Menentukan Karakteristik Osilasi Nonlinear Dengan Metode Runge-Kutta Menggunakan Pemrograman Borland Delphi

Riri Safitri[1*], Festiyed[2]

[1]Program Studi Teknik Informatika, Universitas Al Azhar Indonesia, Hp. 081266222684 dan Email riri@uai.ac.id

[2]Jurusan Fisika, Universitas Negeri Padang, Hp.08126742403 dan E-mail festiyed@ymail.com

ABSTRACT

In line with the increasing complexity of application of science and technology in human life, the more complicated the settlement also counting physics problems. For simple problems may be solved by analytic approach, but analytic approach requires high skills in manipulating mathematical. Nonlinear Oscillations van der Pol oscillator in particular is one that is quite complicated problem of physics that can be solved by analytic approach.

In order to determine the solution and characteristics of the van der Pol oscillator are required a numerical method. One of numerical method that can be use to determine the solution and characteristics of the van der Pol oscillator is Runge-Kutta 4th order method. Calculation for this method would be easier to make an computer program. This application can be created using Borland Delphi 7.0.

In this application program that becomes the input is time, deviation, phase and attenuation constants. From the results of the application program in the form of the data and the graph shows that for small damping constant value (= 0.1) system vibration van der Pol oscillator approach simple harmonic oscillation.

Keywords: **numerical methods, computational physics, nonlinear oscillations, Delphi programming.**

PENDAHULUAN

Osilasi nonlinear merupakan gabungan osilasi harmonik di mana frekuensinya adalah kelipatan dari frekuensi dasarnya, yang merupakan invers dari perioda osilasinya. Osilasi nonlinear dapat ditentukan dengan beberapa cara, yaitu dengan pendekatan analitik dan dengan menggunakan metoda numerik. Hanya saja pendekatan analitik memerlukan kemampuan memanipulasi matematik yang tinggi, sehingga lebih mudah dilakukan dengan menggunakan metoda numerik.

Metoda numerik merupakan suatu cabang atau bidang ilmu matematika, khususnya matematika rekayasa, yang menggunakan bilangan untuk menirukan proses matematik. Proses matematik ini selanjutnya telah dirumuskan untuk menirukan keadaan sebenarnya. Metoda numerik hanya memberikan penyelesaian pendekatan (*aproximation*), tetapi tidak memerlukan kemampuan memanipulasi matematik yang terlalu tinggi, dan dapat digunakan untuk menyelesaikan lebih banyak permasalahan fisika dibandingkan dengan metoda analitik.

Permasalahan fisika seperti osilator harmonik sederhana atau osilasi linier dapat ditentukan solusinya secara analitik. Setiap gerak yang berulang pada selang waktu yang tetap disebut gerak periodik. Jika geraknya adalah gerak bolak-balik pada jalan yang sama, gerak ini disebut osilasi atau getaran (Sutrisno, 1997). Gerak harmonik sederhana terjadi jika suatu partikel bergetar di sekitar suatu posisi setimbang, sedangkan gaya pada partikel sebanding dengan jarak partikel dari posisi setimbang. Gaya ini selalu mengembalikan partikel kepada posisi setimbang, dan disebut dengan gaya balik atau gaya pemulih. Menurut hukum Hooke: Jika sebuah benda diubah bentuknya, maka benda itu akan melawan perubahan bentuk (deformasi) dengan gaya yang sebanding dengan besar deformasi, asalkan deformasi ini tidak terlalu besar. Untuk deformasi dalam satu dimensi, atau perubahan panjang saja, dapat ditulis:

$$F = -kx\,,$$

di mana, x adalah deformasi atas perubahan panjang, F adalah gaya balik oleh bahan, dan k adalah suatu tetapan pembanding. Dari hukum Newton II didapat hubungan:

$$F = -kx = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

atau $$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0$$

Penyelesaian dari persamaan gerak untuk osilator harmonik sederhana adalah

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0$$

untuk menentukan posisi partikel terhadap waktu, dapat ditulis;

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x$$

dengan menggunakan kalkulus differensial didapat:

$$x(t) = A\cos(\omega t + \delta) \qquad (1)$$

di mana, A, ω dan δ merupakan tetapan. Persamaan (1) merupakan solusi dari persamaan differensial osilator harmonik. Dari persamaan ini bisa kita dapatkan prioda $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ dan frekuensi osilator $f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$.

