

**PENINGKATAN KEMAMPUAN PEMBUKTIAN DAN
KEMANDIRIAN BELAJAR MATEMATIK MAHASISWA
MELALUI PENDEKATAN M-APOS**

DISERTASI

**Diajukan untuk Memenuhi Sebagian dari
Persyaratan Memperoleh Gelar Doktor Pendidikan
dalam Pendidikan Matematika**



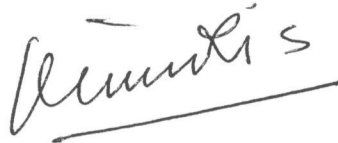
Promovendus

**YERIZON
NIM. 0809591**

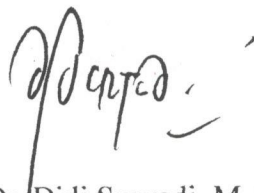
**PRODI PENDIDIKAN MATEMATIKA
SEKOLAH PASCASARJANA
UNIVERSITAS PENDIDIKAN INDONESIA
BANDUNG
2011**

LEMBAR PERSETUJUAN

DISETUJUI DAN DISAHKAN OLEH PANITIA DISERTASI
UNTUK MENGIKUTI UJIAN TAHAP II



Prof. Dr. Utari Sumarmo
Promotor Merangkap Ketua

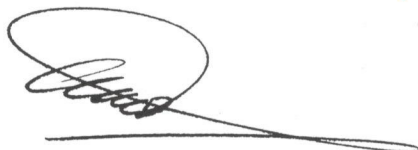


Prof. Dr. Didi Suryadi, M. Ed
Ko-Promotor Merangkap Sekretaris



Bana G. Kartasmita, Ph.D
Anggota

Mengetahui
Ketua Program Studi Pendidikan Matematika
Sekolah Pascasarjana Universitas Pendidikan Indonesia



Prof. H. Yaya Sukjaya Kusumah, M.Sc., Ph.D.
NIP. 195909221983031003

PERNYATAAN

Dengan ini saya Yerizon menyatakan bahwa disertasi yang berjudul “Peningkatan Kemampuan Pembuktian dan Kemandirian Belajar Matematik Mahasiswa melalui Pendekatan M-APOS” ini beserta seluruh isinya adalah benar-benar karya saya sendiri, dan saya tidak melakukan penjiplakan atau pengutipan dengan cara-cara yang tidak sesuai dengan etika keilmuan yang berlaku dalam masyarakat keilmuan. Atas pernyataan ini, saya siap menanggung risiko/sanksi yang dijatuhkan kepada saya apabila di kemudian ditemukan adanya pelanggaran terhadap etika keilmuan dalam karya saya ini, atau ada klaim dari pihak lain terhadap keaslian karya saya ini.

Bandung, Juli 2011
Promovendus,

Yerizon

PERSEMBAHAN

Disertasi ini kupersembahkan untuk orang-orang yang kucintai

Ayahanda: Aziz Dt. Rajo Malano

Ibunda: Mardalena

Istriku: Erni Suharti, S. Pd, M. Si

KATA PENGANTAR

Puji dan syukur penulis panjatkan ke hadirat Allah SWT. karena berkat rahmat, taufik, dan hidayah-Nya disertasi yang berjudul "Peningkatan Kemampuan Pembuktian dan Kemandirian Belajar Matematik Mahasiswa melalui Pendekatan M-APOS" ini dapat diselesaikan sebagaimana mestinya. Tujuan penulisan disertasi adalah untuk memenuhi sebagian persyaratan memperoleh gelar Doktor Pendidikan Matematika pada Sekolah Pascasarjana Universitas Pendidikan Indonesia.

Dalam menyelesaikan disertasi ini, penulis telah banyak menerima bantuan dari berbagai pihak, baik langsung maupun tidak langsung. Oleh karena itu, pada kesempatan ini penulis mengucapkan terima kasih dan penghargaan kepada semua pihak yang telah memberikan bantuan dan dukungan dalam penyelesaian disertasi ini. Ucapan terima kasih dan penghargaan yang tulus penulis sampaikan kepada yang terhormat:

1. Ibu Prof. Dr. Utari Sumarmo selaku promotor yang telah banyak waktu dalam memberikan masukan, petunjuk, dan memotivasi selama bimbingan sehingga disertasi ini dapat terselesaikan dengan baik.
2. Bapak Prof. Dr. Didi Suryadi, M.Ed., selaku ko-promotor dan Asisten Direktur I Sekolah Pascasarjana UPI yang telah banyak memberikan ide, arahan dan bimbingan demi selesainya penulisan disertasi ini.
3. Bapak Bana G. Kartasmita, Ph. D., selaku anggota promotor yang telah memberikan motivasi, arahan dan wawasan selama bimbingan demi selesainya penulisan disertasi ini.

4. Para Bapak/Ibu dosen Program Studi Pendidikan Matematika Sekolah Pasca Sarjana UPI yang tidak bisa saya sebutkan satu persatu yang telah memberikan banyak bimbingan dan arahan.
5. Bapak Dekan FMIPA UNP, Ketua Jurusan Matematika FMIPA UNP, Rekan-rekan Dosen Jurusan Matematika FMIPA UNP yang telah memberikan fasilitas dan membantu dalam pelaksanaan penelitian.
6. Rekan-rekan mahasiswa Program S-3 Pendidikan Matematika Sekolah Pascasarjana UPI angkatan 2008 yang telah banyak memberikan bantuan dan masukan sehingga penulis dapat menyelesaikan disertasi ini.
7. Semua pihak yang tidak dapat disebutkan satu persatu yang telah membantu, baik secara langsung maupun tidak langsung dalam penyelesaian disertasi ini.

Demikian kata pengantar ini, semoga Allah SWT memberikan pahala yang setimpal kepada semua yang telah memberikan bantuannya, Amin.

Bandung, Juli 2011

Penulis

ABSTRAK

Beberapa studi melaporkan bahwa banyak mahasiswa mengalami kesulitan dalam melakukan pembuktian matematik. Penelitian ini merupakan kuasi eksperimen dengan disain *Static-Group Pretest-Posttest Design* yang bertujuan meningkatkan kemampuan pembuktian dan kemandirian belajar mahasiswa melalui pembelajaran dengan pendekatan modifikasi APOS (M-APOS) dalam matakuliah Analisis Real. Subyek penelitian adalah sebanyak 124 orang mahasiswa kelas Analisis Real pada satu universitas di Padang. Instrumen penelitian terdiri dari: tes pembuktian matematik, dan satu skala kemandirian belajar model Likert. Analisis data menggunakan ANOVA dua jalur, penelitian menemukan bahwa: 1) Capaian dan peningkatan kemampuan membaca dan mengkonstruksi bukti matematik dan capaian kemandirian belajar mahasiswa kelas M-APOS keduanya tergolong sedang dan lebih baik dari capaian dan peningkatan kedua kemampuan mahasiswa pada kelas konvensional yang tergolong kurang; 2) Capaian kemandirian belajar mahasiswa kelas M-APOS lebih baik dari capaian tersebut pada mahasiswa kelas konvensional, namun keduanya tergolong kategori sedang. Namun tidak terdapat perbedaan peningkatan kemandirian belajar mahasiswa pada kedua pembelajaran dan keduanya tergolong sangat kecil; 3) Tidak terdapat interaksi antara pembelajaran dan program studi dan antara pembelajaran dan kemampuan awal matematika terhadap kemampuan membaca dan mengkonstruksi bukti, serta terdapat asosiasi antara kemampuan membaca dan mengkonstruksi bukti.

Kata Kunci: pembuktian matematik, M-APOS, kemandirian belajar

ABSTRACT

Some studies reported that many students faced serious difficulties on constructing mathematical proof. A post test control group design experiment was conducted to improve students' mathematical proving abilities by using modified APOS (M-APOS) teaching method. The study involved 124 students of Real Analysis classes of a state university in Padang. Instruments of the study were: a proof ability test, and a Likert model self regulated learning scale. The data were analyzed by using two path ANOVA. The study found that: 1) attainment and gain on students' reading proof ability and students' proving ability of modified APOS class were classified as mediocre and better than students' abilities of conventional class which classified as low; 2) students' self regulated learning of M-APOS class was better than students' self regulated learning of conventional class, and both of them were classified as medium. However there was no difference between students' gain on self regulated learning of both classes and they were classified as very low. There were not interaction between learning approach and department (mathematics and mathematics education) and between learning approach and mathematics prior knowledge on proof reading and proof construction abilities. There was association between proof reading ability and proof construction ability.

Key word: modified APOS teaching approach, mathematical proving ability, self regulated learning

DAFTAR ISI	Hal.
PERNYATAAN	i
PERSEMBAHAN	ii
KATA PENGANTAR	iii
ABSTRAK	v
ABSTRACT	vi
DAFTAR ISI	vii
DAFTAR TABEL	ix
DAFTAR GAMBAR	xvi
DAFTAR LAMPIRAN	xvii
BAB I Pendahuluan	1
A. Latar Belakang Masalah.....	1
B. Rumusan Masalah.....	12
C. Tujuan Penelitian.....	13
D. Manfaat Penelitian.....	14
E. Definisi Operasional.....	15
BAB II PEMBUKTIAN DAN PENDEKATAN M-APOS.....	16
A. Pembuktian.....	16
1. Pengertian Pembuktian dalam Matematik.....	16
2. Peranan Bukti dalam Matematika.....	17
3. Kesulitan Mahasiswa dalam Pembuktian.....	23
4. Metoda Pembuktian.....	25
5. Membaca Matematika.....	28
6. Struktur Argumentasi suatu Pembuktian.....	31

B. Pendekatan APOS dan M-APOS.....	34
C. Beberapa Hasil Studi yang Relevan.....	45
D. Kemandirian Belajar.....	48
E. Hipotesis Penelitian.....	57
BAB III METODE PENELITIAN	59
A. Disain Penelitian.....	59
B. Populasi dan Sampel Penelitian.....	61
C. Pengembangan Instrumen.....	62
1. Tes Membaca dan Mengkonstruksi Bukti.....	62
2. Kemandirian Belajar.....	65
D. Prosedur Penelitian.....	66
E. Pengembangan Bahan Ajar.....	67
BAB IV HASIL PENELITIAN DAN PEMBAHASAN	73
A. Hasil Penelitian.....	73
1. KCaB dan KSiB berdasarkan Program Studi dan Pembelajaran.....	76
2. KCaB dan KSiB berdasarkan Program Studi dan Kemampuan Awal Mahasiswa.....	92
3. KCaB dan KSiB berdasarkan Kemampuan Awal dan Pembelajaran.....	112
4. Asosiasi antara KCaB, KSiB, dan Kemandirian Belajar Matematik.....	122

B. Kemandirian Belajar Matematik.....	131
1. KBM berdasarkan Program Studi dan Pembelajaran.....	131
2. KBM berdasarkan Program Studi dan Kemampuan Awal Mahasiswa.....	141
3. KBM berdasarkan Kemampuan Awal Mahasiswa dan Pembelajaran.....	151
4. Kualitas Membaca Bukti dan Mengkonstruksi Bukti Mahasiswa.....	160
C. Pembahasan.....	164
1. Hasil Belajar.....	164
2. Kemandirian Belajar Matematik.....	177
3. Kesulitan Mahasiswa dalam Analisis Real.....	180
BAB V KESIMPULAN, IMPLIKASI, DAN REKOMENDASI	182
A. Kesimpulan.....	182
B. Implikasi.....	186
C. Rekomendasi.....	189
DAFTAR PUSTAKA	191
LAMPIRAN	194

DAFTAR TABEL

		Hal
Tabel 3.1	Keterkaitan Variabel-Variabel Penelitian antara Kemampuan Membaca Bukti dan Mengkonstruksi Bukti, Pendekatan Pembelajaran, dan Kemampuan Awal.....	60
Tabel 3.2	Keterkaitan Variabel-Variabel Penelitian antara Kemandirian Belajar Matematika, Pendekatan Pembelajaran, dan Kemampuan Awal.....	61
Tabel 4.1	Skor Rata-rata dan Simpangan Baku KCaB dan KSiB berdasarkan Program Studi dan Pendekatan Pembelajaran	75
Tabel 4.2a	Hasil Anova Dua-Jalur Capaian Kemampuan Membaca Bukti dan Kemampuan Mengkonstruksi Bukti berdasarkan Faktor Program Studi dan Pembelajaran.....	77
Tabel 4.2b	Hasil Anova Dua-Jalur Gain Skor Kemampuan Membaca Bukti dan Kemampuan Mengkonstruksi Bukti berdasarkan Faktor Program Studi dan Pembelajaran.....	78
Tabel 4.3a	Uji-t Perbedaan Rata-rata Kemampuan Membaca Bukti antar Program Studi dan antar Pendekatan Pembelajaran...	80
Tabel 4.3b	Uji-t Perbedaan Rata-rata Gain Kemampuan Membaca Bukti antar Program Studi dan antar Pendekatan Pembelajaran.....	80
Tabel 4.4a	Uji t Perbedaan Rata-rata KCaB antar Program Studi yang Mendapat Pembelajaran dengan Modifikasi APOS dan Konvensional.....	83
Tabel 4.4b	Uji t Perbedaan Rata-rata gain KCaB antar Program Studi yang Mendapat Pembelajaran dengan Modifikasi APOS dan Konvensional.....	83
Tabel 4.5a	Uji t Perbedaan Rata-rata KCaB di antara Dua Pembelajaran di Masing-masing Program Studi.....	84
Tabel 4.5b	Uji t Perbedaan Rata-rata Gain KCaB di antara Dua Pembelajaran di Masing-masing Program Studi.....	85

Tabel 4.6a	Uji-t Perbedaan Rata-rata Kemampuan Mengkonstruksi Bukti antar Program Studi dan antar Pendekatan Pembelajaran.....	86
Tabel 4.6b	Uji-t Perbedaan Rata-rata Gain Kemampuan Mengkonstruksi Bukti antar Program Studi dan antar Pendekatan Pembelajaran.....	87
Tabel 4.7a	Uji t Perbedaan Rata-rata Kemampuan Mengkonstruksi Bukti antar Program Studi yang Mendapat Pembelajaran dengan M-APOS dan Konvensional.....	89
Tabel 4.7b	Uji t Perbedaan Rata-rata Gain Kemampuan Mengkonstruksi Bukti antar Program Studi yang Mendapat Pembelajaran dengan M-APOS dan Konvensional.....	90
Tabel 4.8a	Uji t Perbedaan Rata-rata Kemampuan Mengkonstruksi Bukti diantara Dua Pembelajaran di Masing-masing Program Studi.....	91
Tabel 4.8b	Uji t Perbedaan Rata-rata Gain Kemampuan Mengkonstruksi Bukti di antara Dua Pembelajaran di Masing-masing Program Studi.....	91
Tabel 4.9	Skor Rata-rata dan Simpangan Baku KCaB dan KSiB berdasarkan Program Studi dan Kemampuan Awal Mahasiswa	93
Tabel 4.10a	Hasil Anova Dua-Jalur berdasarkan Faktor Kemampuan Awal dan Program Studi.....	93
Tabel 4.10b	Hasil Anova Dua-Jalur Gain berdasarkan Faktor Kemampuan Awal dan Program Studi.....	94
Tabel 4.11a	Uji Lanjutan Tukey Perbedaan Rata-rata KCaB antar Kemampuan Awal atas Program Studi.....	97
Tabel 4.11b	Uji Lanjutan Tukey Perbedaan Rata-rata Gain KCaB antar Kemampuan Awal atas Program Studi.....	97
Tabel 4.12a	Uji t Perbedaan Rata-rata KCaB di antara Dua Program Studi di Masing-masing Kemampuan Awal.....	99

Tabel 4.12b	Uji t Perbedaan Rata-rata Gain KCaB di antara Dua Program Studi di Masing-masing Kemampuan Awal.....	99
Tabel 4.12c	Uji t Perbedaan Rata-rata KCaB di antara Dua Pendekatan Pembelajaran pada Program Studi Matematika di Masing-masing Kemampuan Awal.....	101
Tabel 4.12d	Uji t Perbedaan Rata-rata Gain KCaB di antara Dua Pendekatan Pembelajaran pada Program Studi Matematika di Masing-masing Kemampuan Awal.....	102
Tabel 4.12e	Uji t Perbedaan Rata-rata KCaB di antara Dua Pendekatan Pembelajaran pada Program Studi Pendidikan Matematika di Masing-masing Kemampuan Awal.....	103
Tabel 4.12f	Uji t Perbedaan Rata-rata Gain KCaB di antara Dua Pendekatan Pembelajaran pada Program Studi Pendidikan Matematika di Masing-masing Kemampuan Awal.....	104
Tabel 4.13a	Uji Tukey Perbedaan Rata-rata KSiB antar Kemampuan Awal atas Program Studi.....	106
Tabel 4.13b	Uji Tukey Perbedaan Rata-rata Gain KSiB antar Kemampuan Awal atas Program Studi.....	107
Tabel 4.14a	Uji t Perbedaan Rata-rata KSiB di antara Dua Program Studi di Masing-masing Kemampuan Awal.....	108
Tabel 4.14b	Uji t Perbedaan Rata-rata Gain KSiB di antara Dua Program Studi di Masing-masing Kemampuan Awal.....	108
Tabel 4.14c	Uji t Perbedaan Rata-rata KSiB di antara Dua Pendekatan Pembelajaran pada Program Studi Matematika di Masing-masing Kemampuan Awal.....	110
Tabel 4.14d	Uji t Perbedaan Rata-rata Gain KSiB di antara Dua Pendekatan Pembelajaran pada Program Studi Matematika di Masing-masing Kemampuan Awal.....	110
Tabel 4.14e	Uji t Perbedaan Rata-rata KSiB di antara Dua Pendekatan Pembelajaran pada Program Studi Pendidikan Matematika di Masing-masing Kemampuan Awal.....	114

Tabel 4.14f	Uji t Perbedaan Rata-rata Gain KSiB di antara Dua Pendekatan Pembelajaran pada Program Studi Pendidikan Matematika di Masing-masing Kemampuan Awal.....	114
Tabel 4.15	Skor Rata-rata dan Simpangan Baku Skor KCaB, KSiB, GKCaB, dan GKSIB berdasarkan Kemampuan Awal dan Pendekatan Pembelajaran	112
Tabel 4.16a	Hasil Anova Dua-Jalur Capaian Kemampuan Membaca Bukti dan Kemampuan Mengkonstruksi Bukti berdasarkan Faktor Kemampuan Awal dan Pembelajaran.....	113
Tabel 4.16b	Hasil Anova Dua-Jalur Gain Kemampuan Membaca Bukti dan Kemampuan Mengkonstruksi Bukti berdasarkan Faktor Kemampuan Awal dan Pembelajaran.....	114
Tabel 4.17a	Uji t Perbedaan Rata-rata KCaB di antara Dua Pendekatan Pembelajaran di Masing-masing Kemampuan Awal.....	117
Tabel 4.17b	Uji t Perbedaan Rata-rata Gain KCaB di antara Dua Pendekatan Pembelajaran di Masing-masing Kemampuan Awal.....	118
Tabel 4.18a	Uji-t Perbedaan Rata-rata KSiB di antara Dua Pendekatan Pembelajaran di Masing-masing Kemampuan Awal.....	121
Tabel 4.18b	Uji-t Perbedaan Rata-rata Gain KSiB di antara Dua Pendekatan Pembelajaran di Masing-masing Kemampuan Awal.....	121
Tabel 4.19a	Jumlah Mahasiswa berdasarkan Kualifikasi Membaca Bukti dan Mengkonstruksi Bukti.....	123
Tabel 4.19b	Jumlah Mahasiswa Kelas Eksperimen berdasarkan Kualifikasi Membaca Bukti dan Mengkonstruksi Bukti.....	124
Tabel 4.19c	Jumlah Mahasiswa Kelas Kontrol berdasarkan Kualifikasi Membaca Bukti dan Mengkonstruksi Bukti.....	125
Tabel 4.19d	Jumlah Mahasiswa berdasarkan Kualifikasi Membaca Bukti dan Kemandirian Belajar Matematik.....	126
Tabel 4.19e	Jumlah Mahasiswa Kelas Eksperimen berdasarkan Kualifikasi	

