi	<ul style="list-style-type: none"> <li>➤ Mendengar</li> <li>➤ Melihat</li> <li>➤ Membaca modul</li> <li>➤ Berdiskusi</li> <li>➤ Mengerjakan latihan</li> </ul>	Limit fungsi	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Ceramah</li> <li>2. Tanya Jawab</li> <li>3. Diskusi</li> </ol>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Lisan</li> <li>2. Sikap</li> <li>3. Kinerja diskusi</li> <li>4. Latihan</li> <li>5. Tugas</li> </ol>	1, 2
8	Memahami dan menjelaskan tentang kekontinuan fungsi dan mampu menentukan kekontinuan suatu fungsi	<ul style="list-style-type: none"> <li>➤ Mendengar</li> <li>➤ Melihat</li> <li>➤ Membaca modul</li> <li>➤ Berdiskusi</li> <li>➤ Mengerjakan latihan</li> </ul>	Kekontinuan fungsi	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Ceramah</li> <li>2. Tanya Jawab</li> <li>3. Diskusi</li> </ol>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Lisan</li> <li>2. Sikap</li> <li>3. Kinerja diskusi</li> <li>4. Latihan</li> <li>5. Tugas</li> </ol>	1, 2
9	Memahami dan menjelaskan	<ul style="list-style-type: none"> <li>➤ Mendengar</li> <li>➤ Melihat</li> </ul>	Turunan fungsi	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Ceramah</li> <li>2. Tanya Jawab</li> </ol>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Lisan</li> <li>2. Sikap</li> </ol>	1, 2, 3

	tentang turunan fungsi	<ul style="list-style-type: none"> <li>➤ Membaca modul</li> <li>➤ Berdiskusi</li> <li>➤ Mengerjakan latihan</li> </ul>		3. Diskusi	<ul style="list-style-type: none"> <li>3. Kinerja diskusi</li> <li>4. Latihan</li> <li>5. Tugas</li> </ul>	
10	Memahami dan mampu menentukan turunan suatu fungsi dengan menggunakan aturan pencarian turunan	<ul style="list-style-type: none"> <li>➤ Mendengar</li> <li>➤ Melihat</li> <li>➤ Membaca modul</li> <li>➤ Berdiskusi</li> <li>➤ Mengerjakan latihan</li> </ul>	Aturan pencarian turunan	<ul style="list-style-type: none"> <li>1. Ceramah</li> <li>2. Tanya Jawab</li> <li>3. Diskusi</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>1. Lisan</li> <li>2. Sikap</li> <li>3. Kinerja diskusi</li> <li>4. Latihan</li> <li>5. Tugas</li> </ul>	1, 2, 3
11	Mampu menentukan turunan tingkat tinggi dari suatu fungsi dan menentukan turunan dari fungsi dalam bentuk implisit	<ul style="list-style-type: none"> <li>➤ Mendengar</li> <li>➤ Melihat</li> <li>➤ Membaca modul</li> <li>➤ Berdiskusi</li> <li>➤ Mengerjakan latihan</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>1. Turunan tingkat tinggi</li> <li>2. Diferensiasi implisit</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>1. Ceramah</li> <li>2. Tanya Jawab</li> <li>3. Diskusi</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>1. Lisan</li> <li>2. Sikap</li> <li>3. Kinerja diskusi</li> <li>4. Latihan</li> <li>5. Tugas</li> </ul>	1, 2, 3
12	Memahami dan menjelaskan tentang integral taktentu	<ul style="list-style-type: none"> <li>➤ Mendengar</li> <li>➤ Melihat</li> <li>➤ Membaca modul</li> <li>➤ Berdiskusi</li> <li>➤ Mengerjakan latihan</li> </ul>	Integral taktentu	<ul style="list-style-type: none"> <li>1. Ceramah</li> <li>2. Tanya Jawab</li> <li>3. Diskusi</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>1. Lisan</li> <li>2. Sikap</li> <li>3. Kinerja diskusi</li> <li>4. Latihan</li> <li>5. Tugas</li> </ul>	1, 2, 3

13	Memahami dan menjelaskan tentang pendahuluan luas daerah di bawah kurva	<ul style="list-style-type: none"> <li>➤ Mendengar</li> <li>➤ Melihat</li> <li>➤ Membaca modul</li> <li>➤ Berdiskusi</li> <li>➤ Mengerjakan latihan</li> </ul>	Pendahuluan luas daerah di bawah kurva	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Ceramah</li> <li>2. Tanya Jawab</li> <li>3. Diskusi</li> </ol>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Lisan</li> <li>2. Sikap</li> <li>3. Kinerja diskusi</li> <li>4. Latihan</li> <li>5. Tugas</li> </ol>	1, 2
14	Memahami dan menjelaskan tentang integral tentu, serta mampu menyelesaikan persoalan integral tentu dari suatu fungsi	<ul style="list-style-type: none"> <li>➤ Mendengar</li> <li>➤ Melihat</li> <li>➤ Membaca modul</li> <li>➤ Berdiskusi</li> <li>➤ Mengerjakan latihan</li> </ul>	Integral tentu	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Ceramah</li> <li>2. Tanya Jawab</li> <li>3. Diskusi</li> </ol>	<ol style="list-style-type: none"> <li>6. Lisan</li> <li>7. Sikap</li> <li>8. Kinerja diskusi</li> <li>9. Latihan</li> <li>10. Tugas</li> </ol>	1, 2, 3

**Daftar pustaka :**

1. Leithold, L. (1986). (terjemahan M. Margha). *Kalkulus dan ilmu ukur analitik. Jilid I*. Jakarta: PT Bina Aksara.
2. Purcell, J., Edwin, D. Varberg dan S.E. Rigdon. (1990). (terjemahan I Nyoman Susila). "Kalkulus". Jilid 1. Edisi VIII. Jakarta : Penerbit Erlangga.
3. Stroud, K.A. (1987). (terjemahan Zulkifli Harahap). "Matematika untuk Teknik".Jilid 1. Edisi V. Jakarta : Penerbit Erlangga.

**SATUAN ACARA PEMBELAJARAN**  
**(SAP)**

**Nama Bahan Kajian : Sistem Bilangan Riil**  
**Kode : ELO 103**  
**Program Studi : Pendidikan Teknik Elektro**  
**Pertemuan ke- : 1**  
**Dosen : Dwiprima Elvanny Myori, S.Si., M.Si.**

**Learning Outcomes (Capaian Pembelajaran) Mata Kuliah terkait KKNi :**

Memahami dan menjelaskan definisi bilangan riil dan sifat-sifat bilangan riil serta mampu menyelesaikan dan menyederhanakan suatu perhitungan matematis dengan menggunakan sifat-sifat bilangan riil.

**Soft skills/Karakter :** Berpikir kritis, disiplin, tekun, tanggung jawab, ketelitian, kerja sama, dan percaya diri dalam mengetahui, memahami dan menjelaskan sistem bilangan riil.

**Materi :**

1. Definisi bilangan riil
2. Sifat-sifat bilangan riil

<b>TAHAP KEGIATAN</b>	<b>KEGIATAN DOSEN</b>	<b>KEGIATAN MAHASISWA</b>	<b>TEKNIK PENILAIAN</b>	<b>MEDIA</b>
Pendahuluan	<ol style="list-style-type: none"><li>1. Memperkenalkan diri, memberi salam</li><li>2. Menjelaskan learning outcomes</li><li>3. Menjelaskan garis besar materi yang akan diberikan dan sistem penilaian</li><li>4. Memotivasi karakter religious</li></ol>	<ol style="list-style-type: none"><li>1. Memperhatikan</li><li>2. Mencatat penjelasan yang diberikan</li><li>3. Memperhatikan dan mencatat cakupan materi</li></ol>	<ol style="list-style-type: none"><li>1. Sikap</li><li>2. Lisan</li></ol>	<ul style="list-style-type: none"><li>• Modul</li><li>• White Board</li><li>• Laptop</li><li>• LCD</li></ul>
Penyajian	<ol style="list-style-type: none"><li>1. Meminta pendapat mahasiswa tentang himpunan-himpunan bilangan</li></ol>	<ol style="list-style-type: none"><li>1. Mengajukan pendapat tentang himpunan-himpunan bilangan.</li></ol>	<ol style="list-style-type: none"><li>1. Sikap</li><li>2. Lisan</li></ol>	<ul style="list-style-type: none"><li>• Modul</li><li>• White Board</li><li>• Laptop</li><li>• LCD</li></ul>



	<ol style="list-style-type: none"> <li>2. Memberikan reinforcement atas jawaban mahasiswa</li> <li>3. Menjelaskan definisi sistem bilangan riil</li> <li>4. Menjelaskan sifat-sifat dari bilangan riil</li> <li>5. Memberikan mahasiswa suatu perhitungan matematis dan meminta untuk menyederhanakannya</li> <li>6. Membahas bersama dan menyimpulkan jawaban mahasiswa.</li> <li>7. Memberikan kesempatan kepada mahasiswa untuk bertanya tentang materi yang telah dibahas.</li> <li>8. Memberikan dan menjelaskan jawaban dari pertanyaan yang diajukan mahasiswa</li> </ol>	<ol style="list-style-type: none"> <li>2. Menerima reinforcement</li> <li>3. Memperhatikan dan mencatat penjelasan yang diberikan</li> <li>4. Memperhatikan dan mencatat penjelasan yang diberikan</li> <li>5. Menyelesaikan persoalan dan mengemukakan pendapat</li> <li>6. Memperhatikan dan mencatat</li> <li>7. Mengajukan pertanyaan</li> <li>8. Memperhatikan dan mencatat</li> </ol>		
Penutup	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Menyimpulkan bersama mahasiswa tentang materi yang telah disampaikan.</li> <li>2. Menugaskan mahasiswa untuk membaca referensi materi yang akan dibahas pada pertemuan berikutnya</li> <li>3. Memberikan tugas untuk dikumpulkan pada pertemuan berikutnya</li> </ol>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Memperhatikan</li> <li>2. Memperhatikan dan mencatat materi yang ditugaskan.</li> <li>3. Memperhatikan dan mencatat materi penugasan</li> </ol>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Sikap</li> <li>2. Tulisan</li> </ol>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Modul</li> <li>• White Board</li> <li>• Laptop</li> <li>• LCD</li> </ul>

## Rubrik Penilaian

### 1. Lisan

No	Pertanyaan	Skor			
		1	2	3	4
1	Sebutkan himpunan-himpunan bilangan!				
2	Jelaskan definisi himpunan bilangan riil!				
3	Apakah hubungan himpunan bilangan riil dengan himpunan bilangan lainnya?				
4	Sebutkan sifat-sifat bilangan riil!				

### 2. Tulisan

1. Buatlah penyederhanaan dari masing-masing operasi berikut.

a.  $\frac{1}{3} \left( \frac{1}{2} \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{3} \right) + \frac{1}{6} \right)$

b.  $(\sqrt{5} + 3)(\sqrt{5} - 3)$

c.  $2 + \frac{3}{1 + \frac{5}{2}}$

2. Lakukan operasi yang diminta dan sederhanakan.

a.  $\frac{x^2 - x - 6}{x - 3}$

b.  $\frac{12}{x^2 + 2x} + \frac{4}{x} + \frac{2}{x + 2}$

c.

$$\frac{\frac{x}{x-3} - \frac{2}{x^2 - 4x + 3}}{\frac{5}{x-1} + \frac{5}{x-3}}$$

3. Tunjukkan bahwa

a.  $a < b \Leftrightarrow a^2 < b^2$

b.  $a < b \Leftrightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$

### 3. Sikap/Karakter

No	Indikator  Nama Mahasiswa	Indikator Sikap										Nilai Total
		1. Ingintahu	2. Percaya diri	3. Tanggung jawab	4. Disiplin	5. Teliti	6. Kerjasama	7. Mendengarkan penjelasan	8. Bertanya	9. Menjawab	10. Menanggapi	
1												
2												
3												
	dst											
	<b>Rata-rata</b>											

#### Daftar pustaka :

1. Leithold, L. (1986). (terjemahan M. Margha). *Kalkulus dan ilmu ukur analitik. Jilid I*. Jakarta: PT Bina Aksara.
2. Purcell, J., Edwin, D. Varberg dan S.E. Rigdon. (1990). (terjemahan I Nyoman Susila). "Kalkulus". Jilid 1. Edisi VIII. Jakarta : Penerbit Erlangga.

**SATUAN ACARA PEMBELAJARAN**  
**(SAP)**

**Nama Bahan Kajian : Pertidaksamaan**  
**Kode : ELO 103**  
**Program Studi : Pendidikan Teknik Elektro**  
**Pertemuan ke- : 2**  
**Dosen : Dwiprima Elvanny Myori, S.Si., M.Si.**

**Learning Outcomes (Capaian Pembelajaran) Mata Kuliah terkait KKN1 :**

Mengetahui, memahami dan menjelaskan pertidaksamaan dan mampu menentukan himpunan penyelesaian suatu pertidaksamaan dan mampu menyatakannya dalam bentuk notasi selang dan grafik.

**Soft skills/Karakter :** Berpikir kritis, disiplin, tekun, tanggung jawab, ketelitian, kerja sama, dan percaya diri dalam mengetahui, memahami dan menjelaskan pertidaksamaan.

**Materi :**

1. Jenis interval pada bilangan riil
2. Penyelesaian pertidaksamaan

<b>TAHAP KEGIATAN</b>	<b>KEGIATAN DOSEN</b>	<b>KEGIATAN MAHASISWA</b>	<b>TEKNIK PENILAIAN</b>	<b>MEDIA</b>
Pendahuluan	<ol style="list-style-type: none"><li>1. Memperkenalkan diri, memberi salam</li><li>2. Menjelaskan learning outcomes</li><li>3. Menjelaskan garis besar materi yang akan diberikan dan sistem penilaian</li><li>4. Memotivasi karakter religious</li></ol>	<ol style="list-style-type: none"><li>1. Memperhatikan</li><li>2. Mencatat penjelasan yang diberikan</li><li>3. Memperhatikan dan mencatat cakupan materi</li></ol>	<ol style="list-style-type: none"><li>1. Sikap</li><li>2. Lisan</li></ol>	<ul style="list-style-type: none"><li>• Modul</li><li>• White Board</li><li>• Laptop</li><li>• LCD</li></ul>
Penyajian	<ol style="list-style-type: none"><li>1. Menjelaskan penulisan bilangan riil pada grafik.</li></ol>	<ol style="list-style-type: none"><li>1. Memperhatikan dan mencatat penjelasan yang diberikan</li></ol>	<ol style="list-style-type: none"><li>1. Sikap</li><li>2. Lisan</li></ol>	<ul style="list-style-type: none"><li>• Modul</li><li>• White Board</li><li>• Laptop</li><li>• LCD</li></ul>

	<ol style="list-style-type: none"> <li>2. Menjelaskan jenis-jenis interval pada garis riil.</li> <li>3. Menjelaskan langkah penyelesaian pertidaksamaan</li> <li>4. Memberikan mahasiswa suatu pertidaksamaan dan meminta menentukan himpunan penyelesaiannya</li> <li>5. Membahas bersama dan menyimpulkan jawaban mahasiswa</li> <li>6. Memberikan kesempatan kepada mahasiswa untuk bertanya tentang materi yang telah dibahas.</li> <li>7. Memberikan dan menjelaskan jawaban dari pertanyaan yang diajukan mahasiswa</li> </ol>	<ol style="list-style-type: none"> <li>2. Memperhatikan dan mencatat penjelasan yang diberikan</li> <li>3. Memperhatikan dan mencatat penjelasan yang diberikan</li> <li>4. Menyelesaikan persoalan dan mengemukakan pendapat</li> <li>5. Memperhatikan dan mencatat</li> <li>6. Mengajukan pertanyaan</li> <li>7. Memperhatikan dan mencatat</li> </ol>		
Penutup	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Menyimpulkan bersama mahasiswa tentang materi yang telah disampaikan.</li> <li>2. Menugaskan mahasiswa untuk membaca referensi materi yang akan dibahas pada pertemuan berikutnya</li> <li>3. Memberikan tugas untuk dikumpulkan pada pertemuan berikutnya</li> </ol>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Memperhatikan</li> <li>2. Memperhatikan dan mencatat materi yang ditugaskan.</li> <li>3. Memperhatikan dan mencatat materi penugasan</li> </ol>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Sikap</li> <li>2. Tulisan</li> </ol>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Modul</li> <li>• White Board</li> <li>• Laptop</li> <li>• LCD</li> </ul>

## Rubrik Penilaian

### 1. Lisan

No	Pertanyaan	Skor			
		1	2	3	4
1	Apa itu interval terbuka?				
2	Apa itu interval tertutup?				
3	Apa itu interval setengah terbuka?				
4	Operasi apa saja yang dapat dilakukan dalam menentukan penyelesaian suatu pertidaksamaan tanpa mengubah himpunan penyelesaiannya?				
5	Apa itu titik pemecah dan titik uji?				

### 2. Tulisan

1. Tentukan himpunan penyelesaian pertidaksamaan yang diberikan dalam notasi selang dan buat sketsa grafiknya.

a.  $-2x + 5 \geq 4x - 3$

b.  $-3 < 4x - 9 < 11$

c.  $2x - 4 \leq 6 - 7x \leq 3x + 6$

d.  $\frac{3x-2}{x-1} \geq 0$

e.  $x^3 - 5x^2 - 6x < 0$

2. Tentukan semua nilai  $x$  yang memenuhi kedua ketaksamaan berikut.

a.  $3x + 7 > 1$  dan  $2x + 1 < 3$

b.  $5x - 2 > 3$  dan  $2x + 1 > -4$

3. Selesaikan pertidaksamaan berikut dan nyatakan jawabannya dalam notasi selang.

a.  $(x + 1)(x^2 + 2x - 7) \geq x^2 - 1$

$$(x^2 + 1)^2 - 7(x^2 + 1) + 10 < 0$$

### 3. Sikap/Karakter

No	Indikator  Nama Mahasiswa	Indikator Sikap										Nilai Total
		1. Ingintahu	2. Percaya diri	3. Tanggung jawab	4. Disiplin	5. Teliti	6. Kerjasama	7. Mendengarkan penjelasan	8. Bertanya	9. Menjawab	10. Menanggapi	
1												
2												
3												
	dst											
	<b>Rata-rata</b>											

#### Daftar pustaka :

1. Leithold, L. (1986). (terjemahan M. Margha). *Kalkulus dan ilmu ukur analitik. Jilid I*. Jakarta: PT Bina Aksara.
2. Purcell, J., Edwin, D. Varberg dan S.E. Rigdon. (1990). (terjemahan I Nyoman Susila). "Kalkulus". Jilid 1. Edisi VIII. Jakarta : Penerbit Erlangga.

**SATUAN ACARA PEMBELAJARAN**  
**(SAP)**

**Nama Bahan Kajian : Nilai mutlak, akar kuadrat, dan kuadrat**  
**Kode : ELO 103**  
**Program Studi : Pendidikan Teknik Elektro**  
**Pertemuan ke- : 3**  
**Dosen : Dwiprima Elvanny Myori, S.Si., M.Si.**

**Learning Outcomes (Capaian Pembelajaran) Mata Kuliah terkait KKNi :**

Mampu menjelaskan sifat-sifat nilai mutlak, mampu menyelesaikan pertidaksamaan yang melibatkan nilai mutlak, mampu menyelesaikan pertidaksamaan dengan menggunakan rumus kuadrat dan sifat kuadrat pada pertidaksamaan.

**Soft skills/Karakter :** Berpikir kritis, disiplin, tekun, tanggung jawab, ketelitian, kerja sama, dan percaya diri dalam mengetahui, memahami dan menjelaskan nilai mutlak, kuadrat dan akar kuadrat.

**Materi :**

1. Nilai mutlak
2. Akar kuadrat
3. Kuadrat

<b>TAHAP KEGIATAN</b>	<b>KEGIATAN DOSEN</b>	<b>KEGIATAN MAHASISWA</b>	<b>TEKNIK PENILAIAN</b>	<b>MEDIA</b>
Pendahuluan	<ol style="list-style-type: none"><li>1. Memperkenalkan diri, memberi salam</li><li>2. Menjelaskan learning outcomes</li><li>3. Menjelaskan garis besar materi yang akan diberikan dan sistem penilaian</li><li>4. Memotivasi karakter religious</li></ol>	<ol style="list-style-type: none"><li>1. Memperhatikan</li><li>2. Mencatat penjelasan yang diberikan</li><li>3. Memperhatikan dan mencatat cakupan materi</li></ol>	<ol style="list-style-type: none"><li>1. Sikap</li><li>2. Lisan</li></ol>	<ul style="list-style-type: none"><li>• Modul</li><li>• White Board</li><li>• Laptop</li><li>• LCD</li></ul>
Penyajian	<ol style="list-style-type: none"><li>1. Menjelaskan definisi bilangan mutlak</li></ol>	<ol style="list-style-type: none"><li>1. Memperhatikan dan mencatat penjelasan yang diberikan</li></ol>	<ol style="list-style-type: none"><li>1. Sikap</li><li>2. Lisan</li></ol>	<ul style="list-style-type: none"><li>• Modul</li><li>• White Board</li><li>• Laptop</li><li>• LCD</li></ul>



	<ol style="list-style-type: none"> <li>2. Menjelaskan sifat-sifat bilangan mutlak</li> <li>3. Menjelaskan langkah penyelesaian pertidaksamaan yang melibatkan nilai mutlak</li> <li>4. Menjelaskan rumus kuadrat dan menjelaskan langkah penyelesaian pertidaksamaan dengan menggunakan rumus kuadrat.</li> <li>5. Menjelaskan hubungan nilai mutlak dengan kuadrat pada pertidaksamaan</li> <li>6. Memberikan mahasiswa suatu pertidaksamaan dan meminta menentukan himpunan penyelesaiannya</li> <li>7. Membahas bersama dan menyimpulkan jawaban mahasiswa</li> <li>8. Memberikan kesempatan kepada mahasiswa untuk bertanya tentang materi yang telah dibahas.</li> <li>9. Memberikan dan menjelaskan jawaban dari pertanyaan yang diajukan mahasiswa</li> </ol>	<ol style="list-style-type: none"> <li>2. Memperhatikan dan mencatat penjelasan yang diberikan</li> <li>3. Memperhatikan dan mencatat penjelasan yang diberikan</li> <li>4. Memperhatikan dan mencatat penjelasan yang diberikan</li> <li>5. Memperhatikan dan mencatat penjelasan yang diberikan</li> <li>6. Menyelesaikan persoalan dan mengemukakan pendapat</li> <li>7. Memperhatikan dan mencatat</li> <li>8. Mengajukan pertanyaan</li> <li>9. Memperhatikan dan mencatat</li> </ol>		
Penutup	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Menyimpulkan bersama mahasiswa tentang materi yang telah disampaikan.</li> <li>2. Menugaskan</li> </ol>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Memperhatikan</li> <li>2. Memperhatikan</li> </ol>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Sikap</li> <li>2. Tulisan</li> </ol>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Modul</li> <li>• White Board</li> <li>• Laptop</li> <li>• LCD</li> </ul>

	<p>mahasiswa untuk membaca referensi materi yang akan dibahas pada pertemuan berikutnya</p> <p>3. Memberikan tugas untuk dikumpulkan pada pertemuan berikutnya</p>	<p>dan mencatat materi yang ditugaskan.</p> <p>3. Memperhatikan dan mencatat materi penugasan</p>		
--	--	---	--	--

## Rubrik Penilaian

### 1. Lisan

No	Pertanyaan	Skor			
		1	2	3	4
1	Apa itu nilai mutlak? Berikan contoh!				
2	Sebutkan apa saja sifat nilai mutlak!				
3	Apa hubungan rumus kuadrat dengan penyelesaian pertidaksamaan?				
4	Apakah operasi pengkuadratan mempertahankan pertidaksamaan? Jelaskan!				