Untuk gerak osilasi nonlinier dapat digambarkan dengan osilator harmonik untuk simpangan dengan sudut kecil. Hasil eksperimen menunjukkan bahwa periode osilasi meningkat seiring dengan meningkatnya amplitudo osilasi. Pada posisi awal, periode menjadi lebih besar untuk sudut osilasi kecil. Periode mendekati tak berhingga pada batas maksimum yaitu pada limit $\varphi_{max} \rightarrow 180^0$.(Franz, 1998)

Pada saat gaya osilasi yang membawa osilator tak teredam, persamaan geraknya adalah:

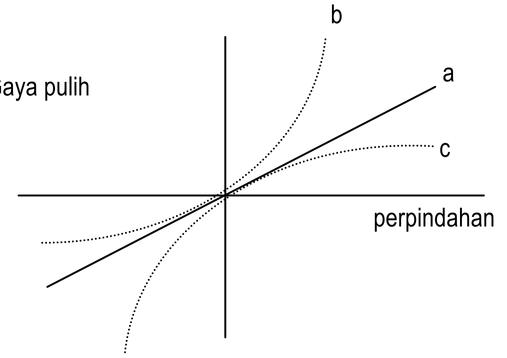
$$m\ddot{x} + s(x) = F_0 \cos \omega t \,,$$

di mana *s(x)* adalah fungsi nonlinear x, dalam bentuk polynomial dan dapat ditulis:

$$s(x) = s_1 x + s_2 x^2 + s_3 x^3 + \ldots$$

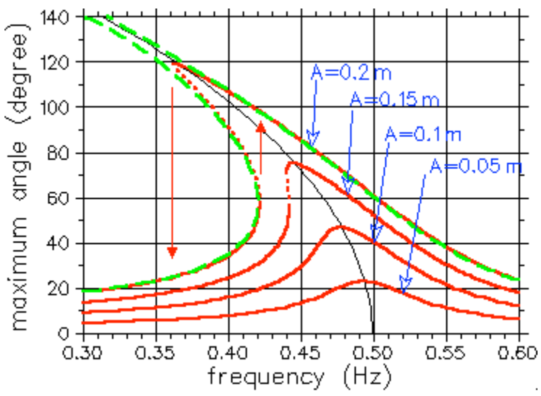
dengan koefisien s konstan. Dalam beberapa contoh praktis $s(x) = s_1 x + s_3 x^3$, di mana bentuk kubik memastikan bahwa gaya balik/gaya pulih *s(x)* mempunyai nilai yang sama untuk perpindahan positif dan negatif, sehingga getarannya simetris pada $x = o$. Pada saat s_1 dan s_3 bernilai positif, gaya pulih untuk perpindahannya lebih besar dari osilasi linear.

Pada Gambar.1 ditunjukkan variasi gaya pulih dan perpindahan $s_3 = 0$ (linear), $s_3 > 0$ (hard) dan $s_3 < 0$ (soft).



Gambar.1:Grafik hubungan perpindahan dengan gaya pulih a). gaya pulih linear, (b). Non linear hard spring, (c). Non linear soft spring (Pain,--)

Perbedaan resonansi linear dan nonlinear jika dilihat sepintas tidak ada. Tapi, ketergantungan nilai frekuensi eigen terhadap amplitudo dari suatu osilasi tak linear dan ketidakharmonisan osilasinya menjadi sifat yang tidak mungkin ada pada osilator harmonik, sifat ini disebut juga dengan efek foldover. Efek foldover didapat dari pembelokan puncak resonansi pada grafik hubungan amplitudo dan frekuensi osilasi. Sebagai contoh dapat dilihat pada Gambar.2.



Gambar 2 Grafik hubungan amplitudo dan frekuensi osilasi nonlnear(Franz,1998)

Pada saat amplitudo A kecil, garis resonansi didekati dengan baik oleh hasil osilator harmonik *underdumped*. Untuk osilasi yang lebih kuat, garis resonansinya jatuh dan menjadi tidak stabil, walaupun osilator nonlinear berosilasi dengan amplitudo yang besar atau kecil. Di antaranya selalu terdapat solusi periodik yang tidak stabil (ditunjukkan dengan garis putus-putus).