	Membaca Bukti dan Kemandirian Belajar Matematik.....	127
Tabel 4.19f	Jumlah Mahasiswa Kelas Kontrol berdasarkan Kualifikasi Membaca Bukti dan Kemandirian Belajar Matematik.....	127
Tabel 4.19g	Jumlah Mahasiswa berdasarkan Kualifikasi Membaca Bukti dan Kemandirian Belajar Matematik.....	128
Tabel 4.19h	Jumlah Mahasiswa Kelas Eksperimen berdasarkan Kualifikasi Membaca Bukti dan Kemandirian Belajar Matematik.....	129
Tabel 4.19i	Jumlah Mahasiswa Kelas Kontrol berdasarkan Kualifikasi Membaca Bukti dan Kemandirian Belajar Matematik.....	129
Tabel 4.20	Skor Rata-rata dan Simpangan Baku KBM berdasarkan Program Studi, Pendekatan Pembelajaran dan Kemampuan Awal.....	132
Tabel 4.21a	Hasil Anova Dua-Jalur KBM berdasarkan Faktor Program Studi dan Pembelajaran.....	133
Tabel 4.21b	Hasil Anova Dua-Jalur Gain KBM berdasarkan Faktor Program Studi dan Pembelajaran.....	133
Tabel 4.22a	Uji-t Perbedaan Rata-rata KBM antar Program Studi dan antar Pendekatan Pembelajaran.....	135
Tabel 4.22b	Uji-t Perbedaan Rata-rata Gain KBM antar Program Studi dan antar Pendekatan Pembelajaran.....	135
Tabel 4.23a	Uji t Perbedaan Rata-rata KBM antar Program Studi yang Mendapat Pembelajaran dengan M-APOS dan Konvensional	138
Tabel 4.23b	Uji t Perbedaan Rata-rata Gain KBM antar Program Studi yang Mendapat Pembelajaran dengan M-APOS dan Konvensional.....	138
Tabel 4.24a	Uji t Perbedaan Rata-rata KBM di antara Dua Pembelajaran di Masing-masing Program Studi.....	139
Tabel 4.24b	Uji t Perbedaan Rata-rata Gain KBM di antara Dua Pembelajaran di Masing-masing Program Studi.....	140
Tabel 4.25	Skor Rata-rata dan Simpangan Baku KBM berdasarkan	

	Program Studi dan Kemampuan Awal Mahasiswa.....	141
Tabel 4.26a	Hasil Anova Dua-Jalur KBM berdasarkan Faktor Kemampuan Awal dan Program Studi.....	142
Tabel 4.26b	Hasil Anova Dua-Jalur Gain KBM berdasarkan Faktor Kemampuan Awal dan Program Studi.....	142
Tabel 4.27a	Uji Lanjutan Tukey Perbedaan Rata-rata KBM antar Kemampuan Awal atas Program Studi.....	145
Tabel 4.27b	Uji Lanjutan Tukey Perbedaan Rata-rata Gain KBM antar Kemampuan Awal atas Program Studi.....	145
Tabel 4.28a	Uji t Perbedaan Rata-rata KBM di antara Dua Program Studi di Masing-masing Kemampuan Awal.....	146
Tabel 4.28b	Uji t Perbedaan Rata-rata Gain KBM di antara Dua Program Studi di Masing-masing Kemampuan Awal.....	147
Tabel 4.28c	Uji t Perbedaan Rata-rata KBM di antara Dua Pembelajaran pada Program Studi Matematika di Masing-masing Kemampuan Awal.....	148
Tabel 4.28d	Uji t Perbedaan Rata-rata Gain KBM di antara Dua Pembelajaran pada Program Studi Matematika di Masing-masing Kemampuan Awal.....	148
Tabel 4.28e	Uji t Perbedaan Rata-rata KBM di antara Dua Pembelajaran pada Program Studi Pendidikan Matematika di Masing-masing Kemampuan Awal.....	149
Tabel 4.28f	Uji t Perbedaan Rata-rata Gain KBM di antara Dua Pembelajaran pada Program Studi Pendidikan Matematika di Masing-masing Kemampuan Awal.....	150
Tabel 4.29	Skor Rata-rata dan Simpangan Baku KBM berdasarkan Kemampuan Awal dan Pendekatan Pembelajaran	151
Tabel 4.30a	Hasil Anova Dua-Jalur KBM berdasarkan Faktor Kemampuan Awal dan Pembelajaran.....	152
Tabel 4.30b	Hasil Anova Dua-Jalur Gain KBM berdasarkan Faktor Kemampuan Awal dan Pembelajaran.....	152

Tabel 4.31a	Uji t Perbedaan Rata-rata KBM di antara Dua Pendekatan Pembelajaran di Masing-masing Kemampuan Awal	155
Tabel 4.31b	Uji t Perbedaan Rata-rata Gain KBM di antara Dua Pendekatan Pembelajaran di Masing-masing Kemampuan Awal.....	156
Tabel 4.32a	Penerimaan Hipotesis Nol berdasarkan Faktor Program Studi dan Pembelajaran.....	157
Tabel 4.32b	Penerimaan Hipotesis Nol berdasarkan Faktor Program Studi dan Kemampuan Awal Mahasiswa.....	158
Tabel 4.32c	Penerimaan Hipotesis Nol berdasarkan Faktor Pendekatan Pembelajaran dan Kemampuan Awal Mahasiswa.....	159
Tabel 4.32d	Penerimaan Hipotesis Nol berdasarkan Faktor Pendekatan Pembelajaran pada Program Studi Matematika di Masing - masing Kemampuan Awal.....	159
Tabel 4.32e	Penerimaan Hipotesis Nol berdasarkan Faktor Pendekatan Pembelajaran pada Program Studi Pendidikan Matematika di Masing-masing Kemampuan Awal.....	160
Tabel 4.33	Jumlah dan Persentase Mahasiswa yang telah Mencapai Standar Nilai Cukup berdasarkan Program Studi, Pendekatan Pembelajaran dan Kemampuan Awal	161

DAFTAR GAMBAR

	Hal.
Gambar 2.1 Skematik untuk Menganalisis Argumentasi.....	32
Gambar 3.1 Disain Penelitian.....	59
Gambar 4.1a Interaksi antara program studi dan pembelajaran terhadap pencapaian kemampuan membaca bukti.....	82
Gambar 4.1b Interaksi antara program studi dan pembelajaran terhadap peningkatan kemampuan membaca bukti.....	82
Gambar 4.2a Interaksi antara program studi dan pembelajaran terhadap pencapaian kemampuan mengkonstruksi bukti.....	88
Gambar 4.2b Interaksi antara program studi dan pembelajaran terhadap peningkatan kemampuan mengkonstruksi bukti.....	89
Gambar 4.3a Interaksi antara kemampuan awal dan pembelajaran terhadap pencapaian kemampuan membaca bukti.....	116
Gambar 4.3b Interaksi antara kemampuan awal dan pembelajaran terhadap peningkatan kemampuan membaca bukti.....	116
Gambar 4.4a Interaksi antara kemampuan awal dan pembelajaran terhadap pencapaian kemampuan mengkonstruksi bukti...	120
Gambar 4.4b Interaksi antara kemampuan awal dan pembelajaran terhadap peningkatan kemampuan mengkonstruksi bukti...	120
Gambar 4.5a Interaksi antara program studi dan pembelajaran terhadap capaian kemandirian belajar matematika.....	137
Gambar 4.5b Interaksi antara program studi dan pembelajaran terhadap peningkatan kemandirian belajar matematika.....	137
Gambar 4.6a Interaksi antara kemampuan awal dan pembelajaran terhadap capaian kemandirian belajar matematika.....	154
Gambar 4.6b Interaksi antara kemampuan awal dan pembelajaran terhadap peningkatan kemandirian belajar matematika.....	155

BAB I

PENDAHULUAN

A. Latar Belakang Masalah

Proses pembelajaran matematika di perguruan tinggi membutuhkan kemampuan kognitif tingkat tinggi, seperti kemampuan analisis, sintesis, dan evaluasi, tidak hanya sekedar ingatan pengetahuan faktual ataupun aplikasi sederhana dari berbagai formula atau prinsip. Mahasiswa diharapkan mampu untuk bernalar dengan baik dan mengekspresikan hasil penalarannya secara tertulis, sistematis dan ketat (*rigorous*). Kemampuan ini dapat diperoleh melalui kegiatan pembuktian.

Karena pentingnya kemampuan pembuktian matematik dalam pembelajaran matematika maka *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM) (2000) telah menekankan adanya pembuktian dalam matematika sekolah, yang juga mencerminkan pergeseran ke arah pemecahan masalah dan berpikir kritis. Tapi untuk mengkonstruksi bukti yang lebih rumit diberikan pada perkuliahan di perguruan tinggi. Kurikulum matematika harus mencakup banyak dan beragam pengalaman yang memperkuat dan memperluas keterampilan penalaran logis siswa sehingga semua siswa dapat: (1) mengenal penalaran dan pembuktian sebagai aspek-aspek fundamental matematika, (2) membuat konjektur dan memeriksa kebenaran dari konjektur itu, (3) mengembangkan dan mengevaluasi argumen dan pembuktian matematik, dan (4) memilih dan menggunakan bermacam-macam jenis penalaran dan metode pembuktian. Hal ini sesuai dengan yang disarankan oleh Hanna (Findel, 2001), yaitu bahwa

pemahaman dalam matematika hendaknya dilakukan melalui pembuktian matematik.

Di Indonesia, siswa juga dikehendaki agar mempunyai kemampuan dalam melakukan pembuktian. Misalnya, dalam Kurikulum Berbasis Kompetensi (Depdiknas, 2002) secara eksplisit dinyatakan agar siswa mempunyai kompetensi matematika dalam bentuk keterampilan menyusun bukti, yaitu siswa SD dan SMP menyusun bukti secara induktif, sedangkan siswa SMA menyusun bukti secara induktif dan deduktif. Walaupun belum dituntut untuk dapat melakukan pembuktian secara formal, tapi mereka sudah dituntut untuk memiliki keterampilan dasar dalam melakukan pembuktian matematik.

Dalam matematika, pembuktian adalah serangkaian argumen logis yang menjelaskan kebenaran suatu pernyataan. Hal ini dinyatakan oleh Hanna dan Barbeau (VanSpronsen, 2008) pembuktian adalah penerapan sejumlah berhingga langkah-langkah logis dari apa yang diketahui (aksioma, prinsip-prinsip atau hasil yang telah dibuktikan sebelumnya) dan menerapkan prinsip-prinsip logika, untuk menciptakan argumen deduktif yang valid guna mencapai suatu kesimpulan menggunakan aturan inferensi yang dapat diterima. Argumen-argumen ini dapat berasal dari premis pernyataan itu sendiri, teorema-teorema lainnya, definisi, dan dapat juga berasal dari postulat dimana sistem matematika tersebut berasal. Yang dimaksud logis di sini, adalah semua langkah pada setiap argumen harus dijustifikasi oleh langkah sebelumnya. Jadi kebenaran semua premis pada setiap deduksi sudah dibuktikan atau diberikan sebagai asumsi.

Pembuktian memegang peranan yang sangat penting dalam matematika karena pembuktian merupakan bagian yang mutlak dan mendasar dalam matematika dan bagian yang tidak terpisahkan dari matematika (Dickerson, 2008). Karena merupakan bagian yang esensial dalam melakukan *doing*, komunikasi, dan *recording* matematika. Peran pembuktian dinyatakan oleh Knuth (2002) yaitu: 1) untuk memverifikasi bahwa suatu pernyataan itu benar, 2) untuk menjelaskan mengapa suatu pernyataan itu benar, 3) untuk mengkomunikasikan pengetahuan matematika, 4) untuk menemukan atau menciptakan matematika baru, atau 5) mensistematisasikan pernyataan menjadi sistem aksiomatis. Sementara Hanna dan Jahnke (Nichols, 2008) lebih menekankan bahwa mengkomunikasikan pemahaman matematik adalah peran bukti yang paling signifikan dalam hal pendidikan matematika. Selain dari itu pembuktian memainkan peranan yang sangat penting dalam menemukan pengetahuan matematika baru. Menurut De Villiers (VanSpronsen, 2008), pembuktian bukan hanya sebagai sarana untuk memverifikasi hasil yang sudah ditemukan, tetapi juga merupakan sarana untuk mengeksplorasi, menganalisis, dan menemukan matematika yang baru.

Untuk itu mahasiswa matematika harus memiliki kemampuan melakukan pembuktian matematik. Dalam pembuktian matematik terdapat dua kemampuan yaitu kemampuan membaca bukti dan mengkonstruksi bukti. Maka berargumentasi secara matematik dan melakukan pembuktian haruslah menjadi bagian yang esensial bagi mahasiswa yang belajar matematika. Karena itu pengkajian tentang pengajaran dan pembelajaran pembuktian adalah komponen kunci dalam peningkatan pembelajaran matematika secara menyeluruh. Ada beberapa alasan

mengapa perlu diberikan pengajaran pembuktian yaitu: 1) bukti adalah bagian yang integral dalam matematika, 2) untuk verifikasi dan penemuan fakta, 3) untuk pengembangan kemampuan berpikir logis dan kritis siswa, dan 4) mempercepat dan meningkatkan pemahaman matematik siswa (Dickersen, 2008).

Salah satu mata kuliah yang mendukung hal tersebut adalah Analisis Real. Mata kuliah Analisis Real diberikan pada Program Studi Matematika dan Pendidikan Matematika di hampir semua perguruan tinggi di Indonesia. Mata kuliah Analisis Real bertujuan untuk mendidik peserta kuliah agar: a) memiliki pengetahuan dasar analisis matematika, khususnya tentang bilangan, barisan, fungsi, limit, dan turunan, b) mampu bernalar secara logis dan mengekspresikan hasil penalarannya secara tertulis, sistematis dan *rigorous* (Gunawan, 2009). Melalui perkuliahan Analisis Real, mahasiswa berlatih untuk memverifikasi bahwa suatu pernyataan itu benar, menjelaskan mengapa suatu pernyataan itu benar, mengkomunikasikan pengetahuan matematika, dan menuliskannya dalam bahasa yang logis dan sistematis. Kemampuan tersebut dapat ditingkatkan melalui kegiatan pembuktian.

Kegiatan pembuktian banyak dilakukan dalam mata kuliah Analisis Real yang sarat dengan definisi, lemma, dan teorema. Agar mahasiswa dapat memahami Analisis Real dengan baik maka mahasiswa dituntut untuk dapat memahami setiap lemma dan teorema yang dipelajari. Salah satu syarat agar hal tersebut tercapai adalah mahasiswa harus mempunyai kemampuan dalam membuktikan lemma dan teorema yang dipelajari dan beberapa permasalahan yang terkait dengan penerapan definisi, lemma, dan teorema. Dengan demikian,

peningkatan pemahaman mahasiswa dalam Analisis Real dapat dilakukan melalui peningkatan kemampuan mahasiswa dalam pembuktian.

Namun dalam kenyataan ditemui bahwa banyak mahasiswa mengalami kesulitan dalam pembuktian. Berdasarkan pengalaman mengajar mata kuliah Analisis Real di Jurusan Matematika FMIPA UNP Padang, peneliti juga menemukan hal yang sama. Gibson (Nichols, 2008) menemukan bahwa mahasiswa biasanya mengalami kesulitan dalam beberapa hal yaitu: 1) menilai kebenaran dari sebuah pernyataan, 2) memahami informasi, 3) menemukan ide, dan 4) menuliskan ide. Moore (VanSpronsen, 2008) telah melakukan identifikasi terhadap kelemahan dan kesulitan mahasiswa dalam pembuktian matematika, yang dikelompokkan ke dalam tujuh jenis kesulitan, yaitu sebagai berikut:

1. Mahasiswa tidak dapat menyatakan definisi dengan bahasanya sendiri.
2. Intuisi pemahaman terhadap suatu konsep yang dimiliki mahasiswa sedikit.
3. *Concept images* untuk mengerjakan pembuktian tidak cukup.
4. Mahasiswa tidak dapat dan tidak berkeinginan membuat contoh sendiri.
5. Mahasiswa tidak mengetahui bagaimana menggunakan definisi untuk memperoleh struktur pembuktian yang menyeluruh.
6. Mahasiswa tidak dapat memahami dan menggunakan bahasa dan notasi matematik.
7. Mahasiswa tidak mengetahui bagaimana memulai pembuktian.

Agar dapat membuat pembuktian matematik dengan baik, mahasiswa dituntut memiliki pengetahuan-pengetahuan prasyarat, misalnya logika matematika dan metode pembuktian dalam matematika. Dengan dimilikinya pengetahuan

prasyarat tidak menjamin bahwa mahasiswa dapat mengembangkan dan mengkomunikasikan suatu bukti. Untuk dapat mengembangkan dan mengkomunikasikan suatu pembuktian matematika dengan baik, mahasiswa dituntut untuk memiliki kreativitas, intuisi, dan pengalaman. Memiliki intuisi berarti memiliki kemampuan untuk membuat konjektur yang merupakan bagian yang sangat penting dalam proses pembuktian matematik. Hanya dengan intuisi dapat memutuskan apa yang harus dibuktikan (Bloch, 2000). Sedangkan memiliki kreativitas berarti memiliki kemampuan untuk menyatakan persoalan dalam berbagai model yang operasional. Kreativitas, intuisi, dan pengalaman dapat dikembangkan dan disediakan melalui pembelajaran.

Dari uraian masalah yang telah dikemukakan di atas, maka perlu dipikirkan suatu pendekatan pembelajaran Analisis Real yang dapat meningkatkan kemampuan pembuktian matematik. Pembelajaran matematika yang diberikan harus dapat menjadikan mahasiswa memiliki kompetensi dasar dalam matematika, yaitu: pemahaman, pemecahan masalah, penalaran, koneksi matematik, dan komunikasi matematik. Kemampuan komunikasi matematik misalnya muncul dalam bentuk: (1) membuat konjektur, menyusun argumen, merumuskan definisi dan generalisasi, (2) membaca dengan pemahaman suatu presentasi matematika tertulis, dan (3) mendengarkan, berdiskusi, dan menulis tentang matematika. Kemampuan penalaran matematik misalnya muncul dalam bentuk: (1) menarik kesimpulan secara logis, (2) menyusun dan menguji konjektur, menyusun pembuktian langsung, tak langsung, dan menggunakan induksi matematik, (3) merumuskan lawan contoh (*counter examples*), dan (4) menyusun argumen yang

valid. Kemampuan koneksi matematik misalnya muncul dalam bentuk: memahami representasi ekuivalen konsep yang sama (Sumarmo, 2010).