### 2. Tulisan

1. Tentukan himpunan penyelesaian dari masing-masing pertidaksamaan berikut.

a.  $\left|2 + \frac{5}{x}\right| > 1$

b.  $\left|\frac{3x}{9} - 11\right| \leq 6$

2. Selesaikan pertidaksamaan berikut.

a.  $|2x - 1| \geq |x + 1|$

b.  $2|2x - 3| < |x + 10|$

3. Dengan menggunakan sifat nilai mutlak, tunjukkan bahwa

a.  $|a - b| \leq |a| + |b|$

b.  $|a + b + c| \leq |a| + |b| + |c|$

4. Tunjukkan bahwa

$$|x| \leq 2 \Rightarrow \left| \frac{x^2 + 2x + 7}{x^2 + 1} \right| \leq 15.$$

### 3. Sikap/Karakter

No	Indikator  Nama Mahasiswa	Indikator Sikap										Nilai Total
		1. Ingintahu	2. Percaya diri	3. Tanggung jawab	4. Disiplin	5. Teliti	6. Kerjasama	7. Mendengarkan penjelasan	8. Bertanya	9. Menjawab	10. Menanggapi	
1												
2												
3												
	dst											
	<b>Rata-rata</b>											

#### Daftar pustaka :

1. Leithold, L. (1986). (terjemahan M. Margha). *Kalkulus dan ilmu ukur analitik. Jilid I*. Jakarta: PT Bina Aksara.
2. Purcell, J., Edwin, D. Varberg dan S.E. Rigdon. (1990). (terjemahan I Nyoman Susila). "Kalkulus". Jilid 1. Edisi VIII. Jakarta : Penerbit Erlangga.

**SATUAN ACARA PEMBELAJARAN**  
**(SAP)**

**Nama Bahan Kajian : Sistem koordinat, garis lurus, dan grafik persamaan**  
**Kode : ELO 103**  
**Program Studi : Pendidikan Teknik Elektro**  
**Pertemuan ke- : 4**  
**Dosen : Dwiprima Elvanny Myori, S.Si., M.Si.**

**Learning Outcomes (Capaian Pembelajaran) Mata Kuliah terkait KKNi :**

Memahami tentang koordinat Cartesius, mampu menyelesaikan permasalahan pada sistem koordinat.

**Soft skills/Karakter :** Berpikir kritis, disiplin, tekun, tanggung jawab, ketelitian, kerja sama, dan percaya diri dalam mengetahui, memahami dan menjelaskan sistem koordinat.

**Materi :**

1. Sistem koordinat
2. Garis lurus
3. Grafik persamaan

<b>TAHAP KEGIATAN</b>	<b>KEGIATAN DOSEN</b>	<b>KEGIATAN MAHASISWA</b>	<b>TEKNIK PENILAIAN</b>	<b>MEDIA</b>
Pendahuluan	<ol style="list-style-type: none"><li>1. Memperkenalkan diri, memberi salam</li><li>2. Menjelaskan learning outcomes</li><li>3. Menjelaskan garis besar materi yang akan diberikan dan sistem penilaian</li><li>4. Memotivasi karakter religious</li></ol>	<ol style="list-style-type: none"><li>1. Memperhatikan</li><li>2. Mencatat penjelasan yang diberikan</li><li>3. Memperhatikan dan mencatat cakupan materi</li></ol>	<ol style="list-style-type: none"><li>1. Sikap</li><li>2. Lisan</li></ol>	<ul style="list-style-type: none"><li>• Modul</li><li>• White Board</li><li>• Laptop</li><li>• LCD</li></ul>
Penyajian	<ol style="list-style-type: none"><li>1. Menjelaskan tentang koordinat Cartesius, rumus jarak, persamaan lingkaran dan rumus titik tengah</li></ol>	<ol style="list-style-type: none"><li>1. Memperhatikan dan mencatat penjelasan yang diberikan</li></ol>	<ol style="list-style-type: none"><li>1. Sikap</li><li>2. Lisan</li></ol>	<ul style="list-style-type: none"><li>• Modul</li><li>• White Board</li><li>• Laptop</li><li>• LCD</li></ul>

	<ol style="list-style-type: none"> <li>2. Memberikan contoh persoalan pada koordinat Cartesius yang melibatkan rumus jarak, persamaan lingkaran dan rumus titik tengah</li> <li>3. Menjelaskan kemiringan garis, kemiringan titik, kemiringan intersep dan hubungan kemiringan dua buah garis.</li> <li>4. Menjelaskan langkah pembuatan grafik dari suatu persamaan</li> <li>5. Memberikan contoh penggambaran grafik dari suatu persamaan</li> <li>6. Memberikan mahasiswa suatu persamaan dan meminta menggambar grafiknya</li> <li>7. Membahas bersama dan menyimpulkan jawaban mahasiswa</li> <li>8. Memberikan kesempatan kepada mahasiswa untuk bertanya tentang materi yang telah dibahas.</li> <li>9. Memberikan dan menjelaskan jawaban dari pertanyaan yang diajukan mahasiswa</li> </ol>	<ol style="list-style-type: none"> <li>2. Memperhatikan dan mencatat penjelasan yang diberikan</li> <li>3. Memperhatikan dan mencatat penjelasan yang diberikan</li> <li>4. Memperhatikan dan mencatat penjelasan yang diberikan</li> <li>5. Memperhatikan dan mencatat penjelasan yang diberikan</li> <li>6. Menyelesaikan persoalan dan mengemukakan pendapat</li> <li>7. Memperhatikan dan mencatat</li> <li>8. Mengajukan pertanyaan</li> <li>9. Memperhatikan dan mencatat</li> </ol>		
Penutup	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Menyimpulkan bersama mahasiswa tentang materi yang telah disampaikan.</li> <li>2. Menugaskan</li> </ol>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Memperhatikan</li> <li>2. Memperhatikan</li> </ol>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Sikap</li> <li>2. Tulisan</li> </ol>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Modul</li> <li>• White Board</li> <li>• Laptop</li> <li>• LCD</li> </ul>

	<p>mahasiswa untuk membaca referensi materi yang akan dibahas pada pertemuan berikutnya</p> <p>3. Memberikan tugas untuk dikumpulkan pada pertemuan berikutnya</p>	<p>dan mencatat materi yang ditugaskan.</p> <p>3. Memperhatikan dan mencatat materi penugasan</p>		
--	--	---	--	--

## Rubrik Penilaian

### 1. Lisan

No	Pertanyaan	Skor			
		1	2	3	4
1	Apa itu sumbu koordinat, titik asal dan kuadran?				
2	Bagaimana menentukan letak suatu titik pada koordinat Cartesius?				
3	Apa itu lingkaran?				
4	Bagaimana menentukan jarak dua buah titik pada koordinat Cartesius?				

### 2. Tulisan

- Tentukan persamaan garis melalui  $(3, -3)$  yang
  - sejajar garis  $2x + 3y = 6$
  - tegak lurus  $y = 2x + 5$
  - sejajar garis yang melalui  $(-1, 2)$  dan  $(3, -1)$
- Tuliskan persamaan garis yang melalui  $(-2, -1)$  yang tegak lurus pada garis  $y + 3 = -\frac{2}{3}(x - 5)$ .
- Tuliskan persamaan garis yang melalui titik tersebut dan tegak lurus pada garis yang pertama

$$4x - 5y = 8$$

$$2x + y = -10$$

- Tentukan persamaan lingkaran dengan diameter  $AB$  jika  $A = (2, 0)$  dan  $B = (10, 4)$ .
- Tentukan jarak antara masing-masing pusat lingkaran berikut
 
$$x^2 - 2x + y^2 + 2y = 2 \quad \text{dan} \quad x^2 + 6x + y^2 - 4y = -7.$$

### 3. Sikap/Karakter

No	Indikator  Nama Mahasiswa	Indikator Sikap										Nilai Total
		1. Ingintahu	2. Percaya diri	3. Tanggung jawab	4. Disiplin	5. Teliti	6. Kerjasama	7. Mendengarkan penjelasan	8. Bertanya	9. Menjawab	10. Menanggapi	
1												
2												
3												
	dst											
	<b>Rata-rata</b>											

#### Daftar pustaka :

1. Leithold, L. (1986). (terjemahan M. Margha). *Kalkulus dan ilmu ukur analitik. Jilid I*. Jakarta: PT Bina Aksara.
2. Purcell, J., Edwin, D. Varberg dan S.E. Rigdon. (1990). (terjemahan I Nyoman Susila). "Kalkulus". Jilid 1. Edisi VIII. Jakarta : Penerbit Erlangga.

**SATUAN ACARA PEMBELAJARAN**  
**(SAP)**

**Nama Bahan Kajian : Fungsi dan operasi-operasinya**  
**Kode : ELO 103**  
**Program Studi : Pendidikan Teknik Elektro**  
**Pertemuan ke- : 5**  
**Dosen : Dwiprima Elvanny Myori, S.Si., M.Si.**

**Learning Outcomes (Capaian Pembelajaran) Mata Kuliah terkait KKNI :**

Memahami dan menjelaskan tentang fungsi dan grafik fungsi, serta mampu menyelesaikan operasi dari suatu fungsi.

**Soft skills/Karakter :** Berpikir kritis, disiplin, tekun, tanggung jawab, ketelitian, kerja sama, dan percaya diri dalam mengetahui, memahami dan menjelaskan fungsi dan operasi-operasi fungsi.

**Materi :**

1. Fungsi dan grafiknya
2. Operasi-operasi pada fungsi

<b>TAHAP KEGIATAN</b>	<b>KEGIATAN DOSEN</b>	<b>KEGIATAN MAHASISWA</b>	<b>TEKNIK PENILAIAN</b>	<b>MEDIA</b>
Pendahuluan	<ol style="list-style-type: none"><li>1. Memperkenalkan diri, memberi salam</li><li>2. Menjelaskan learning outcomes</li><li>3. Menjelaskan garis besar materi yang akan diberikan dan sistem penilaian</li><li>4. Memotivasi karakter religious</li></ol>	<ol style="list-style-type: none"><li>1. Memperhatikan</li><li>2. Mencatat penjelasan yang diberikan</li><li>3. Memperhatikan dan mencatat cakupan materi</li></ol>	<ol style="list-style-type: none"><li>1. Sikap</li><li>2. Lisan</li></ol>	<ul style="list-style-type: none"><li>• Modul</li><li>• White Board</li><li>• Laptop</li><li>• LCD</li></ul>
Penyajian	<ol style="list-style-type: none"><li>1. Menjelaskan definisi fungsi</li><li>2. Menjelaskan langkah pembuatan grafik dari suatu fungsi</li></ol>	<ol style="list-style-type: none"><li>1. Memperhatikan dan mencatat penjelasan yang diberikan</li><li>2. Memperhatikan dan mencatat penjelasan yang diberikan</li></ol>	<ol style="list-style-type: none"><li>1. Sikap</li><li>2. Lisan</li></ol>	<ul style="list-style-type: none"><li>• Modul</li><li>• White Board</li><li>• Laptop</li><li>• LCD</li></ul>



	<p>3. Menjelaskan operasi-operasi fungsi</p> <p>4. Memberikan kesempatan kepada mahasiswa untuk bertanya tentang materi yang telah dibahas.</p> <p>5. Memberikan dan menjelaskan jawaban dari pertanyaan yang diajukan mahasiswa</p>	<p>3. Memperhatikan dan mencatat penjelasan yang diberikan</p> <p>4. Mengajukan pertanyaan</p> <p>5. Memperhatikan dan mencatat</p>		
Penutup	<p>1. Menyimpulkan bersama mahasiswa tentang materi yang telah disampaikan.</p> <p>2. Menugaskan mahasiswa untuk membaca referensi materi yang akan dibahas pada pertemuan berikutnya</p> <p>3. Memberikan tugas untuk dikumpulkan pada pertemuan berikutnya</p>	<p>1. Memperhatikan</p> <p>2. Memperhatikan dan mencatat materi yang ditugaskan.</p> <p>3. Memperhatikan dan mencatat materi penugasan</p>	<p>1. Sikap</p> <p>2. Tulisan</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Modul</li> <li>• White Board</li> <li>• Laptop</li> <li>• LCD</li> </ul>

## Rubrik Penilaian

### 1. Lisan

No	Pertanyaan	Skor			
		1	2	3	4
1	Apa itu sumbu koordinat, titik asal dan kuadran?				
2	Bagaimana menentukan letak suatu titik pada koordinat Cartesius?				
3	Apa itu lingkaran?				
4	Bagaimana menentukan jarak dua buah titik pada koordinat Cartesius?				

## 2. Tulisan

- Misalkan  $f(x) = \frac{(x+1)}{x}$ . Cari dan sederhanakan  $\frac{f(3+h)-f(3)}{h}$ .
- Tentukan daerah asal alami untuk  $g(x) = \frac{\sqrt{1+x^2}}{|2x+3|}$ .
- Tentukan fungsi-fungsi berikut fungsi ganjil, fungsi genap, atau tidak keduanya.
  - $f(x) = \frac{3x}{x^2+1}$
  - $g(x) = \frac{x^2+1}{|x|+x^4}$
- Misalkan  $f(x) = \frac{x-1}{x}$  dan  $g(x) = x^2 + 1$ . Tentukan  $(f \circ g)(2)$  dan  $(g \circ f)(2)$ .

## 3. Sikap/Karakter

No	Indikator  Nama Mahasiswa	Indikator Sikap										Nilai Total
		1. Ingintahu	2. Percaya diri	3. Tanggung jawab	4. Disiplin	5. Teliti	6. Kerjasama	7. Mendengarkan penjelasan	8. Bertanya	9. Menjawab	10. Menanggapi	
1												
2												
3												
	dst											
		<b>Rata-rata</b>										

### Daftar pustaka :

- Leithold, L. (1986). (terjemahan M. Margha). *Kalkulus dan ilmu ukur analitik. Jilid I*. Jakarta: PT Bina Aksara.
- Purcell, J., Edwin, D. Varberg dan S.E. Rigdon. (1990). (terjemahan I Nyoman Susila). "Kalkulus". Jilid 1. Edisi VIII. Jakarta : Penerbit Erlangga.

**SATUAN ACARA PEMBELAJARAN**  
**(SAP)**

**Nama Bahan Kajian : Fungsi trigonometri**  
**Kode : ELO 103**  
**Program Studi : Pendidikan Teknik Elektro**  
**Pertemuan ke- : 6**  
**Dosen : Dwiprima Elvanny Myori, S.Si., M.Si.**

**Learning Outcomes (Capaian Pembelajaran) Mata Kuliah terkait KKNi :**

Memahami dan menjelaskan tentang fungsi trigonometri dan mampu menyelesaikan operasi pada fungsi trigonometri.

**Soft skills/Karakter :** Berpikir kritis, disiplin, tekun, tanggung jawab, ketelitian, kerja sama, dan percaya diri dalam mengetahui, memahami dan menjelaskan fungsi trigonometri.

**Materi :** Fungsi trigonometri

<b>TAHAP KEGIATAN</b>	<b>KEGIATAN DOSEN</b>	<b>KEGIATAN MAHASISWA</b>	<b>TEKNIK PENILAIAN</b>	<b>MEDIA</b>
Pendahuluan	<ol style="list-style-type: none"><li>Memperkenalkan diri, memberi salam</li><li>Menjelaskan learning outcomes</li><li>Menjelaskan garis besar materi yang akan diberikan dan sistem penilaian</li><li>Memotivasi karakter religious</li></ol>	<ol style="list-style-type: none"><li>Memperhatikan</li><li>Mencatat penjelasan yang diberikan</li><li>Memperhatikan dan mencatat cakupan materi</li></ol>	<ol style="list-style-type: none"><li>Sikap</li><li>Lisan</li></ol>	<ul style="list-style-type: none"><li>Modul</li><li>White Board</li><li>Laptop</li><li>LCD</li></ul>
Penyajian	<ol style="list-style-type: none"><li>Menjelaskan definisi fungsi sinus dan kosinus</li><li>Menjelaskan sifat-sifat fungsi sinus dan kosinus</li><li>Mejelaskan identitas trigonometri</li></ol>	<ol style="list-style-type: none"><li>Memperhatikan dan mencatat penjelasan yang diberikan</li><li>Memperhatikan dan mencatat penjelasan yang diberikan</li><li>Memperhatikan dan mencatat penjelasan</li></ol>	<ol style="list-style-type: none"><li>Sikap</li><li>Lisan</li></ol>	<ul style="list-style-type: none"><li>Modul</li><li>White Board</li><li>Laptop</li><li>LCD</li></ul>

	<p>4. Memberikan kesempatan kepada mahasiswa untuk bertanya tentang materi yang telah dibahas.</p> <p>5. Memberikan dan menjelaskan jawaban dari pertanyaan yang diajukan mahasiswa</p>	<p>4. Mengajukan pertanyaan</p> <p>5. Memperhatikan dan mencatat</p>		
Penutup	<p>1. Menyimpulkan bersama mahasiswa tentang materi yang telah disampaikan.</p> <p>2. Menugaskan mahasiswa untuk membaca referensi materi yang akan dibahas pada pertemuan berikutnya</p> <p>3. Memberikan tugas untuk dikumpulkan pada pertemuan berikutnya</p>	<p>1. Memperhatikan</p> <p>2. Memperhatikan dan mencatat materi yang ditugaskan.</p> <p>3. Memperhatikan dan mencatat materi penugasan</p>	<p>1. Sikap</p> <p>2. Tulisan</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Modul</li> <li>• White Board</li> <li>• Laptop</li> <li>• LCD</li> </ul>

## Rubrik Penilaian

### 1. Lisan

No	Pertanyaan	Skor			
		1	2	3	4
1	Apa itu fungsi sinus dan kosinus?				
2	Apa hubungan fungsi sinus dan kosinus dengan fungsi tangen?				
3	Sebutkan sifat-sifat fungsi sinus dan kosinus!				

### 2. Tulisan

1. Tunjukkan kebenaran kesamaan berikut

$$\sec x - \sin x \tan x = \cos x$$

2. Tentukan fungsi-fungsi berikut fungsi ganjil, fungsi genap, atau tidak keduanya.

- a.  $f(x) = x \sin x$

- b.  $g(x) = \cot x + \sin x$

### 3. Sikap/Karakter

No	Indikator  Nama Mahasiswa	Indikator Sikap										Nilai Total
		1. Ingintahu	2. Percaya diri	3. Tanggung jawab	4. Disiplin	5. Teliti	6. Kerjasama	7. Mendengarkan penjelasan	8. Bertanya	9. Menjawab	10. Menanggapi	
1												
2												
3												
	dst											
	<b>Rata-rata</b>											

#### Daftar pustaka :

1. Leithold, L. (1986). (terjemahan M. Margha). *Kalkulus dan ilmu ukur analitik. Jilid I*. Jakarta: PT Bina Aksara.
2. Purcell, J., Edwin, D. Varberg dan S.E. Rigdon. (1990). (terjemahan I Nyoman Susila). "Kalkulus". Jilid 1. Edisi VIII. Jakarta : Penerbit Erlangga.
3. Stroud, K.A. (1987). (terjemahan Zulkifli Harahap). "Matematika untuk Teknik".Jilid 1. Edisi V. Jakarta : Penerbit Erlangga.

**SATUAN ACARA PEMBELAJARAN**  
**(SAP)**

**Nama Bahan Kajian : Limit fungsi**  
**Kode : ELO 103**  
**Program Studi : Pendidikan Teknik Elektro**  
**Pertemuan ke- : 7**  
**Dosen : Dwiprima Elvanny Myori, S.Si., M.Si.**

**Learning Outcomes (Capaian Pembelajaran) Mata Kuliah terkait KKNi :**

Memahami dan menjelaskan tentang limit fungsi dan mampu menentukan nilai limit dari suatu fungsi.

**Soft skills/Karakter :** Berpikir kritis, disiplin, tekun, tanggung jawab, ketelitian, kerja sama, dan percaya diri dalam mengetahui, memahami dan menjelaskan limit fungsi.

**Materi :** Limit fungsi

<b>TAHAP KEGIATAN</b>	<b>KEGIATAN DOSEN</b>	<b>KEGIATAN MAHASISWA</b>	<b>TEKNIK PENILAIAN</b>	<b>MEDIA</b>
Pendahuluan	<ol style="list-style-type: none"><li>Memperkenalkan diri, memberi salam</li><li>Menjelaskan learning outcomes</li><li>Menjelaskan garis besar materi yang akan diberikan dan sistem penilaian</li><li>Memotivasi karakter religious</li></ol>	<ol style="list-style-type: none"><li>Memperhatikan</li><li>Mencatat penjelasan yang diberikan</li><li>Memperhatikan dan mencatat cakupan materi</li></ol>	<ol style="list-style-type: none"><li>Sikap</li><li>Lisan</li></ol>	<ul style="list-style-type: none"><li>Modul</li><li>White Board</li><li>Laptop</li><li>LCD</li></ul>
Penyajian	<ol style="list-style-type: none"><li>Menjelaskan definisi limit fungsi</li><li>Menjelaskan definisi limit kiri dan limit kanan</li><li>Memebrikan dan menjelaskan teorema-teorema limit</li></ol>	<ol style="list-style-type: none"><li>Memperhatikan dan mencatat penjelasan yang diberikan</li><li>Memperhatikan dan mencatat penjelasan yang diberikan</li><li>Memperhatikan dan mencatat penjelasan</li></ol>	<ol style="list-style-type: none"><li>Sikap</li><li>Lisan</li></ol>	<ul style="list-style-type: none"><li>Modul</li><li>White Board</li><li>Laptop</li><li>LCD</li></ul>

	<ol style="list-style-type: none"> <li>4. Memberikan persoalan limit kepada mahasiswa dan meminta menentukan nilainya</li> <li>5. Membahas bersama dan menyimpulkan jawaban mahasiswa</li> <li>6. Memberikan kesempatan kepada mahasiswa untuk bertanya tentang materi yang telah dibahas.</li> <li>7. Memberikan dan menjelaskan jawaban dari pertanyaan yang diajukan mahasiswa</li> </ol>	<ol style="list-style-type: none"> <li>4. Menyelesaikan persoalan dan mengemukakan pendapat</li> <li>5. Memperhatikan dan mencatat</li> <li>6. Mengajukan pertanyaan</li> <li>7. Memperhatikan dan mencatat</li> </ol>		
Penutup	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Menyimpulkan bersama mahasiswa tentang materi yang telah disampaikan.</li> <li>2. Menugaskan mahasiswa untuk membaca referensi materi yang akan dibahas pada pertemuan berikutnya</li> <li>3. Memberikan tugas untuk dikumpulkan pada pertemuan berikutnya</li> </ol>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Memperhatikan</li> <li>2. Memperhatikan dan mencatat materi yang ditugaskan.</li> <li>3. Memperhatikan dan mencatat materi penugasan</li> </ol>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Sikap</li> <li>2. Tulisan</li> </ol>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Modul</li> <li>• White Board</li> <li>• Laptop</li> <li>• LCD</li> </ul>

## Rubrik Penilaian

### 1. Lisan

No	Pertanyaan	Skor			
		1	2	3	4
1	Apa itu limit fungsi?				
2	Apa itu limit kiri dan limit kanan?				
3	Kapan suatu fungsi dapat dikatakan limitnya ada?				

## 2. Tulisan

1. Tentukan nilai limit-limit berikut atau nyatakan jika tidak ada.

a.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{x^2-1}$

b.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4}{x^2+x-6}$

2. Jika  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 3$  dan  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = -1$ , maka tentukan nilai limit berikut.