Berikutnya untuk persamaan differensial orde dua non linear dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\ddot{x} - \mu\left(1 - x^2\right)\dot{x} + x = 0 \,,$$

dengan: μ = konstan > 0, $\dot{x}(t) \equiv \dfrac{dx}{dt}$,

persamaan ini disebut juga dengan persamaan van der Pol (*van der Pol equation*). Persamaan ini menggambarkan osilasi keseluruhan dari salah satu osilasi sederhana, yaitu osilasi van der Pol. Solusi dari persamaan ini pertama kali dipelajari oleh B. van der Pol. Persamaan van der Pol ini ekivalen dengan sistem persamaan dengan dua variabel *x, v*.

$$\dot{x} = v \;\; \text{dan} \;\; \dot{v} = -x + \mu\left(1 - x^2\right)v$$

Berdasarkan persamaan di atas, untuk nilai μ yang kecil, osilasinya mendekati osilasi harmonik sederhana, dengan perioda 2π dan amplitudo yang spesifik. Seiring dengan meningkatnya nilai μ, osilasinya *'deviate'* dari osilasi harmonik. Untuk nilai μ yang besar, persamaan di atas menunjukkan osilasi relaksasi.

Menentukan solusi suatu persamaan lebih mudah menggunakan metode numerik. Metoda numerik terbagi atas beberapa metoda penyelesaian, salah satunya adalah differensiasi numerik. Pada metoda ini dapat ditentukan solusi dari persamaan differensial. Persamaan differensial adalah gabungan antara fungsi yang tidak diketahui secara eksplisit dan turunan (diferensial)-nya. Salah satu contohnya adalah persamaan gerak pegas:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + c\frac{dx}{dt} + kx = 0 \qquad (2)$$

dengan m adalah massa pegas, k tetapan pegas, c koefisien redaman, dan x posisi sebuah titik pada pegas. Karena x adalah fungsi dari t, maka persamaan (2) dapat ditulis

$$m\,x''(t) + cx'(t) + kx(t) = 0$$

atau dalam bentuk yang lebih ringkas,

$$mx'' + cx' + kx = 0.$$

Metoda Runge-Kutta merupakan salah satu metoda penyelesaian persamaan differensial. Metoda ini lebih praktis karena tidak membutuhkan perhitungan turunan. Metoda ini berusaha mendapatkan derajat ketelitian yang lebih tinggi, dan sekaligus menghindarkan keperluan mencari turunan yang lebih tinggi dengan jalan mengevaluasi fungsi *f(x,y)* pada titik terpilih dalam setiap selang langkah.

Menentukan solusi suatu persamaan diferensial menggunakan metode Runge-Kutta lebih mudah menggunakan pemrograman delphi. Delphi merupakan bahasa pemrograman berorientasi obyek. Konsep pemograman berorientasi objek ini dapat dikatakan meniru kehidupan nyata, dimana sebuah objek selalu mempunyai dua elemen yaitu data dan metode. Data merupakan sesuatu yang menentukan karakteristik suatu objek dan metode merupakan perlakuan terhadap data. Dengan pemograman yang berorientasi pada objek, tampilan program dapat didesain lebih menarik dan lebih variatif, berbeda halnya dengan pascal, terkadang tampilan program terlihat menjemukan (Festiyed, 2005).

Bahasa pemograman delphi merupakan bahasa pemograman visual, di mana banyak komponen yang digunakan untuk membangun sebuah aplikasi. Komponen tersebut terdiri dari *unit, project dan form*.

1. *Unit*
   Unit terdiri dari type (termasuk *class*), konstanta-konstanta, variabel dan function. Setiap unit didefinisikan dalam ……………(15) sebuah file (*.PAS). sebuah file **unit** dimulai dengan judul unit, kemudian diikuti dengan *interface, implementation, initialization* dan *finallization section.*
2. *Project*
   Sebuah project adalah file-file yang membentuk suatu applikasi atau *dynamic link library*. Beberapa file tersebut dibuat saat mendesain aplikasi dan beberapa lainnya terbentuk disaat ……………(16) proses kompilasi dari *source code project.* Sebuah *project* file mempunyai *extention* (*DPR).