Salah satu pendekatan yang memperhatikan konstruksi-konstruksi mental yang dilakukan mahasiswa adalah pendekatan APOS (*Action-Process-Object-Schema*). Teori APOS mengasumsikan bahwa pengetahuan matematika yang dimiliki oleh seseorang merupakan hasil interaksi dengan orang lain dan hasil konstruksi mental orang tersebut dalam memahami ide matematik. Istilah konstruksi yang dimaksudkan di sini mirip dengan istilah akomodasi dan asimilasi dari Piaget (Asiala, *et al.*, 1997).

Aksi (*action*) adalah suatu transformasi objek mental untuk memperoleh objek mental lainnya. Transformasi dilakukan dengan melakukan aksi terhadap petunjuk eksternal, yang memberikan rincian mengenai langkah apa yang harus diambil. Seseorang dikatakan mengalami suatu aksi apabila seseorang tersebut memfokuskan proses mentalnya pada upaya untuk memahami suatu konsep yang diberikan. Seseorang yang memiliki pemahaman yang lebih baik mungkin dapat melakukan aksi lebih baik.

Ketika suatu *action* diulang dan individu melakukan refleksi terhadap aksi yang telah dilakukan, maka *action* diinteriorisasi menjadi *process*, yaitu konstruksi internal yang dibuat dengan melakukan *action* yang sama. Individu yang sudah mengkonstruksi *process* konsep dapat menguraikan atau bahkan membalikkan langkah dari transformasi tanpa benar-benar melakukannya. Berbeda dengan *action*, *process* dirasakan oleh individu sebagai hal yang internal dan di bawah kontrol individu sendiri.

Ketika individu melakukan refleksi pada operasi yang diterapkan pada *process* tertentu, menjadi sadar terhadap *process* sebagai suatu totalitas, menyadari bahwa transformasi (baik *action* maupun *process*) dapat dilakukan, dan benar-benar dapat mengkonstruksi transformasi itu, maka individu tersebut memaknai *process* sebagai *object*. Dalam kasus ini dikatakan bahwa *process* telah dirangkum (enkapsulasi) menjadi sebuah *object* kognitif. Seseorang dikatakan telah memiliki konsep *object* dari suatu konsep matematik apabila dia telah mampu memperlakukan konsep tersebut sebagai sebuah objek kognitif yang mencakup kemampuan melakukan aksi atas objek tersebut serta memberikan alasan atau penjelasan tentang sifat-sifatnya. Kemudian individu juga telah mampu mengurai kembali (de-enkapsulasi) suatu objek menjadi proses sebagaimana asalnya pada saat sifat objek tersebut akan digunakan.

Skema (*schema*) merupakan koleksi yang koheren dari *action*, *process*, *object*, dan *schema* lainnya, yang terhubung secara padu dan diorganisasi secara terstruktur dalam pikiran individu. *Schema* ini dapat diandalkan dalam menghadapi persoalan dalam bidang matematika. Perbedaan antara *schema* dengan konstruksi mental lainnya adalah seperti perbedaan dalam bidang biologi antara organ dengan sel. Keduanya adalah *object*, tetapi organ (*schema*) memberikan keperluan agar sel berfungsi sebagaimana mestinya. *Schema* dari seorang individu adalah keseluruhan pengetahuan yang ia hubungkan secara sadar maupun tidak sadar dengan konsep matematika tertentu.

Namun dalam pelaksanaan teori APOS terdapat beberapa kendala. Berdasarkan penelitian Nurlaelah (2009) dan Arnawa (2006) ditemukan bahwa

terdapat beberapa kendala dalam mengimplementasikan teori APOS, khususnya dalam aktivitas di laboratorium. Kendala tersebut terjadi karena mahasiswa tidak dapat mengkonstruksi pengetahuan secara optimal melalui aktivitas komputer. Kendala tersebut terutama terjadi ketika mahasiswa menyusun instruksi ISETL untuk suatu konsep. Misalnya terjadi sedikit kesalahan dalam pengetikan instruksi ISETL menyebabkan program yang disusun tidak jalan dan mahasiswa tidak dapat membuat kesimpulan dari konsep yang termuat dalam program itu. Akibatnya pada fase diskusi kelas, mahasiswa lebih tertarik untuk mendiskusikan penyusunan program komputernya dibandingkan dengan mendiskusikan konsep yang termuat dalam konsep tersebut. Kendala lainnya adalah ketidaksiapan *software* dan *hardware* pada saat diperlukan, sehingga secara keseluruhan menghambat pelaksanaan pembelajaran yang sudah direncanakan.

Selain itu, komputer (ISETL) juga sulit digunakan untuk meningkatkan kemampuan pembuktian matematik. Dalam pembuktian matematik, mahasiswa harus memahami definisi dan teorema dengan baik. Definisi dan teorema ini merupakan bagian dari premis pada pernyataan matematik yang akan dibuktikan. Untuk dapat membuktikan pernyataan tersebut mahasiswa harus dapat menentukan keterkaitan logis antara definisi dan teorema tersebut. Agar dapat melakukan hal ini mahasiswa harus memiliki intuisi dan kreativitas serta pengalaman terhadap keterkaitan antar konsep sehingga diperoleh kesimpulan. Hal ini agak sulit dilakukan dengan menggunakan pemrograman ISETL.

Berdasarkan hal di atas maka teori APOS sulit dilaksanakan untuk meningkatkan kemampuan pembuktian pada mata kuliah Analisis Real. Untuk itu

pada penelitian ini diadakan suatu pendekatan seperti pendekatan teori APOS. Konstruksi mental dari pendekatan ini tetap mengikuti seperti konstruksi mental APOS tapi dalam pelaksanaannya tidak menggunakan komputer. Kegiatan pada aktivitas kegiatan laboratorium pada APOS diganti dengan mengerjakan lembaran kerja terstruktur. Lembaran kerja terstruktur ini akan memandu mahasiswa dalam memahami suatu konsep yang akan dipelajari. Siklus pembelajaran dalam pendekatan ini meliputi: (1) aktivitas dalam mengerjakan lembaran kerja terstruktur, (2) diskusi kelas, dan (3) latihan. Untuk selanjutnya pendekatan ini dinamakan pendekatan M-APOS.

Dengan demikian, pembelajaran berdasarkan pendekatan M-APOS memberi peluang kepada mahasiswa untuk berkreaitivitas, memperoleh intuisi, dan berkolaborasi sehingga memperoleh pengalaman dalam bermatematika. Dari sini dapat dilihat bahwa, pendekatan ini cukup menjanjikan jika digunakan dalam meningkatkan kemampuan pembuktian matematik mahasiswa pada mata kuliah Analisis Real.

Mata kuliah Analisis Real diikuti oleh mahasiswa calon matematikawan dan calon guru. Calon matematikawan berada pada Program Studi Matematika dan calon guru berada pada Program Studi Pendidikan Matematika. Peranan utama pembuktian bagi calon matematikawan adalah untuk menemukan atau menciptakan matematika baru dan mensistematiskan pernyataan menjadi suatu sistem aksiomatis. Sementara itu bagi mahasiswa calon guru, peranan penting pembuktian adalah untuk mengkomunikasikan matematika. Untuk itu baik

mahasiswa calon matematikawan maupun calon guru harus memiliki kemampuan melakukan pembuktian matematik secara baik.

Pada kedua program studi, mahasiswa terbagi ke dalam tiga level kemampuan awal yaitu tinggi, sedang, dan rendah. Kemampuan awal diperkirakan akan sangat mempengaruhi hasil belajar yang diperoleh oleh mahasiswa. Mahasiswa level tinggi diperkirakan akan memperoleh hasil akhir yang tinggi pula dibandingkan dengan kemampuan awal sedang dan rendah. Demikian juga untuk mahasiswa dengan level kemampuan awal sedang akan memperoleh hasil akhir yang lebih baik dari level kemampuan awal rendah.

Faktor lain yang juga mempengaruhi hasil belajar adalah kemandirian belajar khususnya kemandirian belajar matematik. Kemandirian belajar matematik didefinisikan sebagai kecendrungan diri dalam belajar yang meliputi: perancangan, pengaturan, pemantauan, dan pandangan terhadap kemampuan diri dalam belajar matematik (Sumarmo, 2004). Individu yang memiliki kemandirian belajar yang tinggi cenderung belajar lebih baik. Mereka mampu memantau, mengatur dan mengevaluasi proses belajarnya secara efektif (Hargins: dalam Sumarmo, 2004). Hal ini sejalan dengan yang dikatakan oleh Darr dan Fisher (Ratnaningsih, 2007) bahwa kemandirian belajar mempunyai korelasi yang tinggi dengan keberhasilan siswa.

Namun dari kenyataan ditemui bahwa mahasiswa atau siswa belum mempunyai kemandirian belajar yang baik. Mereka masih sangat bergantung kepada dosen atau guru, sehingga kurang punya inisiatif dalam belajar. Dari hasil penelitian Ratnaningsih (2007) dan Qohar (2010) diperoleh bahwa secara rata-rata

kemandirian belajar matematik siswa tergolong sedang. Tapi untuk siswa level sedang dan rendah kemandirian belajar mereka masih rendah.

Dari uraian di atas perlu dilakukan penelitian tentang penggunaan pendekatan M-APOS dalam pembelajaran Analisis Real terutama untuk mengungkap apakah pembelajaran berdasarkan pendekatan M-APOS memberikan kontribusi yang signifikan terhadap peningkatan kemampuan pembuktian matematik dan kemandirian belajar matematik mahasiswa dibandingkan dengan pembelajaran secara konvensional. Analisis hasil penelitian akan ditinjau berdasarkan program studi dan kemampuan awal mahasiswa.

B. Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang masalah di atas, maka rumusan masalah dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Apakah capaian dan peningkatan kemampuan membaca bukti dan kemampuan mengkonstruksi bukti mahasiswa yang memperoleh pembelajaran berdasarkan pendekatan M-APOS lebih baik dibandingkan dengan mahasiswa yang memperoleh pembelajaran secara konvensional dalam Analisis Real, ditinjau dari: (a) keseluruhan mahasiswa, (b) program studi, dan (c) kelompok kemampuan awal?
2. Apakah capaian dan peningkatan kemandirian belajar matematik mahasiswa yang memperoleh pembelajaran berdasarkan pendekatan M-APOS lebih baik dibandingkan dengan mahasiswa yang memperoleh pembelajaran secara konvensional dalam Analisis Real, ditinjau dari: (a) keseluruhan mahasiswa, (b) program studi, dan (c) kelompok kemampuan awal?

3. Apakah terdapat interaksi antara pendekatan pembelajaran dengan program studi dan kemampuan awal mahasiswa dalam pencapaian pembuktian dan kemandirian belajar matematik?
4. Apakah terdapat asosiasi antara (a) kemampuan membaca bukti dengan kemampuan mengkonstruksi bukti, (b) kemampuan membaca bukti dengan kemandirian belajar matematik, dan (c) kemampuan mengkonstruksi bukti dengan kemandirian belajar matematik?

C. Tujuan Penelitian

Berdasarkan permasalahan yang disebutkan pada bagian rumusan masalah, maka tujuan dari penelitian ini adalah sebagai berikut.

1. Untuk menyelidiki apakah capaian dan peningkatan kemampuan membaca bukti dan kemampuan mengkonstruksi bukti mahasiswa yang memperoleh pembelajaran berdasarkan pendekatan M-APOS lebih baik dibandingkan dengan mahasiswa yang memperoleh pembelajaran secara konvensional dalam Analisis Real, ditinjau dari: (a) keseluruhan mahasiswa, (b) program studi, dan (c) kelompok kemampuan awal?
2. Untuk menyelidiki apakah capaian dan peningkatan kemandirian belajar matematik mahasiswa yang memperoleh pembelajaran berdasarkan pendekatan M-APOS lebih baik dibandingkan dengan mahasiswa yang memperoleh pembelajaran secara konvensional dalam Analisis Real, ditinjau dari: (a) keseluruhan mahasiswa, (b) program studi, dan (c) kelompok kemampuan awal.

3. Untuk menyelidiki apakah terdapat interaksi antara pendekatan pembelajaran dengan program studi dan kemampuan awal mahasiswa dalam pencapaian pembuktian dan kemandirian belajar matematik.
4. Untuk menyelidiki apakah terdapat asosiasi antara (a) kemampuan membaca bukti dengan kemampuan mengkonstruksi bukti, (b) kemampuan membaca bukti dengan kemandirian belajar matematik, dan (c) kemampuan mengkonstruksi bukti dengan kemandirian belajar matematik.

D. Manfaat Penelitian

Penelitian ini diharapkan dapat memberikan manfaat bagi berbagai pihak, yaitu:

1. Bagi mahasiswa, merupakan suatu pengalaman baru karena pendekatan pembelajaran ini menuntut mahasiswa mengkonstruksi sendiri pengetahuannya, sehingga pengalaman dan pengetahuan yang didapatnya bisa lebih bermakna dan bisa diterapkan untuk proses belajar yang akan dilaksanakan pada saat yang akan datang.
2. Bagi dosen, merupakan suatu pilihan pendekatan dalam proses pembelajaran sehingga proses belajar berlangsung lebih baik.
3. Bagi peneliti, dapat memperluas wawasan tentang pemilihan pendekatan pembelajaran matematika.

E. Definisi Operasional

Berikut didefinisikan istilah-istilah penting dalam penelitian ini.

1. Pembelajaran pendekatan M-APOS adalah pembelajaran mengikuti konstruksi mental APOS (*Action-Process-Object-Schema*) di mana mahasiswa belajar

dalam kelompok kecil dan menggunakan siklus pembelajaran: aktivitas mengerjakan lembar kerja terstruktur (A), diskusi kelas (D), dan latihan (L).

2. Kemampuan pembuktian matematik terdiri atas kemampuan membaca bukti dan kemampuan mengkonstruksi bukti.
3. Kemampuan membaca bukti adalah kemampuan menemukan kebenaran dan/atau kesalahan dari suatu pembuktian serta kemampuan memberikan alasan setiap langkah pembuktian.
4. Kemampuan mengkonstruksi bukti adalah kemampuan menyusun suatu bukti pernyataan matematik berdasarkan definisi, prinsip, dan teorema, serta dapat menuliskannya dalam bentuk pembuktian lengkap (pembuktian langsung atau tak langsung). Kemampuan ini meliputi: kemampuan mengidentifikasi premis beserta implikasinya dan kondisi yang mendukung; kemampuan mengorganisasikan dan memanipulasi fakta untuk menunjukkan kebenaran suatu pernyataan; kemampuan membuat koneksi antara fakta dengan unsur dari konklusi yang hendak dibuktikan.
5. Kemandirian belajar matematik adalah kecendrungan diri dalam belajar yang meliputi: Inisiatif belajar; Mendiagnosa kebutuhan belajar; Menetapkan tujuan belajar; Memonitor, mengatur dan mengontrol belajar; Mengatur dan mengontrol kognisi, motivasi, dan perilaku; Mencari dan memanfaatkan sumber belajar yang relevan; Memilih dan menerapkan strategi belajar; Mengevaluasi proses dan hasil belajar; *Self-Efficacy* (Konsep diri).
6. Kemampuan awal adalah kemampuan menguasai materi prasyarat mata kuliah Analisis Real.

BAB II

PEMBUKTIAN DAN PENDEKATAN M-APOS

A. Pembuktian

1. Pengertian Pembuktian dalam Matematika

Mendefinisikan pembuktian matematik adalah tugas yang sulit. Apa yang dimaksud dengan pembuktian matematik sangat bervariasi tergantung pada tujuan dari pembuktian ini ditujukan untuk apa. Pembuktian matematik dapat dilihat dalam dua cara, sebagai suatu proses aktual melalui konstruksi bukti dan sebagai produk akhir. Hersh (Nichols, 2008) memberikan definisi bukti yang melibatkan tiga bagian yang berbeda, yaitu: (1) untuk menguji, mencoba, dan menentukan keadaan sebenarnya, (2) sebuah argumen untuk meyakinkan pakar, dan (3) urutan transformasi kalimat formal yang dilakukan sesuai aturan pengambilan kesimpulan. Hersh mengklaim bahwa definisi kedua adalah definisi yang umum di masyarakat matematika, sedangkan definisi ketiga adalah yang umum pada logika matematika dan filsafat matematika.

Hanna dan Barbeau (VanSpronsen, 2008) sebelumnya menyatakan bahwa bukti adalah sejumlah berhingga langkah-langkah logis dari apa yang diketahui untuk mencapai suatu kesimpulan menggunakan aturan inferensi yang dapat diterima. Demikian pula, Weber (VanSpronsen, 2008) menyatakan, konstruksi bukti adalah tugas matematika di mana mahasiswa disediakan sejumlah informasi awal (misalnya asumsi, aksioma, definisi) dan diminta untuk menerapkan aturan menarik kesimpulan (misalnya mengingat fakta yang ditetapkan sebelumnya, menggunakan teorema) sampai kesimpulan yang dikehendaki diperoleh. Mingus

dan Grassl (VanSpronsen, 2008) mendefinisikan bukti sebagai suatu kumpulan pernyataan yang benar dan terkait bersama-sama dalam cara yang logis yang berfungsi sebagai argumen untuk meyakinkan kebenaran dari pernyataan matematika.

Dari pandangan humanistik ini, bukti dianggap sebagai alat untuk memengerjakan dan mengerti matematika (Hersh: Nichols, 2008). Hanna (Yoo, 2008) mendefinisikan pembuktian matematik sebagai sebuah argumen yang diperlukan untuk memvalidasi sebuah pernyataan, sebuah argumen untuk meyakinkan. Dari uraian di atas dapat dikatakan bahwa pembuktian matematik adalah sekumpulan argumen yang benar (definisi, asumsi, aksioma) yang terkait secara logis menurut aturan inferensi yang bertujuan untuk memvalidasi kebenaran suatu pernyataan.

2. Peranan Bukti dalam Matematika

Pembuktian memainkan peranan penting dalam matematika. Secara tradisional, peran bukti adalah untuk memverifikasi kebenaran pernyataan matematik. Bukti ini digunakan untuk menghilangkan ketidakpastian tentang proposisi matematik dan meyakinkan suatu pernyataan. Ada delapan peranan pembuktian dalam matematika yang dinyatakan oleh para ahli (VanSpronsen, 2008), yaitu: verifikasi (*verification*), penjelasan (*explanation*), sistematisasi (*systematisation*), penemuan (*discovery or invention*) komunikasi (*communication*), eksplorasi (*exploration*), konstruksi (*construction*), dan penyatuan (*incorporation*). Peranan yang paling dominan dari pembuktian dalam praktek bermatematika adalah verifikasi atau justifikasi.

Weber (2003) merangkum sejumlah tujuan pembuktian yang diajukan oleh para ahli pendidikan matematika, yaitu:

- 1) *Explanation*. Para ahli berpendapat bahwa eksplanasi terhadap kebenaran suatu pernyataan seharusnya menjadi tujuan utama dari pembuktian di dalam kelas matematika, sehingga mahasiswa dapat memahami mengapa suatu pernyataan itu adalah benar.
- 2) *Systematization*. Pembuktian digunakan untuk mengorganisasikan penemuan penemuan yang terpisah ke dalam suatu kesatuan. Dengan mengorganisasikan hasil-hasil tersebut ke dalam suatu sistem secara deduktif sehingga argumentasi-argumentasi yang keliru dan tidak lengkap dapat diperiksa kebenarannya.
- 3) *Communication*. Di lihat dari segi bahasa, pembuktian digunakan untuk mengkomunikasikan dan memperdebatkan gagasan-gagasan diantara mahasiswa atau antara mahasiswa dengan dosen,
- 4) *Invention*. Model-model atau teori-teori baru dikembangkan melalui eksplorasi dan menggunakan serangkaian definisi dan sistem aksiomatik secara logis.
- 5) *Justification*. Makna yang terkandung di dalam suatu definisi akan lebih mudah dipahami melalui proses justifikasi konsep-konsep esensial yang diturunkan dari definisi itu.
- 6) *Developing intuition*. Pemeriksaan secara logis terhadap konsep-konsep esensial dari suatu pernyataan berfungsi untuk mengembangkan intuisi pemahaman terhadap konsep yang sedang dipelajari.