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{2f(x) - 3g(x)}{f(x) + g(x)}$$

## 3. Sikap/Karakter

No	Indikator  Nama Mahasiswa	Indikator Sikap										Nilai Total
		1. Ingintahu	2. Percaya diri	3. Tanggung jawab	4. Disiplin	5. Teliti	6. Kerjasama	7. Mendengarkan penjelasan	8. Bertanya	9. Menjawab	10. Menanggapi	
1												
2												
3												
	Dst											
		<b>Rata-rata</b>										

### Daftar pustaka :

1. Leithold, L. (1986). (terjemahan M. Margha). *Kalkulus dan ilmu ukur analitik. Jilid I*. Jakarta: PT Bina Aksara.
2. Purcell, J., Edwin, D. Varberg dan S.E. Rigdon. (1990). (terjemahan I Nyoman Susila). "Kalkulus". Jilid 1. Edisi VIII. Jakarta : Penerbit Erlangga.



**SATUAN ACARA PEMBELAJARAN**  
**(SAP)**

**Nama Bahan Kajian : Kekontinuan fungsi**  
**Kode : ELO 103**  
**Program Studi : Pendidikan Teknik Elektro**  
**Pertemuan ke- : 8**  
**Dosen : Dwiprima Elvanny Myori, S.Si., M.Si.**

**Learning Outcomes (Capaian Pembelajaran) Mata Kuliah terkait KKNi :**

Memahami dan menjelaskan tentang kekontinuan fungsi dan mampu menentukan kekontinuan suatu fungsi.

**Soft skills/Karakter :** Berpikir kritis, disiplin, tekun, tanggung jawab, ketelitian, kerja sama, dan percaya diri dalam mengetahui, memahami dan menjelaskan kekontinuan fungsi.

**Materi :** Kekontinuan fungsi

<b>TAHAP KEGIATAN</b>	<b>KEGIATAN DOSEN</b>	<b>KEGIATAN MAHASISWA</b>	<b>TEKNIK PENILAIAN</b>	<b>MEDIA</b>
Pendahuluan	<ol style="list-style-type: none"><li>Memperkenalkan diri, memberi salam</li><li>Menjelaskan learning outcomes</li><li>Menjelaskan garis besar materi yang akan diberikan dan sistem penilaian</li><li>Memotivasi karakter religious</li></ol>	<ol style="list-style-type: none"><li>Memperhatikan</li><li>Mencatat penjelasan yang diberikan</li><li>Memperhatikan dan mencatat cakupan materi</li></ol>	<ol style="list-style-type: none"><li>Sikap</li><li>Lisan</li></ol>	<ul style="list-style-type: none"><li>Modul</li><li>White Board</li><li>Laptop</li><li>LCD</li></ul>
Penyajian	<ol style="list-style-type: none"><li>Menjelaskan definisi kekontinuan fungsi</li><li>Memberikan dan menjelaskan teorema-teorema kekontinuan fungsi</li><li>Memberikan suatu fungsi kepada mahasiswa dan</li></ol>	<ol style="list-style-type: none"><li>Memperhatikan dan mencatat penjelasan yang diberikan</li><li>Memperhatikan dan mencatat penjelasan yang diberikan</li><li>Menyelesaikan persoalan dan mengemukakan</li></ol>	<ol style="list-style-type: none"><li>Sikap</li><li>Lisan</li></ol>	<ul style="list-style-type: none"><li>Modul</li><li>White Board</li><li>Laptop</li><li>LCD</li></ul>

	<p>meminta memeriksa kekontinuan fungsi tersebut</p> <p>4. Membahas bersama dan menyimpulkan jawaban mahasiswa</p> <p>5. Memberikan kesempatan kepada mahasiswa untuk bertanya tentang materi yang telah dibahas.</p> <p>6. Memberikan dan menjelaskan jawaban dari pertanyaan yang diajukan mahasiswa</p>	<p>pendapat</p> <p>4. Memperhatikan dan mencatat</p> <p>5. Mengajukan pertanyaan</p> <p>6. Memperhatikan dan mencatat</p>		
Penutup	<p>1. Menyimpulkan bersama mahasiswa tentang materi yang telah disampaikan.</p> <p>2. Menugaskan mahasiswa untuk membaca referensi materi yang akan dibahas pada pertemuan berikutnya</p> <p>3. Memberikan tugas untuk dikumpulkan pada pertemuan berikutnya</p>	<p>1. Memperhatikan</p> <p>2. Memperhatikan dan mencatat materi yang ditugaskan.</p> <p>3. Memperhatikan dan mencatat materi penugasan</p>	<p>1. Sikap</p> <p>2. Tulisan</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Modul</li> <li>• White Board</li> <li>• Laptop</li> <li>• LCD</li> </ul>

## Rubrik Penilaian

### 1. Lisan

No	Pertanyaan	Skor			
		1	2	3	4
1	Kapan suatu fungsi dapat dikatakan kontinu di satu titik?				
2	Fungsi apakah yang kontinu di setiap bilangan riil?				
3	Kapan suatu fungsi dapat dikatakan kontinu pada suatu interval?				
4	Apakah fungsi sinus dan kosinus kontinu pada setiap bilangan riil?				

## 2. Tulisan

1. Diketahui

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x \leq -1 \\ 2x + 2, & x > -1 \end{cases}$$

Selidiki kekontinuan fungsi  $f(x)$  di  $x = -1$ .

2. Tentukan  $a$  dan  $b$  agar fungsi

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx - 4, & x < 2 \\ \frac{x - 2}{2 - 4x}, & x \geq 2 \end{cases}$$

kontinu di  $x = 2$ .

## 3. Sikap/Karakter

No	Indikator  Nama Mahasiswa	Indikator Sikap										Nilai Total
		1. Ingintahu	2. Percaya diri	3. Tanggung jawab	4. Disiplin	5. Teliti	6. Kerjasama	7. Mendengankan penjelasan	8. Bertanya	9. Menjawab	10. Menanggapi	
1												
2												
3												
	dst											
	<b>Rata-rata</b>											

### Daftar pustaka :

1. Leithold, L. (1986). (terjemahan M. Margha). *Kalkulus dan ilmu ukur analitik. Jilid I*. Jakarta: PT Bina Aksara.
2. Purcell, J., Edwin, D. Varberg dan S.E. Rigdon. (1990). (terjemahan I Nyoman Susila). "Kalkulus". Jilid 1. Edisi VIII. Jakarta : Penerbit Erlangga.

**SATUAN ACARA PEMBELAJARAN**  
**(SAP)**

**Nama Bahan Kajian : Turunan fungsi**  
**Kode : ELO 103**  
**Program Studi : Pendidikan Teknik Elektro**  
**Pertemuan ke- : 9**  
**Dosen : Dwiprima Elvanny Myori, S.Si., M.Si.**

**Learning Outcomes (Capaian Pembelajaran) Mata Kuliah terkait KKNi :**

Memahami dan menjelaskan tentang turunan fungsi.

**Soft skills/Karakter :** Berpikir kritis, disiplin, tekun, tanggung jawab, ketelitian, kerja sama, dan percaya diri dalam mengetahui, memahami dan menjelaskan turunan suatu fungsi.

**Materi :** Turunan fungsi

<b>TAHAP KEGIATAN</b>	<b>KEGIATAN DOSEN</b>	<b>KEGIATAN MAHASISWA</b>	<b>TEKNIK PENILAIAN</b>	<b>MEDIA</b>
Pendahuluan	<ol style="list-style-type: none"><li>1. Memperkenalkan diri, memberi salam</li><li>2. Menjelaskan learning outcomes</li><li>3. Menjelaskan garis besar materi yang akan diberikan dan sistem penilaian</li><li>4. Memotivasi karakter religious</li></ol>	<ol style="list-style-type: none"><li>1. Memperhatikan</li><li>2. Mencatat penjelasan yang diberikan</li><li>3. Memperhatikan dan mencatat cakupan materi</li></ol>	<ol style="list-style-type: none"><li>1. Sikap</li><li>2. Lisan</li></ol>	<ul style="list-style-type: none"><li>• Modul</li><li>• White Board</li><li>• Laptop</li><li>• LCD</li></ul>
Penyajian	<ol style="list-style-type: none"><li>1. Menjelaskan definisi turunan fungsi</li><li>2. Memberikan dan menjelaskan contoh pencarian turunan suatu fungsi dengan menggunakan definisi</li></ol>	<ol style="list-style-type: none"><li>1. Memperhatikan dan mencatat penjelasan yang diberikan</li><li>2. Memperhatikan dan mencatat penjelasan yang diberikan</li></ol>	<ol style="list-style-type: none"><li>1. Sikap</li><li>2. Lisan</li></ol>	<ul style="list-style-type: none"><li>• Modul</li><li>• White Board</li><li>• Laptop</li><li>• LCD</li></ul>

	<ol style="list-style-type: none"> <li>3. Memberikan suatu fungsi kepada mahasiswa dan meminta menentukan turunannya.</li> <li>4. Membahas bersama dan menyimpulkan jawaban mahasiswa</li> <li>5. Memberikan kesempatan kepada mahasiswa untuk bertanya tentang materi yang telah dibahas.</li> <li>6. Memberikan dan menjelaskan jawaban dari pertanyaan yang diajukan mahasiswa</li> </ol>	<ol style="list-style-type: none"> <li>3. Menyelesaikan persoalan dan mengemukakan pendapat</li> <li>4. Memperhatikan dan mencatat</li> <li>5. Mengajukan pertanyaan</li> <li>6. Memperhatikan dan mencatat</li> </ol>		
Penutup	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Menyimpulkan bersama mahasiswa tentang materi yang telah disampaikan.</li> <li>2. Menugaskan mahasiswa untuk membaca referensi materi yang akan dibahas pada pertemuan berikutnya</li> <li>3. Memberikan tugas untuk dikumpulkan pada pertemuan berikutnya</li> </ol>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Memperhatikan</li> <li>2. Memperhatikan dan mencatat materi yang ditugaskan.</li> <li>3. Memperhatikan dan mencatat materi penugasan</li> </ol>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Sikap</li> <li>2. Tulisan</li> </ol>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Modul</li> <li>• White Board</li> <li>• Laptop</li> <li>• LCD</li> </ul>

## Rubrik Penilaian

### 1. Lisan

No	Pertanyaan	Skor			
		1	2	3	4
1	Jelaskan definisi turunan dari suatu fungsi!				
2	Kapan suatu fungsi dapat dikatakan memiliki turunan?				
3	Jelaskan hubungan turunan fungsi dengan kekontinuannya!				

## 2. Tulisan

1. Dengan menggunakan definisi  $f'(c) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$ , tentukan  $f'(3)$  jika  $f(x) = x^2 - x$ .

2. Gunakan  $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$  untuk mencari turunan fungsi-fungsi berikut di  $x$ .

$$h(x) = \sqrt{x^2 + 4}$$

3. Gunakan  $f'(x) = \lim_{t \rightarrow x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x}$  untuk mencari  $f'(x)$  dari fungsi-fungsi berikut.

a.  $f(x) = x^3 + 5$

$$f(x) = \frac{x}{x - 5}$$

## 3. Sikap/karakter

No	Indikator  Nama Mahasiswa	Indikator Sikap										Nilai Total
		1. Ingintahu	2. Percaya diri	3. Tanggung jawab	4. Disiplin	5. Teliti	6. Kerjasama	7. Mendengarkan penjelasan	8. Bertanya	9. Menjawab	10. Menanggapi	
1												
2												
3												
	dst											
	<b>Rata-rata</b>											

## Daftar pustaka :

1. Leithold, L. (1986). (terjemahan M. Margha). *Kalkulus dan ilmu ukur analitik. Jilid I*. Jakarta: PT Bina Aksara.
2. Purcell, J., Edwin, D. Varberg dan S.E. Rigdon. (1990). (terjemahan I Nyoman Susila). "Kalkulus". Jilid 1. Edisi VIII. Jakarta : Penerbit Erlangga.
3. Stroud, K.A. (1987). (terjemahan Zulkifli Harahap). "Matematika untuk Teknik".Jilid 1. Edisi V. Jakarta : Penerbit Erlangga.

**SATUAN ACARA PEMBELAJARAN**  
**(SAP)**

**Nama Bahan Kajian : Aturan pencarian turunan**  
**Kode : ELO 103**  
**Program Studi : Pendidikan Teknik Elektro**  
**Pertemuan ke- : 10**  
**Dosen : Dwiprima Elvanny Myori, S.Si., M.Si.**

**Learning Outcomes (Capaian Pembelajaran) Mata Kuliah terkait KKNI :**

Memahami dan mampu menentukan turunan suatu fungsi dengan menggunakan aturan pencarian turunan.

**Soft skills/Karakter :** Berpikir kritis, disiplin, tekun, tanggung jawab, ketelitian, kerja sama, dan percaya diri dalam mengetahui, memahami dan menjelaskan aturan pencarian turunan.

**Materi :** Aturan pencarian turunan

<b>TAHAP KEGIATAN</b>	<b>KEGIATAN DOSEN</b>	<b>KEGIATAN MAHASISWA</b>	<b>TEKNIK PENILAIAN</b>	<b>MEDIA</b>
Pendahuluan	<ol style="list-style-type: none"><li>Memperkenalkan diri, memberi salam</li><li>Menjelaskan learning outcomes</li><li>Menjelaskan garis besar materi yang akan diberikan dan sistem penilaian</li><li>Memotivasi karakter religious</li></ol>	<ol style="list-style-type: none"><li>Memperhatikan</li><li>Mencatat penjelasan yang diberikan</li><li>Memperhatikan dan mencatat cakupan materi</li></ol>	<ol style="list-style-type: none"><li>Sikap</li><li>Lisan</li></ol>	<ul style="list-style-type: none"><li>Modul</li><li>White Board</li><li>Laptop</li><li>LCD</li></ul>
Penyajian	<ol style="list-style-type: none"><li>Memberikan dan menjelaskan aturan pencarian turunan dari suatu fungsi</li><li>Memberikan contoh dan langkah menentukan turunan suatu fungsi</li><li>Memberikan suatu fungsi kepada mahasiswa dan</li></ol>	<ol style="list-style-type: none"><li>Memperhatikan dan mencatat penjelasan yang diberikan</li><li>Memperhatikan dan mencatat penjelasan yang diberikan</li><li>Menyelesaikan persoalan dan mengemukakan</li></ol>	<ol style="list-style-type: none"><li>Sikap</li><li>Lisan</li></ol>	<ul style="list-style-type: none"><li>Modul</li><li>White Board</li><li>Laptop</li><li>LCD</li></ul>

	<p>meminta menentukan turunan fungsi tersebut</p> <p>4. Membahas bersama dan menyimpulkan jawaban mahasiswa</p> <p>5. Memberikan kesempatan kepada mahasiswa untuk bertanya tentang materi yang telah dibahas.</p> <p>6. Memberikan dan menjelaskan jawaban dari pertanyaan yang diajukan mahasiswa</p>	<p>pendapat</p> <p>4. Memperhatikan dan mencatat</p> <p>5. Mengajukan pertanyaan</p> <p>6. Memperhatikan dan mencatat</p>		
Penutup	<p>1. Menyimpulkan bersama mahasiswa tentang materi yang telah disampaikan.</p> <p>2. Menugaskan mahasiswa untuk membaca referensi materi yang akan dibahas pada pertemuan berikutnya</p> <p>3. Memberikan tugas untuk dikumpulkan pada pertemuan berikutnya</p>	<p>1. Memperhatikan</p> <p>2. Memperhatikan dan mencatat materi yang ditugaskan.</p> <p>3. Memperhatikan dan mencatat materi penugasan</p>	<p>1. Sikap</p> <p>2. Tulisan</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Modul</li> <li>• White Board</li> <li>• Laptop</li> <li>• LCD</li> </ul>

## Rubrik Penilaian

### 1. Lisan

No	Pertanyaan	Skor			
		1	2	3	4
1	Apa itu operator linier?				
2	Kapan suatu fungsi dapat dikatakan fungsi linier?				
3	Jelaskan cara menentukan turunan dari penjumlahan dua buah fungsi?				
4	Jelaskan cara menentukan turunan dari hasil bagi dua buah fungsi?				



## 2. Tulisan

Dengan menggunakan aturan pencarian turunan, tentukan turunan dari fungsi-fungsi berikut.

1.  $f(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$

2.  $f(x) = \frac{2}{3x} - \frac{1}{x^5}$

3.  $f(x) = 3x(x^3 - 1)$

4.  $f(x) = (3x^2 + 2x)(x^4 - 3x + 1)$

5.  $f(x) = \frac{5x^2 + 2x - 6}{3x - 1}$

## 3. Sikap/karakter

No	Indikator  Nama Mahasiswa	Indikator Sikap										Nilai Total
		1. Ingintahu	2. Percaya diri	3. Tanggung jawab	4. Disiplin	5. Teliti	6. Kerjasama	7. Mendengarkan penjelasan	8. Bertanya	9. Menjawab	10. Menanggapi	
1												
2												
3												
	dst											
		<b>Rata-rata</b>										

### Daftar pustaka :

1. Leithold, L. (1986). (terjemahan M. Margha). *Kalkulus dan ilmu ukur analitik. Jilid I*. Jakarta: PT Bina Aksara.
2. Purcell, J., Edwin, D. Varberg dan S.E. Rigdon. (1990). (terjemahan I Nyoman Susila). "Kalkulus". Jilid 1. Edisi VIII. Jakarta : Penerbit Erlangga.
3. Stroud, K.A. (1987). (terjemahan Zulkifli Harahap). "Matematika untuk Teknik".Jilid 1. Edisi V. Jakarta : Penerbit Erlangga.

**SATUAN ACARA PEMBELAJARAN**  
**(SAP)**

**Nama Bahan Kajian : Turunan tingkat tinggi dan diferensiasi implisit**  
**Kode : ELO 103**  
**Program Studi : Pendidikan Teknik Elektro**  
**Pertemuan ke- : 11**  
**Dosen : Dwiprima Elvanny Myori, S.Si., M.Si.**

**Learning Outcomes (Capaian Pembelajaran) Mata Kuliah terkait KKNI :**

Mampu menentukan turunan tingkat tinggi dari suatu fungsi dan menentukan turunan dari fungsi dalam bentuk implisit.

**Soft skills/Karakter :** Berpikir kritis, disiplin, tekun, tanggung jawab, ketelitian, kerja sama, dan percaya diri dalam mengetahui, memahami dan menjelaskan turunan tingkat tinggi dan diferensiasi implisit.

**Materi :**

1. Turunan tingkat tinggi
2. Diferensiasi implisit

<b>TAHAP KEGIATAN</b>	<b>KEGIATAN DOSEN</b>	<b>KEGIATAN MAHASISWA</b>	<b>TEKNIK PENILAIAN</b>	<b>MEDIA</b>
Pendahuluan	<ol style="list-style-type: none"><li>1. Memperkenalkan diri, memberi salam</li><li>2. Menjelaskan learning outcomes</li><li>3. Menjelaskan garis besar materi yang akan diberikan dan sistem penilaian</li><li>4. Memotivasi karakter religious</li></ol>	<ol style="list-style-type: none"><li>1. Memperhatikan</li><li>2. Mencatat penjelasan yang diberikan</li><li>3. Memperhatikan dan mencatat cakupan materi</li></ol>	<ol style="list-style-type: none"><li>1. Sikap</li><li>2. Lisan</li></ol>	<ul style="list-style-type: none"><li>• Modul</li><li>• White Board</li><li>• Laptop</li><li>• LCD</li></ul>
Penyajian	<ol style="list-style-type: none"><li>1. Memberikan dan menjelaskan tentang turunan tingkat tinggi</li><li>2. Memberikan dan menjelaskan tentang diferensiasi implisit</li></ol>	<ol style="list-style-type: none"><li>1. Memperhatikan dan mencatat penjelasan yang diberikan</li><li>2. Memperhatikan dan mencatat penjelasan yang diberikan</li></ol>	<ol style="list-style-type: none"><li>1. Sikap</li><li>2. Lisan</li></ol>	<ul style="list-style-type: none"><li>• Modul</li><li>• White Board</li><li>• Laptop</li><li>• LCD</li></ul>

	<ol style="list-style-type: none"> <li>3. Memberikan suatu fungsi kepada mahasiswa dan meminta menentukan turunan fungsi tersebut</li> <li>4. Membahas bersama dan menyimpulkan jawaban mahasiswa</li> <li>5. Memberikan kesempatan kepada mahasiswa untuk bertanya tentang materi yang telah dibahas.</li> <li>6. Memberikan dan menjelaskan jawaban dari pertanyaan yang diajukan mahasiswa</li> </ol>	<ol style="list-style-type: none"> <li>3. Menyelesaikan persoalan dan mengemukakan pendapat</li> <li>4. Memperhatikan dan mencatat</li> <li>5. Mengajukan pertanyaan</li> <li>6. Memperhatikan dan mencatat</li> </ol>		
Penutup	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Menyimpulkan bersama mahasiswa tentang materi yang telah disampaikan.</li> <li>2. Menugaskan mahasiswa untuk membaca referensi materi yang akan dibahas pada pertemuan berikutnya</li> <li>3. Memberikan tugas untuk dikumpulkan pada pertemuan berikutnya</li> </ol>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Memperhatikan</li> <li>2. Memperhatikan dan mencatat materi yang ditugaskan.</li> <li>3. Memperhatikan dan mencatat materi penugasan</li> </ol>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Sikap</li> <li>2. Tulisan</li> </ol>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Modul</li> <li>• White Board</li> <li>• Laptop</li> <li>• LCD</li> </ul>

## Rubrik Penilaian

### 1. Lisan

No	Pertanyaan	Skor			
		1	2	3	4
1	Apa itu turunan tingkat tinggi?				
2	Apa itu peubah bebas dan peubah terikat?				
3	Apa itu fungsi implisit?				
4	Bagaimana menentukan turunan dari fungsi implisit?				

## 2. Tulisan

1. Carilah  $f''(2)$  dari fungsi berikut.

$$f(x) = \frac{(x+1)^2}{x-1}$$

2. Jika  $s^2t + t^3 = 1$ , carilah  $\frac{ds}{dt}$  dan  $\frac{dt}{ds}$ .
3. Jika  $y = \sin(x^2) + 2x^3$ , carilah  $\frac{dx}{dy}$ .

## 3. Sikap/karakter

No	Indikator  Nama Mahasiswa	Indikator Sikap										Nilai Total
		1. Ingintahu	2. Percaya diri	3. Tanggung jawab	4. Disiplin	5. Teliti	6. Kerjasama	7. Mendengarkan penjelasan	8. Bertanya	9. Menjawab	10. Menanggapi	
1												
2												
3												
	dst											
		<b>Rata-rata</b>										

## Daftar pustaka :

1. Leithold, L. (1986). (terjemahan M. Margha). *Kalkulus dan ilmu ukur analitik. Jilid I*. Jakarta: PT Bina Aksara.
2. Purcell, J., Edwin, D. Varberg dan S.E. Rigdon. (1990). (terjemahan I Nyoman Susila). "Kalkulus". Jilid 1. Edisi VIII. Jakarta : Penerbit Erlangga.
3. Stroud, K.A. (1987). (terjemahan Zulkifli Harahap). "Matematika untuk Teknik".Jilid 1. Edisi V. Jakarta : Penerbit Erlangga.

**SATUAN ACARA PEMBELAJARAN**  
**(SAP)**

**Nama Bahan Kajian : Antiturunan (integral taktentu)**  
**Kode : ELO 103**  
**Program Studi : Pendidikan Teknik Elektro**  
**Pertemuan ke- : 12**  
**Dosen : Dwiprima Elvanny Myori, S.Si., M.Si.**

**Learning Outcomes (Capaian Pembelajaran) Mata Kuliah terkait KKNI :**

Memahami dan menjelaskan tentang integral taktentu dari suatu fungsi.