3. *Form*
   Setiap form pada sebuah project Delphi mempunyai sebuah satuan unit. Unit tersebut berisi *source code* dari komponen yang digunakan. Form unit disimpan dalam file (*.DFM).

Tujuan dari penelitian ini adalah sebagai berikut.

1. Menentukan solusi persamaan Osilasi tak Linear menggunakan metoda Runge Kutta.
2. Menentukan Karakteristik Osilasi tak Linear, yaitu waktu, simpangan, dan fasa menggunakan metoda Runge-Kutta,

dengan variasi konstanta redaman 0,1; 2 dan 5, memanfaatkan program Delphi.

METODE

Metode penelitian ini termasuk metode analitis dengan langkah sebagai berikut:

1. Deskripsi dan analisis materi fisika yang sulit menentukan solusinya melalui metode analitik.
2. Mendisain tampilan program yang menarik: Penentuan strategi informasi dan interaksi. Strategi informasi dapat dimulai dari umum kekhusus atau sebaliknya, dari teori kecontoh atau sebaliknya, dari animasi, simulasi, gambar, keteori atau sebaliknya. Strategi interaksi oleh pengguna, apakah pemakai terlebih dulu membaca, melihat, memilih, menjawab, berhitung sebelum menjawab.
3. Penyusunan strategi tampilan, menggunakan instruksi pencabangan. Pemilihan teknik penyajian dalam hal bentuk informasi dan tingkat interaksi.
4. Memprogram dengan langkah: mendefenisikan masalah, membuat bagan dan struktur penyelesaian, memilih struktur data dan flow chart terbaik, menterjemahkan flow chart ke dalam bahasa pemrograman delphi, mencari kesalahan sintaks dan sematik, logika.
5. Uji dan verifikasi program: bermanfaat untuk melihat validitas dan reabilitas. Validasi dilakukan dengan uji pakar (expert validity) agar diperoleh beberapa masukan, baik menyangkut isi (content validity) maupun susunan tata bahasa (construct). Reliabilitas merupakan ketepatan suatu tes apabila diteskan pada subyek yang sama. Ketepatan tersebut berupa keandalan, kemantapan, kekonsistenan, prediktabilitas (keteramalan) dan kejituan suatu instrumen pengukur dan juga melihat sebera besar kesalahan yang terdapat dalam instrumen pengukur, sesuai anjuran Kelinger (2006).

HASIL DAN PEMBAHASAN

Sesuai dengan tujuan penelitian yang telah dikemukakan sebelumnya, maka untuk menghasilkan program aplikasi tersebut perlu dirancang program dengan desain yang fleksibel, sesuai dengan kajian teoritis pendukungnya dan mudah untuk dijalankan.

Tampilan menu utama dari rancangan program ini diantaranya terdiri dari:

1. *File*

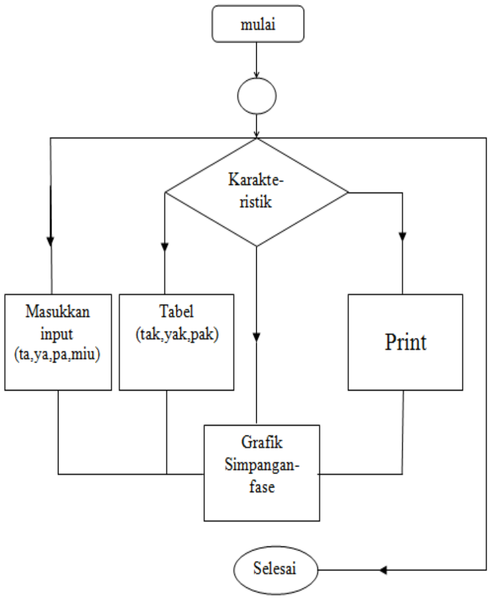
   Menu F*ile* terdiri atas *submenu*
   - a. *pengantar*
   - b. *pendahuluan*
   - c. *close*
2. *Tinjauan Pustaka.*