Knuth (Nicols, 2008) menyatakan bahwa peran pembuktian adalah: 1) untuk memverifikasi bahwa suatu pernyataan itu benar, 2) untuk menjelaskan mengapa suatu pernyataan itu benar, 3) untuk mengkomunikasikan pengetahuan matematika, 4) untuk menemukan atau menciptakan matematika baru, atau 5) mensistematisasikan pernyataan menjadi sistem aksiomatis. Sementara Hanna dan Jahnke (Nichols, 2008) setuju dengan lima peran ini, tetapi dia lebih menekankan bahwa mengkomunikasikan pemahaman matematik adalah peran bukti yang paling signifikan dalam hal pendidikan matematika.

Dalam matematika, bukti tidak hanya digunakan untuk membuktikan kebenaran pernyataan individual tetapi juga untuk mengembangkan struktur aksiomatik pernyataan yang tidak terkait. Bell (Yoo, 2008) menyatakan bahwa peran yang paling khas dari bukti adalah untuk menghasilkan matematik sistematis menjadi sebuah sistem deduktif dari aksioma, definisi, dan teorema. Bukti sebagai sarana sistematis untuk membantu mengorganisasikan teorema yang tidak terkait secara logis dan menghasilkan struktur yang seragam teori matematika. De Villiers (Yoo, 2008) berpendapat bahwa matematikawan lebih peduli tentang sistematisasi teorema ke dalam sistem deduktif daripada membuktikan satu pernyataan. Untuk memahami hubungan logis yang mendasari antara pernyataan memberikan wawasan global teori matematika dan penerapan untuk disiplin ilmu lain.

Bukti telah memainkan peranan penting dalam menemukan pengetahuan matematik baru. Menurut De Villiers (Yoo, 2008), bukti bukan hanya sarana untuk memverifikasi hasil yang sudah ditemukan, tetapi sering juga merupakan sarana untuk mengeksplorasi, menganalisis, dan menemukan hasil yang baru. Wilder

(Yoo, 2008) berpendapat bahwa teorema matematik berasal dari intuisi dan bukti didefinisikan sebagai sebuah proses pengujian yang kita pakai untuk saran dari intuisi kita.

Dalam sejarah matematika, cabang-cabang baru matematika sering telah ditemukan atau diciptakan dengan menghasilkan bukti deduktif dari hipotesis (De Villiers, 1999). Bukti digunakan untuk generalisasi hasil dari penyelidikan empiris konjektur, dan kasus umum ini mengarah pada pengetahuan matematika baru. Akhirnya, bukti adalah sebuah cara komunikasi sangat diperlukan dalam ilmu matematika. Dalam realitas praktik penelitian, bukti digunakan untuk mengkomunikasikan hasil matematika di kalangan komunitas matematika.

Hanna (Yoo, 2008) menyatakan bukti sebagai proses sosial melibatkan presentasi dari hasil matematik, untuk mengkomunikasikan pemahaman kepada komunitas matematika lainnya dan menerimanya sebagai teorema baru ketika sebagian besar faktor-faktor berikut dipenuhi:

- 1) Mereka memahami teorema, konsep-konsep yang terkandung di dalamnya, pendahulunya yang logis, dan implikasinya. Tidak ada yang menyarankan itu tidak benar;
- 2) Teorema cukup signifikan untuk memiliki implikasi dalam satu atau lebih cabang matematika dan dengan demikian cukup penting dan berguna dalam menjamin analisis yang rinci;
- 3) Teorema konsisten dengan tubuh hasil matematika yang diterima;
- 4) Penulis memiliki reputasi tak tercela sebagai pakar dalam mata pelajaran tentang teorema;

5) Terdapat argumen matematik yang meyakinkan untuk itu (ketat atau sebaliknya), dari jenis yang ditemui sebelumnya.

Dengan demikian, bukti matematik disaring melalui interaksi sosial di kalangan matematikawan dan memberikan kontribusi untuk penciptaan, pembentukan, dan perbaikan pengetahuan matematika.

Hanna dan Jahnke (Nicols, 2008), setuju dengan lima kategori ini, dan berpendapat bahwa mengkomunikasikan pemahaman matematik adalah peran bukti yang paling signifikan dalam hal pendidikan matematika. Hersh (Nicols, 2008) berpendapat bahwa dalam komunitas matematika tujuan bukti adalah untuk meyakinkan.

Hanna & Jahnke (Nicols, 2008) memberikan beberapa kriteria yang digunakan matematikawan untuk menyatakan suatu bukti itu sah yaitu: (1) mereka memahami teorema dan (2) bahwa ada argumen matematik yang meyakinkan untuk itu. Mereka juga berpendapat bahwa menghasilkan bukti yang ketat tidak selalu dianggap lebih penting dari pada memahami memahami bukti dan keberatian dari dugaan. Demikian pula, Hersh (Nicols, 2008) mencatat bahwa dalam masyarakat matematika penentuan validitas dari sebuah bukti tergantung pada apakah meyakinkan komunitas pakar atau tidak. Secara umum, matematikawan lebih peduli dengan nilai dari hasil dari pada kekakuan argumen.

Dengan demikian, bukti dapat ditafsirkan sebagai kegiatan sosial di mana input dari masyarakat sangat penting. Validitas dari bukti bergantung pada bahwa bukti meyakinkan masyarakat yang relevan. Ini berarti bahwa ketika mempelajari, belajar dan melakukan pembuktian kita harus fokus pada apakah bukti meyakinkan

dan mempromosikan pemahaman atau tidak. Selain wacana digunakan untuk meyakinkan, menjelaskan, dan memvalidasi bagian besar dari kegiatan sosial dan merupakan komponen penting dalam penelitian pada pengajaran dan pembelajaran bukti.

Kapan sebuah bukti dianggap sah dan hasilnya dianggap sebagai kebenaran mutlak? Pertanyaan ini tidak memiliki jawaban yang sederhana, dan proses sosial dan penerimaan sebuah bukti dapat menjadi rumit. Perlu dibangun bukti-bukti yang tidak hanya benar, tapi juga menarik, bermakna, dan mudah dipahami secara keseluruhan. Menurut Hanna dan Barbeau (VanSpronsen, 2008), penerimaan sebagian besar bukti, tergantung pada ketelitian dan pengalaman para pembukti dan pembaca. Hanna (1991) menyatakan, bahwa kejelasan diterimanya suatu teorema oleh matematikawan adalah suatu proses sosial yang lebih berfungsi sebagai pemahaman dan signifikansi bukti yang ketat. Tall (1991) mengatakan bahwa banyak matematikawan menuntut bahwa bukti seharusnya tidak hanya bersifat logis, tapi juga dapat dijelaskan mengapa bukti tersebut berlaku.

Dalam bahasa yang sama, Bell (VanSpronsen, 2008) berpendapat, bahwa beberapa guru mengatakan bahwa untuk siswa bukti adalah apa yang membawa dirinya yakin. Bukti adalah kegiatan umum yang esensial menuju pencapaian keyakinan, meskipun mungkin dilakukan secara internal terhadap suatu keraguan pada intuisi. Raman (2003) menyatakan, bukti melibatkan argumen umum maupun khusus dan mendefinisikan istilah tersebut sebagai berikut: argumen khusus adalah "argumen yang menimbulkan pemahaman" dan argumen umum adalah "argumen yang cukup ketat untuk masyarakat matematika tertentu".

3. Kesulitan Mahasiswa dalam Pembuktian

Meskipun tidak ada kesepakatan pada apa itu bukti, tampaknya ada sebuah konsensus bahwa siswa tidak mengerti tentang bukti tersebut. Moore (VanSpronsen, 2008) mempelajari kesulitan-kesulitan yang dialami oleh mahasiswa dalam penulisan bukti. Kajian ini dilakukan dengan pengamatan dari perkuliahan transisi ke perkuliahan tentang bukti pada 16 orang mahasiswa. Dua dari jurusan matematika dan tiga dari jurusan pendidikan matematika dipilih sebagai peserta utama dalam studi ini. Moore menemukan tujuh sumber utama kesulitan siswa dalam menulis bukti yaitu:

- 1) Mahasiswa tidak mengetahui definisi, yaitu, mereka tidak dapat menyatakan definisi.
- 2) Mahasiswa memiliki sedikit pemahaman intuitif dari konsep.
- 3) Gambar konsep mahasiswa kurang memadai untuk melakukan pembuktian.
- 4) Mahasiswa tidak mampu, atau tidak mau, untuk menghasilkan dan menggunakan contoh sendiri.
- 5) Mahasiswa tidak tahu cara menggunakan definisi untuk mendapatkan struktur bukti secara menyeluruh.
- 6) Mahasiswa tidak mampu memahami dan menggunakan bahasa dan notasi matematika.
- 7) Mahasiswa tidak tahu bagaimana cara memulai bukti.

Moore menemukan bahwa kesulitan tersebut tidak selalu terjadi karena kurangnya pengetahuan konten. Dalam beberapa kasus siswa mengetahui definisi dan dapat menjelaskannya secara informal tetapi tidak bisa menggunakan definisi

tersebut untuk menulis bukti. Siswa yang diamati dalam penelitian ini sering terkendala ketika memulai sebuah bukti. Sumber-sumber kesulitan itu termasuk kekurangan dalam ketiga aspek pemahaman konsep (definisi, *image*, dan penggunaannya), kurangnya pengetahuan tentang logika dan metode bukti, dan hambatan bahasa dan notasi. Dia juga menemukan bahwa mahasiswa lebih terfokus pada prosedur daripada konten. Beberapa mahasiswa pada perkuliahan transisi yang sebelumnya telah mengambil perkuliahan tingkat atas yang memerlukan bukti. Semua dari mereka mengatakan bahwa mereka bergantung pada menghafal bukti karena mereka tidak mengerti bukti dan bagaimana menulis bukti.

Dalam sebuah studi dari 40 siswa sekolah menengah dan 13 mahasiswa, Baker (VanSpronsen, 2008) menemukan fakta yang mendukung keyakinan bahwa siswa lebih terfokus pada prosedur daripada konten pada pembuktian. Peserta diberi satu tugas menulis bukti dan empat tugas menganalisis bukti. Siswa lebih terfokus pada bentuk daripada pemahaman konsep-konsep yang terlibat dalam bukti tersebut. Hanya 4 mahasiswa dan 5 siswa SMU yang dapat membuat bukti menurut aturan penarikan kesimpulan yang baik.

Gibson (Nichols, 2008) mempelajari mahasiswa yang menggunakan diagram dalam proses konstruksi pembuktian. Ia menemukan bahwa mahasiswa biasanya digunakan diagram setelah mereka menjadi terjebak dalam rangka 1) menilai kebenaran dari sebuah pernyataan, 2) memahami informasi, 3) menemukan ide, dan 4) menuliskan ide. Ia menemukan bahwa meskipun siswa tidak selalu berhasil menyelesaikan bukti (ada waktu terbatas untuk wawancara) para siswa

yang menggunakan diagram lebih berhasil menyelesaikan bagian tugas dari proses konstruksi bukti.

4. Metoda Pembuktian

Definisi memainkan peranan penting di dalam matematika. Topik-topik baru matematika selalu diawali dengan membuat definisi baru. Misalnya, teori fungsi kompleks diawali dengan mendefinisikan bilangan imajiner i , yaitu $i^2 = -1$. Berdasarkan dari definisi ini dihasilkan sejumlah teorema beserta akibat-akibatnya yang perlu dibuktikan. Pada kasus yang sederhana, kadangkala teorema pada suatu buku ditetapkan sebagai definisi pada buku yang lain, begitu juga sebaliknya. Selanjutnya, untuk memahami materi selanjutnya dibutuhkan prasyarat pengetahuan logika matematika. Hernadi (2009) memberikan jenis-jenis bukti sebagai berikut.

a. Bukti langsung

Bukti langsung ini biasanya diterapkan untuk membuktikan teorema yang berbentuk implikasi $p \Rightarrow q$. Di sini p sebagai hipotesis digunakan sebagai fakta yang diketahui atau sebagai asumsi. Selanjutnya, dengan menggunakan p harus ditunjukkan bahwa berlaku q . Secara logika, pembuktian langsung ini ekuivalen dengan membuktikan bahwa pernyataan $p \Rightarrow q$ benar jika diketahui p benar.

Contohnya: Buktikan bahwa jika n adalah bilangan genap maka n^2 adalah bilangan genap.

b. Bukti tak langsung

Bukti tak langsung terdiri dari dua jenis yaitu dengan kontradiksi dan kontraposisi. Membuktikan tidak langsung dengan kontradiksi didasarkan pada

kebenaran pernyataan implikasi $p \Rightarrow q$, maka harus dibuktikan bahwa pernyataan $\sim p \Rightarrow q$ salah. Dalam membuktikan kebenaran implikasi $p \Rightarrow q$ harus dimulai dari diketahui p dan $\sim q$. Kemudian dari dua asumsi ini akan sampai pada suatu kontradiksi.

Membuktikan tidak langsung dengan kontraposisi berdasarkan nilai kebenaran suatu implikasi $p \Rightarrow q$ ekuivalen dengan nilai kebenaran kontraposisinya $\sim q \Rightarrow \sim p$. Jadi pekerjaan membuktikan kebenaran pernyataan implikasi dibuktikan melalui kontraposisinya.

c. Bukti kosong

Bila hipotesis p pada implikasi $p \Rightarrow q$ sudah bernilai salah maka implikasi $p \Rightarrow q$ selalu benar apapun nilai kebenaran dari q . Jadi jika dapat ditunjukkan bahwa p salah maka kita telah berhasil membuktikan kebenaran $p \Rightarrow q$.

Dalam teori himpunan dikenal definisi berikut :

Diberikan dua himpunan A dan B . Himpunan A dikatakan himpunan bagian dari B , ditulis $A \subset B$ jika pernyataan berikut dipenuhi : "jika $x \in A$ maka $x \in B$ ". Suatu himpunan dikatakan himpunan kosong jika ia tidak mempunyai anggota. Berdasarkan definisi ini akan dibuktikan bahwa himpunan kosong merupakan himpunan bagian dari himpunan apapun. Buktinya sebagai berikut.

Misalkan $A = \emptyset$ suatu himpunan kosong dan B himpunan sebarang. Akan ditunjukkan bahwa pernyataan " jika $x \in A$ maka $x \in B$ " bernilai benar. Karena A himpunan kosong maka pernyataan p yaitu $x \in A$ selalu bernilai salah karena tidak mungkin ada x yang menjadi anggota himpunan kosong. Karena p salah maka

terbuktilah kebenaran pernyataan ” jika $x \in A$ maka $x \in B$ ”, yaitu $A \subset B$. Karena B himpunan sebarang maka bukti selesai.

d. Bukti trivial

Jika pada implikasi $p \Rightarrow q$, dapat ditunjukkan bahwa q benar maka implikasi ini selalu bernilai benar apapun nilai kebenaran dari p . Jadi jika dapat ditunjukkan bahwa q benar maka telah berhasil dibuktikan kebenaran dari $p \Rightarrow q$.

e. Bukti eksistensial

Ada dua tipe bukti eksistensial ini, yaitu konstruktif dan tak konstruktif. Pada metoda konstruktif, eksistensinya ditunjukkan secara eksplisit. Sedangkan pada metoda takkonstruktif, eksistensinya tidak diperlihatkan secara eksplisit. Misalnya buktikan, ada bilangan irrasional x dan y sehingga x^y rasional

f. Bukti dengan *counter example*

Untuk membuktikan suatu konjektur kadang-kadang diperlukan penjabaran yang cukup panjang dan sulit. Tapi jika dapat ditemukan satu saja kasus yang tidak memenuhi konjektur tersebut maka selesailah buktinya.

g. Bukti dengan induksi matematika

Prinsip induksi matematika ini adalah untuk mengambil kesimpulan terhadap pernyataan tentang n dimana n berjalan pada himpunan bilangan bulat, biasanya himpunan bilangan asli. Biasanya pernyataan tentang bilangan asli n dinyatakan dengan $P(n)$. Untuk membuktikan $P(n)$ dengan induksi matematika, ada dua langkah yaitu:

Langkah 1: Buktikan $P(n)$ benar untuk $n = 1$.

Langkah 2: Misalkan $P(n)$ benar untuk $n = k$, kemudian buktikan $P(n)$ benar untuk $n = k + 1$.

h. Bukti dua arah

Kadang-kadang suatu pernyataan dapat berupa bi-implikasi, $p \leftrightarrow q$. Ada dua kemungkinan bi-implikasi bernilai benar $p \leftrightarrow q$ yaitu p benar dan q benar, atau p salah dan q salah. Dalam prakteknya, pernyataan ini terdiri dari $p \Rightarrow q$ dan $q \Rightarrow p$. Membuktikan kebenaran bi-implikasi $p \leftrightarrow q$ berarti membuktikan kebenaran kedua implikasi $p \Rightarrow q$ dan $q \Rightarrow p$. Selanjutnya dapat menggunakan bukti langsung, taklangsung atau mungkin dengan kontradiksi.

5. Membaca Matematika

Pembahasan mengenai keterampilan membaca matematika memuat dua hal pokok, yaitu keterampilan membaca sebagai proses yang akan dikembangkan dan matematika itu sendiri sebagai obyek yang akan dibaca dan dipelajari. Menurut Sumarmo (2003) keterampilan membaca tidak sekadar melafalkan kata demi kata atau kalimat demi kalimat tanpa arti, namun lebih dari itu, pembaca harus memahami makna yang dibacanya. Untuk memiliki keterampilan membaca matematika dengan baik, pembaca harus memahami hakekat matematika dengan baik.

Karakteristik penting dari matematika adalah sifatnya yang menekankan pada proses deduktif yang memerlukan penalaran logis dan aksiomatik, yang mungkin diawali dengan proses induktif yang meliputi penyusunan konjektur, model matematika, analogi dan atau generalisasi, berdasarkan pengamatan terhadap sejumlah data. Karakteristik berikutnya, ditinjau dari segi susunan unsur-unsurnya,

matematika dikenal pula sebagai ilmu yang terstruktur dan sistimatis dalam arti bagian-bagian matematika tersusun secara hierarkhis dan terjalin dalam hubungan fungsional yang erat, sifat keteraturan yang indah dan kemampuan analisis kuantitatif, yang akan membantu menghasilkan model matematika yang diperlukan dalam pemecahan masalah dalam berbagai cabang ilmu pengetahuan dan masalah kehidupan sehari-hari (Sumarmo, 2003).

Selanjutnya Sumarmo (2003) menyatakan bahwa berdasarkan karakteristik matematika di atas, maka akan memberikan implikasi sebagai berikut: (1) keterampilan membaca matematika merupakan proses yang aktif, dinamik, dan generatif, (2) kualitas keterampilan membaca matematika berkaitan dengan pemahaman terhadap simbol, gambar, dan atau pola matematika, pemahaman terhadap konsep matematika dan keterkaitannya, pemahaman terhadap sifat berfikir matematik yang induktif dan deduktif, serta pemahaman terhadap sifat keteraturan susunan unsur-unsurnya, (c) pengembangan keterampilan membaca matematika berkaian erat dengan pengembangan kemampuan berfikir matematik, atau kemampuan melaksanakan proses dan tugas matematik (*doing math, mathematical task*).