**Soft skills/Karakter :** Berpikir kritis, disiplin, tekun, tanggung jawab, ketelitian, kerja sama, dan percaya diri dalam mengetahui, memahami dan menjelaskan antiturunan (integral taktentu).

**Materi :**

Antiturunan (integral taktentu)

<b>TAHAP KEGIATAN</b>	<b>KEGIATAN DOSEN</b>	<b>KEGIATAN MAHASISWA</b>	<b>TEKNIK PENILAIAN</b>	<b>MEDIA</b>
Pendahuluan	<ol style="list-style-type: none"><li>Memperkenalkan diri, memberi salam</li><li>Menjelaskan learning outcomes</li><li>Menjelaskan garis besar materi yang akan diberikan dan sistem penilaian</li><li>Memotivasi karakter religious</li></ol>	<ol style="list-style-type: none"><li>Memperhatikan</li><li>Mencatat penjelasan yang diberikan</li><li>Memperhatikan dan mencatat cakupan materi</li></ol>	<ol style="list-style-type: none"><li>Sikap</li><li>Lisan</li></ol>	<ul style="list-style-type: none"><li>Modul</li><li>White Board</li><li>Laptop</li><li>LCD</li></ul>
Penyajian	<ol style="list-style-type: none"><li>Memberikan dan menjelaskan definisi antiturunan</li><li>Memberikan dan menjelaskan tentang aturan pencarian antiturunan suatu fungsi</li></ol>	<ol style="list-style-type: none"><li>Memperhatikan dan mencatat penjelasan yang diberikan</li><li>Memperhatikan dan mencatat penjelasan yang diberikan</li></ol>	<ol style="list-style-type: none"><li>Sikap</li><li>Lisan</li></ol>	<ul style="list-style-type: none"><li>Modul</li><li>White Board</li><li>Laptop</li><li>LCD</li></ul>

	<ol style="list-style-type: none"> <li>3. Memberikan suatu fungsi kepada mahasiswa dan meminta menentukan antiturunan fungsi tersebut</li> <li>4. Membahas bersama dan menyimpulkan jawaban mahasiswa</li> <li>5. Memberikan kesempatan kepada mahasiswa untuk bertanya tentang materi yang telah dibahas.</li> <li>6. Memberikan dan menjelaskan jawaban dari pertanyaan yang diajukan mahasiswa</li> </ol>	<ol style="list-style-type: none"> <li>3. Menyelesaikan persoalan dan mengemukakan pendapat</li> <li>4. Memperhatikan dan mencatat</li> <li>5. Mengajukan pertanyaan</li> <li>6. Memperhatikan dan mencatat</li> </ol>		
Penutup	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Menyimpulkan bersama mahasiswa tentang materi yang telah disampaikan.</li> <li>2. Menugaskan mahasiswa untuk membaca referensi materi yang akan dibahas pada pertemuan berikutnya</li> <li>3. Memberikan tugas untuk dikumpulkan pada pertemuan berikutnya</li> </ol>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Memperhatikan</li> <li>2. Memperhatikan dan mencatat materi yang ditugaskan.</li> <li>3. Memperhatikan dan mencatat materi penugasan</li> </ol>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Sikap</li> <li>2. Tulisan</li> </ol>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Modul</li> <li>• White Board</li> <li>• Laptop</li> <li>• LCD</li> </ul>

## Rubrik Penilaian

### 1. Lisan

No	Pertanyaan	Skor			
		1	2	3	4
1	Apa itu antiturunan?				
2	Apakah sifat linier juga berlaku pada integral taktentu?Jelaskan!				
3	Bagaimana notasi untuk antiturunan dari suatu fungsi $f(x)$ ?				
4	Kenapa hasil antiturunan suatu fungsi harus ditambah dengan suatu konstanta sebarang?				

## 2. Tulisan

Slesaikan masing-masing integral taktentu berikut.

1.  $\int 2x^2 - 5x + 3 dx$

2.  $\int 3x\sqrt{1 - 2x^2} dx$

3.  $\int \frac{8x^2}{(x^3+2)^3} dx$

4.  $\int \frac{(x+1)}{\sqrt{x^2+2x-4}} dx$

5.  $\int \sec 3x \tan 3x dx$

## 3. Sikap/karakter

No	Indikator  Nama Mahasiswa	Indikator Sikap										Nilai Total
		1. Ingintahu	2. Percaya diri	3. Tanggung jawab	4. Disiplin	5. Teliti	6. Kerjasama	7. Mendengankan penjelasan	8. Bertanya	9. Menjawab	10. Menanggapi	
1												
2												
3												
	dst											
	<b>Rata-rata</b>											

## Daftar pustaka :

1. Leithold, L. (1986). (terjemahan M. Margha). *Kalkulus dan ilmu ukur analitik. Jilid I*. Jakarta: PT Bina Aksara.
2. Purcell, J., Edwin, D. Varberg dan S.E. Rigdon. (1990). (terjemahan I Nyoman Susila). "Kalkulus". Jilid 1. Edisi VIII. Jakarta : Penerbit Erlangga.
3. Stroud, K.A. (1987). (terjemahan Zulkifli Harahap). "Matematika untuk Teknik".Jilid 1. Edisi V. Jakarta : Penerbit Erlangga.

**SATUAN ACARA PEMBELAJARAN**  
**(SAP)**

**Nama Bahan Kajian : Pendahuluan luas**  
**Kode : ELO 103**  
**Program Studi : Pendidikan Teknik Elektro**  
**Pertemuan ke- : 13**  
**Dosen : Dwiprima Elvanny Myori, S.Si., M.Si.**

**Learning Outcomes (Capaian Pembelajaran) Mata Kuliah terkait KKNi :**

Memahami dan menjelaskan tentang pendahuluan luas daerah di bawah kurva.

**Soft skills/Karakter :** Berpikir kritis, disiplin, tekun, tanggung jawab, ketelitian, kerja sama, dan percaya diri dalam mengetahui, memahami dan menjelaskan pendahuluan luas.

**Materi :**

Luas daerah di bawah kurva

<b>TAHAP KEGIATAN</b>	<b>KEGIATAN DOSEN</b>	<b>KEGIATAN MAHASISWA</b>	<b>TEKNIK PENILAIAN</b>	<b>MEDIA</b>
Pendahuluan	<ol style="list-style-type: none"><li>Memperkenalkan diri, memberi salam</li><li>Menjelaskan learning outcomes</li><li>Menjelaskan garis besar materi yang akan diberikan dan sistem penilaian</li><li>Memotivasi karakter religious</li></ol>	<ol style="list-style-type: none"><li>Memperhatikan</li><li>Mencatat penjelasan yang diberikan</li><li>Memperhatikan dan mencatat cakupan materi</li></ol>	<ol style="list-style-type: none"><li>Sikap</li><li>Lisan</li></ol>	<ul style="list-style-type: none"><li>Modul</li><li>White Board</li><li>Laptop</li><li>LCD</li></ul>
Penyajian	<ol style="list-style-type: none"><li>Memberikan dan menjelaskan penulisan jumlah menggunakan notasi sigma</li><li>Memberikan dan menjelaskan langkah menentukan luas daerah di bawah kurva</li></ol>	<ol style="list-style-type: none"><li>Memperhatikan dan mencatat penjelasan yang diberikan</li><li>Memperhatikan dan mencatat penjelasan yang diberikan</li></ol>	<ol style="list-style-type: none"><li>Sikap</li><li>Lisan</li></ol>	<ul style="list-style-type: none"><li>Modul</li><li>White Board</li><li>Laptop</li><li>LCD</li></ul>



	<ol style="list-style-type: none"> <li>3. Memberikan mahasiswa suatu persoalan menentukan luas daerah yang dibatasi suatu kurva</li> <li>4. Membahas bersama dan menyimpulkan jawaban mahasiswa</li> <li>5. Memberikan kesempatan kepada mahasiswa untuk bertanya tentang materi yang telah dibahas.</li> <li>6. Memberikan dan menjelaskan jawaban dari pertanyaan yang diajukan mahasiswa</li> </ol>	<ol style="list-style-type: none"> <li>3. Menyelesaikan persoalan dan mengemukakan pendapat</li> <li>4. Memperhatikan dan mencatat</li> <li>5. Mengajukan pertanyaan</li> <li>6. Memperhatikan dan mencatat</li> </ol>		
Penutup	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Menyimpulkan bersama mahasiswa tentang materi yang telah disampaikan.</li> <li>2. Menugaskan mahasiswa untuk membaca referensi materi yang akan dibahas pada pertemuan berikutnya</li> <li>3. Memberikan tugas untuk dikumpulkan pada pertemuan berikutnya</li> </ol>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Memperhatikan</li> <li>2. Memperhatikan dan mencatat materi yang ditugaskan.</li> <li>3. Memperhatikan dan mencatat materi penugasan</li> </ol>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Sikap</li> <li>2. Tulisan</li> </ol>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Modul</li> <li>• White Board</li> <li>• Laptop</li> <li>• LCD</li> </ul>

## Rubrik Penilaian

### 1. Lisan

No	Pertanyaan	Skor			
		1	2	3	4
1	Sebutkan sifat-sifat luas dari suatu daerah!				
2	Bagaimana langkah dalam menentukan luas daerah di bawah kurva?				
3	Apa perbedaan menentukan luas daerah dengan poligon dalam dan poligon luar?				

## 2. Tulisan

Carilah luas daerah di bawah kurva  $y = f(x)$  pada selang  $[a, b]$  dari masing-masing fungsi berikut.

1.  $y = \frac{1}{2}x^2 + 1, a = 0, b = 1$
2.  $y = x^2, a = -2, b = 2$
3.  $y = x^3, a = 0, b = 1$
4.  $y = 2x + 2, a = -1, b = 1$
5.  $y = x^3 + x, a = 0, b = 1$

## 3. Sikap/karakter

No	Indikator  Nama Mahasiswa	Indikator Sikap										Nilai Total
		1. Ingintahu	2. Percaya diri	3. Tanggung jawab	4. Disiplin	5. Teliti	6. Kerjasama	7. Mendengarkan penjelasan	8. Bertanya	9. Menjawab	10. Menanggapi	
1												
2												
3												
	dst											
	<b>Rata-rata</b>											

### Daftar pustaka :

1. Leithold, L. (1986). (terjemahan M. Margha). *Kalkulus dan ilmu ukur analitik. Jilid I*. Jakarta: PT Bina Aksara.
2. Purcell, J., Edwin, D. Varberg dan S.E. Rigdon. (1990). (terjemahan I Nyoman Susila). "Kalkulus". Jilid 1. Edisi VIII. Jakarta : Penerbit Erlangga.

**SATUAN ACARA PEMBELAJARAN**  
**(SAP)**

**Nama Bahan Kajian : Integral tentu**  
**Kode : ELO 103**  
**Program Studi : Pendidikan Teknik Elektro**  
**Pertemuan ke- : 14**  
**Dosen : Dwiprima Elvanny Myori, S.Si., M.Si.**

**Learning Outcomes (Capaian Pembelajaran) Mata Kuliah terkait KKNI :**

Memahami dan menjelaskan tentang integral tentu, serta mampu menyelesaikan persoalan integral tentu dari suatu fungsi.

**Soft skills/Karakter :** Berpikir kritis, disiplin, tekun, tanggung jawab, ketelitian, kerja sama, dan percaya diri dalam mengetahui, memahami dan menjelaskan tentang integral tentu.

**Materi :**

1. Definisi integral tentu
2. Penghitungan integral tentu

<b>TAHAP KEGIATAN</b>	<b>KEGIATAN DOSEN</b>	<b>KEGIATAN MAHASISWA</b>	<b>TEKNIK PENILAIAN</b>	<b>MEDIA</b>
Pendahuluan	<ol style="list-style-type: none"><li>1. Memperkenalkan diri, memberi salam</li><li>2. Menjelaskan learning outcomes</li><li>3. Menjelaskan garis besar materi yang akan diberikan dan sistem penilaian</li><li>4. Memotivasi karakter religious</li></ol>	<ol style="list-style-type: none"><li>1. Memperhatikan</li><li>2. Mencatat penjelasan yang diberikan</li><li>3. Memperhatikan dan mencatat cakupan materi</li></ol>	<ol style="list-style-type: none"><li>1. Sikap</li><li>2. Lisan</li></ol>	<ul style="list-style-type: none"><li>• Modul</li><li>• White Board</li><li>• Laptop</li><li>• LCD</li></ul>
Penyajian	<ol style="list-style-type: none"><li>1. Memberikan dan menjelaskan definisi integral tentu</li><li>2. Memberikan dan menjelaskan tentang penghitungan integral tentu dari fungsi</li></ol>	<ol style="list-style-type: none"><li>1. Memperhatikan dan mencatat penjelasan yang diberikan</li><li>2. Memperhatikan dan mencatat penjelasan yang diberikan</li></ol>	<ol style="list-style-type: none"><li>1. Sikap</li><li>2. Lisan</li></ol>	<ul style="list-style-type: none"><li>• Modul</li><li>• White Board</li><li>• Laptop</li><li>• LCD</li></ul>

	<ol style="list-style-type: none"> <li>3. Memberikan mahasiswa suatu persoalan menentukan integral tentu dari suatu fungsi</li> <li>4. Membahas bersama dan menyimpulkan jawaban mahasiswa</li> <li>5. Memberikan kesempatan kepada mahasiswa untuk bertanya tentang materi yang telah dibahas.</li> <li>6. Memberikan dan menjelaskan jawaban dari pertanyaan yang diajukan mahasiswa</li> </ol>	<ol style="list-style-type: none"> <li>3. Menyelesaikan persoalan dan mengemukakan pendapat</li> <li>4. Memperhatikan dan mencatat</li> <li>5. Mengajukan pertanyaan</li> <li>6. Memperhatikan dan mencatat</li> </ol>		
Penutup	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Menyimpulkan bersama mahasiswa tentang materi yang telah disampaikan.</li> <li>2. Menugaskan mahasiswa untuk membaca referensi materi yang akan dibahas pada pertemuan berikutnya</li> <li>3. Memberikan tugas untuk dikumpulkan pada pertemuan berikutnya</li> </ol>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Memperhatikan</li> <li>2. Memperhatikan dan mencatat materi yang ditugaskan.</li> <li>3. Memperhatikan dan mencatat materi penugasan</li> </ol>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Sikap</li> <li>2. Tulisan</li> </ol>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Modul</li> <li>• White Board</li> <li>• Laptop</li> <li>• LCD</li> </ul>

### Rubrik Penilaian

#### 1. Lisan

No	Pertanyaan	Skor			
		1	2	3	4
1	Jelaskan definsi integral tentu!				
2	Apa hubungan integral tentu dengan luas daerah?				
3	Jelaskan hubungan integral tentu dengan kesimetrian fungsinya!				

## 2. Tulisan

1. Selesaikanlah integral berikut.

$$\int_0^2 x^2(x^3 + 1) dx$$

2. Dengan menggunakan teorema simetri, hitunglah

$$\int_{-1}^1 (3x^3 - x^2 + 10) dx$$

3. Misalkan  $f(x) = \begin{cases} \cos x, & \text{untuk } x < 0 \\ 1 - x, & \text{untuk } x \geq 0 \end{cases}$ . Hitunglah

$$\int_{-\pi/2}^1 f(x) dx$$

## 3. Sikap/karakter

No	Indikator  Nama Mahasiswa	Indikator Sikap										Nilai Total
		1. Ingintahu	2. Percaya diri	3. Tanggung jawab	4. Disiplin	5. Teliti	6. Kerjasama	7. Mendengankan penjelasan	8. Bertanya	9. Menjawab	10. Menanggapi	
1												
2												
3												
	dst											
	<b>Rata-rata</b>											

## Daftar pustaka :

1. Leithold, L. (1986). (terjemahan M. Margha). *Kalkulus dan ilmu ukur analitik. Jilid I*. Jakarta: PT Bina Aksara.
2. Purcell, J., Edwin, D. Varberg dan S.E. Rigdon. (1990). (terjemahan I Nyoman Susila). "Kalkulus". Jilid 1. Edisi VIII. Jakarta : Penerbit Erlangga.
3. Stroud, K.A. (1987). (terjemahan Zulkifli Harahap). "Matematika untuk Teknik".Jilid 1. Edisi V. Jakarta : Penerbit Erlangga.

## DAFTAR ISI

<b>KATA PENGANTAR.....</b>	<b>i</b>
<b>DAFTAR ISI.....</b>	<b>ii</b>
<b>I. PENDAHULUAN</b>	
A. Deskripsi .....	1
B. Petunjuk penggunaan modul .....	1
C. Tujuan Akhir .....	2
D. Referensi .....	2
<b>II. PEMBELAJARAN</b>	
A. Rencana Belajar Mahasiswa .....	2
B. Kegiatan Belajar .....	4
1. Kegiatan Belajar 1	
a. Tujuan Belajar .....	4
b. Uraian Materi .....	4
c. Soal .....	6
2. Kegiatan Belajar 2	
a. Tujuan Belajar .....	7
b. Uraian Materi .....	7
c. Soal .....	10
3. Kegiatan Belajar 3	
a. Tujuan Belajar .....	12
b. Uraian Materi .....	12
c. Soal .....	16
4. Kegiatan Belajar 4	
a. Tujuan Belajar .....	17
b. Uraian Materi .....	15
c. Soal .....	21

5. Kegiatan Belajar 5	
a. Tujuan Belajar .....	22
b. Uraian Materi .....	22
c. Soal .....	25
6. Kegiatan Belajar 6	
a. Tujuan Belajar .....	26
b. Uraian Materi .....	26
c. Soal .....	29
7. Kegiatan Belajar 7	
a. Tujuan Belajar .....	30
b. Uraian Materi .....	30
c. Rangkuman .....	73
d. Tugas .....	74
8. Kegiatan Belajar 8	
a. Tujuan Belajar .....	75
b. Uraian Materi .....	75
c. Rangkuman .....	85
d. Tugas .....	86
9. Kegiatan Belajar 9	
a. Tujuan Belajar .....	87
b. Uraian Materi .....	87
c. Rangkuman .....	104
d. Tugas .....	105
10. Kegiatan Belajar 10	
a. Tujuan Belajar .....	106
b. Uraian Materi .....	106
c. Rangkuman .....	121
d. Tugas .....	121
11. Kegiatan Belajar 11	
a. Tujuan Belajar .....	122
b. Uraian Materi .....	122

c. Rangkuman .....	132
d. Tugas .....	133
12. Kegiatan Belajar 12	
a. Tujuan Belajar .....	134
b. Uraian Materi .....	134
c. Rangkuman .....	141
d. Tugas .....	141
13. Kegiatan Belajar 13	
a. Tujuan Belajar .....	142
b. Uraian Materi .....	142
c. Rangkuman .....	153
d. Tugas .....	154
<b>III. EVALUASI .....</b>	<b>155</b>
<b>IV. PENUTUP .....</b>	<b>155</b>
<b>V. DAFTAR PUSTAKA .....</b>	<b>156</b>



## **KATA PENGANTAR**

Alhamdulillah, segala puji dan syukur hanya ke hadirat Allah SWT atas segala karunia yang telah diberikan. Shalawat dan salam kita haturkan kepada junjungan alam, Rasulullah Muhammad SAW yang telah menjadi tauladan bagi kita semua dalam bersikap.

Kalkulus merupakan salah satu mata kuliah pada Program Studi Pendidikan Teknik Elektro Fakultas Teknik Universitas Negeri Padang. Bahan ajar ini dirancang untuk menunjang mata kuliah Kalkulus. Diharapkan bahan ajar ini dapat mmelengkapi referensi Kalkulus yang sudah ada dan akan menjadi buku pegangan dalam pelaksanaan mata kuliah Kalkulus.

Tidak lupa penulis ucapkan terima kasih kepada semua pihak yang telah memberikan kepercayaan dan dukungan semangat kepada penulis untuk membuat bahan ajar ini yang tidak mungkin penulis ucapkan satu per satu. Penulis akan sangat berterima kasih atas kritik dan saran yang membangun untuk kesempurnaan bahan ajar ini dan juga untuk menjadi catatan bagi penulis agar menjadi lebih baik ke depannya.

Padang, Oktober 2013

Penulis

## **I. PENDAHULUAN**

### **A. Deskripsi**

Matematika merupakan salah satu cabang ilmu yang paling mudah ditemukan kapan saja dan di mana saja. Ilmu matematika dapat digunakan sebagai alat pemecahan masalah baik dalam kehidupan sehari-hari maupun dalam ilmu pengetahuan dan teknologi. Dengan matematika, suatu permasalahan dapat dibuat dalam suatu model yang strukturnya jelas dan tepat. Hal ini membuat masalah menjadi lebih sederhana dan membantu untuk menentukan penyelesaiannya.

Kalkulus salah satu bagian dari matematika yang perlu dikuasai dengan oleh mahasiswa sains dan tekni, sehingga mahasiswa memiliki pola pikir yang ilmiah dan kritis, logis dan sistematis. Kalkulus juga membantu mahasiswa mampu merancang model matematis sederhana dan terampil dalam teknis matematika yang didukung oleh konsep, penalaran, rumus dan metode yang benar.

Untuk itu, bahan ajar ini mencoba untuk menjelaskan konsep dasar dalam Kalkulus. Diharapkan setelah membaca bahan ajar ini, mahasiswa memahami konsep-konsep dasar dalam Kalkulus dan dapat mengembangkannya menjadi konsep yang lebih lanjut, mahasiswa juga diharapkan dapat menyederhanakan dan menyelesaikan suatu permasalahan dengan menggunakan konsep-konsep yang sudah ada.

Mata kuliah ini ditawarkan kepada mahasiswa semester I Program Studi Pendidikan Teknik Elektro FT UNP dengan beban sebanyak 3 SKS. Mata kuliah ini ditawarkan untuk memberikan pengetahuan dan pengalaman kepada mahasiswa dalam memahami konsep-konsep matematis yang akan digunakan pada mata kuliah lainnya. Mata kuliah mencakup sistem bilangan riil, fungsi, limit dan kekontinuan, turunan dan integral.

Bahan ajar ini berusaha sejauh mungkin memberikan dasar-dasar teori maupun contoh soal beserta penyelesaiannya yang diperlukan pada mata kuliah lainnya.

## **B. Prasyarat**

Untuk dapat memahami bahan ajar ini, pembaca harus telah menguasai perhitungan matematika dasar sebagaimana telah diperoleh ketika di bangku sekolah dulu. Lebih spesifik lagi, bahan ajar ini diperuntukkan bagi mahasiswa Pendidikan Teknik Elektro FT UNP pada semester I.

## **C. Petunjuk Penggunaan Bahan ajar**

Bahan ajar ini tersusun secara sistematis yang dibagi menjadi beberapa kegiatan pembelajaran, di mana setiap kegiatan pembelajaran adalah satu kali tatap muka di kelas dengan waktu  $3 \times 50$  menit.

Materi pada bahan ajar ini dimulai dari sistem bilangan riil, fungsi, limit dan kekontinuan, turunan dan integral. Masing-masing kegiatan pembelajaran dilengkapi dengan contoh soal dan penyelesaiannya serta soal sebagai latihan pembaca.

## **D. Tujuan Akhir**

Setelah menyelesaikan mata kuliah ini mahasiswa mempunyai pemahaman konseptual yang benar tentang topik-topik utama dalam Kalkulus serta teorema dan sifat-sifat matematis lainnya.