   Pada submenu *tinjauan pustaka* terdapat materi tentang:
   1. Osilator Harmonik Sederhana
   2. Osilasi tak Linear
      - a. Karakteristik Osilasi tak Linear
      - b. Gaya Osilasi
      - c. Resonansi Nonlinear
   3. Persamaan Van der Pol
   4. Metoda Numerik
   5. Metoda Runge-Kutta

   Masing-masing submenu dapat dipilih sesuai dengan keinginan pemakai.
3. *Karakteristik Osilasi tak Linear*

   Menu ini merupakan menu terpenting dari seluruh menu program aplikasi yang dirancang pada penelitian ini, karena pada menu ini terdapat program yang digunakan untuk menentukan karakteristik osilasi tak linear, serta dapat menelaah kestabilan getaran/ osilasinya.
4. Biodata

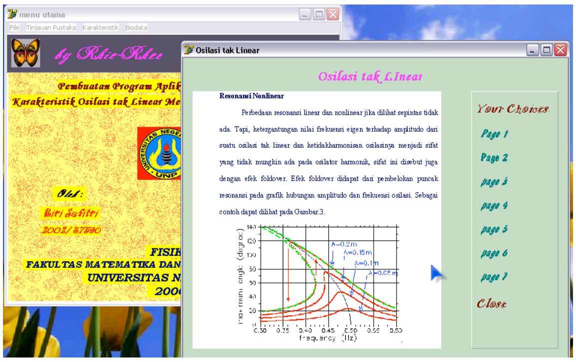
   Pada menu biodata ini terdapat biodata penulis, yaitu: nama, tempat tanggal lahir, alamat dan ucapan terima kasih.



Gambar 3. Flow chart program menu karakteristik.

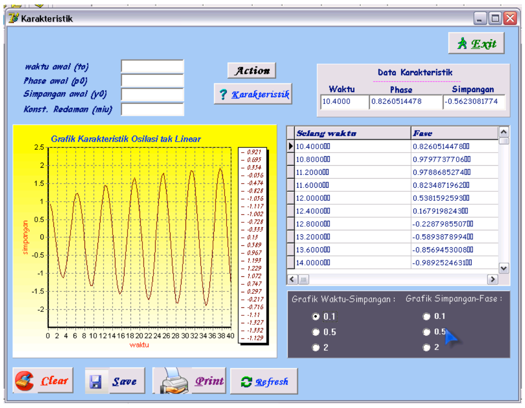
Pada menu file ini terdapat kata pengantar penulis berupa ucapan terima kasih kepada semua pihak yang telah membantu dalam penyelesaian penelitian ini. Pada pengantar ini setiap baris akan muncul satu per satu yang dibuat dengan menggunakan timer.

Gambar 4. *Tampilan program sub menu Kata Pengantar*

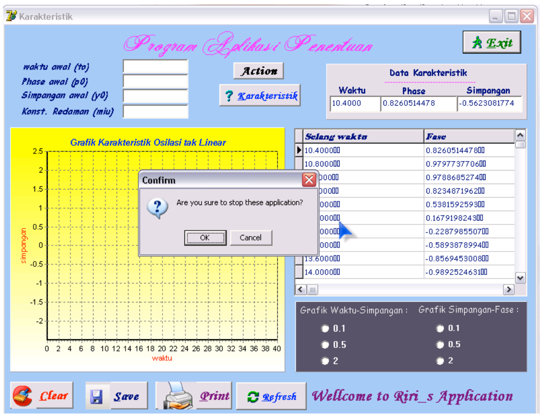


Gambar 5. *Tampilan teori osilasi tak linear*

Menu ini merupakan menu terpenting dalam program aplikasi ini. Pada program ini dapat ditentukan karakteristik osilasi tak linear.



Gambar 6. *Tampilan program menu karakteristik setelah dieksekusi*



Gambar.7: Tampilan program untuk keluar dari menu karakteistik

PEMBAHASAN

Untuk menganalisa data, hasil perhitungan yang didapat dari program aplikasi dengan komputer dibandingkan dengan penelitian yang telah dilakukan sebelumnya.