Ditinjau dari tuntutan kedalaman kegiatan matematik yang termuat dalam teks yang dibaca, keterampilan membaca matematik dapat digolongkan dalam dua jenis yaitu yang tingkat rendah (*low-order mathematical reading*) dan yang tingkat tinggi (*high-order mathematical reading*). Sebagai contoh, membaca teks yang memuat operasi hitung sederhana, menerapkan rumus matematika secara langsung, mengikuti prosedur (algoritma) yang baku, tergolong pada jenis membaca

matematika rutin atau tingkat rendah. Sedang membaca matematika yang memuat kemampuan memahami idea matematika secara lebih mendalam, mengamati data dan menggali idea yang tersirat, menyusun konjektur, analogi, dan generalisasi, menalar secara logik, menyelesaikan masalah (*problem solving*), berkomunikasi secara matematik; dan mengkaitkan idea matematik dengan kegiatan intelektual lainnya tergolong pada berfikir matematik yang non-rutin atau tingkat tinggi (*high order mathematical reading*) (Sumarmo, 2003).

Keterampilan membaca matematika merupakan satu bentuk kemampuan komunikasi matematik dan mempunyai peran sentral dalam pembelajaran matematika. Melalui membaca siswa mengkonstruksi makna matematik (Siegel, Borasi, Ponzi, Sanrige, dan Smith dalam Sumarmo, 2003) sehingga siswa belajar bermakna secara aktif. Istilah membaca diartikan sebagai serangkaian keterampilan untuk menyusun intisari informasi dari suatu teks. Selama kegiatan membaca, pembaca membentuk dan dibentuk secara aktif oleh teks. Ini berarti bahwa pembaca tidak hanya sekadar melafalkan sajian tertulis saja, tetapi dengan menggunakan pengetahuannya, minatnya, nilainya, dan perasaannya pembaca mengembangkan makna yang termuat dalam teks yang bersangkutan. Seorang pembaca dikatakan memahami teks yang dibacanya secara bermakna apabila ia dapat mengemukakan idea dalam teks tersebut secara benar dalam bahasanya sendiri. Kemampuan mengemukakan idea matematik dari suatu teks baik dalam bentuk lisan atau tulisan merupakan bagian penting dari standar komunikasi matematik yang perlu dimiliki siswa. Keterampilan membaca teks matematik

siswa dapat diestimasi melalui kemampuan mereka menyampaikan secara lisan atau menuliskan kembali idea matematik dengan bahasanya sendiri.

Ditinjau dari tujuannya, Moesono (Sumarmo, 2003) membagi membaca atas empat jenis, yaitu: *Literal reading*, *Interpretative reading*, *Critical reading* dan *Creative reading*.

Literal reading, yaitu membaca dengan tujuan untuk memperoleh informasi untuk pemahaman lebih lanjut.

Interpretative reading yaitu membaca dengan tujuan untuk menarik kesimpulan dari isi teks baik yang tersurat maupun yang tersirat.

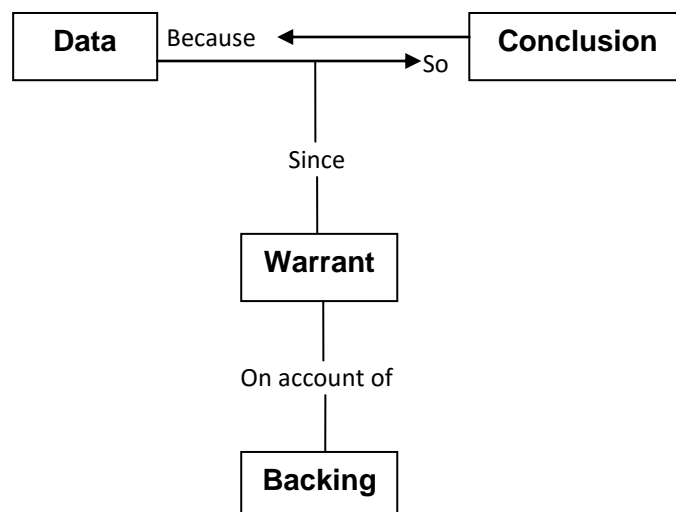
Critical reading yaitu membaca dengan tujuan untuk mengevaluasi isi teks, membandingkan gagasan yang terdapat dalam teks, dan membuat kesimpulan hasil bandingannya. Kemampuan membaca jenis ini memerlukan kemampuan *lateral reading* dan *interpretative reading*.

Creative reading yaitu membaca dengan tujuan untuk mampu menyusun gagasan baru, pandangan baru, pendekatan baru berdasarkan imajinasi terhadap isi teks yang dibaca. Kemampuan membaca jenis ini memerlukan kemampuan *lateral reading*, *interpretative reading*, dan *critical reading*.

6. Struktur Argumentasi suatu Pembuktian

Pernyataan dalam pembuktian matematik dipandang sebagai salah satu bentuk argumentasi dengan struktur mengikuti struktur argumentasi yang dikembangkan oleh Toulmin (Kusnandi, 2008). Berikut ini akan diuraikan model struktur argumentasi dan bagaimana kaitannya dengan struktur pembuktian matematik.

Toulmin (Kusnandi, 2008) mengajukan skema yang menggambarkan struktur suatu argumentasi. Langkah pertama dalam setiap argumentasi menurut Toulmin adalah menyatakan suatu *standpoint* (pendirian) berupa pendapat atau pernyataan. Dalam istilah Toulmin, pendapat ini diberi nama *claim*. Selanjutnya, *claim* yang diajukan harus didukung oleh *data* di mana hubungan antara data dengan *claim* dijustifikasi atau dijembatani oleh suatu *warrant* (aturan). *Data – warrant – claim* merupakan struktur dasar suatu argumentasi. Unsur bantuan lainnya seperti *backing* diperlukan ketika *warrant* yang digunakan tidak langsung dapat diterima. Struktur dasar argumentasi dari Toulmin ini digunakan Krummheuer (Hoyles & Kuhemann, 2003) untuk menganalisis argumentasi. Istilah *claim* diganti dengan *conclusion* seperti pada Gambar 2.1.



Gambar 2.1 Skematik untuk Menganalisis

Sumber: Krummheuer (Kusnandi, 2008)

Dalam hubungan dengan pembuktian matematik, pernyataan-pernyataan di dalam pembuktian matematik dipandang sebagai salah satu bentuk argumentasi.

Dalam argumentasi pembuktian matematik, sebagai data adalah premis-premis, sedangkan yang menjadi *warrant* adalah definisi atau teorema. Diagram skematik ini dapat digunakan sebagai model untuk membantu memahami dan mengkonstruksi pembuktian suatu pernyataan matematik.

Dalam menilai kebenaran suatu bukti, ada sejumlah faktor penting yang diperlukan dalam menulis matematika secara baik. Menurut Gillman; Steenrod *et al.*; Knuth *et al.* (Arnawa, 2004), faktor-faktor itu adalah: (1) Bukti harus berdiri sendiri, (2) Bukti harus ditulis dengan teliti dan hati-hati, (3) Buktikan sesuai dengan yang diperlukan, (4) Hati-hati dalam mengatakan ‘ini jelas’, (5) Gunakan kalimat lengkap dan tata bahasa yang tepat, (6) Gunakan tanda ‘=’ dengan baik, (7) Definisikan semua lambang matematika dan istilah yang kita gunakan, (8) Pecahlah bukti yang panjang menjadi beberapa langkah-langkah pembuktian, dan (9) Bedakan penulisan formal dengan penulisan informal.

Untuk melengkapi sembilan faktor-faktor penting dalam menulis matematika, Bloch (Arnawa, 2004) memberikan berbagai cara atau tip dalam menulis matematika yang didasarkan pada pengamatannya dalam memeriksa hasil tes maupun pekerjaan rumah mahasiswanya. Cara-cara tersebut adalah (1) Jangan menuliskan lambang-lambang matematika setelah tanda baca, (2) Sedapat mungkin usahakan untuk tidak menggunakan lambang-lambang logika matematika seperti \vee , \wedge , \exists , \forall dan \Rightarrow sebagai singkatan kata dalam menulis pembuktian karena lambang-lambang logika matematika membuat bukti lebih sulit untuk dibaca, (3) Gunakan tanda ‘=’ hanya pada persamaan, (4) Gunakan notasi yang konsisten

dalam keseluruhan pembuktian, (5) Menampilkan rumus-rumus yang panjang dalam bentuk tampilan yang pendek-pendek sangatlah penting, (6) Jangan gunakan tanda titik dua dalam tulisan matematika pada tempat yang tidak semestinya, dan (7) Nama teorema atau lema dan sebagainya diawali dengan huruf besar.

B. Pendekatan APOS dan M-APOS

Teori APOS muncul dengan tujuan untuk memahami mekanisme abstraksi reflektif yang diperkenalkan oleh Piaget yang menjelaskan perkembangan berpikir logis matematika untuk anak-anak. Ide tersebut kemudian dikembangkan untuk konsep matematika yang lebih luas, terutama untuk membentuk perkembangan berpikir logis bagi mahasiswa. Menurut Dubinsky dan McDonald (2001), teori APOS ini sangat berguna untuk mencoba mengerti pembelajaran mahasiswa dalam berbagai topik pada kalkulus, aljabar abstrak, statistika, matematika diskrit, dan topik-topik matematika lainnya.

Teori APOS dapat digunakan secara langsung dalam membandingkan keberhasilan atau kegagalan individu yang berkaitan dengan konstruksi mental yang telah terbentuk untuk suatu konsep matematika. Misalkan ada dua individu yang kelihatannya sama-sama menguasai suatu konsep matematika. Dengan teori APOS dapat dideteksi lebih lanjut siapa yang penguasaan konsep matematikanya lebih baik, yaitu jika seseorang dapat menjelaskan lebih lanjut konsep tersebut maka ia berada pada tingkat yang lebih baik daripada yang satunya. Sementara itu, jika konstruksi mental APOS untuk suatu konsep matematika telah dikonstruksi oleh individu dengan baik, maka dapat dipakai untuk membuat prediksi yang

mantap dari individu tersebut akan berhasil menggunakan konsep matematika tersebut dalam menyelesaikan suatu persoalan.

Teori APOS mengasumsikan bahwa pengetahuan matematika yang dimiliki oleh seseorang merupakan hasil interaksi dengan orang lain dan hasil konstruksi mental orang tersebut dalam memahami ide matematik. Konstruksi mental tersebut adalah: aksi (*action*), proses (*process*), objek (*object*), dan skema (*schema*) yang disingkat dengan APOS. Istilah konstruksi dan rekonstruksi yang dimaksudkan di sini mirip dengan istilah akomodasi dan asimilasi dari Piaget (Asiala *et al.*, 1997).

Berikut ini diberikan deskripsi yang lebih lengkap untuk masing-masing konstruksi mental yang dimaksud.

Aksi (*Action*)

Aksi didefinisikan Asiala, *et al.* (1997) sebagai berikut:

An action is a transformation of mathematical objects that is performed by an individual according to some explicit algorithm and hence is seen by the subject as externally driven

Aksi adalah suatu transformasi objek mental untuk memperoleh objek mental lainnya. Transformasi dilakukan dengan melakukan aksi terhadap petunjuk eksternal, yang memberikan rincian mengenai langkah apa yang harus diambil. Seseorang dikatakan mengalami suatu aksi apabila seseorang tersebut memfokuskan proses mentalnya pada upaya untuk memahami suatu konsep yang diberikan. Seseorang yang memiliki pemahaman yang lebih baik mungkin dapat melakukan aksi lebih baik. Sebagai contoh, mahasiswa tidak dapat menafsirkan suatu situasi sebagai fungsi kecuali jika ia mempunyai formula untuk menghitung

nilai fungsinya, maka individu tersebut terbatas hanya pada *action* konsep fungsi yang telah diberikan.

Proses (*Process*)

Proses dijelaskan Asiala, *et al.* (1997) sebagai berikut:

When the individual re-acts on the action and constructs an internal operation that performs the same transformation then we say that the action has been interiorized to a process

Ketika suatu *action* diulang dan individu melakukan refleksi terhadap aksi yang telah dilakukan, maka *action* diinteriorisasi menjadi *process*, yaitu konstruksi internal yang dibuat dengan melakukan *action* yang sama. Individu yang sudah mengkonstruksi *process* konsep dapat menguraikan atau bahkan membalikkan langkah dari transformasi tanpa benar-benar melakukannya. Berbeda dengan *action*, *process* dirasakan oleh individu sebagai hal yang internal dan dibawah kontrol individu sendiri. Dalam kasus fungsi, *process* konsep memungkinkan individu untuk memaknai fungsi sebagai satu atau lebih variabel bebas (*input*), melakukan satu atau lebih operasi pada *input* dan memperoleh hasil itu sebagai *output*, atau nilai dari variabel terikat.

Objek (*Object*)

Objek dijelaskan Asiala, *et al.* (1997) sebagai berikut:

When it becomes necessary to perform actions on a process, the subject must encapsulate it to become a total entity, or an object. In many mathematical operations, it is necessary to de-encapsulate an object and work with the process from which it came

Ketika individu melakukan refleksi pada operasi yang diterapkan pada *process* tertentu, menjadi sadar terhadap *process* sebagai suatu totalitas, menyadari

bahwa transformasi (baik *action* maupun *process*) dapat dilakukan, dan benar-benar dapat mengkonstruksi transformasi itu, maka individu tersebut memaknai *process* sebagai *object*. Dalam kasus ini dikatakan bahwa *process* telah dirangkum (enkapsulasi) menjadi sebuah *object* kognitif. Seseorang dikatakan telah memiliki konsep *object* dari suatu konsep matematik apabila dia telah mampu memperlakukan konsep tersebut sebagai sebuah objek kognitif yang mencakup kemampuan melakukan aksi atas objek tersebut serta memberikan alasan atau penjelasan tentang sifat-sifatnya. Kemudian individu juga telah mampu mengurai kembali suatu objek menjadi proses sebagaimana asalnya pada saat sifat objek tersebut akan digunakan. Dalam kasus fungsi, *process* fungsi telah di-enkapsulasi menjadi *object*, ketika individu dapat memikirkan tentang memanipulasi fungsi seperti penjumlahan, perkalian, atau membentuk himpunan fungsi.

Skema (*Schema*)

Skema didefinisikan Asiala, *et al.* (1997) sebagai berikut:

A schema is a coherent collection of processes, objects and previously constructed schemas, that is invoked to deal with a mathematical problem situation. As with encapsulated processes, an object is created when a schema is thematized to become another kind of object which can also be de-thematized to obtain the original contents of the schema

Skema (*schema*) merupakan koleksi yang koheren dari *action*, *process*, *object*, dan *schema* lainnya, yang terhubung secara padu dan diorganisasi secara terstruktur dalam pikiran individu. *Schema* ini dapat diandalkan dalam menghadapi persoalan dalam bidang matematika. Perbedaan antara *schema* dengan konstruksi mental lainnya adalah seperti perbedaan dalam bidang biologi antara organ dengan sel. Keduanya adalah *object*, tetapi organ (*schema*) memberikan keperluan agar sel

berfungsi sebagaimana mestinya, *Schema* dari seorang individu adalah keseluruhan pengetahuan yang ia hubungkan secara sadar maupun tidak sadar dengan konsep matematika tertentu. Seorang individu dapat mempunyai *schema* untuk fungsi, *schema* untuk turunan, dan lain-lain. *Schema* sendiri dapat diperlakukan sebagai *object* dan termuat dalam organisasi *schema* pada tingkatan yang lebih tinggi. Sebagai contoh, fungsi-fungsi dapat dinyatakan sebagai himpunan, operasi pada himpunan tersebut dapat didefinisikan, dan sifat-sifat dari operasinya dapat diperiksa. Semua ini dapat diorganisasi untuk membentuk *schema* untuk ruang fungsi yang kemudian dapat diterapkan kepada konsep-konsep seperti ruang dual, ruang pemetaan linear, dan aljabar fungsi.

Dalam melaksanakan teori APOS, kita selalu berpedoman kepada *genetic decomposition*. Capetta (2007) mendefinisikan *genetic decomposition* sebagai berikut:

Genetic decomposition is defined as possible set of mental constructions that can used to develop understanding of a given mathematical concepts

Dubinsky (2002) menyarankan bagaimana harusnya model ini digunakan dalam mendesain pembelajaran. Saran-saran tersebut adalah:

- 1) Guru sebaiknya mengamati siswa seperti mencoba mempelajari konsep matematika tertentu, mengidentifikasi variasi struktur konsep atau konsep *image* yang dikembangkan siswa.
- 2) Guru sebaiknya menggunakan pengetahuan konsep matematika personalnya bersama dengan teori APOS dan mengamati apa yang telah di uraikan dalam

- (1), untuk mengembangkan *genetic decomposition* yang merepresentasikan cara siswa mengkonstruksi sebuah struktur kognitif.
- 3) Guru sebaiknya mendesain pembelajaran yang memungkinkan siswa untuk melengkapi langkah-langkah dalam *genetic decomposition*. Guru harus menggunakan aktivitas yang memunculkan jenis abstraksi reflektif yang cocok.
- 4) Proses ini harus diulang, dengan *genetic decomposition* yang secara kontinu diperbaiki dan ditingkatkan.

Teori APOS digunakan untuk meningkatkan kemampuan berpikir matematika tingkat tinggi dan juga dapat dipakai sebagai *tool* untuk mengkaji pemahaman siswa pada konsep matematika yang lebih dasar. Teori APOS sangat cocok untuk meningkatkan pemahaman konsep matematika mahasiswa, seperti: fungsi; topik aljabar abstrak seperti operasi biner, grup, subgroup, koset, grup normal; topik matematika diskrit seperti induksi matematika, permutasi, simetri; topik statistika seperti rata-rata, standar deviasi, dan teorema limit pusat; topik teori bilangan seperti nilai tempat dalam bilangan basis- n , keterbagian, perkalian dan konversi bilangan dari suatu basis ke basis yang lain; topik kalkulus seperti limit, aturan rantai, pemahaman turunan secara grafik, dan barisan tak hingga (Dubinsky, 2002).

Berikut akan ditampilkan beberapa penelitian dalam topik selain aljabar yang menggunakan teori APOS. Asiala, *et al* (1997) meneliti tentang pengembangan pemahaman grafik fungsi dan turunan mahasiswa. Dalam kajian ini peneliti melakukan eksplorasi tentang pemahaman garfik kalkulus dengan menggunakan teori APOS. Dari hasil penelitian diperoleh bahwa mahasiswa yang

menggunakan teori APOS lebih sukses dalam memahami grafik fungsi dan turunannya.

Dubinsky dan Tall (2002) meneliti tentang pengembangan proses konsepsi fungsi siswa dengan menggunakan teori APOS. Penelitian menunjukkan bahwa penggunaan teori APOS secara substansial dapat meningkatkan pemahaman siswa tentang konsep fungsi.

Carmona (Dubinsky dan Tall, 2002) dalam disertasinya meneliti tentang konsep garis singgung dan hubungannya dengan turunan. Mahasiswa yang dilibatkan adalah mahasiswa yang telah mengikuti perkuliahan kalkulus. Dari penelitian ditemukan bahwa beberapa konsepsi siswa sangat resistan berubah jika mereka diajar dengan menggunakan komputer atau metode non-tradisional. Konsepsi awal mereka akan kembali muncul ketika mereka dihadapkan dengan matematika formal.