## II. PEMBELAJARAN

### A. Rencana Belajar Mahasiswa

No	MATERI	Kegiatan	Sumber Bacaan	Jumlah Pertemuan
1	Sistem bilangan riil	Ceramah, diskusi, dan latihan	1,2	1 ×
2	Pertidaksamaan	Ceramah, diskusi, dan latihan	1,2	1 ×
3	Nilai mutlak, akar kuadrat, kuadrat	Ceramah, diskusi, dan latihan	1,2	1 ×
4	Sistem koordinat, garis lurus, dan grafik persamaan.	Ceramah, diskusi, dan latihan	1,2	1 ×
5	- Fungsi dan grafiknya - Operasi-operasi pada fungsi	Ceramah, diskusi, dan latihan	1,2	1 ×
6	Fungsi trigonometri	Ceramah, diskusi, dan latihan	1,2,3	1 ×
7	Limit fungsi	Ceramah, diskusi, dan latihan	1,2	1 ×
8	Ujian tengah semester	Tertulis		1 ×
9	Kekontinuan fungsi	Ceramah, diskusi, dan latihan	1,2	1 ×
10	Turunan	Ceramah, diskusi, dan latihan	1,2,3	1 ×
11	Aturan pencarian turunan	Ceramah, diskusi, dan latihan	1,2,3	1 ×
12	Turunan tingkat tinggi dan diferensiasi implisit	Ceramah, diskusi, dan latihan	1,2,3	1 ×
13	Integral taktentu	Ceramah, diskusi, dan latihan	1,2,3	1 ×
14	Pendahuluan luas di bawah kurva	Ceramah, diskusi, dan latihan	1,2	1 ×
15	Integral tentu	Ceramah, diskusi, dan latihan	1,2,3	1 ×
16	Ujian akhir semester	Tertulis		1 ×
	<b>JUMLAH PERTEMUAN</b>			<b>16 ×</b>

Padang, Oktober 2013

Mengetahui,  
Ketua Program Studi  
Pendidikan Teknik Elektro

Dosen Pembina,

Oriza Candra, S.T., M.T.  
NIP. 19722111 199903 1 002

Dwiprima Elvanny M, S.Si., M.Si.  
NIP. 19881101 201212 2 001

## 1. Kegiatan Belajar 1

### a. Tujuan Belajar

Mahasiswa dapat memahami tentang definisi dan sifat-sifat bilangan riil.

### b. Uraian Materi

#### Sistem Bilangan Riil

**Bilangan riil**  $\mathbb{R}$  adalah himpunan semua bilangan, yaitu gabungan bilangan rasional dan bilangan irrasional, bersama-sama dengan negatifnya dan nol.

**Bilangan rasional**  $\mathbb{Q}$  merupakan bilangan yang dapat dinyatakan dalam bentuk

$$\frac{m}{n}, \text{ di mana } m, n \in \mathbb{Z} \text{ dan } n \neq 0.$$

Contoh bilangan rasional, yaitu

$$\frac{8}{9}, \frac{2}{-3}, \frac{7}{7}, \frac{-10}{5}, \text{ dan } \frac{3}{1}.$$

**Bilangan irrasional** merupakan bilangan yang tidak dapat dinyatakan sebagai hasil bagi dua bilangan bulat, seperti  $\sqrt{2}$ ,  $\sqrt{3}$ ,  $\sqrt[3]{7}$ ,  $\pi$ , dan lainnya.

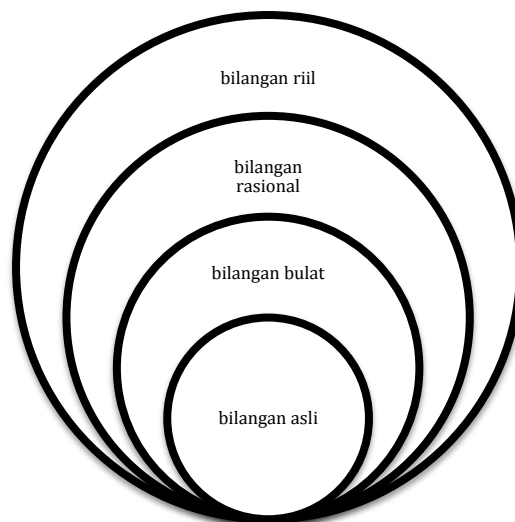
**Bilangan bulat**  $\mathbb{Z}$  merupakan gabungan bilangan asli dengan negatifnya dan nol, yaitu

$$\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots$$

**Bilangan asli**  $\mathbb{N}$  merupakan sistem bilangan yang paling sederhana, yang terdiri dari

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots$$

Secara umum hubungan bilangan riil dengan bilangan lainnya dapat digambarkan sebagai berikut.



## Sifat Bilangan Riil

Sifat-sifat medan :

Jika  $x, y,$  dan  $z$  adalah bilangan riil, maka berlaku sifat-sifat berikut.

i. Hukum komutatif

$$x + y = y + x \text{ dan } xy = yx$$

ii. Hukum asosiatif

$$x + (y + z) = (x + y) + z$$

$$x(yz) = (xy)z$$

iii. Hukum distributif

$$x(y + z) = xy + xz$$

iv. Elemen identitas

Terdapat dua bilangan riil yang berlainan 0 dan 1 yang memenuhi  $x + 0 = 0 + x = x$  dan  $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$  untuk setiap bilangan riil  $x$ .

v. Invers

Karena  $x + (-x) = 0$ , maka  $-x$  adalah invers pada penjumlahan bilangan riil.

Karena  $x \cdot x^{-1} = 1$ , di mana  $x \neq 0$ , maka  $x^{-1}$  adalah invers pada perkalian bilangan riil.

Sifat-sifat urutan :

i. Trikotomi

Jika  $x$  dan  $y$  adalah bilangan-bilangan, maka pasti salah satu di antara berikut berlaku:

$$x < y \text{ atau } x = y \text{ atau } x > y.$$

ii. Ketransitifan

$$x < y \text{ dan } y < z \Rightarrow x < z.$$

iii. Penambahan

$$x < y \Leftrightarrow x + z < y + z.$$

iv. Perkalian

Jika  $z$  positif, maka  $x < y \Leftrightarrow xz < yz$ .

Jika  $z$  negatif, maka  $x < y \Leftrightarrow xz > yz$ .

**c. Soal**

1. Buatlah penyederhanaan dari masing-masing operasi berikut.

a.  $\frac{1}{3} \left( \frac{1}{2} \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{3} \right) + \frac{1}{6} \right)$

b.  $(\sqrt{5} + 3)(\sqrt{5} - 3)$

c.  $2 + \frac{3}{1+\frac{5}{2}}$

2. Lakukan operasi yang diminta dan sederhanakan.

a.  $\frac{x^2-x-6}{x-3}$

b.  $\frac{12}{x^2+2x} + \frac{4}{x} + \frac{2}{x+2}$

c.

$$\frac{\frac{x}{x-3} - \frac{2}{x^2-4x+3}}{\frac{5}{x-1} + \frac{5}{x-3}}$$

3. Tunjukkan bahwa

a.  $a < b \Leftrightarrow a^2 < b^2$

b.  $a < b \Leftrightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$

## 2. Kegiatan Belajar 2

### a. Tujuan belajar

Mahasiswa dapat memahami tentang pertidaksamaan.

### b. Uraian Materi

**Pertidaksamaan** merupakan bentuk aljabar dengan satu variabel yang dihubungkan dengan relasi urutan.

Pada pertidaksamaan, terdapat istilah yang disebut sebagai **selang (interval)** di mana interval ini terbagi menjadi dua, yaitu interval berhingga dan interval tak berhingga. Interval berhingga terdiri dari :

#### i. interval terbuka

Pertidaksamaan ganda  $a < x < b$  menggambarkan interval terbuka yang terdiri dari semua bilangan antara  $a$  dan  $b$ , tidak termasuk titik-titik ujung  $a$  dan  $b$ .

Notasi himpunan :  $\{x | a < x < b\}$

Notasi selang :  $(a, b)$


Grafik : 

#### ii. interval tertutup

Pertidaksamaan ganda  $a \leq x \leq b$  menggambarkan interval tertutup yang terdiri dari semua bilangan di antara  $a$  dan  $b$  serta mencakup titik-titik ujung  $a$  dan  $b$ .

Notasi himpunan :  $\{x | a \leq x \leq b\}$


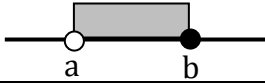
Notasi selang :  $[a, b]$

Grafik : 

#### iii. interval setengah terbuka

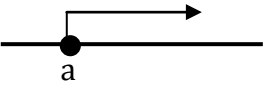
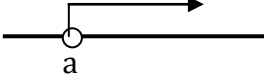
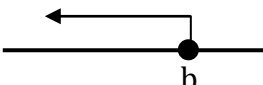
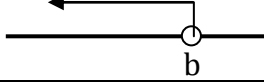
Pertidaksamaan ganda  $a \leq x < b$  atau  $a < x \leq b$  menggambarkan interval setengah terbuka yang terdiri dari semua bilangan di antara  $a$  dan  $b$  serta mencakup salah satu dari titik ujungnya.



Notasi himpunan	Notasi selang	Grafik
$\{x a \leq x < b\}$	$[a, b)$	
$\{x a < x \leq b\}$	$(a, b]$	

iv. **interval tak berhingga**

Interval tak berhingga diberikan pada tabel berikut:

Notasi himpunan	Notasi selang	Grafik
$\{x x \geq a\}$	$[a, \infty)$	
$\{x x > a\}$	$(a, \infty)$	
$\{x x \leq b\}$	$(-\infty, b]$	
$\{x x < b\}$	$(-\infty, b)$	

Untuk menyelesaikan suatu pertidaksamaan yaitu dengan menentukan semua himpunan bilangan riil yang memenuhi pertidaksamaan tersebut. Himpunan bilangan riil ini disebut himpunan penyelesaian (*HP*). Cara yang dapat dilakukan dalam menentukan penyelesaian suatu pertidaksamaan yaitu sebagai berikut :

1. menambahkan bilangan yang sama pada kedua ruas pertidaksamaan
2. mengalikan kedua ruas pertidaksamaan dengan suatu bilangan positif
3. mengalikan kedua ruas pertidaksamaan dengan suatu bilangan negatif, kemudian membalikkan arah tanda pertidaksamaan.

**Contoh 2.1.** Selesaikan pertidaksamaan  $4x + 5 > 0$ .

**Penyelesaian.**

$$4x + 5 > 0$$

$$4x > -5 \quad (\text{menambahkan dengan } -5)$$

$$x > -\frac{5}{4} \quad (\text{mengalikan dengan } \frac{1}{4})$$

Jadi, himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan  $4x + 5 > 0$  adalah  $\{x \mid x > -\frac{5}{4}\}$ .

**Contoh 2.2.** Selesaikan pertidaksamaan  $3 < 2x - 7 < 9$ .

**Penyelesaian.**

$$3 < 2x - 7 < 9$$

$$10 < 2x < 16 \quad (\text{menambahkan dengan } 7)$$

$$5 < x < 8 \quad (\text{mengalikan dengan } \frac{1}{2})$$

Jadi, himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan  $3 < 2x - 7 < 9$  adalah  $\{x \mid 5 < x < 8\}$ .

Jika pertidaksamaan yang diberikan adalah pertidaksamaan kuadrat, maka untuk menentukan penyelesaiannya yaitu dengan menentukan faktor dari pertidaksamaan tersebut dan menunjukkan bahwa suatu faktor linier berbentuk  $x - a$  adalah positif untuk  $x > a$  dan negatif untuk  $x < a$ . Hal ini mengakibatkan bahwa hasil kali  $(x - a)(x - b)$  dapat berubah dari bernilai positif menjadi negatif, atau sebaliknya. Titik-titik ini, di mana suatu faktor adalah nol, disebut sebagai **titik-titik pemecah**.

**Contoh 2.3.** Selesaikan pertidaksamaan  $x^2 < 3x + 10$ .

**Penyelesaian.**

$$x^2 < 3x + 10$$

$$x^2 - 3x - 10 < 0 \quad (\text{menambahkan dengan } -(3x + 10))$$

$$(x - 5)(x + 2) < 0 \quad (\text{faktorkan})$$

Titik-titik pemecah yang diperoleh yaitu :

$$(i) \quad x - 5 = 0 \Rightarrow x = 5$$

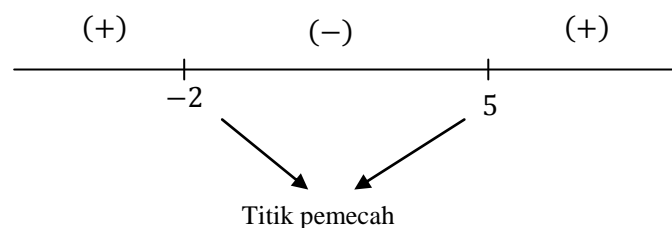
$$(ii) \quad x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$$

Titik  $-2$  dan  $5$  membagi interval menjadi 3 bagian, yaitu  $(-\infty, -2)$ ,  $(-2, 5)$ ,  $(5, \infty)$ . Pada setiap interval tersebut,  $(x - 5)(x + 2)$  bertanda tetap, yaitu selalu positif atau selalu negatif.

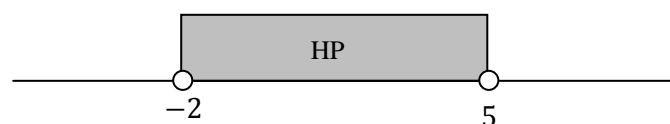
Untuk menentukan tanda tersebut pada setiap interval digunakan **titik uji**, yaitu sebarang titik yang diambil dari masing-masing interval.

Interval	Titik uji	Hasil	Tanda
$(-\infty, -2)$	-3	8	(+)
$(-2, 5)$	0	-10	(-)
$(5, \infty)$	6	8	(+)

Jika digambarkan pada garis riil, maka akan menjadi seperti berikut.



Pertidaksamaan  $(x - 5)(x + 2) < 0$  menunjukkan bahwa daerah pada interval yang diinginkan yaitu daerah yang bertanda negatif. Berdasarkan pengujian tersebut di atas dapat disimpulkan bahwa himpunan penyelesaian untuk  $(x - 5)(x + 2) < 0$  adalah  $\{x | -2 < x < 5\}$ . Grafik dari himpunan penyelesaian tersebut adalah sebagai berikut.



**c. Soal**

1. Tentukan himpunan penyelesaian pertidaksamaan yang diberikan dalam notasi selang dan buat sketsa grafiknya.
  - a.  $-2x + 5 \geq 4x - 3$
  - b.  $-3 < 4x - 9 < 11$
  - c.  $2x - 4 \leq 6 - 7x \leq 3x + 6$
  - d.  $\frac{3x-2}{x-1} \geq 0$
  - e.  $x^3 - 5x^2 - 6x < 0$

2. Tentukan semua nilai  $x$  yang memenuhi kedua ketaksamaan berikut.
- $3x + 7 > 1$  dan  $2x + 1 < 3$
  - $5x - 2 > 3$  dan  $2x + 1 > -4$
3. Selesaikan pertidaksamaan berikut dan nyatakan jawabannya dalam notasi selang.
- $(x + 1)(x^2 + 2x - 7) \geq x^2 - 1$
  - $(x^2 + 1)^2 - 7(x^2 + 1) + 10 < 0$

### 3. Kegiatan Belajar 3

#### a. Tujuan Belajar

Mahasiswa dapat memahami tentang nilai mutlak, akar kuadrat, dan kuadrat.

#### b. Uraian Materi

##### Nilai Mutlak

Nilai mutlak suatu bilangan riil  $x$ , dinyatakan dengan  $|x|$ , didefinisikan sebagai berikut

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

**Contoh 3.1.**  $|8| = 8$  dan  $|-5| = -(-5) = 5$ .

Sifat-sifat nilai mutlak, yaitu :

(i)  $|ab| = |a||b|$

(ii)  $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$

(iii)  $|a + b| \leq |a| + |b|$  (ketaksamaan segitiga)

(iv)  $|a - b| \geq ||a| - |b||$

Nilai mutlak dari  $x$  dapat menyatakan suatu jarak  $x$  terhadap titik asalnya, sehingga hal berikut berlaku

$$|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a$$

$$|x| > a \Leftrightarrow x < -a \text{ atau } x > a$$

Jika terdapat suatu pertidaksamaan yang melibatkan bilai mutlak, maka untuk menentukan himpunan penyelesaiannya dapat dengan menggunakan sifat-sifat nilai mutlak.

**Contoh 3.2.** Tentukan himpunan penyelesaian untuk  $|2x + 8| < 10$ .

**Penyelesaian.**

$$\begin{aligned} |2x + 8| &< 10 \\ -10 &< 2x + 8 < 10 && \text{(gunakan sifat nilai mutlak)} \\ -18 &< 2x < 2 && \text{(ditambah dengan } -8) \\ -9 &< x < 1 && \text{(dikali dengan } \frac{1}{2}) \end{aligned}$$

Jadi, diperoleh himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan  $|2x + 8| < 10$  yaitu  $\{x | -9 < x < 1\}$ .

**Contoh 3.3.** Selesaikan pertidaksamaan  $|x - 5| \geq 11$  dan perhatikan himpunan penyelesaiannya pada garis riil.

**Penyelesaian.**

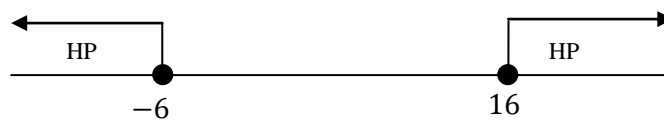
Pertidaksamaan  $|x - 5| \geq 11$  dapat dinyatakan menjadi

$$\begin{aligned} x - 5 &\leq -11 && \text{atau} && x - 5 &\geq 11 \\ x &\leq -6 && \text{atau} && x &\geq 16 \end{aligned}$$

Jadi, himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan  $|x - 5| \geq 11$  adalah

$$HP = \{x | x \leq -6 \text{ atau } x \geq 16\}.$$

Pada garis riil, himpunan penyelesaiannya, yaitu



**Rumus Kuadrat**

Jika terdapat suatu pertidaksamaan kuadrat yang sulit untuk difaktorkan, maka cara lain untuk memperoleh titik pemecah yaitu dengan menggunakan rumus kuadrat. Rumus kuadrat diberikan sebagai berikut.

Misalkan suatu persamaan kuadrat  $ax^2 + bx + c = 0$ . Penyelesaian untuk persamaan kuadrat tersebut adalah

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

di mana  $d = b^2 - 4ac$  dinamakan **diskriminan** dari persamaan kuadrat tersebut. Ada tiga hal yang dapat disimpulkan berdasarkan nilai diskriminan yang diperoleh, yaitu :

- (i) Jika  $d > 0$ , maka persamaan kuadrat memiliki dua jawaban riil yang berbeda.
- (ii) Jika  $d = 0$ , maka persamaan kuadrat memiliki dua jawaban riil yang sama.
- (iii) Jika  $d < 0$ , maka persamaan kuadrat tidak memiliki jawaban riil.

**Contoh 3.4.** Tentukan himpunan penyelesaian untuk  $x^2 - 4x - 6 \geq 0$ .

**Penyelesaian.**

Pandang pertidaksamaan tersebut menjadi suatu persamaan kuadrat

$$x^2 - 4x - 6 = 0.$$

Penyelesaian dari persamaan kuadrat tersebut adalah

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm \sqrt{40}}{2} = 2 \pm \sqrt{10}$$

Sehingga diperoleh dua titik pemecah, yaitu

$$x_1 = 2 - \sqrt{10} \quad \text{dan} \quad x_2 = 2 + \sqrt{10}.$$

Jika dilakukan pengujian pada masing-masing interval dengan menggunakan titik uji, maka diperoleh:

Interval	Titik uji	Hasil	Tanda
$(-\infty, 2 - \sqrt{10})$	-2	6	(+)
$(2 - \sqrt{10}, 2 + \sqrt{10})$	0	-6	(-)
$(2 + \sqrt{10}, \infty)$	6	6	(+)

Pertidaksamaan  $x^2 - 4x - 6 \geq 0$  menunjukkan bahwa daerah yang diinginkan adalah daerah yang bertanda positif. Oleh karena itu, berdasarkan pengujian yang dilakukan, dapat disimpulkan bahwa himpunan penyelesaiannya adalah  $\{x | x \leq 2 - \sqrt{10} \text{ atau } x \geq 2 + \sqrt{10}\}$ .

### **Kuadrat**

Berdasarkan sifat nilai mutlak  $|ab| = |a||b|$ , diperoleh bahwa

$$|x|^2 = x^2.$$

Akibatnya, diperoleh satu fakta lagi, yaitu

$$|x| < |y| \Leftrightarrow x^2 < y^2.$$

**Contoh 3.5.** Selesaikan  $|2x - 4| < |x + 3|$ .

**Penyelesaian.**

$$\begin{aligned} |2x - 4| &< |x + 3| \\ (2x - 4)^2 &< (x + 3)^2 \\ 4x^2 - 16x + 16 &< x^2 + 12x + 36 \\ 3x^2 - 28x - 20 &< 0 \end{aligned}$$

Dengan mengasumsikan  $3x^2 - 28x - 20 = 0$ , maka

$$x = \frac{28 \pm \sqrt{784 + 240}}{6} = \frac{28 \pm 32}{6}.$$

Diperoleh titik pemecah :

$$x_1 = \frac{28 - 32}{6} = -\frac{2}{3} \quad \text{dan} \quad x_2 = \frac{28 + 32}{6} = 10.$$

Kemudian, lakukan pengujian terhadap setiap interval yang telah dibagi oleh titik pemecah.

Interval	Titik uji	Hasil	Tanda
$\left(-\infty, -\frac{2}{3}\right)$	-1	11	(+)
$\left(-\frac{2}{3}, 10\right)$	0	-20	(-)
$(10, \infty)$	11	35	(+)

Pertidaksamaan  $3x^2 - 28x - 20 < 0$  menunjukkan daerah yang diinginkan adalah daerah yang bertanda negatif. Jadi, himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan tersebut adalah  $\left\{x \mid -\frac{2}{3} < x < 10\right\}$ .



**c. Soal**

1. Tentukan himpunan penyelesaian dari masing-masing pertidaksamaan berikut.

a.  $\left|2 + \frac{5}{x}\right| > 1$

b.  $\left|\frac{3x}{9} - 11\right| \leq 6$

2. Selesaikan pertidaksamaan berikut.

a.  $|2x - 1| \geq |x + 1|$

b.  $2|2x - 3| < |x + 10|$

3. Dengan menggunakan sifat nilai mutlak, tunjukkan bahwa

a.  $|a - b| \leq |a| + |b|$

b.  $|a + b + c| \leq |a| + |b| + |c|$

4. Tunjukkan bahwa

$$|x| \leq 2 \Rightarrow \left| \frac{x^2 + 2x + 7}{x^2 + 1} \right| \leq 15.$$

#### 4. Kegiatan Belajar 4

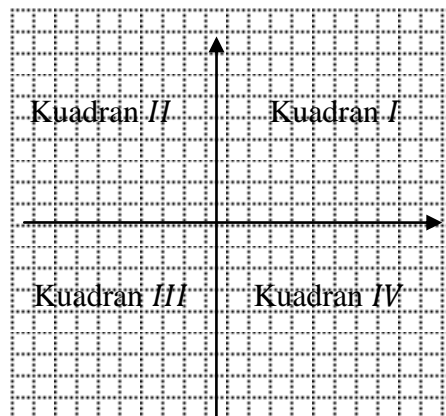
##### a. Tujuan Belajar

Mahasiswa dapat memahami tentang sistem koordinat, garis lurus, dan grafik persamaan.