Berdasarkan penelitian yang telah dilakukan didapatkan data-data nilai karakteristik osilasi tak linear berupa waktu, fase dan simpangan seperti terlihat pada tabel berikut:

No	Waktu	Fase	Simpangan
1	0.0000000	0.0000000000	1.0000000000
2	0.4000000	-0.3899362583	0.9210248533
3	0.8000000	-0.7253350774	0.6953897817
4	1.2000000	-0.9627095398	0.3538767326
5	1.6000000	-1.0630616777	-0.05664065557
6	2.0000000	-0.9943122108	-0.4737493966
7	2.4000000	-0.7507470262	-0.8281029759
8	2.8000000	-0.3713713973	-1.0558560046
9	3.2000000	0.0700981007	-1.1168035216
10	3.6000000	0.4979877412	-1.0016646842
11	4.0000000	0.8553015117	-0.7279074986
12	4.4000000	1.0984922313	-0.3326772126
13	4.8000000	1.1851450070	0.1299051323
14	5.2000000	1.0790795787	0.5893931379
15	5.6000000	0.7783000461	0.9666580313
16	6.0000000	0.3366672522	1.1928429735
17	6.4000000	-0.1559300402	1.2291454824
18	6.8000000	-0.6171668777	1.0724193982
19	7.2000000	-0.9912756022	0.7471187028
20	7.6000000	-1.2352522147	0.2967644816
21	8.0000000	-1.3022246169	-0.2173592427
22	8.4000000	-1.1516029672	-0.7155549671
23	8.8000000	-0.7878006103	-1.1095537127
24	9.2000000	-0.2832545291	-1.3266219352
25	9.6000000	0.2558752830	-1.3315904461
26	10.000000	0.7438797533	-1.1289372910
27	10.400000	1.1287321969	-0.7503192605
28	10.800000	1.3679152942	-0.2453581618

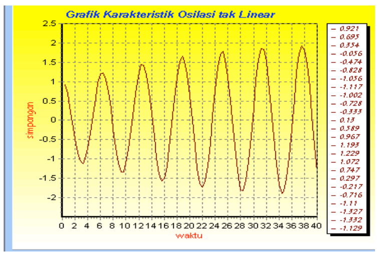
Nilai karakteristik yang didapatkan dari program aplikasi ini sama dengan nilai karakteristik yang didapatkan dari hasil penelitian yang dilakukan sebelumnya oleh I Bagus Gde Dhisnu, seperti terlihat pada tabel 2.

Tabel2. *Data karakteristik Osilasi tak Linear dari penelitian I Bagus Gde Dhisnu* (Joyodihardjo, 2000)

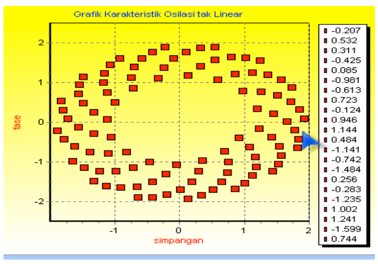
Waktu	Phase	Simpangan
0.0000000000E+00	0.0000000000E+00	1.0000000000E+00
4.0000000000E-01	-3.8993625825E-01	9.2102485333E-01
8.0000000000E-01	-7.2533507743E-01	6.9538978170E-01
1.2000000000E+00	-9.6270953984E-01	3.5387673258E-01
1.6000000000E+00	-1.0630616777E+00	-5.6406555668E-02
2.0000000000E+00	-9.9431221075E-01	-4.7374939664E-01
2.4000000000E+00	-7.5074702616E-01	-8.2810297588E-01
2.8000000000E+00	-3.7137139727E-01	-1.0558560046E+00
3.2000000000E+00	7.0098100689E-02	-1.1168035216E+00
3.6000000000E+00	4.9798774125E-01	-1.0016646842E+00
4.0000000000E+00	8.5530151166E-01	-7.2790749862E-01
4.4000000000E+00	1.0984922313E+00	-3.3267721255E-01
4.8000000000E+00	1.1851450070E+00	1.2990513228E-01
5.2000000000E+00	1.0790795787E+00	5.8939313793E-01
5.6000000000E+00	7.7830004614E-01	9.6665803129E-01
6.0000000000E+00	3.3666725217E 01	1.1928429735E+00
6.4000000000E+00	-1.5593004019E-01	1.2291454824E+00
6.8000000000E+00	-6.1716687767E-01	1.0724193982E+00
7.2000000000E+00	-9.9127560223E-01	7.4711870283E-01
8.0000000000E+00	-1.3022246169E+00	-2.1735924274E-01

Berdasarkan data yang didapatkan dari hasil program, berikut grafik karakteristik osilasi tak linear untuk konstanta redaman yang berbeda.