Dalam perspektif pembelajaran dengan teori APOS, mahasiswa diceburkan secara sengaja ke dalam lingkungan ketidakseimbangan yang memuat sebanyak mungkin materi yang akan dipelajari. Gagasannya adalah semuanya disajikan secara menyeluruh (holistik), sebagai lawan dari penyajian yang berurutan. Setiap individu (atau kelompok kecil) mencoba untuk memahami situasi, yaitu mereka mencoba menyelesaikan masalah, menjawab pertanyaan atau memahami gagasannya.

Konteks sosial yang merupakan acuan dari teori APOS, diimplementasikan dalam pembelajaran melalui penerapan pembelajaran kooperatif. Mahasiswa dikelompokkan di awal semester ke dalam kelompok-kelompok kecil yang terdiri

dari tiga sampai lima orang, untuk mengerjakan semua tugas-tugas perkuliahan seperti praktikum, diskusi kelas, pekerjaan rumah, dan latihan-latihan soal secara bersama-sama.

Strategi pembelajaran dalam teori APOS juga dimaksudkan agar mahasiswa mencoba untuk melakukan refleksi pada apa yang mereka kerjakan melalui keseluruhan struktur perkuliahan. Pendekatan pedagogi yang diperkirakan mendukung maksud ini adalah siklus pembelajaran ADL, yaitu: aktivitas, diskusi kelas, dan latihan. Dengan disain ini, perkuliahan dibagi menjadi beberapa sesi dan setiap sesi dilaksanakan selama seminggu. Dalam seminggu itu kegiatannya meliputi kegiatan di laboratorium komputer dan kegiatan di ruang kelas. Pekerjaan rumah diberikan di luar jam kuliah.

Aktivitas

Kegiatan mahasiswa di laboratorium komputer dalam mengerjakan tugas pemrograman secara berkelompok dimaksudkan untuk membantu konstruksi mental yang diusulkan oleh analisis teoritik. Anggota kelompok terdiri dari 3 – 5 orang dengan kemampuan yang heterogen yaitu yang berkemampuan tinggi, sedang, dan rendah. Dengan demikian diharapkan terjadi interaksi yang baik di antara anggota kelompok, sehingga diperoleh hasil yang optimal. Pengerjaan tugas-tugas pemrograman komputer tidak dibatasi waktunya (dapat dikerjakan di luar jadwal praktikum yang resmi). Tujuan utama kegiatan ini lebih ditekankan pada usaha untuk memberikan mahasiswa suatu pengalaman dasar dari pada meminta mereka untuk memberikan jawaban yang benar. Melalui kegiatan ini

mahasiswa memperoleh pengalaman yang berhubungan dengan konsep matematika yang akan dikembangkan di dalam perkuliahan.

Pada penelitian ini kegiatan mengerjakan tugas dengan ISETL diganti dengan mengerjakan lembar kerja terstruktur. Tugas-tugas yang ada dalam lembar kerja terstruktur akan memandu mahasiswa untuk memahami konsep dasar yang dibutuhkan sebelum materi baru diberikan. Kemudian mahasiswa juga diberikan pengantar dari materi tersebut. Dengan kegiatan ini mahasiswa diharapkan lebih siap dalam menerima konsep baru yang akan diberikan.

Diskusi Kelas

Kegiatan di dalam ruangan kelas di mana mereka masih bekerja dalam kelompok yang sama, diisi dengan kegiatan berupa pengerjaan tugas-tugas yang masih berhubungan dengan kegiatan yang telah diberikan di laboratorium komputer atau kegiatan mengerjakan lembar kerja terstruktur. Keterlibatan dosen dalam diskusi pada masing-masing kelompok dimaksudkan untuk memberi kesempatan kepada mahasiswa untuk melakukan refleksi pada apa yang sudah mereka kerjakan di laboratorium dan pada tugas yang sedang mereka kerjakan. Dalam diskusi kelas ini, dosen juga memberikan definisi, penjelasan, dan tinjauan untuk mengaitkan dengan apa-apa yang telah pikirkan mahasiswa.

Latihan

Pada siklus ini mahasiswa diberikan latihan-latihan soal untuk dikerjakan secara berkelompok pada kelompok yang sama. Kegiatan ini diharapkan dikerjakan di luar kegiatan kelas dan laboratorium dan dapat berupa pekerjaan rumah tentang tugas laboratorium atau tugas mengerjakan lembar kerja

terstruktur. Maksud dari latihan-latihan ini adalah untuk mengokohkan konsep-konsep matematika yang telah dikonstruksi, menerapkan konsep-konsep yang sudah dipelajari, dan mulai berpikir tentang hal-hal yang akan dipelajari pada kegiatan berikutnya.

Tugas-tugas pemrograman yang dikerjakan pada kegiatan di laboratorium berkenaan dengan konsep-konsep matematika tertentu yang akan dipelajari, jenis-jenis tugas pemrogramannya yang diberikan disesuaikan dengan usaha untuk membantu konstruksi mental APOS. Ada beberapa bahasa pemrograman yang dapat dipakai untuk membuat tugas-tugas pemrograman, misalnya *Mathematica*, *Maple*, *Spreadsheet*, dan *Interactive SET Language (ISETL)*.

Pendekatan M-APOS muncul karena terdapat beberapa kendala dalam menerapkan teori APOS. Berdasarkan penelitian Nurlaelah (2009) dan Arnawa (2006) ditemukan bahwa terdapat beberapa kendala dalam mengimplementasikan teori APOS, khususnya dalam aktivitas di laboratorium. Kendala tersebut terjadi karena mahasiswa tidak dapat mengkonstruksi pengetahuan secara optimal melalui aktivitas komputer. Kendala tersebut terutama terjadi ketika mahasiswa menyusun instruksi ISETL untuk suatu konsep. Misalnya terjadi sedikit dalam pengetikan instruksi ISETL menyebabkan program yang disusun tidak jalan dan mahasiswa tidak dapat membuat kesimpulan dari konsep yang termuat dalam program itu. Karena hasil yang diharapkan tidak dapat diperoleh dari ISETL. Akibatnya pada fase diskusi kelas, mahasiswa lebih tertarik untuk mendiskusikan penyusunan program komputernya dibandingkan dengan mendiskusikan konsep yang termuat dalam konsep tersebut. Kendala lainnya adalah ketidaksiapan *software* dan

hardware pada saat diperlukan, sehingga secara keseluruhan menghambat pelaksanaan pembelajaran yang sudah direncanakan.

Selain itu, komputer (ISETL) juga sulit digunakan untuk meningkatkan kemampuan pembuktian matematik. Dalam pembuktian matematik, mahasiswa harus memahami definisi dan teorema dengan baik. Definisi dan teorema ini merupakan bagian dari premis pada pernyataan matematik yang akan dibuktikan. Untuk dapat membuktikan pernyataan tersebut mahasiswa harus dapat menentukan keterkaitan logis antara definisi dan teorema tersebut. Agar dapat melakukan hal ini mahasiswa harus memiliki intuisi dan kreativitas serta pengalaman terhadap keterkaitan antar konsep sehingga diperoleh kesimpulan. Hal ini agak sulit dilakukan dengan menggunakan pemrograman ISETL.

Berdasarkan hal di atas maka teori APOS sulit dilaksanakan untuk meningkatkan kemampuan pembuktian pada mata kuliah Analisis Real. Untuk itu pada penelitian ini diadakan suatu pendekatan seperti pendekatan teori APOS. Konstruksi mental dari pendekatan ini tetap mengikuti seperti konstruksi mental APOS tapi dalam pelaksanaannya tidak menggunakan komputer. Kegiatan pada aktivitas kegiatan laboratorium pada APOS diganti dengan mengerjakan lembaran kerja terstruktur. Lembaran kerja terstruktur ini akan memandu mahasiswa dalam memahami suatu konsep yang akan dipelajari. Siklus pembelajaran dalam pendekatan ini adalah: (1) aktivitas dalam mengerjakan lembaran kerja terstruktur, (2) diskusi kelas, dan (3) latihan. Untuk selanjutnya pendekatan ini dinamakan pendekatan M-APOS.

C. Beberapa Hasil Studi yang Relevan

Terdapat beberapa penelitian yang mengkaji tentang kemampuan pembuktian pada mahasiswa di antaranya adalah Arnawa (2006) dan Kusnandi (2008). Beberapa penelitian yang dikembangkan di luar negeri yang relevan dengan penelitian ini diantaranya studi Raman (2003), Tucker (1999), Weber (2002), dan VanSpronsen (2008), sedangkan penelitian yang mengkaji tentang penerapan pendekatan modifikasi APOS dilakukan oleh Nurlaelah (2009).

Arnawa (2006) mengajukan pembelajaran berdasarkan Teori APOS untuk meningkatkan kemampuan pembuktian mahasiswa dalam Aljabar Abstrak. Karakteristik pendekatan ini adalah (1) pengetahuan matematika dikonstruksi oleh mahasiswa; (2) menggunakan komputer; (3) belajar dalam kelompok kecil; (4) menggunakan siklus pembelajaran: aktivitas laboratorium, diskusi kelas, dan latihan. Hasil penelitiannya menunjukkan bahwa mahasiswa yang memperoleh pembelajaran Aljabar Abstrak berdasarkan Teori APOS mempunyai kemampuan pembuktian yang lebih baik dibandingkan dengan mahasiswa yang memperoleh pembelajaran secara biasa.

Kusnandi (2008) melakukan penelitian tentang kemampuan mahasiswa membaca bukti dengan pemahaman yang komprehensif, dan mengkonstruksi bukti dengan langkah yang logis dengan menggunakan strategi abduktif-deduktif (PSAD) pada mata kuliah teori bilangan. Pada pembelajaran ini mahasiswa dituntut untuk dapat mengelaborasi *data* yang diberikan secara deduktif, dan merumuskan suatu kondisi secara abduktif agar *conclusion* (target akhir) dapat tercapai. Hasil penelitian menunjukkan bahwa tidak terdapat perbedaan

kemampuan membaca bukti antara mahasiswa yang memperoleh pembelajaran dengan PSAD dengan mahasiswa yang belajar secara konvensional. Sedangkan untuk kemampuan membuktikan, terdapat perbedaan yang sangat signifikan antara mahasiswa yang belajar dengan PSAD, dengan mahasiswa yang belajar secara konvensional. Sementara kemandirian belajar mahasiswa kelas eksperimen dan kelas kontrol yang memperoleh pembelajaran yang berbeda tidak menunjukkan perbedaan yang signifikan baik di Program Studi Pendidikan Matematika maupun di Program Studi Matematika.

Tucker (1999) menyarankan agar mahasiswa yang mengikuti perkuliahan kalkulus di tingkat pertama seharusnya sudah diperkenalkan dengan bagaimana memahami suatu pembuktian, tetapi tidak untuk mengkonstruksi pembuktian. Alasan yang dikemukakan Tucker adalah bahwa pembuktian dapat membantu mahasiswa dalam memahami konsep dan mempercayai hasil-hasil yang disajikan. Sedangkan untuk mengkonstruksi bukti, Tucker menyarankan agar dosen dapat memilih topik-topik tertentu yang memungkinkan mahasiswa dapat melakukan pembuktian.

Weber (2002) berhasil mengidentifikasi kelemahan mahasiswa di dalam mengkonstruksi suatu pembuktian. Mahasiswa telah mengetahui dan dapat menerapkan fakta-fakta yang diberikan, tetapi mereka tidak dapat menghasilkan suatu pembuktian yang valid. Hal ini disebabkan mahasiswa kurang memiliki pengetahuan strategis yang diperlukan untuk memilih inferensi-inferensi yang diturunkan dari fakta yang diberikan, agar tiba pada target akhir yang diharapkan. Pengetahuan strategis itu meliputi pengetahuan tentang teknik-teknik pembuktian,

pengetahuan tentang pentingnya dan kegunaan suatu teorema, dan pengetahuan tentang kapan strategi sintaktis digunakan. Strategi sintaktis dapat dilakukan dengan cara membuka premis yang diberikan dengan menggunakan definisi, dan atau memanipulasi simbol-simbol yang bersesuaian dengan informasi yang diberikan.

Raman (2003) telah menghasilkan kerangka kerja teoritis untuk mengkarakterisasikan gagasan yang dimunculkan mahasiswa dalam melakukan pembuktian. Tiga gagasan penting yang berhasil diidentifikasi: (1) *Heuristic Idea*, yaitu gagasan yang didasarkan pada pemahaman informal seperti data empiris atau visualisasi gambar, di dalam membuktikan kebenaran suatu pernyataan. (2) *Procedural Idea*, yaitu gagasan yang digunakan di dalam menghasilkan suatu pembuktian berdasarkan pada kelogisan dan manipulasi formal yang membawa pada pembuktian formal. (3) *Key Idea*, yaitu gagasan yang muncul di dalam menghasilkan pembuktian formal berdasarkan aturan-aturan yang bisa dipertanggungjawabkan.

VanSpronsen (2008) mengkaji dan menggambarkan tentang proses rinci dan strategi yang digunakan selama proses penulisan bukti. Penelitian ini melibatkan 18 orang penulis bukti yang diberi tugas individu dan menjelaskannya secara lisan apa yang mereka tulis. Dari hasil ditemukan bahwa subjek mempunyai strategi sendiri-sendiri dalam menulis bukti. Terdapat tiga strategi yang dominan dilakukan subjek yaitu dengan menggunakan contoh, dengan menggunakan persamaan, dan dengan menggunakan visualisasi. Strategi keempat yang

digunakan adalah *self-regulation strategies* yang secara keseluruhan sukses bila menggunakan konten pengetahuan murni dan tanpa kesalahan perhitungan.

Nurlaelah (2009) meneliti tentang pencapaian daya dan kreativitas matematik mahasiswa calon guru melalui pembelajaran berdasarkan teori APOS. Penelitian ini melibatkan 114 orang mahasiswa calon guru yang mengikuti mata kuliah Struktur Aljabar. Penelitian ini adalah jenis quasi eksperimen dengan desain postes grup kontrol dengan menggunakan model pembelajaran APOS dan modifikasi APOS (M-APOS). Tujuannya adalah untuk menganalisa pencapaian daya dan kreativitas matematik mahasiswa. Dari hasil penelitian diperoleh bahwa model pembelajaran APOS dan modifikasi APOS (M-APOS) dan kemampuan awal mahasiswa memberikan peranan yang signifikan terhadap pencapaian daya dan kreativitas matematik mahasiswa. Terdapat asosiasi yang rendah antara daya dan kreativitas matematik mahasiswa. Mahasiswa dari model APOS dan M-APOS lebih aktif dan lebih siap untuk belajar dan bekerja dari kelas ekspositori.

D. Kemandirian Belajar

Kemandirian belajar sebagai salah satu objek tak langsung, diterjemahkan dari istilah *self-regulated learning*. Sumarmo (2004) mendefinisikan kemandirian belajar sebagai proses perancangan dan pemantauan yang seksama terhadap proses kognitif dan afektif dalam menyelesaikan suatu tugas akademik. Dalam hal ini, kemandirian belajar bukan merupakan kemampuan mental atau keterampilan akademik tertentu, melainkan merupakan proses pengarahan diri dalam mentransformasikan kemampuan mental ke dalam keterampilan akademik tertentu. Terdapat tiga karakteristik utama yang termuat dalam pengertian kemandirian

belajar di atas, yaitu (1) Individu merancang belajarnya sendiri sesuai dengan keperluan atau tujuan belajar individu yang bersangkutan; (2) Individu memilih strategi dan melaksanakan rancangan belajarnya; (3) Individu memantau kemajuan belajarnya sendiri, mengevaluasi hasil belajarnya dan dibandingkan dengan standard tertentu.

Woolfolk (Qohar, 2010) menyatakan bahwa faktor-faktor yang mempengaruhi kemandirian belajar meliputi : pengetahuan (*knowledge*), motivasi (*motivation*) dan disiplin pribadi (*self-discipline*). Agar dapat mempunyai kemandirian dalam belajar siswa harus mempunyai pengetahuan tentang dirinya, tentang subyek yang akan dipelajari, tentang tugas, tentang strategi belajar dan tentang aplikasi dari subyek yang dipelajari. Siswa dengan kemandirian belajar yang baik juga mempunyai motivasi belajar yang tinggi. Mereka tertarik untuk mengerjakan berbagai tugas yang diberikan karena menyukainya. Mereka mengetahui mengapa mereka belajar, sehingga mereka melakukan dan memilih sesuatu merupakan dorongan dari diri mereka sendiri dan bukan karena dikontrol oleh orang lain. Siswa dengan kemandirian belajar yang baik di samping memiliki pengetahuan dan motivasi, juga mempunyai disiplin pribadi yang baik. Corno (Woolfolk, 2007) menyatakan bahwa motivasi menandakan adanya komitmen, sedangkan disiplin pribadi menandakan adanya keberlanjutan. Kedisiplinan yang dimiliki siswa akan menjamin bahwa tindakan yang dilakukan akan berlangsung secara terus menerus sehingga bisa didapatkan hasil yang lebih baik.

Pintrich (dalam Qohar, 2010) menyatakan ada 4 jenis strategi umum harus digunakan para siswa untuk mengembangkan kemandirian belajar mereka, yaitu:

(1) strategi kemandirian berpikir, strategi ini berfokus pada memonitor, mengontrol dan mengatur pikiran; (2) strategi kemandirian motivasi dan perasaan, strategi ini berfokus pada memonitor, mengontrol dan mengatur motivasi, emosi maupun perasaan; (3) strategi kemandirian perilaku, strategi ini berfokus pada memonitor, mengontrol dan mengatur perilaku; (4) strategi kemandirian konteks, strategi ini berfokus pada memonitor, mengontrol dan mengatur konteks dan lingkungan.

Bandura (Sumarmo, 2004) menyarankan tiga langkah dalam melaksanakan kemandirian belajar yaitu: mengamati dan mengawasi diri sendiri, membandingkan posisi diri dengan standar tertentu, dan memberikan respon sendiri (respon positif dan respon negatif). Walaupun tidak sama persis, pendapat Bandura tersebut hampir identik dengan pendapat Zimmerman (1998) yang menyatakan bahwa kemandirian dalam belajar merupakan suatu proses terbuka yang memerlukan aktivitas siklis (*cyclical activity*) dalam tiga fase: pemikiran awal (*forethought*), kontrol kemauan (*volitional control*), dan refleksi diri (*self reflection*). Fase pemikiran awal mengacu pada proses-proses yang akan berpengaruh dan keyakinan-keyakinan awal sebelum belajar. Fase kedua, kontrol kemauan, merupakan proses-proses yang terjadi selama belajar yang mempengaruhi konsentrasi dan kinerja. Fase ketiga, refleksi diri, merupakan proses-proses yang terjadi setelah belajar dan reaksi pebelajar terhadap pengalaman belajar tersebut. Fase refleksi diri ini, pada gilirannya akan pengaruh pada pemikiran tentang upaya pembelajaran berikutnya, sehingga merupakan suatu siklus yang utuh dalam kemandirian belajar. Selanjutnya, Zimmerman (2001) juga menambahkan bahwa

siswa yang memiliki kemandirian belajar mempunyai kemandirian dalam berfikir, merasakan (*feelings*) dan bertindak untuk mencapai tujuan pembelajaran.

Menurut Sumarmo (2004) kemandirian belajar merupakan proses perancangan dan pemantauan diri yang seksama terhadap proses kognitif dan afektif dalam menyelesaikan suatu tugas akademik. Selanjutnya, Hargis (Sumarmo, 2004) juga mengemukakan bahwa yang dimaksud dengan kemandirian belajar bukan merupakan kemampuan mental atau ketrampilan akademik tertentu, tapi merupakan proses pengarahan diri dalam mentransformasi kemampuan mental ke dalam ketrampilan akademik tertentu.