##### b. Uraian Materi

###### Sistem Koordinat

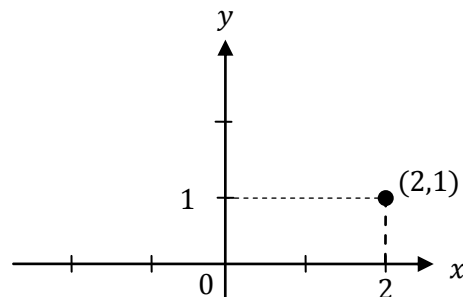
Dua garis riil yang saling tegak lurus dan berpotongan di titik nol disebut sebagai **sumbu-sumbu koordinat**. Biasanya garis mendatar dinamakan **sumbu  $x$**  dan garis tegak dinamakan **sumbu  $y$** . Titik nol yang merupakan perpotongan kedua garis tersebut dinamakan **titik asal**. Sumbu-sumbu koordinat membagi bidang menjadi empat bagian, yang disebut dengan **kuadran**, yaitu kuadran *I*, kuadran *II*, kuadran *III*, dan kuadran *IV*. Untuk lebih jelasnya, perhatikan gambar berikut.



Pasangan bilangan terurut  $(a, b)$  merupakan titik koordinat yang diperoleh dari perpotongan garis yang tegak lurus terhadap sumbu  $x$  di  $a$  dan tegak lurus terhadap sumbu  $y$  di  $b$ .

**Contoh 4.1.** plotlah titik  $(2,1)$  pada koordinat *Cartesius*.

**Penyelesaian.**



Berdasarkan Teorema Pythagoras, dapat ditentukan suatu rumus untuk menghitung jarak dua buah titik pada koordinat *Cartesius*. Misalkan titik  $P$  dengan koordinat  $(x_1, y_1)$  dan titik  $Q$  dengan koordinat  $(x_2, y_2)$ . Dengan menggunakan Teorema Pythagoras, diperoleh **rumus jarak** antara titik  $P$  dan  $Q$  adalah

$$d(P, Q) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

**Lingkaran** merupakan himpunan titik yang terletak pada suatu jarak tetap (jari-jari) dari suatu titik tetap (pusat). Secara umum, lingkaran dengan jari-jari  $r$  dan titik pusat  $(h, k)$  mempunyai persamaan

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2.$$

**Contoh 4.2.** Tentukan persamaan lingkaran dengan jari-jari 5 dan titik pusat  $(1, -5)$ .

**Penyelesaian.**

$$r = 5 \text{ dan pusat} = (1, -5)$$

Jadi, persamaan lingkarannya adalah  $(x - 1)^2 + (y + 5)^2 = 25$ .

**Contoh 4.3.** Tentukan persamaan lingkaran dengan jari-jari 3 dan titik pusat  $(2, 2)$ .

**Penyelesaian.**

$$r = 3 \text{ dan pusat} = (2, 2)$$

Jadi, persamaan lingkarannya adalah  $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 9$ .

**Contoh 4.4.** Tentukan jarak dari kedua titik pusat lingkaran pada Contoh 4.2 dan Contoh 4.3.

**Penyelesaian.**

Jarak  $P_1 = (1, -5)$  dan  $P_2 = (2, 2)$ , yaitu

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(2 - 1)^2 + (2 - (-5))^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}.$$

Titik tengah potongan garis dari  $P(x_1, y_1)$  dan  $Q(x_2, y_2)$  adalah

$$\left( \frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right).$$

**Contoh 4.5.** Tentukan persamaan lingkaran yang memiliki potongan garis dari  $(2, 5)$  ke  $(10, 13)$  sebagai garis tengahnya.

### Penyelesaian.

Titik pusat lingkaran diperoleh dengan menentukan titik tengah dari garis tersebut, yaitu

$$\left(\frac{2 + 10}{2}, \frac{5 + 13}{2}\right) = (6,9).$$

Jadi, titik pusat dari lingkaran tersebut adalah (6,9).

Karena garis yang diperoleh dari titik (2,5) ke (10,13) merupakan garis tengah lingkaran, maka jarak dari kedua titik tersebut adalah diameter lingkaran, yaitu

$$\sqrt{(10 - 2)^2 + (13 - 5)^2} = \sqrt{128} = 8\sqrt{2}.$$

Akibatnya, diperoleh jari-jari lingkaran yaitu  $\frac{1}{2} \cdot 8\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$ . Jadi, persamaan lingkaran yang dimaksud adalah

$$(x - 6)^2 + (y - 9)^2 = 32.$$

### Garis Lurus

Misalkan sebuah garis melalui titik  $A(x_1, y_1)$  dan  $B(x_2, y_2)$ , dengan  $x_1 \neq x_2$ , maka didefinisikan **kemiringan** dari garis tersebut (dinotasikan dengan  $m$ ) adalah

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Garis yang melalui titik tetap  $(x_1, y_1)$  dengan kemiringan  $m$  mempunyai persamaan

$$y - y_1 = m(x - x_1).$$

Misalkan terdapat suatu garis memotong sumbu  $y$  di  $(0, b)$ , maka persamaan garis tersebut adalah

$$\begin{aligned} y - b &= m(x - 0) \\ y &= mx + b. \end{aligned}$$

Persamaan ini disebut sebagai bentuk **kemiringan intersep**.

Misalkan terdapat dua buah garis dengan masing-masing kemiringan garisnya adalah  $m_1$  dan  $m_2$ . Jika kedua garis tersebut saling sejajar, maka berlaku  $m_1 = m_2$ . Sedangkan, jika kedua garis tersebut saling tegak lurus, maka berlaku  $m_1 \cdot m_2 = -1$ .

**Contoh 4.6.** Carilah persamaan garis yang melalui titik potong dua garis  $2x - 5y = 9$  dan  $3x - 8y = 11$ , yang tegak lurus dengan garis  $2x - 5y = 9$

**Penyelesaian.**

Langkah pertama yang dapat dilakukan yaitu menentukan titik potong kedua garis tersebut, yaitu dengan melakukan eliminasi dan substitusi terhadap kedua persamaan garis tersebut. Dengan mengalikan persamaan pertama dengan 3 dan persamaan kedua dengan 2, diperoleh

$$\begin{array}{r} 6x - 15y = 27 \\ 6x - 16y = 22 \\ \hline y = 5 \end{array}$$

Substitusikan  $y = 5$  ke dalam salah satu persamaan garis tersebut, sehingga diperoleh  $x = 17$ . Jadi, titik potongnya adalah  $(17,5)$ .

Langkah selanjutnya adalah menentukan kemiringan garis  $2x - 5y = 9$ , yaitu dengan mengubah persamaan tersebut ke dalam bentuk kemiringan intersep. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} 2x - 5y &= 9 \\ -5y &= -2x + 9 \\ y &= \frac{2}{5}x + \frac{9}{5} \end{aligned}$$

Dari persamaan di atas, diperoleh bahwa kemiringan garis tersebut adalah  $\frac{2}{5}$ . Karena garis yang akan dicari tegak lurus terhadap garis  $2x - 5y = 9$ , maka diperoleh kemiringan garis tersebut adalah  $-\frac{5}{2}$ . Akibatnya, diperoleh persamaan garis yang diminta yaitu

$$y - 5 = -\frac{5}{2}(x - 17).$$

**Grafik Persamaan**

Langkah menggambarkan grafik dari suatu persamaan yaitu :

1. Tentukan titik-titik koordinat dari beberapa titik yang memenuhi persamaan.
2. Plotlah titik-titik tersebut pada bidang.
3. Hubungkan titik-titik tersebut dengan sebuah kurva mulus.

**c. Soal**

1. Tentukan persamaan garis melalui  $(3, -3)$  yang
  - a. sejajar garis  $2x + 3y = 6$
  - b. tegak lurus  $y = 2x + 5$
  - c. sejajar garis yang melalui  $(-1, 2)$  dan  $(3, -1)$
2. Tuliskan persamaan garis yang melalui  $(-2, -1)$  yang tegak lurus pada garis  $y + 3 = -\frac{2}{3}(x - 5)$ .
3. Tuliskan persamaan garis yang melalui titik tersebut dan tegak lurus pada garis yang pertama

$$4x - 5y = 8$$

$$2x + y = -10$$

4. Tentukan persamaan lingkaran dengan diameter  $AB$  jika  $A = (2, 0)$  dan  $B = (10, 4)$ .
5. Tentukan jarak antara masing-masing pusat lingkaran berikut
$$x^2 - 2x + y^2 + 2y = 2 \quad \text{dan} \quad x^2 + 6x + y^2 - 4y = -7.$$

## 5. Kegiatan Belajar 5

### a. Tujuan Belajar

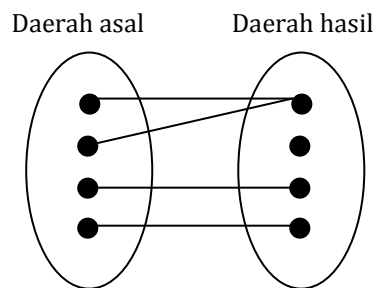
Mahasiswa dapat memahami tentang :

1. Fungsi dan grafiknya.
2. Operasi-operasi pada fungsi.

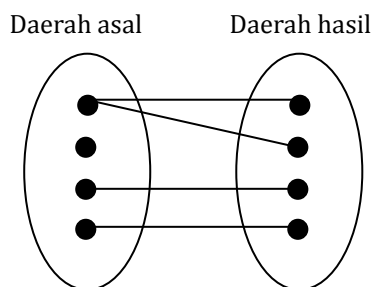
### b. Uraian Materi

Suatu **fungsi**  $f$  merupakan suatu aturan padanan yang menghubungkan setiap input  $x$  dalam suatu himpunan, yang disebut daerah asal (domain), dengan sebuah nilai unik  $y$  dari himpunan lainnya yang disebut daerah hasil.

Contoh fungsi :



Contoh bukan fungsi :



**Notasi fungsi :**

Fungsi biasanya menggunakan huruf tunggal, seperti  $f$  atau  $g$ . Jika diberikan suatu fungsi  $f(x)$ , dibaca “ $f$  dari  $x$ ” atau “ $f$  pada  $x$ ”, maka menunjukkan nilai yang diberikan oleh  $f$  kepada  $x$ .

#### **Daerah Asal dan Daerah Hasil**

**Daerah asal** (domain) adalah himpunan nilai input pada suatu fungsi.

**Daerah hasil** adalah himpunan nilai output yang bersesuaian dengan aturan fungsi tersebut.

**Contoh 5.1.** Diberikan  $f(x) = 2x^2 + 3$  dengan domainnya yaitu  $\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ . Tentukan daerah hasil dari fungsi tersebut.

Penyelesaian.  $f(0) = 2(0) + 3 = 3$

$$\begin{aligned} f(-3) &= 2(-3)^2 + 3 = 21 & f(1) &= 2(1)^2 + 3 \\ &= 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(-2) &= 2(-2)^2 + 3 = 11 & f(2) &= 2(2)^2 + 3 \\ &= 11 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(-1) &= 2(-1)^2 + 3 = 5 & f(3) &= 2(3)^2 + 3 \\ &= 21 \end{aligned}$$

Jadi, daerah hasil dari  $f(x) = 2x^2 + 3$  dengan domain yang diberikan yaitu  $\{3, 5, 11, 21\}$ .

Jika suatu fungsi tidak diberikan daerah asalnya secara rinci, maka daerah asal dari fungsi tersebut adalah himpunan terbesar bilangan riil sedemikian sehingga aturan fungsi tersebut terdefinisi dan menghasilkan bilangan riil. Daerah asal ini disebut **daerah asal alami**.

**Contoh 5.2.** Tentukan daerah asal alami untuk masing-masing fungsi berikut

a.  $f(x) = \sqrt{x - 4}$

b.  $g(x) = \frac{1}{5+x}$

c.  $h(x) = 2x^2 + 4x + 8$

**Penyelesaian.**

a. Daerah asal alami untuk  $f$  adalah  $\{x | x \geq 4\}$ .

b. Daerah asal alami untuk  $g$  adalah  $\{x | x \in \mathbb{R}, x \neq -5\}$ .

c. Daerah asal alami untuk  $h$  adalah  $\{x | x \in \mathbb{R}\}$ .

### Grafik Fungsi

Jika daerah asal dan daerah hasil sebuah fungsi merupakan bilangan riil, maka fungsi tersebut dapat digambarkan grafiknya dengan daerah asal pada sumbu  $x$  dan daerah hasil pada sumbu  $y$ . Langkah pembuatan grafik suatu fungsi  $f$  sama dengan langkah pembuatan grafik suatu persamaan, dengan mengasumsikan  $y = f(x)$ .



## Fungsi Genap dan Fungsi Ganjil

Berdasarkan kesimetrian grafik suatu fungsi, fungsi dapat dibagi menjadi dua macam, yaitu:

- (i) jika  $f(-x) = f(x)$ , grafik fungsi simetri terhadap sumbu  $y$ , maka fungsi ini disebut **fungsi genap**.
- (ii) jika  $f(-x) = -f(x)$ , grafik fungsi simetri terhadap titik asal, maka fungsi ini disebut **fungsi ganjil**.

## Dua Fungsi Khusus

Terdapat dua fungsi khusus yang perlu diketahui, yaitu :

- (i) Fungsi nilai mutlak

Fungsi nilai mutlak didefinisikan sebagai berikut

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

### Contoh 5.3.

$$|-2,8| = 2,8$$

$$|2,8| = 2,8$$

- (ii) Fungsi bilangan bulat terbesar

Fungsi bilangan bulat terbesar didefinisikan sebagai berikut

$$\llbracket x \rrbracket$$

= bilangan bulat terbesar yang lebih kecil atau sama dengan  $x$ .

### Contoh 5.4.

$$\llbracket -2,8 \rrbracket = -3$$

$$\llbracket 2,8 \rrbracket = 2$$

## Operasi Fungsi

Misalkan diketahui dua buah fungsi  $f(x)$  dan  $g(x)$ , maka operasi-operasi berikut berlaku :

1.  $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ , dengan daerah asal  $\{x|x \in \mathbb{R}\}$ .
2.  $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$ , dengan daerah asal  $\{x|x \in \mathbb{R}\}$ .
3.  $(fg)(x) = f(x)g(x)$ , dengan daerah asal  $\{x|x \in \mathbb{R}\}$ .
4.  $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ , dengan daerah asal  $\{x|x \in \mathbb{R}, g(x) \neq 0\}$ .
5.  $(f \circ g)(x) = f(g(x))$  (disebut fungsi komposit  $f$  dengan  $g$ ).

**c. Soal**

1. Misalkan  $f(x) = \frac{(x+1)}{x}$ . Cari dan sederhanakan.
  - a.  $f(10)$
  - b.  $\frac{f(3+h)-f(3)}{h}$
2. Tentukan daerah asal alami untuk setiap fungsi berikut.
  - a.  $f(x) = \frac{x}{x^2-1}$
  - b.  $g(x) = \frac{\sqrt{1+x^2}}{|2x+3|}$
3. Tentukan fungsi-fungsi berikut fungsi ganjil, fungsi genap, atau tidak keduanya.
  - a.  $f(x) = \frac{3x}{x^2+1}$
  - b.  $g(x) = \frac{x^2+1}{|x|+x^4}$
4. Misalkan  $f(x) = \frac{x-1}{x}$  dan  $g(x) = x^2 + 1$ . Tentukan
  - a.  $(f + g)(2)$
  - b.  $(f \cdot g)(2)$
  - c.  $(f \circ g)(2)$
  - d.  $(g \circ f)(2)$
  - e.  $f^2(2) + g^2(2)$

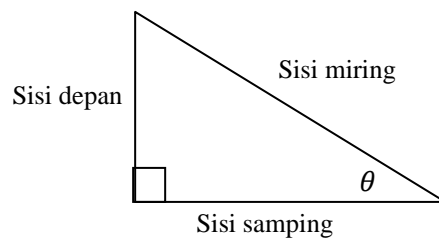
## 6. Kegiatan Belajar 6

### a. Tujuan Belajar

Mahasiswa dapat memahami tentang fungsi trigonometri.

### b. Uraian Materi

Berdasarkan suatu segitiga siku-siku, diperoleh beberapa fungsi trigonometri, yaitu



$$\sin \theta = \frac{\text{sisi depan}}{\text{sisi miring}}$$

$$\cos \theta = \frac{\text{sisi samping}}{\text{sisi miring}}$$

$$\tan \theta = \frac{\text{sisi depan}}{\text{sisi samping}}$$

Perluasan dari fungsi trigonometri di atas, sebagai berikut :

$$\cot \theta = \frac{\text{sisi samping}}{\text{sisi depan}} \quad \sec \theta = \frac{\text{sisi miring}}{\text{sisi samping}}$$

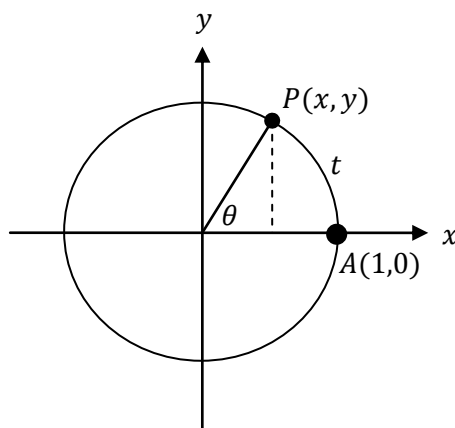
$$\csc \theta = \frac{\text{sisi miring}}{\text{sisi depan}}$$

Berdasarkan perbandingan trigonometri di atas, dapat dikembangkan hubungan antar masing-masing fungsi trigonometri, yaitu :

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \quad \cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$$

$$\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta} \quad \csc \theta = \frac{1}{\sin \theta}$$

Misakan suatu lingkaran satuan  $C$  adalah lingkaran dengan jari-jari 1 dan berpusat di titik asal, sehingga persamaannya adalah  $x^2 + y^2 = 1$ . Andaikan  $A$  adalah titik  $(1,0)$  dan andaikan  $t$  adalah sebarang bilangan riil positif. Maka terdapat satu titik  $P(x,y)$  pada  $C$  sedemikian sehingga panjang busur  $AP$ , yang diukur berlawanan arah jarum jam dari  $A$ , adalah  $t$ .



Karena lingkaran  $C$  berjari-jari 1, maka diperoleh keliling  $C$  adalah  $2\pi$ . Akibatnya, jika  $t = \pi$ , maka titik  $P$  adalah tepat setengah keliling lingkaran, yaitu di titik  $(-1,0)$ . Jika  $t = \frac{3\pi}{2}$ , maka  $P$  adalah titik  $(0,-1)$ . Jika  $t = 2\pi$ , maka  $P$  adalah titik  $(1,0)$  yaitu sama dengan titik  $A$ .

Berdasarkan gambar di atas, dapat didefinisikan fungsi sinus dan kosinus sebagai berikut, misalkan  $t$  menentukan titik  $P(x, y)$ , maka

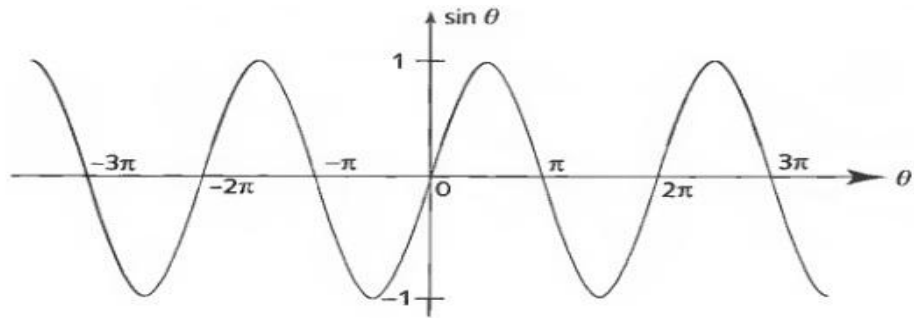
$$\sin t = y \quad \text{dan} \quad \cos t = x.$$

Fungsi sinus dan kosinus memiliki beberapa sifat dasar berikut :

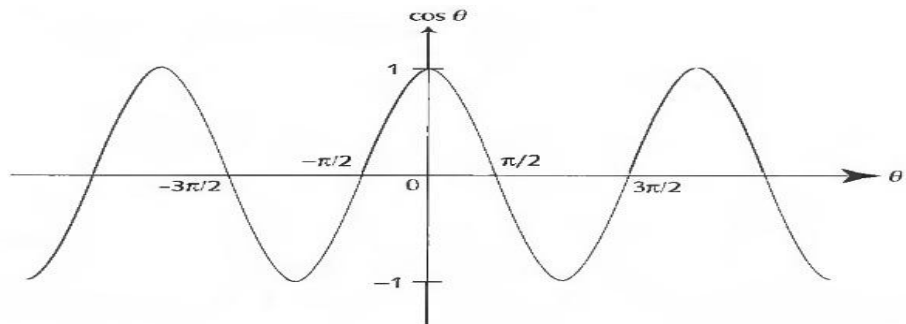
- (i) Daerah asal untuk kedua fungsi sinus dan kosinus adalah bilangan riil.
- (ii)  $|\sin t| \leq 1$  dan  $|\cos t| \leq 1$ .
- (iii)  $\sin(t + 2\pi) = \sin t$   
 $\cos(t + 2\pi) = \cos t$ .
- (iv)  $\sin(-t) = -\sin t$   
 $\cos(-t) = \cos t$ .
- (v)  $\sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \cos t$   
 $\cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \sin t$ .
- (vi)  $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$ .

## Grafik Sinus dan Kosinus

Grafik fungsi sinus ditunjukkan pada gambar berikut.



Sedangkan grafik fungsi kosinus ditunjukkan pada gambar berikut.



Grafik sinus dan kosinus pada dasarnya sama, hanya bergeser  $\frac{\pi}{2}$  satuan.

## Identitas Trigonometri

Berikut diberikan beberapa persamaan yang berlaku pada fungsi-fungsi trigonometri, yang dikenal dengan identitas trigonometri.

### Identitas Ganjil-Genap

$$\sin(-x) = -\sin x$$

$$\cos(-x) = \cos x$$

$$\tan(-x) = -\tan x$$

### Identitas Sudut Ganda

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

$$\begin{aligned} \cos 2x &= \cos^2 x - \sin^2 x \\ &= 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x \end{aligned}$$

### Identitas Phytagoras

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$1 + \cot^2 x = \csc^2 x$$

$$1 + \tan^2 x = \sec^2 x$$

### Identitas Jumlah

$$\sin x + \sin y = 2 \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

### Identitas Kofungsi

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cot x$$

### Identitas Tengah-Sudut

$$\sin\left(\frac{x}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}$$

$$\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}$$

### Identitas Penambahan

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

$$\tan(x + y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$$

### Identitas Hasil Kali

$$\sin x \sin y = -\frac{1}{2} [\cos(x + y) - \cos(x - y)]$$

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2} [\cos(x + y) + \cos(x - y)]$$

$$\sin x \cos y = \frac{1}{2} [\sin(x + y) + \sin(x - y)]$$

### c. Soal

1. Tunjukkan kebenaran kesamaan berikut

a.  $\sec x - \sin x \tan x = \cos x$

b.  $\frac{\sec^2 x - 1}{\sec^2 x} = \sin^2 x$

c.  $\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$

d.  $(1 + \cos x)(1 - \cos x) = \sin^2 x$

e.  $\frac{\sin x}{\csc x} + \frac{\cos x}{\sec x} = 1$

2. Tentukan fungsi-fungsi berikut fungsi ganjil, fungsi genap, atau tidak keduanya.

a.  $f(x) = x \sin x$

b.  $g(x) = \cot x + \sin x$

c.  $h(x) = \cos(\sin x)$

d.  $k(x) = \frac{x^2 + 1}{|x| + x^4}$

e.  $l(x) = |\sin x| + \cos x$

## 7. Kegiatan Belajar 7

### a. Tujuan Belajar

Mahasiswa dapat memahami tentang limit dari suatu fungsi.

### b. Uraian Materi

**Limit fungsi**  $f(x)$  untuk  $x$  mendekati  $c$ , ditulis  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$ , adalah nilai yang didekati fungsi jika variabel fungsi tersebut mendekati bilangan  $c$  (tetapi bukan  $c$ ), maka  $f(x)$  dekat ke  $L$ .