1. Konstanta redaman 0,1

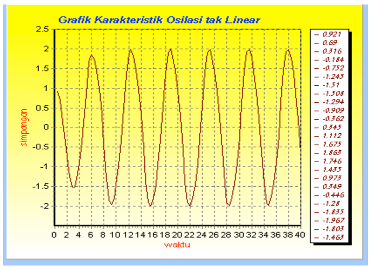


(a)

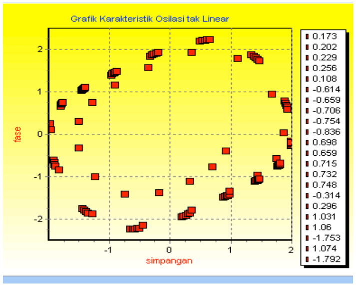


(b)

2. Konstanta redaman 0,5

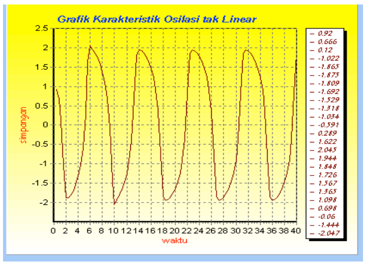


(a)

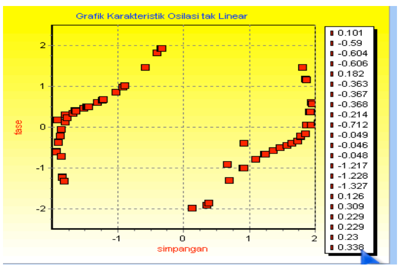


(b)

3. Konstanta redaman 2



(a)



(b)

Gambar 8. Grafik Karakteristik Osilasi tak linear hasil program Delphi: (a) Grafik waktu-simpangan, (b) Grafik Simpangan-fase

Dari gambar.8 terlihat bahwa, osilasi tak linear ini mendekati osilasi harmonik sederhana dan sinusoidal. Hal ini sesuai dengan teori, bahwa untuk nilai konstanta redaman (μ) kecil, osilasinya mendekati osilasi harmonik sederhana.

PENUTUP

Berdasarkan perbandingan antara hasil yang diperoleh dari program aplikasi dengan penelitian yang telah dilkukan sebelumnya dan referensi, maka penulis dapat menyimpulkan bahwa:

1. Metoda Runge-Kutta dapat digunakan untuk menentukan solusi persamaan osilasi tak linear.
2. Metoda Runge-Kutta dapat digunakan untuk menentukan karakteristik osilasi tak linear, berupa waktu, simpangan dan fase.
3. Sistem getaran Osilator van der Pol untuk nilai μ=0,1 mendekati osilasi harmonik sederhana dan sinusoidal.
4. Program aplikasi yang dibuat sudah sesuai dengan teori sehingga dapat digunakan untuk menentukan karakteristik osilasi tak linear

DAFTAR PUSTAKA

Festiyed. *Pemograman Komputer Lanjut (Pemograman Borland Delphi)* Padang. UNP Press. 2005.

Franz, Josef Elmer. *Nonlinear Oscillation*. Diakses dari: http://www.elmer.unibas.ch/pendulum/nonosc.htm . 1998.

Joyodihardjo, Hariyono. *Metode Numerik*. Jakarta. Gramedia Pustaka Utama. 2000.

Pain, H.J. *The Phyisics of Vibrations and Waves*. John Wiley & Sons Limited. Chichester..

Sutrisno. *Fisika Dasar: Mekanika*. Bandung . Institut Teknologi Bandung. 1997.

Kerlinger, Fred.N.(2006) Foundation of Behavioral Research Third Edition (Terjemahan) Gajah Mada University Press.