Schunk dan Zimmerman (Sumarmo, 2004) menyatakan bahwa terdapat tiga phase utama dalam siklus kemandirian belajar yaitu : merancang belajar, memantau kemajuan belajar selama menerapkan rancangan, dan mengevaluasi hasil belajar diri sendiri secara lengkap. Sedangkan menurut Woolfolk (2007), tahap-tahap belajar mandiri ada empat, yaitu : menganalisa tugas/pekerjaan, menetapkan tujuan dan menyusun rencana, menentukan taktik dan strategi untuk memenuhi tugas, dan pengaturan belajar.

Berdasarkan uraian tentang kemandirian belajar tersebut, dalam penelitian ini kemandirian belajar siswa dalam matematika dikembangkan berdasarkan sembilan aspek kemandirian belajar yaitu: inisiatif belajar; mendiagnosa kebutuhan belajar; menetapkan target atau tujuan belajar; memonitor, mengatur dan mengontrol belajar; memandang kesulitan sebagai tantangan; memanfaatkan dan

mencari sumber yang relevan; memilih dan menerapkan strategi belajar; mengevaluasi proses dan hasil belajar; serta *self efficacy* (konsep diri).

Lowry (Sumarmo, 2004) merangkumkan sejumlah saran dari beberapa penulis tentang memfasilitasi berkembangnya SRL pada mahasiswa, yaitu dengan:

1. Membantu mahasiswa mengidentifikasi titik awal suatu proyek belajar dan mengembangkan bentuk ujian dan laporan yang relevan.
2. Mendorong mahasiswa untuk memandang pengetahuan dan kebenaran secara kontekstual, memandang nilai kerangka kerja sebagai konstruk sosial, dan memahami bahwa mereka dapat bekerja secara perorangan atau dalam kelompok.
3. Menciptakan suasana kemitraan dengan mahasiswa melalui negosiasi tujuan, strategi, dan kriteria evaluasi.
4. Jadilah seorang manejer belajar dari pada sebagai penyampai informasi.
5. Membantu mahasiswa menyusun kebutuhannya untuk merumuskan tujuan belajarnya.
6. Mendorong mahasiswa menyusun tujuan yang dapat dicapai melalui berbagai cara dan tawarkan beberapa contoh *performance* yang berhasil.
7. Menyiapkan contoh-contoh pekerjaan yang sudah berhasil.
8. Meyakinkan bahwa mereka menyadari tujuan, strategi belajar, sumber, dan kriteria evaluasi yang telah mereka tetapkan.
9. Melatih mahasiswa berinkuiri, mengambil keputusan, mengembangkan dan mengevaluasi diri.

10. Bertindak sebagai pembimbing dalam mencari sumber.
11. Membantu menyesuaikan sumber dengan kebutuhan mahasiswa.
12. Membantu mahasiswa mengembangkan sikap dan perasaan positif.
13. Memahami tipe personaliti dan jenis belajar mahasiswa.
14. Menggunakan teknik pengalaman lapangan dan pemecahan masalah sebagai dasar pengalaman belajar orang dewasa.
15. Mengembangkan pedoman belajar yang berkualitas tinggi termasuk kit belajar terprogram.
16. Memberi dorongan agar mahasiswa berfikir kritis, misalnya melalui seminar.
17. Menciptakan suasana keterbukaan dan saling percaya untuk membangun penampilan yang lebih baik.
18. Membantu mahasiswa menjaga kode etik untuk menghindarkan diri dari tindakan manipulasi.
19. Bertindak secara etik misalnya tidak menyarankan *self-regulated learning* kalau hal itu tidak sesuai dengan kebutuhan siswa

Selain saran kepada guru, Lowry (Sumarmo, 2004) juga memberikan saran kepada lembaga untuk memajukan SRL pada sivitasnya, antara lain dengan:

1. Menyelenggarakan panel diskusi untuk membahas kurikulum dan kriteria penilaian.
2. Menyelenggarakan studi tentang kecenderungan minat mahasiswa.
3. Mengembangkan suatu instrumen yang untuk menilai dan penampilan mahasiswa dibandingkan dengan penampilan yang diharapkan.

4. Menyediakan peluang agar mahasiswa merefleksikan apa yang telah mereka pelajari.
5. Memahami keberadaan mahasiswa dan memberi pujian ketika mereka berhasil.
6. Memajukan jaringan belajar, siklus belajar, dan pertukaran pengalaman belajar.
7. Menyelenggarakan pelatihan tentang *self-directed learning* dan memperluas peluang untuk implementasinya.

Melengkapi saran-saran di atas, Schunk (Sumarmo, 2004) juga mengajukan saran kepada guru atau orang tua untuk membantu siswa atau anak agar menjadi *self-regulated learner* dengan cara:

1. Menciptakan suasana belajar yang kondusif dan menghindarkan sesuatu yang akan mengganggu belajar siswa/anak misalnya *video-game* atau permainan yang tidak relevan.
2. Memberi tahu siswa/anak bagaimana cara mengikuti suatu petunjuk.
3. Mendorong siswa/anak agar memahami metode dan prosedur yang benar dalam menyelesaikan suatu tugas.
4. Membantu siswa mengatur waktu.
5. Menumbuhkan rasa percaya diri pada siswa/anak bahwa mereka mampu mengerjakan tugas yang diberikan.
6. Mendorong siswa/anak untuk mengontrol emosi dan tidak mudah panik ketika menyelesaikan tugas atau menghadapi kesulitan.
7. Memperlihatkan kemajuan yang telah dicapai siswa/anak.
8. Membantu siswa/anak cara mencari bantuan belajar.

Berdasarkan penelitian, Shunck dan Zimmerman (Sumarmo, 2004) mengemukakan saran kepada guru untuk membantu siswa menjadi *expert learners* antara lain melalui:

1. Penggunaan strategi yang jelas dalam pembelajaran, misalnya strategi mengulang, elaborasi, organisasional, pemahaman dan pemantauan, dan strategi afektif.
2. Pengembangan keterampilan berfikir reflektif misalnya cara bertanya pada diri sendiri.
3. Latihan menerapkan SRL secara ekstensif dalam waktu lama dan diikuti dengan pemberian umpan-balik yang informatif dan korektif.

Hampir serupa dengan Shunck dan Zimmerman, Paris dan Winograd (Sumarmo, 2004) mengajukan lima prinsip untuk memajukan *self-regulated learning* pada guru dan siswa yaitu:

1. Penilaian diri (*self-appraisal*) mengantar pada pemahaman belajar yang lebih dalam. Prinsip tersebut meliputi: a) menganalisis gaya dan strategi belajar personal dan membandingkannya dengan gaya dan strategi orang lain; b) mengevaluasi apa yang diketahui dan yang tidak diketahui, dan mempertajam pemahaman diri untuk memajukan upaya yang efisien, dan c) penilaian diri secara periodik terhadap proses dan hasil belajar, pemantauan kemajuan belajar, dan meningkatkan perasaan kemampuan diri (*self-efficacy*).
2. Pengaturan diri dalam berfikir, berupaya, dan memilih pendekatan yang fleksibel dalam pemecahan masalah. SRL bukan sekadar urutan langkah-

langkah pengerjaan, namun merupakan rangkaian kegiatan yang dinamik dalam latihan pemecahan masalah,

3. *Self-regulated learning* dan *self-regulated thinking* tidak statis, tetapi berkembang seiring dengan waktu, dan berubah berdasarkan pengalaman. *Self-regulated* dapat ditingkatkan melalui refleksi dan diskusi.
4. SRL dapat diajarkan melalui berbagai cara antara lain melalui: a) pembelajaran langsung, refleksi terarah, dan diskusi metakognitif; b) penggunaan model dan kegiatan yang memuat analisis belajar yang reflektif, dan c) diskusi tentang peristiwa yang dialami personal.
5. SRL membentuk pengalaman naratif dan identitas personal.

Melengkapi saran-saran yang telah dikemukakan, Butler (Sumarmo, 2004) menyatakan bahwa guru hendaknya membantu siswa melaksanakan siklus SRL secara fleksibel dan adaptif yaitu: menganalisis tugas, memilih dan menerapkan strategi, memantau diri dan merefleksi. Selama siklus berlangsung guru hendaknya:

1. Membantu siswa mengkonstruksi: pengetahuan metakognitif tentang: tugas-tugas akademiknya, strategi untuk menganalisis tugas, strategi untuk tugas yang khusus misalnya belajar matematika, keterampilan menerapkan strategi, dan strategi memantau diri sendiri dan strategi menggunakan umpan balik.
2. Mendorong siswa menumbuhkan berfikir metakognitif dalam menentukan tujuan tugas akademik; strategi untuk menganalisis tugas; pengetahuan metakognitif tentang tugas yang khusus; keterampilan menerapkan strategi, dan strategi untuk memonitor diri dan strategi untuk umpan balik.

3. Mendorong persepsi diri yang positif terhadap kemampuan diri dan motif pandangan diri. Persepsi keunggulan diri siswa akan mempengaruhi tujuan yang disusun siswa, komitmen siswa terhadap tujuan, dan strategi belajar yang ditempuhnya.

Ungkapan pengetahuan dan berfikir metakognitif di sini menyatakan bahwa individu yang belajar itu menyadari semua langkah yang dikerjakannya, dan ia merefleksi atau memonitor serta mengevaluasi sendiri terhadap langkah-langkah yang dikerjakannya, melalui pertanyaan-pertanyaan kepada dirinya sendiri. Proses kognitif tersebut, menumbuhkan keyakinan pada dirinya bahwa yang dikerjakannya benar atau masih perlu diperbaiki. Pada tahap selanjutnya akan tumbuh *self-efficacy* pada diri siswa dan memberikan hasil belajar yang lebih berkualitas. Dengan demikian akan berlangsung siklus yang berkelanjutan antara proses dan produk: SRL, *self-efficacy*, SDL, dan hasil belajar yang bermakna.

E. Hipotesis Penelitian

Berdasarkan permasalahan yang telah diuraikan sebelumnya, maka hipotesis dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Mahasiswa yang memperoleh pembelajaran Analisis Real dengan pendekatan M-APOS memperoleh capaian kemampuan membaca bukti dan kemampuan mengkonstruksi bukti yang lebih baik secara signifikan dibandingkan dengan mahasiswa yang memperoleh pembelajaran secara konvensional, ditinjau dari: (a) keseluruhan mahasiswa, (b) program studi, dan (c) kelompok kemampuan awal.

2. Mahasiswa yang memperoleh pembelajaran Analisis Real dengan pendekatan M-APOS mempunyai peningkatan kemampuan membaca bukti dan kemampuan mengkonstruksi bukti yang lebih tinggi secara signifikan dibandingkan dengan mahasiswa yang memperoleh pembelajaran secara konvensional, ditinjau dari: (a) keseluruhan mahasiswa, (b) program studi, dan (c) kelompok kemampuan awal.
3. Mahasiswa yang memperoleh pembelajaran Analisis Real berdasarkan pendekatan M-APOS memperoleh capaian kemandirian belajar matematik yang lebih baik secara signifikan dibandingkan dengan mahasiswa yang memperoleh pembelajaran secara konvensional, ditinjau dari: (a) keseluruhan mahasiswa, (b) program studi, dan (c) kelompok kemampuan awal?
4. Mahasiswa yang memperoleh pembelajaran Analisis Real berdasarkan pendekatan M-APOS memperoleh peningkatan kemandirian belajar matematik yang lebih baik secara signifikan dibandingkan dengan mahasiswa yang memperoleh pembelajaran secara konvensional, ditinjau dari: (a) keseluruhan mahasiswa, (b) program studi, dan (c) kelompok kemampuan awal?
5. Terdapat interaksi antara pendekatan pembelajaran dengan program studi dan kemampuan awal mahasiswa dalam pencapaian pembuktian dan kemandirian belajar matematik.
6. Terdapat asosiasi antara (a) kemampuan membaca bukti dengan kemampuan mengkonstruksi bukti, (b) kemampuan membaca bukti dengan kemandirian belajar matematik, dan (c) kemampuan mengkonstruksi bukti dengan kemandirian belajar matematik.

BAB III

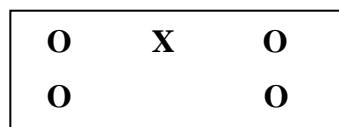
METODE PENELITIAN

A. Disain Penelitian

Penelitian ini bertujuan untuk melihat pengaruh penerapan pendekatan M-APOS terhadap kemampuan pembuktian matematik dalam pembelajaran Analisis Real. Penelitian ini merupakan penelitian kuasi eksperimen, walaupun demikian juga akan dilakukan analisis kualitatif. Analisis kualitatif dimaksudkan untuk mengkaji lebih jauh hal-hal yang terjadi dibalik kesimpulan yang diperoleh melalui uji statistik.

Penelitian ini melibatkan empat kelas yang terdiri dari dua kelas Program Studi Matematika dan dua kelas Program Studi Matematika. Dari dua kelas tersebut akan dipilih secara acak satu kelas untuk dijadikan kelas eksperimen dan satu kelas lagi sebagai kelas kontrol. Kelas eksperimen diberikan perlakuan berupa pembelajaran Analisis Real melalui pendekatan M-APOS yang, sedangkan kelas kontrol pola pembelajarannya berjalan seperti biasa.

Untuk mengetahui besarnya capaian dan peningkatan kemampuan pembuktian dalam pembelajaran Analisis Real, maka semua mahasiswa yang terlibat dalam penelitian ini diberikan pretes dan postes. Dengan demikian, disain penelitiannya adalah *The Static-Group Pretest-Posttest Design* (Fraenkel dan Wallen, 2007) sebagai berikut.



Gambar 3.1. Disain Penelitian

Keterangan:

O = Pretes = Postes

X = Pembelajaran Analisis Real melalui pendekatan M-APOS

Variabel dalam penelitian ini terdiri dari tiga bagian, yaitu variabel bebas, kontrol, dan terikat. Variabel terikatnya adalah kemampuan membaca bukti dan mengkonstruksi bukti serta skala kemandirian belajar matematik. Variabel bebasnya adalah pembelajaran melalui pendekatan M-APOS dan pembelajaran konvensional. Variabel kontrolnya adalah kemampuan awal (tinggi, sedang, dan rendah).

Keterkaitan ketiga variabel tersebut dapat dinyatakan dalam bentuk matriks

Tabel 3.1 dan Tabel 3.2 berikut.

Tabel 3.1. Keterkaitan Variabel-Variabel Penelitian antara Kemampuan Membaca Bukti dan Mengkonstruksi Bukti, Pendekatan Pembelajaran, dan Kemampuan Awal

KEMAMPUAN		MEMBACA BUKTI (CaB)				MENGKONSTRUKSI BUKTI (SiB)			
PEMBELAJARAN		M-APOS (M)		KONVENSIONAL (K)		M-APOS (M)		KONVENSIONAL (K)	
KELOMPOK PRODI		MAT (N)	P MAT (D)	MAT (N)	P MAT (D)	MAT (N)	P MAT (D)	MAT (N)	P MAT (D)
KEMAMPUAN AWAL	Tinggi (T)								
	Sedang (S)								
	Rendah (R)								
		CaBMN	CaBMD	CaBKN	CaBKD	SiBMN	SiBMD	SiBKN	SiBKD
		CaBM		CaBK		SiBM		SiBK	

Tabel 3.2. Keterkaitan Variabel-Variabel Penelitian antara Kemandirian Belajar Matematika, Pendekatan Pembelajaran, dan Kemampuan Awal

KEMAMPUAN		KEMANDIRIAN BELAJAR MATEMATIK (KBM)			
PROGRAM STUDI		MATEMATIKA		PEND. MATEMATIKA	
PENDEKATAN PEMBELAJARAN		M-APOS (M)	KONVENSIONAL (K)	M-APOS (M)	KONVENSIONAL (K)
KEMAMPUAN AWAL	Tinggi (T)				
	Sedang (S)				
	Rendah (R)				

B. Populasi dan Sampel Penelitian

Populasi pada penelitian ini adalah mahasiswa jurusan Matematika FMIPA UNP Padang yang mengambil mata kuliah Analisis Real. Sedangkan sampelnya adalah mahasiswa semester 5 yang mengambil mata kuliah Analisis Real pada semester Juli-desember 2010 yang terdiri dari 4 kelas yang terdiri 2 kelas Program Studi Matematika dan 2 kelas Program Studi Pendidikan Matematika. Keempat kelas ini diberikan tes pengetahuan awal dengan materi materi prasyarat untuk mata kuliah Analisis Real. Kemudian berdasarkan hasil tes tersebut beberapa orang dipindahkan ke kelas yang baru sehingga diperoleh empat kelas yang mempunyai kemampuan awal yang sama. Dari keempat kelas tersebut dipilih secara acak dua untuk dijadikan sebagai kelas eksperimen dan kelas kontrol pada masing-masing program studi.

C. Pengembangan Instrumen

Penelitian ini menggunakan beberapa jenis instrumen, yaitu tes membaca bukti, tes mengkonstruksi bukti, dan skala kemandirian belajar matematik.

1. Tes membaca bukti dan tes mengkonstruksi bukti

Terdapat dua jenis yaitu tes membaca bukti dan tes mengkonstruksi bukti. Kedua tes tersebut dikembangkan dengan maksud untuk mengukur kemampuan membaca bukti dan mengkonstruksi bukti. Tes ini dipilih berbentuk soal uraian agar dapat dilihat setiap langkah yang dilakukan mahasiswa. Soal-soal dikembangkan dari konsep yang terdapat pada bahan ajar. Materi yang diberikan adalah: sifat aljabar bilangan real, sifat urutan bilangan real, nilai mutlak, sifat kelengkapan bilangan real, dan aplikasi sifat supremum. Sebelum kedua tes digunakan terlebih dahulu dicari validitas isi dan muka dari pakar. Setelah itu dilakukan uji coba untuk melihat daya pembeda, indeks kesukaran, validitas dan reliabilitas dari soal tersebut. Dari hasil uji coba ini diperoleh soal yang langsung dapat dipakai dan soal yang harus direvisi dulu. Berikut diberikan rumus untuk menghitung daya pembeda, indeks kesukaran, validitas dan reliabilitas dari soal tersebut.

a. Daya pembeda Soal

Daya pembeda soal ditentukan dengan mencari indeks pembeda soal. Untuk menghitung indeks pembeda soal essay, dengan cara sebagai berikut :

- 1) Data diurut dari nilai tertinggi sampai nilai terendah.
- 2) Kemudian diambil 27% dari kelompok yang mendapat nilai tinggi dan 27% dari kelompok yang mendapat nilai rendah.
- 3) Hitung degree of freedom (df) dengan rumus:

$df = (n_t - 1) + (n_r - 1)$ dan $n_t = n_r = 27\% \times N = n$

4) Cari indeks pembeda soal dengan rumus :

$$I_p = \frac{M_t - M_r}{\sqrt{\frac{\sum X_t^2 + \sum X_r^2}{n(n-1)}}}$$

Keterangan:

I_p = Indeks pembeda soal

M_t = rata-rata skor kelompok tinggi

M_r = rata-rata skor kelompok rendah

$\sum X_t^2$ = jumlah kuadrat deviasi skor kelompok tinggi

$\sum X_r^2$ = jumlah kuadrat deviasi skor kelompok rendah

$n = 27\% \times N$

N = banyak peserta tes

Suatu soal mempunyai daya pembeda yang berarti (signifikan) jika I_p hitung $\geq I_p$ tabel pada df yang telah ditentukan (Prawironegoro, 1985). Hasil analisis uji coba instrumen dapat dilihat pada lampiran.

b. Indeks Kesukaran Soal

Soal yang baik adalah soal yang tidak terlalu mudah atau tidak terlalu sukar. Untuk menentukan indeks kesukaran (I_k) soal essay dapat digunakan rumus yang dinyatakan oleh Prawironegoro (1985) adalah sebagai berikut :

$$I_k = \frac{D_t + D_r}{2mn} \times 100\%$$

Keterangan :

I_k = indeks kesukaran soal

D_t = jumlah skor dari kelompok tinggi

D_r = jumlah skor dari kelompok rendah

m = skor setiap soal jika benar

N = banyak peserta tes

$n = 27\% \times N$

Dengan kriteria :

$I_k < 27\%$	soal sukar
$27\% \leq I_k \leq 73\%$	soal sedang
$I_k > 73\%$	soal mudah

Klasifikasi Soal

Klasifikasi soal /item menurut Prawironegoro (1985) adalah :

1) Item tetap dipakai jika I_p signifikan dan $0\% < I_k \leq 100\%$

2) Item diperbaiki jika:

I_p signifikan dan $I_k = 0\%$ atau 100%

I_p tidak signifikan dan $0\% < I_k < 100\%$

3) Item diganti jika I_p tidak signifikan dan $I_k = 0\%$ atau $I_k = 100\%$

Hasil analisis uji coba instrumen dapat dilihat pada lampiran

c. Validitas Tes

Sebelum tes digunakan terlebih dahulu dilakukan uji validitas isi dan muka oleh para penimbang. Uji validitas isi berkenaan dengan kesesuaian soal dengan kemampuan yang hendak diukur. Sedangkan validitas muka berkenaan dengan kejelasan sajian soal dilihat dari segi bahasa dan diagram. Para penimbang dipilih dari para ahli yang memahami materi perkuliahan Analisis Real. Hasil pertimbangan para ahli dianalisis dengan menggunakan uji statistik Q-Cochran.