#### Limit Sepihak

$\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = L$  berarti bahwa jika  $x$  mendekati  $c$  dari sebelah kanan, maka  $f(x)$  dekat ke  $L$ .

$\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = L$  berarti bahwa jika  $x$  mendekati  $c$  dari sebelah kiri, maka  $f(x)$  dekat ke  $L$ .

#### Teorema A.

$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$  jika dan hanya jika

$$\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = L \text{ dan } \lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = L.$$

#### Teorema B. Teorema Limit Utama

Misalkan  $n$  bilangan bulat positif,  $k$  konstanta,  $f$  dan  $g$  adalah fungsi-fungsi yang mempunyai limit di  $c$ . Maka

1.  $\lim_{x \rightarrow c} k = k$
2.  $\lim_{x \rightarrow c} x = c$
3.  $\lim_{x \rightarrow c} k f(x) = k \lim_{x \rightarrow c} f(x)$
4.  $\lim_{x \rightarrow c} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \rightarrow c} f(x) + \lim_{x \rightarrow c} g(x)$
5.  $\lim_{x \rightarrow c} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \rightarrow c} f(x) - \lim_{x \rightarrow c} g(x)$
6.  $\lim_{x \rightarrow c} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow c} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow c} g(x)$
7.  $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow c} f(x)}{\lim_{x \rightarrow c} g(x)}$ , asalkan  $\lim_{x \rightarrow c} g(x) \neq 0$
8.  $\lim_{x \rightarrow c} [f(x)]^n = [\lim_{x \rightarrow c} f(x)]^n$
9.  $\lim_{x \rightarrow c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow c} f(x)}$ , asalkan  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) > 0$  jika  $n$  genap.

### Teorema C. Limit Fungsi Trigonometri

Untuk setiap bilangan riil  $c$  dalam daerah asal fungsi,

1.  $\lim_{t \rightarrow c} \sin t = \sin c$
2.  $\lim_{t \rightarrow c} \cos t = \cos c$
3.  $\lim_{t \rightarrow c} \tan t = \tan c$
4.  $\lim_{t \rightarrow c} \cot t = \cot c$
5.  $\lim_{t \rightarrow c} \sec t = \sec c$
6.  $\lim_{t \rightarrow c} \csc t = \csc c$

**Contoh 7.1.** Tentukan  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2 \cos t}{t+1}$ .

**Penyelesaian.**

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2 \cos t}{t+1} = \left( \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2}{t+1} \right) \left( \lim_{t \rightarrow 0} \cos t \right) = 0 \cdot 1 = 0$$

Dua limit penting yang tidak dapat dievaluasi dengan substitusi adalah

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} \text{ dan } \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1-\cos t}{t}$$

### Teorema D. Limit-limit Trigonometri Khusus

1.  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1$
2.  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1-\cos t}{t} = 0$

**Contoh 7.2.** Tentukan tiap limit

- a.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x}$       b.  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1-\cos t}{\sin t}$       c.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{\tan x}$

**Penyelesaian.**

a.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} 3 \frac{\sin 3x}{3x} = 3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3x}$

Di sini argument fungsi sinus adalah  $3x$ , tidak semudah  $x$  yang diperlukan Teorema D. Misalkan  $y = 3x$ . Maka  $y \rightarrow 0$  jika dan hanya jika  $x \rightarrow 0$ , maka

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3x} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} = 1$$



Maka

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x} = 3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3x} = 3.$$

b.

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \cos t}{\sin t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{1 - \cos t}{t}}{\frac{\sin t}{t}} = \frac{\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \cos t}{t}}{\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t}} = \frac{0}{1} = 0$$

c.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{\tan x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin 4x}{4x}}{\frac{\sin x}{x \cos x}} = \frac{4 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{4x}}{\left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}\right) \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x}\right)} = \frac{4}{1 \cdot 1} = 4$$

**Contoh 7.3.** Tentukan limit dari

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin^2 x}{\left(\sin \frac{1}{2} x - \cos \frac{1}{2} x\right)^2}$$

**Penyelesaian.**

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin^2 x}{\left(\sin \frac{1}{2} x - \cos \frac{1}{2} x\right)^2} &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{(1 - \sin x)(1 + \sin x)}{\sin^2 \frac{1}{2} x + \cos^2 \frac{1}{2} x - 2 \sin \frac{1}{2} x \cos \frac{1}{2} x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{(1 - \sin x)(1 + \sin x)}{1 - \sin x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (1 + \sin x) = 1 + 1 = 2 \end{aligned}$$

**c. Soal**

1. Tentukan nilai limit-limit berikut atau nyatakan jika tidak ada.

a.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{x^2-1}$

b.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4}{x^2+x-6}$

c.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{\sin 2x}$

d.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3-1}{x^2-1}$

e.  $\lim_{x \rightarrow 1/2^+} \lceil 4x \rceil$

2. Jika  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 3$  dan  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = -1$ , maka tentukan nilai limit berikut.

a.  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{2f(x) - 3g(x)}{f(x) + g(x)}$

b.  $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - 3]^4$

c.  $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + 3g(x)]^4$

3. Misalkan

$$f(x) = \begin{cases} x^3, & \text{jika } x < -1 \\ x, & \text{jika } -1 < x < 1 \\ 1 - x, & \text{jika } x \geq 1 \end{cases}$$

Tentukan

a.  $f(1)$

b.  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$

c.  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$

d.  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$

## 8. Kegiatan Belajar 8

### a. Tujuan Belajar

Mahasiswa dapat memahami tentang kekontinuan suatu fungsi.

### b. Uraian Materi

#### Kekontinuan Fungsi di Satu Titik

Misalkan fungsi  $f$  terdefinisi pada selang terbuka  $I$  yang memuat  $c$ .

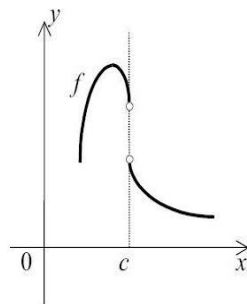
Fungsi  $f$  dikatakan **kontinu** di  $c$  jika

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c).$$

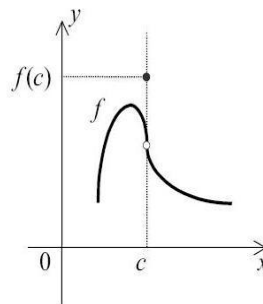
Dengan perkataan lain, suatu fungsi dikatakan kontinu di suatu titik  $c$  jika syarat berikut terpenuhi :

- $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$  ada;
- $f(c)$  terdefinisi;
- $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$ .

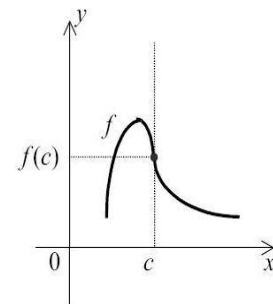
Untuk dapat lebih memahami konsep limit dan kekontinuan fungsi di satu titik, perhatikan gambar berikut.



Limit fungsi  $f$  di  $c$  tidak ada.



Limit fungsi  $f$  di  $c$  ada, tetapi fungsi  $f$  tidak kontinu di  $c$ .



Limit fungsi  $f$  di  $c$  sama dengan nilai fungsinya,  $f$  kontinu di  $c$ .

**Contoh 8.1.** Periksa apakah fungsi berikut kontinu di  $x = 2$ , jika tidak sebutkan alasannya.

- $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$
- $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x - 2}, & x \neq 2; \\ 3, & x = 2 \end{cases}$
- $f(x) = \begin{cases} x + 1, & x < 2; \\ x^2 - 1, & x \geq 2 \end{cases}$

**Penyelesaian.**

a. Fungsi tidak terdefinisi di  $x = 2$ . Oleh karena itu,  $f(x)$  tidak kontinu di  $x = 2$ .

b.

$$f(2) = 3$$
$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x + 2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x + 2) = 2 + 2 = 4$$
$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} \neq f(2)$$

Karena nilai limit tidak sama dengan nilai fungsi, maka  $f(x)$  tidak kontinu di  $x = 2$ .

c.

$$f(x) = 2^2 - 1 = 3$$
$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (x + 1) = 2 + 1 = 3$$
$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x^2 - 1) = 2^2 - 1 = 4 - 1 = 3$$
$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$$

Karena semua syarat dipenuhi, maka  $f(x)$  kontinu di  $x = 2$ .

**Teorema A.** Kekontinuan Fungsi Polinomial dan Rasional

Fungsi polinom kontinu di setiap bilangan riil  $c$ . Fungsi rasional kontinu di setiap bilangan riil  $c$  dalam daerah asalnya, yaitu kecuali pada titik dimana penyebutnya adalah nol.

**Teorema B.** Kekontinuan Nilai Mutlak dan Fungsi-fungsi Akar ke- $n$

Fungsi nilai mutlak adalah kontinu di setiap bilangan riil  $c$ . Jika  $n$  ganjil, fungsi akar ke- $n$  kontinu di setiap bilangan riil  $c$ . Jika  $n$  genap, fungsi akar ke- $n$  kontinu di setiap bilangan riil positif  $c$ .

**Teorema C.**

Jika  $f$  dan  $g$  kontinu di  $c$ , maka demikian juga  $kf, f + g, f - g, f \cdot g, f/g$

(asalkan  $g(c) \neq 0$ ),  $f^n$ , dan  $\sqrt[n]{f}$  (asalkan  $f(c) > 0$  jika  $n$  genap).

**Teorema D.**

Fungsi sinus dan kosinus kontinu di setiap bilangan riil  $c$ . Fungsi  $\tan x$ ,  $\cot x$ ,  $\sec x$ , dan  $\csc x$  kontinu di setiap bilangan riil  $c$  dalam daerah asalnya.

**Teorema E.** Teorema Limit Komposit

Jika  $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = L$  dan jika  $f$  kontinu di  $L$ , maka

$$\lim_{x \rightarrow c} f(g(x)) = f\left(\lim_{x \rightarrow c} g(x)\right) = f(L).$$

Khususnya, jika  $g$  kontinu di  $c$  dan  $f$  kontinu di  $g(c)$ , maka fungsi komposit  $f \circ g$  kontinu di  $c$ .

**Kekontinuan Sepihak**

Fungsi  $f(x)$  disebut **kontinu kiri** di  $x = c$ , jika

$$\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = f(c).$$

Fungsi  $f(x)$  disebut **kontinu kanan** di  $x = c$ , jika

$$\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = f(c).$$

Fungsi  $f(x)$  kontinu di  $x = c$  jika kontinu kiri dan kontinu kanan di  $c$ .

**Contoh 8.2.** Tentukan konstanta  $a$  agar fungsi

$$f(x) = \begin{cases} x + a, & x < 2; \\ ax^2 - 1, & x \geq 2 \end{cases}$$

Kontinu di  $x = 2$ .

**Penyelesaian.**

Agar  $f(x)$  kontinu di  $x = 2$ , haruslah  $f$  kontinu kiri di  $x = 2$ .

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = f(2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (x + a) = 2 + a$$

$$f(2) = a2^2 - 1 = 4a - 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = f(2) \Rightarrow 2 + a = 4a - 1 \Rightarrow -3a = 3 \Rightarrow a = 1$$

Dan juga harus kontinu kanan di  $x = 2$ .

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} (ax^2 - 1) = a \cdot 2^2 - 1 = 4a - 1 = f(2)$$

Jadi, diperoleh bahwa  $a = 1$ .

### Kekontinuan Fungsi pada Suatu Interval

Fungsi  $f(x)$  dikatakan kontinu pada interval terbuka  $(a, b)$  jika  $f(x)$  kontinu pada setiap titik di dalam interval tersebut. Sedangkan,  $f(x)$  dikatakan kontinu pada interval tertutup  $[a, b]$  jika :

- (i)  $f(x)$  kontinu pada  $(a, b)$
- (ii)  $f(x)$  kontinu kanan di  $x = a$
- (iii)  $f(x)$  kontinu kiri di  $x = b$

Jika  $f(x)$  kontinu untuk setiap nilai  $x \in \mathbb{R}$ , maka dikatakan  $f(x)$  kontinu dimana-mana.

#### Teorema F.

- (i) Fungsi polinom kontinu dimana-mana.
- (ii) Fungsi rasional kontinu pada domainnya.
- (iii) Misalkan  $f(x) = \sqrt[n]{x}$ , maka :
  - a.  $f(x)$  kontinu di setiap titik di  $\mathbb{R}$  jika  $n$  ganjil
  - b.  $f(x)$  kontinu di setiap  $\mathbb{R}$  positif jika  $n$  genap

**Contoh 8.3.** Tentukan selang kekontinuan  $f(x) = \sqrt{x-4}$ .

#### Penyelesaian.

Dari Teorema F diperoleh  $f(x)$  kontinu untuk  $x - 4 \geq 0$  atau  $x \geq 4$ .

$$\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} \sqrt{x-4} = 0 = f(4)$$

Jadi,  $f(x)$  kontinu kanan di  $x = 4$ , sehingga  $f(x)$  kontinu pada  $[4, \infty)$ .

#### c. Soal

1. Diketahui

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x \leq -1 \\ 2x + 2, & x > -1 \end{cases}$$

Selidiki kekontinuan fungsi  $f(x)$  di  $x = -1$ .

2. Tentukan  $a$  dan  $b$  agar fungsi

$$f(x) = \begin{cases} \frac{ax^2 + bx - 4}{x - 2}, & x < 2 \\ 2 - 4x, & x \geq 2 \end{cases}$$

kontinu di  $x = 2$ .

## 9. Kegiatan Belajar 9

### a. Tujuan Belajar

Mahasiswa dapat memahami tentang turunan dari suatu fungsi.

### b. Uraian Materi

**Turunan** suatu fungsi  $f$  adalah fungsi lain  $f'$  yang nilainya pada sebarang bilangan  $c$  adalah

$$f'(c) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h},$$

asalkan limit ini ada.

Limit suatu fungsi  $f$  ada jika beberapa hal berikut terpenuhi:

- (i)  $f(c)$  ada, di mana  $f(c) \in \mathbb{R}$
- (ii)  $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$  ada, yaitu  $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow c^+} f(x)$
- (iii)  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$ .

Jika limit fungsi  $f$  ada, maka dikatakan bahwa  $f$  **terdiferensialkan** di  $c$ . Pencarian turunan disebut **pendiferensialan**, dinotasikan dengan  $f'$  atau  $D_x f(x)$  atau dalam notasi Leibniz  $\frac{dy}{dx}$ , yang berarti bahwa pendiferensialan fungsi  $f$  terhadap peubah  $x$ .

**Contoh 9.1.** Misalkan  $f(x) = 6 - 3x$ . Tentukan  $f'(2)$ .

**Penyelesaian.**

$$\begin{aligned} f'(2) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[6 - 3(2+h)] - [6 - 3(2)]}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-3h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} -3 = -3. \end{aligned}$$

**Contoh 9.2.** Jika  $f(x) = 2x^2 + 5$ , maka tentukan  $f'(4)$ .

**Penyelesaian.**

$$\begin{aligned} f'(4) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(4+h) - f(4)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[2(4+h)^2 + 5] - [2(4)^2 + 5]}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2h^2 + 16h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 2h + 16 = 16. \end{aligned}$$

**Teorema A.** Keterdiferensialan Mengimplikasikan Kekontinuan

Jika  $f'(c)$  ada, maka  $f$  kontinu di  $c$ .

Jika pada definisi  $f'(c)$  nilai  $c + h$  digantikan oleh  $x$  dan nilai  $h$  diganti dengan  $x - c$ , maka definisi  $f'(c)$  menjadi sebagai berikut

$$f'(c) = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}.$$

**Contoh 9.3.** Tentukan  $f'(c)$  dari  $f(x) = \frac{5}{x^2}$ .

**Penyelesaian.**

$$\begin{aligned} f'(c) &= \lim_{x \rightarrow c} \frac{\frac{5}{x^2} - \frac{5}{c^2}}{x - c} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{\frac{5c^2 - 5x^2}{x^2 c^2}}{x - c} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{5(c^2 - x^2)}{x^2 c^2} \cdot \frac{1}{x - c} \\ &= \lim_{x \rightarrow c} \frac{5(c - x)(c + x)}{x^2 c^2} \cdot \frac{1}{x - c} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{-5(c + x)}{x^2 c^2} = \frac{-10}{c^3}. \end{aligned}$$

**c. Soal**

1. Dengan menggunakan definisi

$$f'(c) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c + h) - f(c)}{h},$$

tentukan turunan masing-masing fungsi berikut.

a.  $f'(3)$  jika  $f(x) = x^2 - x$

b.  $f'(2)$  jika  $f(x) = (2t)^2$

c.  $f'(4)$  jika  $f(x) = \frac{1}{x-1}$

2. Gunakan  $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$  untuk mencari turunan fungsi-

fungsi berikut di  $x$ .

a.  $f(x) = x^3 + 2x^2 + 1$

b.  $g(x) = \frac{6}{x^2+1}$

c.  $h(x) = \sqrt{x^2 + 4}$



3. Gunakan  $f'(x) = \lim_{t \rightarrow x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x}$  untuk mencari  $f'(x)$  dari fungsi-fungsi berikut.

a.  $f(x) = x^3 + 5$

b.  $f(x) = \frac{x}{x-5}$

## 10. Kegiatan Belajar 10

### a. Tujuan Belajar

Mahasiswa dapat memahami tentang aturan pencarian turunan fungsi.

### b. Uraian Materi

Jika untuk menentukan turunan suatu fungsi  $f(x)$  terlalu rumit dengan menggunakan limit, maka dapat dikembangkan beberapa aturan pencarian turunan fungsi. Dengan menggunakan aturan pencarian turunan ini, turunan suatu fungsi dapat diperoleh dengan mudah. Berikut beberapa aturan pencarian turunan suatu fungsi :

(i) Aturan fungsi konstanta

Jika  $f(x) = k$  dengan  $k$  suatu konstanta, maka  $f'(x) = 0$  untuk sebarang  $x$ .

(ii) Aturan fungsi identitas

Jika  $f(x) = x$ , maka  $f'(x) = 1$ .

(iii) Aturan pangkat

Jika  $f(x) = x^n$ , dengan  $n$  bilangan rasional sebarang, maka  $f'(x) = nx^{n-1}$ .

(iv) Aturan kelipatan konstanta

Jika  $k$  suatu konstanta dan  $f$  suatu fungsi yang terdiferensiasikan, maka  $(kf)'(x) = k \cdot f'(x)$ .

(v) Aturan jumlah

Jika  $f$  dan  $g$  adalah fungsi-fungsi yang terdiferensiasikan, maka

$$(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x).$$

(vi) Aturan selisih

Jika  $f$  dan  $g$  adalah fungsi-fungsi yang terdiferensiasikan, maka

$$(f - g)'(x) = f'(x) - g'(x).$$

(vii) Aturan hasil kali

Jika  $f$  dan  $g$  adalah fungsi-fungsi yang terdiferensiasikan, maka

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

(viii) Aturan hasil bagi

Jika  $f$  dan  $g$  adalah fungsi-fungsi yang terdiferensialkan dengan  $g(x) \neq 0$ , maka

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}.$$

(ix) Aturan rantai

Jika  $g$  terdiferensialkan di  $x$  dan  $f$  terdiferensialkan di  $g(x)$ , maka fungsi komposit  $f \circ g$ , didefinisikan oleh  $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ , terdiferensialkan di  $x$  dan

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x).$$

(x) Turunan fungsi trigonometri

Jika fungsi yang diberikan adalah fungsi trigonometri, maka berikut diberikan turunan dari fungsi-fungsi standar trigonometri.

$D_x(\sin x) = \cos x$	$D_x(\cos x) = -\sin x$
$D_x(\tan x) = \sec^2 x$	$D_x(\cot x) = -\csc^2 x$
$D_x(\sec x) = \sec x \tan x$	$D_x(\csc x) = -\csc x \cot x$

**Contoh 10.1.** Jika  $f(x) = 3x^2 - 4x + 10$ , maka tentukan  $f'(x)$ .

**Penyelesaian.**

$$f'(x) = 3 \cdot 2x - 4 = 6x - 4$$

**Contoh 10.2.** Misalkan  $g(x) = x^2 \cos x$ . Carilah  $g'(x)$ .

**Penyelesaian.**

Misalkan  $u(x) = x^2$  dan  $v(x) = \cos x$ . Dengan menggunakan aturan hasil kali, diperoleh bahwa

$$\begin{aligned} g'(x) &= u'(x)v(x) + u(x)v'(x) \\ &= 2x \cos x + x^2(-\sin x) \\ &= 2x \cos x - x^2 \sin x \end{aligned}$$

**Contoh 10.3.** Tentukan turunan dari fungsi  $h(x) = \left(\frac{6-2x}{x^3+7}\right)^4$ .

**Penyelesaian.**

Misalkan  $u(x) = \frac{6-2x}{x^3+7}$ , sehingga  $h(x) = [u(x)]^4$ . Dengan menggunakan aturan rantai dan aturan hasil bagi, diperoleh

$$\begin{aligned}h'(x) &= h'(u(x)) u'(x) \\&= 4(u(x))^3 \cdot \left[ \frac{(-2)(x^3 + 7) - (6 - 2x)(3x^2)}{(x^3 + 7)^2} \right] \\&= 4 \left[ \frac{6 - 2x}{x^3 + 7} \right] \cdot \left[ \frac{-2x^3 - 14 - 18x^2 + 6x^3}{(x^3 + 7)^2} \right] \\&= 4 \left[ \frac{6 - 2x}{x^3 + 7} \right] \cdot \left[ \frac{4x^3 - 18x^2 - 14}{(x^3 + 7)^2} \right]\end{aligned}$$

**c. Soal**

Dengan menggunakan aturan pencarian turunan, tentukan turunan dari fungsi-fungsi berikut.

1.  $f(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$
2.  $f(x) = \frac{2}{3x} - \frac{1}{x^5}$
3.  $f(x) = 3x(x^3 - 1)$
4.  $f(x) = (3x^2 + 2x)(x^4 - 3x + 1)$
5.  $f(x) = \frac{5x^2+2x-6}{3x-1}$
6.  $f(x) = x^2 \cos x$
7.  $f(x) = \frac{x \cos x + \sin x}{x^2+1}$
8.  $f(x) = \cos(3x^2 - 2x)$
9.  $f(x) = \left(\frac{x+2}{x-2}\right)^{-3}$
10.  $f(x) = \frac{2x-3}{(x^2+4)^2}$

## 11. Kegiatan Belajar 11

### a. Tujuan Belajar

Mahasiswa dapat memahami tentang turunan tingkat tinggi dan diferensiasi implisit.

### b. Uraian Materi

#### Turunan Tingkat Tinggi

Suatu fungsi  $f$  jika didiferensiasikan maka akan diperoleh fungsi baru yaitu  $f'$ , yang disebut sebagai turunan pertama. Jika  $f'$  didiferensiasikan, maka akan diperoleh lagi fungsi baru yaitu  $f''$ , yang disebut sebagai turunan kedua. Selanjutnya, jika  $f''$  didiferensiasikan, maka diperoleh  $f'''$ , yang disebut turunan ketiga, dan begitu seterusnya. Fungsi yang diperoleh dari operasi diferensiasi turunan fungsi pertama dan seterusnya dinamakan dengan **turunan tingkat tinggi**.

**Contoh 11.1.** Misalkan  $f(x) = \cos(2 - 3x)$ . Tentukan  $f''(x)$  dan  $f'''(x)$ .

**Penyelesaian.**

$$f'(x) = 3 \sin(2 - 3x)$$

$$f''(x) = -9 \cos(2 - 3x)$$

$$f'''(x) = 27 \sin(2 - 3x)$$

#### Diferensiasi Implisit

Fungsi yang peubah bebas dan peubah terikatnya tidak diberikan secara terpisah disebut sebagai **fungsi implisit**. Untuk mendiferensiasikan fungsi dalam bentuk implisit ini dapat dengan cara mengubah bentuk implisit tersebut menjadi eksplisit, yaitu memisahkan peubah bebas dan peubah terikatnya. Jika dengan cara ini sulit untuk dilakukan, maka cara lain yang bisa dilakukan adalah dengan mendiferensiasikan kedua ruas terhadap  $x$  dengan menggunakan konsep aturan rantai. Metode ini disebut dengan **diferensiasi implisit**.

**Contoh 11.2.** Tentukan  $\frac{dy}{dx}$  dari  $2y - x^2y = 5x^3 + 3$ .

**Penyelesaian.**

**Metode I.** Fungsi implisit tersebut dapat diubah ke dalam bentuk eksplisit, yaitu sebagai berikut

$$y(2 - x^2) = 5x^3 + 3$$
$$y = \frac{5x^3 + 3}{2 - x^2}$$

Sehingga diperoleh

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(15x^2)(2 - x^2) - (5x^3 + 3)(-2x)}{(2 - x^2)^2} = \frac{-5x^4 + 30x^2 - 6x}{(2 - x^2)^2}$$

**Metode II.** Diferensiasikan kedua ruas, yaitu

$$\frac{dy}{dx}(2y - x^2y) = \frac{dy}{dx}(5x^3 + 3)$$
$$\frac{dy}{dx}(2y) - \frac{dy}{dx}(x^2y) = \frac{dy}{dx}(5x^3) + \frac{dy}{dx}(3)$$
$$2\frac{dy}{dx} - 2xy - x^2\frac{dy}{dx} = 15x^2$$
$$(2 - x^2)\frac{dy}{dx} - 2xy = 15x^2$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{15x^2 + 2xy}{(2 - x^2)}$$

Hasil yang diperoleh pada Metode II terlihat berbeda dengan hasil yang diperoleh pada Metode I. Hal ini dikarenakan pada Metode II,  $\frac{dy}{dx}$  masih dinyatakan secara implisit. Jika disubstitusikan  $y = \frac{5x^3+3}{2-x^2}$  ke dalam hasil akhir Metode II, maka diperoleh

$$\frac{dy}{dx} = \frac{15x^2 + 2x\left(\frac{5x^3 + 3}{2 - x^2}\right)}{(2 - x^2)} = \frac{15x^2(2 - x^2) + 10x^4 + 6x}{(2 - x^2)^2}$$
$$= \frac{30x^2 - 15x^4 + 10x^4 + 6x}{(2 - x^2)^2} = \frac{-5x^4 + 30x^2 - 6x}{(2 - x^2)^2}$$

**c. Soal**

1. Carilah  $f''(2)$  dari fungsi-fungsi berikut.
  - a.  $f(x) = 5x^3 + 2x^2 + x$
  - b.  $f(u) = \frac{2u^2}{5-u}$
  - c.  $f(\theta) = (\cos \theta\pi)^{-2}$
  - d.  $f(t) = t \sin(\pi/t)$
  - e.  $f(x) = \frac{(x+1)^2}{x-1}$
2. Carilah  $\frac{dy}{dx}$  dari masing-masing fungsi implisit berikut.
  - a.  $y^2 - x^2 = 1$
  - b.  $xy^2 = x - 8$
  - c.  $x^2 + 2x^2y + 3xy = 0$
  - d.  $x^2y = 1 + y^2x$
  - e.  $x\sqrt{y+1} = xy + 1$
3. Jika  $s^2t + t^3 = 1$ , carilah  $\frac{ds}{dt}$  dan  $\frac{dt}{ds}$ .
4. Jika  $y = \sin(x^2) + 2x^3$ , carilah  $\frac{dx}{dy}$ .

## 12. Kegiatan Belajar 12

### a. Tujuan Belajar

Mahasiswa dapat memahami tentang antiturunan (integral taktentu).

### b. Uraian Materi

Jika  $F'(x) = f(x)$ , maka  $F$  disebut **antiturunan** dari  $f$ . Antiturunan dari suatu fungsi  $f(x)$  terhadap  $x$  dinotasikan dengan  $\int f(x) dx$  dan  $f(x)$  dinamakan dengan integral. Antiturunan  $\int f(x) dx$  disebut juga integral taktentu (*indefinite integral*).

**Contoh 12.1.**  $f(x) = x^6$  adalah antiturunan dari  $6x^5$ , karena  $f'(x) = 6x^5$ . Tetapi  $g(x) = x^6 + 4$  juga antiturunan dari  $6x^5$ , karena  $g'(x) = 6x^5 + 0 = 6x^5$ .

Secara umum, jika  $F(x)$  adalah antiturunan dari  $f(x)$ , maka  $F(x) + c$  adalah antiturunan umum dari  $f(x)$ , dengan  $c$  adalah konstanta sebarang. Jadi, antiturunan umum dari  $f(x)$  dapat dinyatakan dengan

$$\int f(x) dx = F(x) + c.$$

Berikut beberapa aturan pencarian integral taktentu dari suatu fungsi:

(i) Aturan pangkat

Jika  $n$  adalah sebarang bilangan rasional kecuali  $-1$ , maka

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + c.$$

(ii) Antiturunan fungsi trigonometri

$$\int \sin x dx = -\cos x + c$$

$$\int \cos x dx = \sin x + c$$

(iii) Linieritas integral taktentu

Misalkan  $f$  dan  $g$  memiliki integral taktentu dan  $k$  suatu konstanta. Maka

a.  $\int kf(x) dx = k \int f(x) dx$

b.  $\int [f(x) + g(x)] dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$

c.  $\int [f(x) - g(x)] dx = \int f(x) dx - \int g(x) dx$



(iv) Aturan pangkat diperumum

Misalkan  $g$  adalah suatu fungsi terdiferensiasikan dan  $n$  suatu bilangan rasional,  $n \neq -1$ . Maka

$$\int [g(x)]^n g'(x) dx = \frac{1}{n+1} [g(x)]^{n+1} + c.$$

**Contoh 12.2.** Tentukan antiturunan umum dari  $f(x) = 4x^3$ .

**Penyelesaian.**

$$\int 4x^3 dx = 4 \int x^3 dx = 4 \frac{1}{4} x^3 + c = x^3 + c.$$

**Contoh 12.3.** Tentukan integral tak tentu dari  $g(x) = \sqrt[3]{x} - 7x$ .

**Penyelesaian.**

$$\begin{aligned} \int \sqrt[3]{x} - 7x dx &= \int x^{\frac{1}{3}} dx - \int 7x dx \\ &= \frac{1}{4/3} x^{\frac{4}{3}} - 7 \frac{1}{2} x^2 + c \\ &= \frac{3}{4} x^{\frac{4}{3}} - \frac{7}{2} x^2 + c. \end{aligned}$$

**Contoh 12.4.** Hitunglah

a.  $\int \left(\frac{1}{2}x^2 + 10\right)^{\frac{2}{3}} x dx$

b.  $\int (4x^3 - 12)^5 x^2 dx$

c.  $\int \sin^6 x \cos x dx$

**Penyelesaian.**

a. Misalkan  $g(x) = \frac{1}{2}x^2 + 10$ , maka  $g'(x) = x$ . Jadi,

$$\begin{aligned} \int \left(\frac{1}{2}x^2 + 10\right)^{\frac{2}{3}} x dx &= \int [g(x)]^{\frac{2}{3}} g'(x) dx = \frac{1}{5/3} [g(x)]^{\frac{5}{3}} + c \\ &= \frac{1}{5/3} \left(\frac{1}{2}x^2 + 10\right)^{\frac{5}{3}} + c = \frac{3}{5} \left(\frac{1}{2}x^2 + 10\right)^{\frac{5}{3}} + c \end{aligned}$$

b. Misalkan  $g(x) = 4x^3 - 12$ , maka  $g'(x) = 12x^2$ . Jadi,

$$\begin{aligned}\int (4x^3 - 12)^5 x^2 dx &= \int \frac{1}{12} [g(x)]^5 g'(x) dx \\ &= \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{6} [g(x)]^6 + c \\ &= \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{6} (4x^3 - 12)^6 + c \\ &= \frac{1}{72} (4x^3 - 12)^6 + c\end{aligned}$$

c. Misalkan  $g(x) = \sin x$ , maka  $g'(x) = \cos x$ . Jadi,

$$\begin{aligned}\int \sin^6 x \cos x dx &= \int [g(x)]^6 g'(x) dx \\ &= \frac{1}{7} [g(x)]^7 + c = \frac{1}{7} \sin^7 x + c\end{aligned}$$

**c. Soal**

Selesaikan masing-masing integral tak tentu berikut.

1.  $\int 2x^2 - 5x + 3 dx$
2.  $\int 3x\sqrt{1 - 2x^2} dx$
3.  $\int \frac{8x^2}{(x^3+2)^3} dx$
4.  $\int \frac{(x+1)}{\sqrt{x^2+2x-4}} dx$
5.  $\int \sec 3x \tan 3x dx$

### 13. Kegiatan Belajar 13

#### a. Tujuan Belajar

Mahasiswa dapat memahami tentang menghitung luas daerah di bawah kurva.

#### b. Uraian Materi

Luas daerah di bawah kurva merupakan pengantar untuk integral tentu.

Luas suatu daerah memiliki beberapa sifat berikut :

- i. Luas sebuah daerah adalah bilangan riil positif.
- ii. Luas suatu persegi adalah hasil kali panjang dan lebarnya.
- iii. Daerah-daerah yang sama dan sebangun memiliki luas yang sama.
- iv. Luas gabungan dua daerah yang hanya berimpit menurut sebuah garis sama dengan jumlah luas kedua daerah tersebut.
- v. Jika sebuah daerah terkandung di dalam daerah yang kedua, maka luas daerah pertama lebih kecil daripada atau sama dengan luas yang kedua.

#### Luas Menurut Poligon-Poligon Dalam

Tinjaulah  $R$  yang dibatasi oleh parabola  $y = f(x) = x^2$ , sumbu  $x$ , dan garis tegak  $x = 2$ . Dengan menggunakan acuan  $R$  sebagai daerah di bawah kurva  $y = x^2$  di antara  $x = 0$  dan  $x = 2$ , dapat ditentukan luas daerah  $R$ .

Bagi interval  $[0,2]$  menjadi  $n$  bagian, masing-masing dengan panjang  $\Delta x = \frac{2}{n}$ , menggunakan titik-titik  $n + 1$ . Jadi,

$$\begin{aligned}x_0 &= 0 \\x_1 &= \Delta x = \frac{2}{n} \\x_2 &= 2 \cdot \Delta x = \frac{4}{n} \\&\vdots \\x_i &= i \cdot \Delta x = \frac{2i}{n} \\&\vdots \\x_{n-1} &= (n-1) \cdot \Delta x = \frac{2(n-1)}{n} \\x_n &= n \cdot \Delta x = \frac{2n}{n} = 2\end{aligned}$$

Pandang persegi dengan alas  $[x_{i-1}, x_i]$  dan tinggi  $f(x_{i-1}) = x_{i-1}^2$ . Akibatnya, luas persegi tersebut adalah  $f(x_{i-1}) \cdot \Delta x$ . Gabungan  $R_n$  dari semua persegi tersebut membentuk poligon dalam. Luas daerah  $R_n$  dapat dihitung dengan menjumlahkan semua persegi tersebut.

$$L(R_n) = f(x_0)\Delta x + f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \cdots + f(x_{n-1})\Delta x$$

Perhatikan bahwa

$$f(x_i)\Delta x = x_i^2 \Delta x = \left(\frac{2i}{n}\right)^2 \cdot \frac{2}{n} = \left(\frac{8}{n^3}\right) i^2.$$

Jadi,

$$\begin{aligned} L(R_n) &= \left[ \frac{8}{n^3} (0^2) + \frac{8}{n^3} (1^2) + \frac{8}{n^3} (2^2) + \cdots + \frac{8}{n^3} (n-1)^2 \right] \\ &= \frac{8}{n^3} [1^2 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2] \\ &= \frac{8}{n^3} \left[ \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} \right] \\ &= \frac{8}{6} \left[ \frac{2n^3 - 3n^2 + n}{n^3} \right] \\ &= \frac{4}{3} \left[ 2 - \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2} \right] \\ &= \frac{8}{3} - \frac{4}{n} + \frac{4}{3n^2} \end{aligned}$$

Berdasarkan penjabaran di atas, dapat disimpulkan bahwa luas daerah  $R$  yaitu

$$L(R) = \lim_{n \rightarrow \infty} A(R_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{8}{3} - \frac{4}{n} + \frac{4}{3n^2} \right) = \frac{8}{3}.$$

### Luas Menurut Poligon-Poligon Luar

Tinjauilah  $S$  yang dibatasi oleh parabola  $y = f(x) = x^2$ , sumbu  $x$ , dan garis tegak  $x = 2$ . Dengan menggunakan acuan  $S$  sebagai daerah di bawah kurva  $y = x^2$  di antara  $x = 0$  dan  $x = 2$ , dapat ditentukan luas daerah  $S$ . Pandang persegi dengan alas  $[x_{i-1}, x_i]$  dan tinggi  $f(x_i) = x_i^2$ . Luas dari persegi tersebut diperoleh  $f(x_i)\Delta x$ . Gabungan  $S_n$  dari semua persegi tersebut membentuk poligon luar untuk daerah  $S$ . Luas daerah  $S_n$  dapat dihitung dengan menjumlahkan semua persegi tersebut.

Luas daerah  $S_n$  dihitung dengan cara yang sama dengan penghitungan  $R_n$ , yaitu

$$\begin{aligned}L(S_n) &= f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + f(x_3)\Delta x + \cdots + f(x_n)\Delta x \\&= \left[ \frac{8}{n^3} (1^2) + \frac{8}{n^3} (2^2) + \frac{8}{n^3} (3^2) + \cdots + \frac{8}{n^3} (n^2) \right] \\&= \frac{8}{n^3} [1^2 + 2^2 + \cdots + n^2] \\&= \frac{8}{n^3} \left[ \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right] \\&= \frac{8}{6} \left[ \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{n^3} \right] \\&= \frac{4}{3} \left[ 2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2} \right] \\&= \frac{8}{3} + \frac{4}{n} + \frac{4}{3n^2}\end{aligned}$$

Berdasarkan penjabaran di atas, dapat disimpulkan bahwa luas daerah  $S$  yaitu

$$L(S) = \lim_{n \rightarrow \infty} A(S_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{8}{3} + \frac{4}{n} + \frac{4}{3n^2} \right) = \frac{8}{3}$$

**c. Soal**

Carilah luas daerah di bawah kurva  $y = f(x)$  pada selang  $[a, b]$  dari masing-masing fungsi berikut.

1.  $y = \frac{1}{2}x^2 + 1, a = 0, b = 1$

2.  $y = x^2, a = -2, b = 2$

3.  $y = x^3, a = 0, b = 1$

4.  $y = 2x + 2, a = -1, b = 1$

5.  $y = x^3 + x, a = 0, b = 1$

## 14. Kegiatan Belajar 14

### a. Tujuan Belajar

Mahasiswa dapat memahami tentang integral tentu.

### b. Uraian Materi

Misalkan  $f$  suatu fungsi yang didefinisikan pada selang  $[a, b]$ . Jika

$$\lim_{|P| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i) \Delta x_i$$

ada, di mana  $|P|$  adalah panjang selang bagian terpanjang dari partisi  $P$ , maka  $f$  dikatakan **terintegralkan** pada  $[a, b]$ .

**Integral tentu** dari fungsi  $f$  pada  $[a, b]$  adalah

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{|P| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i) \Delta x_i.$$

Secara umum,  $\int_a^b f(x) dx$  menyatakan luas bertanda daerah yang dibatasi oleh kurva  $y = f(x)$  dan sumbu  $x$  dalam interval  $[a, b]$ .

$$\int_a^b f(x) dx = L_{atas} - L_{bawah}$$

### **Teorema A.** Teorema Keintegrasian

Jika  $f$  terbatas pada  $[a, b]$  dan  $f$  kontinu di sana, kecuali pada sejumlah titik berhingga, maka  $f$  terintegralkan pada  $[a, b]$ . Jika  $f$  kontinu pada seluruh interval  $[a, b]$ , maka  $f$  terintegralkan pada  $[a, b]$ .

Integral tentu memiliki sifat-sifat berikut :

- i.  $\int_a^a f(x) dx = 0$
- ii.  $\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx, a > b$
- iii.  $\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx$

**Contoh 14.1.**  $\int_4^4 \sin x dx = 0$  dan  $\int_{2\pi}^{\pi} \sin x dx = -\int_{\pi}^{2\pi} \sin x dx$

**Contoh 14.2.**  $\int_0^{2\pi} \cos x dx = \int_0^{\pi} \cos x dx + \int_{\pi}^{2\pi} \cos x dx$

**Teorema B.** Teorema Dasar Kalkulus

(i) Misalkan  $f$  kontinu pada interval tertutup  $[a, b]$  dan  $x \in [a, b]$ .

Maka

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x)$$

(ii) Jika  $f$  dan  $g$  terintegralkan pada  $[a, b]$  dan jika  $f(x) \leq g(x)$  untuk semua  $x$  dalam  $[a, b]$ , maka

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$$

(iii) Jika  $f$  terintegralkan pada  $[a, b]$  dan  $m \leq f(x) \leq M$  untuk semua  $x$  dalam  $[a, b]$ , maka

$$m(b - a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b - a)$$

(iv) Misalkan  $f$  dan  $g$  terintegralkan pada  $[a, b]$  dan  $k$  suatu konstanta. Maka  $kf$  dan  $f + g$  terintegralkan dan

(a)  $\int_a^b kf(x) dx = k \int_a^b f(x) dx$

(b)  $\int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$

(c)  $\int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$

(v) Misalkan  $f$  kontinu pada  $[a, b]$  dan  $F$  sebarang antiturunan  $f$  pada  $[a, b]$ . Jadi,

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

**Contoh 14.3.** Tentukan  $\frac{d}{dx} \left[ \int_2^x \frac{t^{3/4}}{2t^3 - 5} dt \right]$

**Penyelesaian.**

$$\frac{d}{dx} \left[ \int_2^x \frac{t^{3/4}}{2t^3 - 5} dt \right] = \frac{x^{3/4}}{2x^3 - 5}$$



**Contoh 14.4.** Hitunglah  $\int_0^{\pi/4} \sin^3 2x \cos 2x \, dx$ .

**Penyelesaian.**

Misalkan  $u = \sin 2x$ , maka  $du = 2 \cos 2x$ .

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} \int \sin^3 2x \cos 2x \, dx &= \frac{1}{2} \int (\sin^3 2x)(2 \cos 2x) \, dx \\ &= \frac{1}{2} \int u^3 \, du = \frac{1}{2} \frac{u^4}{4} + c = \frac{\sin^4 2x}{8} + c \end{aligned}$$

Akibatnya,

$$\int_0^{\pi/4} \sin^3 2x \cos 2x \, dx = \left[ \frac{\sin^4 2x}{8} \right]_0^{\pi/4} = \frac{1}{8}.$$

**Teorema C.** Teorema Nilai Rata-rata

Jika  $f$  kontinu pada  $[a, b]$ , maka terdapat suatu bilangan  $c$  antara  $a$  dan  $b$  sedemikian sehingga

$$\int_a^b f(t) \, dt = f(c)(b - a).$$

**Teorema D.** Teorema Simetri

Jika  $f$  fungsi genap, maka

$$\int_{-a}^a f(x) \, dx = 2 \int_0^a f(x) \, dx.$$

Jika  $f$  fungsi ganjil, maka

$$\int_{-a}^a f(x) \, dx = 0.$$

**Contoh 14.5.** Tentukan  $\int_{-8}^8 \frac{3x^2-5}{x^7} dx$ .

**Penyelesaian.**

Karena  $f(x) = \frac{3x^2-5}{x^7}$  adalah fungsi ganjil, maka berdasarkan Teorema D diperoleh

$$\int_{-8}^8 \frac{3x^2-5}{x^7} dx.$$

**Contoh 14.6.** Selesaikan  $\int_{-1}^1 2x^3 + 4 \cos x dx$ .

**Penyelesaian.**

Dengan menggunakan aturan jumlah pada integral, maka

$$\int_{-1}^1 2x^4 + 4 \sin x dx = \int_{-1}^1 2x^4 dx + \int_{-1}^1 4 \sin x dx.$$

Karena  $f(x) = 2x^4$  adalah fungsi genap dan  $g(x) = 4 \sin x$  adalah fungsi ganjil, maka diperoleh

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 2x^4 + 4 \sin x dx &= \int_{-1}^1 2x^4 dx + \int_{-1}^1 4 \sin x dx \\ &= 2 \int_0^1 2x^4 dx + 0 = 2 \left[ \frac{x^5}{5} \right]_0^1 = \frac{2}{5} \end{aligned}$$

**c. Soal**

1. Selesaikanlah masing-masing integral berikut.

a.  $\int_0^2 x^2(x^3 + 1) dx$

b.  $\int_0^1 x(1 - \sqrt{x})^2 dx$

c.  $\int_0^2 \frac{x}{\sqrt{x^2-15}} dx$

d.  $D_x \left( \int_x^0 t^2 dt \right)$

e.  $D_x \left( \int_0^{\sin x} t^3 dt \right)$

2. Dengan menggunakan teorema simetri, hitunglah

a.  $\int_{-3}^3 \sin \frac{x}{5} dx$

b.  $\int_{-1}^1 (3x^3 - x^2 + 10) dx$

3. Misalkan  $f(x) = \begin{cases} \cos x, & \text{untuk } x < 0 \\ 1 - x, & \text{untuk } x \geq 0 \end{cases}$ . Hitunglah

$$\int_{-\pi/2}^1 f(x) dx$$

### III. PENUTUP

Dengan adanya bahan ajar ini, diharapkan dapat membantu mahasiswa memahami materi dalam mata kuliah Kalkulus dan juga dapat membantu dosen dalam penyampaian materi perkuliahan secara lebih sederhana. Mahasiswa diharapkan lebih aktif dalam proses perkuliahan dan memiliki rasa ingin tahu yang tinggi.

Keberhasilan mahasiswa dalam mengikuti dan memahami materi mata kuliah selama proses pembelajaran berlangsung, didasarkan pada keaktifan mahasiswa dalam mengikuti proses pembelajaran dan kontribusi nilai ujian ditentukan berdasarkan :

1. Presensi kehadiran/nilai partisipasi : 10%
2. Tugas mandiri : 25%
3. UTS : 30%
4. UAS : 35%

Seiring dengan perkembangan ilmu pengetahuan dan teknologi, diharapkan pembaca dapat mengembangkan ilmu-ilmu dasar pada bahan ajar ini menjadi suatu temuan baru atau kajian yang lebih lanjut. Dan juga dengan adanya kekurangan yang penulis miliki, bahan ajar ini masih jauh dari kata sempurna. Oleh karena itu, sangat diharapkan kritik dan saran yang membangun dari pembaca demi kesempurnaannya bahan ajar ini.

#### IV. DAFTAR PUSTAKA

1. Leithold, L. (1986). (terjemahan M. Margha). *Kalkulus dan ilmu ukur analitik. Jilid I*. Jakarta: PT Bina Aksara.
2. Purcell, J., Edwin, D. Varberg dan S.E. Rigdon. (1990). (terjemahan I Nyoman Susila). "Kalkulus". Jilid 1. Edisi VIII. Jakarta : Penerbit Erlangga.
3. Stroud, K.A. (1987). (terjemahan Zulkifli Harahap). "Matematika untuk Teknik".Jilid 1. Edisi V. Jakarta : Penerbit Erlangga.