Uji ini dilakukan untuk mengetahui apakah para penimbang telah memberikan pertimbangan yang sama terhadap masing-masing validitas instrumen. Jika nilai Q hitung lebih kecil dibandingkan dengan nilai χ^2 tabel maka dapat dikatakan bahwa para penimbang telah memberikan pertimbangan

yang sama pada validitas muka instrumen. Hasil analisis uji coba instrumen dapat dilihat pada lampiran

d. Reliabilitas Tes

Reliabilitas tes adalah suatu ukuran apakah tes tersebut dapat dipercaya. Suatu tes dikatakan reliabel apabila beberapa kali pengujian menunjukkan hasil yang relatif sama. Untuk menentukan koefisien reliabilitas digunakan rumus Cronbach Alpha yaitu :

$$r_{11} = \left(\frac{n}{n-1} \right) \left(1 - \frac{\sum \sigma_i^2}{\sigma_t^2} \right)$$

Keterangan :

r_{11} = reliabilitas yang dicari

$\sum \sigma_i^2$ = jumlah variansi skor tiap-tiap item

σ_t^2 = varians total

n = jumlah butir soal

Dengan kriteria sebagai berikut :

$0,80 < r_{11} \leq 1,00$	reliabilitas tinggi sekali
$0,60 < r_{11} \leq 0,80$	reliabilitas tinggi
$0,40 < r_{11} \leq 0,60$	reliabilitas sedang
$0,20 < r_{11} \leq 0,40$	reliabilitas rendah
$0,00 < r_{11} \leq 0,20$	sangat rendah

Hasil analisis uji coba instrumen dapat dilihat pada lampiran B.5.

2. Kemandirian Belajar

Skala kemandirian belajar matematik disusun berdasarkan aspek-aspek: Inisiatif belajar; Mendiagnosa kebutuhan belajar; Menetapkan tujuan belajar; Memonitor, mengatur dan mengontrol belajar; Mengatur dan mengontrol kognisi, motivasi, dan prilaku; Mencari dan memanfaatkan sumber belajar yang relevan;

Memilih dan menerapkan strategi belajar; Mengevaluasi proses dan hasil belajar; *Self-Efficacy* (Konsep diri). Sebelum digunakan skala kemandirian belajar matematik ini diuji cobakan terlebih dahulu. Hasil analisis uji coba dapat dilihat pada lampiran.

D. Prosedur Penelitian

Penelitian ini dilaksanakan dengan tahapan-tahapan sebagai berikut.

1. Menyusun dan memperbaiki proposal penelitian.
2. Menyusun, memvalidasi, uji coba, dan memperbaiki instrumen penelitian dan perangkat penelitian (perangkat pembelajaran).
3. Memilih dua program studi tempat penelitian dan menetapkan jadwal penelitian.
4. Pada awal semester berturut-turut dilakukan Tes Kemampuan Awal; Pretes Kemampuan Membaca Bukti dan Kemampuan Membaca Bukti; dan Skala Kemandirian Belajar Matematik.
5. Melakukan penelitian menerapkan pembelajaran melalui pendekatan M-APOS kelas eksperimen dan penerapan pembelajaran konvensional pada kelas kontrol selama 10 kali pertemuan (masing-masing 3 sks).
6. Pada akhir semester berturut-turut dilakukan Tes Kemampuan Membaca Bukti dan Kemampuan Membaca Bukti; Skala Kemandirian Matematik; dan wawancara.
7. Melakukan analisis terhadap seluruh data yang berhasil dikumpulkan.
8. Menafsirkan dan membahas hasil analisis data.
9. Menarik suatu kesimpulan hasil penelitian dan menuliskan laporannya.

E. Pengembangan Bahan Ajar

Sebelum dilaksanakan pembelajaran dilakukan maka disusun sebuah bahan ajar yang cocok yang berpedoman pada buku pokok yang dipakai pada mata kuliah yaitu *Introduction to Real Analysis* karangan Bartle dan Sherbert (1992). Dalam penyusunan bahan ajar maka peneliti berpedoman kepada:

1. Kesesuaian dengan kurikulum Program Studi Matematika dan Program Studi Pendidikan Matematika yang akan dilibatkan dalam penelitian.
2. Kesesuaian dengan pendekatan pembelajaran yang akan digunakan yaitu pendekatan M-APOS.
3. Kesesuaian dengan tujuan penelitian yaitu untuk meningkatkan kemampuan membaca bukti dan mengkonstruksi bukti serta kemandirian belajar matematik.

Dengan berpedoman kepada ketiga hal tersebut di atas maka disusunlah sebuah rencana pelaksanaan pembelajaran (RPP), lembaran kerja terstruktur (LKT), dan lembaran kerja diskusi (LKD).

LKT dan LKD digunakan sebagai media dalam pembelajaran kelas eksperimen. LKT berfungsi sebagai pemandu mahasiswa untuk mempelajari topik yang akan dipelajari. Dalam LKT disusun beberapa instruksi yang akan memandu mahasiswa menguasai konsep yang akan dipelajari. Untuk memperkuat pemahaman tentang konsep yang diberikan maka mahasiswa diberikan permasalahan yang akan didiskusikan. Setelah mengerjakan LKT mereka mengadakan diskusi tentang konsep yang diberikan di mana bahan yang akan didiskusikan disajikan pada LKD. Berikut ini diberikan contoh dari LKT dan LKD.

Untuk memberikan pemahaman kepada mahasiswa tentang sifat bilangan real maka mereka diberi tugas seperti berikut. Pertama mereka diperkenalkan dengan sifat bilangan real (Bartle dan Sherbert, 1992) yaitu:

- Himpunan bilangan real mempunyai sifat berikut.
- a. Sifat komutatif penjumlahan
 - b. Sifat asosiatif penjumlahan
 - c. Sifat komutatif perkalian
 - d. Sifat asosiatif perkalian
 - e. Sifat distributif perkalian atas penjumlahan
 - f. Keberadaan elemen nol
 - g. Keberadaan elemen negatif
 - h. Keberadaan elemen satuan
 - i. Keberadaan elemen kebalikan

Setelah itu mereka diminta untuk menyelidiki apakah sifat-sifat tersebut berlaku untuk permasalahan berikut. Kemudian mahasiswa diminta untuk memberikan kesimpulan tentang sifat-sifat bilangan real.

1. Selidikilah apakah semua sifat bilangan real di atas berlaku pada himpunan penyelesaian persamaan berikut? Jelaskan jawaban anda!
 - a. $(x^2 + 2x - 3)(x^2 - x - 2) = 0$
 - b. $x^3 + 3x^2 + 2x = 0$
 - c. $x^2 + 3x + 1 = 0$
 - d. $(x^2 + 4x + 6)(x^2 + 3x - 4) = 0$
2. Selidikilah apakah sifat bilangan real di atas berlaku pada himpunan berikut? Jelaskan jawaban anda!
 - a. $A = \{x \mid 0 < x < 10\}$
 - b. $B = \{x \mid 1 < x \leq 7\}$
 - c. $C = \{x \mid -3 < x \leq 4\}$

Dari hasil penyelidikan ini diharapkan mahasiswa dapat memahami dengan baik sifat-sifat yang berlaku pada bilangan real yang akan digunakan dalam pembahasan materi berikutnya.

Setelah itu mahasiswa diberikan sebuah bukti teorema, kemudian mereka diminta untuk menentukan argumentasi dari setiap langkah pembuktian seperti berikut.

Teorema

Jika x dan b adalah elemen di R dan $x + b = x$, maka $b = 0$

Berikan alasan atau argumen pada setiap langkah pembuktian teorema di atas.

Langkah pembuktian	Alasan/argumen
$x + b = x$
$(x + b) + (-x) = x + (-x)$
$(-x) + (x + b) = (x + (-x))$
$((-x) + x) + b = (x + (-x))$
$0 + b = 0$
$b = 0$

Dari kegiatan ini mahasiswa diharapkan mampu untuk membaca suatu bukti beserta argumen dari setiap langkah yang diberikan. Setelah itu mereka diminta untuk mengkonstruksi bukti sendiri dari teorema yang diberikan.

Teorema

Misalkan p, q adalah sebarang elemen di R . Maka persamaan $p + m = q$ mempunyai solusi unik (tunggal) $m = (-p) + q$

Untuk membuktikan teorema di atas, jawablah pertanyaan di bawah ini!

1. Tentukan premis dan konklusi dari teorema di atas!
2. Apa artinya kata "solusi" dari persamaan $p + m = q$?
3. Dari premis yang anda kemukakan di atas, tentukan langkah apa yang harus anda lakukan sehingga diperoleh konklusi yang diharapkan? Jelaskan sifat bilangan real yang digunakan pada setiap langkah yang dilakukan!
4. Tunjukkan bahwa solusinya unik (tunggal) dengan cara sebagai berikut: Misalkan ada dua solusi yang dimiliki, misalnya m_1 dan m_2 , kemudian tunjukkan bahwa $m_1 = m_2$.
5. Tulis bukti lengkap dari teorema di atas!

Setelah mereka melakukan kegiatan di atas maka pada diskusi kelas diberikan permasalahan yang berhubungan dengan tugas yang diberikan pada LKT. Setelah diskusi kelas, kemudian mereka juga diberikan latihan untuk dikerjakan di rumah.

Perhatikan lagi hasil yang diperoleh pada lembaran kerja tugas (LKT) dan diskusikan dalam kelompok masing-masing tentang pembuktian sifat aljabar bilangan real.

1. Buktikan bahwa jika m dan $n \neq 0$ elemen di R dan $m \cdot n = n$, maka $m = 1$.
2. Buktikan bahwa jika $x \neq 0$ dan y elemen di R dan $x \cdot y = 1$, maka $y = 1/x$.
3. Jika $p \neq 0$, persamaan $p \cdot q = b$ mempunyai solusi unik $q = (1/p) \cdot b$.
4. Buktikan: Jika $p \cdot q = 0$ maka $p = 0$ atau $q = 0$.
5. Buktikan bahwa jika $a, b \in R$ maka:
 - $(a + b) = (-a) + (-b)$
 - $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$
 - $1/(-a) = -(1/a)$, dengan $a \neq 0$
 - $(a/b) = (-a)/b$, dengan $b \neq 0$
6. Jika $a \neq 0$ dan $b \neq 0$, tunjukkan bahwa $1/(ab) = (1/a) \cdot (1/b)$
7. Tunjukkan $x - (y + z) = (x - y) - z$ untuk semua $x, y, z \in R$

Soal Latihan.

1. Jika $y \neq 0$ dan $z \neq 0$, maka $(xy)^{-1} = x^{-1}y^{-1}$.
2. Jika $z \neq 0$, maka $-(x/z) = (-x)/z = x/(-z)$.
3. Jika $b \neq 0$ dan $d \neq 0$, maka $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad - bc}{bd}$.
4. Jika $a \in R$ dan memenuhi $a \cdot a = a$, maka buktikan bahwa $a = 0$ atau $a = 1$.
5. Jika x adalah bilangan irrasional dan $y \neq 0$ adalah bilangan rasional, tunjukkan $x + y$ dan xy adalah bilangan irrasional.
6. Jika x dan y adalah bilangan irrasional, apakah $x + y$ dan xy adalah bilangan irrasional? Jika ya, buktikan dan jika tidak, berikan contoh penyangkal.

BAB IV

HASIL PENELITIAN DAN PEMBAHASAN

A. Hasil Penelitian

Tujuan utama penelitian ini adalah untuk mengetahui perbedaan pencapaian dan peningkatan kemampuan membaca bukti (KCaB) dan kemampuan mengkonstruksi bukti (KSiB) mahasiswa dalam mata kuliah Analisis Real yang memperoleh pendekatan pembelajaran yang berbeda. Kelas eksperimen memperoleh pembelajaran dengan pendekatan M-APOS sedangkan kelas kontrol memperoleh pembelajaran konvensional. Perbedaan dilihat dari berbagai sisi yaitu: program studi (Matematika dan Pendidikan Matematika) dan kemampuan awal (tinggi, sedang, dan rendah). Selanjutnya akan dilihat pula apakah terdapat interaksi antara faktor pembelajaran dengan faktor kelompok program studi, interaksi antara faktor pembelajaran dengan faktor kemampuan awal mahasiswa.

Kemudian juga akan dilihat perbandingan kemandirian belajar matematika (KBM) antara mahasiswa yang memperoleh pembelajaran dengan pendekatan M-APOS dengan mahasiswa yang memperoleh pembelajaran konvensional. Perbedaan juga dilihat dari berbagai sisi yaitu: program studi (Matematika dan Pendidikan Matematika) dan kemampuan awal (tinggi, sedang, dan rendah).

Dalam melakukan analisis statistika terhadap hasil tes dan hasil skala kemandirian belajar matematik digunakan *software* SPSS-15. Hal pertama yang dilakukan adalah melakukan analisis deskriptif yang bertujuan untuk melihat gambaran umum capaian hasil belajar dan skala kemandirian belajar matematika yang terdiri dari rata-rata dan simpangan baku. Kemudian dilakukan analisis

inferensial terhadap capaian hasil belajar dan skala kemandirian belajar matematik yaitu analisis variansi (ANOVA) satu dan dua-jalur dan uji-t kesamaan rata-rata independent. Ketiga uji ini memerlukan asumsi kenormalan dari distribusi data. Uji normalitas dilakukan dengan uji *Kolmogorov-Smirnov* (K-S) sedangkan uji homogenitas variansi dilakukan dengan uji *Levenes*. Jika kondisi kenormalan tidak dipenuhi digunakan uji *Mann-Whitney*. Uji ANOVA satu atau dua-jalur kadang-kadang memerlukan uji lanjutan yaitu: uji lanjutan *Tukey* (jika variansi homogen) dan uji *Thamhane* (jika variansi tidak homogen). Hasil pengujian statistika terhadap data penelitian dalam studi ini secara rinci disajikan pada Lampiran.

Terdapat tiga variabel dalam penelitian ini yaitu variabel bebas, variabel terikat, dan variabel kontrol. Variabel bebasnya adalah pendekatan M-APOS dan konvensional, variabel terikatnya adalah kemampuan membaca bukti, kemampuan mengkonstruksi bukti, dan kemandirian belajar matematik. Variabel kontrolnya adalah kemampuan awal mahasiswa yang terdiri dari level rendah, sedang, dan tinggi. Pengaruh variabel bebas terhadap variabel terikat diuji dengan menggunakan uji t, uji ANOVA satu dan dua-jalur.

Pada Tabel 4.1 ditampilkan rata-rata dan simpangan baku dari kemampuan membaca bukti (KCaB), kemampuan mengkonstruksi bukti (KSiB), N-gain membaca bukti, dan N-gain kemampuan mengkonstruksi bukti berdasarkan program studi, gabungan program studi, dan pendekatan pembelajaran. Dalam penelitian ini gain yang digunakan adalah gain ternormalisasi dan akan disebut N-gain.

Tabel 4.1 Skor Rata-rata dan Simpangan Baku KCaB dan KSiB berdasarkan Program Studi dan Pendekatan Pembelajaran

P r o d i	K A M	n	S t a t	Pendekatan Pembelajaran													
				M-APOS						Konvensional							
				KCaB			KSiB			n	KCaB			KSiB			
				Pre	Pos	N-gain	Pre	Pos	N-gain		Pre	Pos	N-gain	Pre	Pos	N-gain	
Matematika	Tinggi	6	\bar{X}	5,00	74,67	0,74	6,67	88,17	0,86	4	3,75	80,00	0,79	6,75	89,25	0,89	
			SD	3,16	10,37	0,11	11,69	11,16	0,15		4,79	5,60	0,07	9,43	6,50	0,07	
	Sedang	12	\bar{X}	3,75	61,50	0,60	1,25	60,83	0,60	12	3,33	62,75	0,62	4,58	61,33	0,60	
			SD	3,11	10,63	0,11	2,26	15,90	0,16		3,89	14,62	0,15	5,42	22,43	0,23	
	Rendah	13	\bar{X}	0,00	39,46	0,39	3,08	40,69	0,39	15	0,67	31,20	0,31	1,33	17,20	0,16	
			SD	0,00	15,53	0,16	4,35	12,11	0,12		1,76	12,98	0,14	2,29	13,21	0,13	
	Sub Total	31	\bar{X}	2,42	54,81	0,54	3,06	57,68	0,56	31	2,10	49,71	0,49	3,29	43,58	0,42	
			SD	3,13	18,83	0,19	6,01	22,07	0,23		3,36	22,84	0,23	5,13	31,97	0,32	
	Pend. Matematika	Tinggi	11	\bar{X}	10,18	76,45	0,74	1,36	80,64	0,80	9	4,44	65,33	0,64	3,33	66,33	0,66
				SD	6,19	8,36	0,09	2,34	18,58	0,19		6,35	9,79	0,09	6,61	16,52	0,16
		Sedang	11	\bar{X}	6,82	58,82	0,56	0,00	57,36	0,57	14	2,86	41,86	0,40	0,36	39,86	0,40
				SD	5,13	15,88	0,16	0,00	13,46	0,13		5,45	9,67	0,14	1,34	9,13	0,09
Rendah		9	\bar{X}	3,33	37,67	0,35	0,00	40,67	0,41	8	1,25	28,63	0,28	1,25	21,38	0,20	
			SD	4,33	12,13	0,13	0,00	15,52	0,16		2,31	11,51	0,12	2,31	6,26	0,07	
Sub Total		31	\bar{X}	7,00	58,94	0,56	0,48	60,77	0,61	31	2,90	45,26	0,44	1,45	42,77	0,42	
			SD	5,86	19,87	0,20	1,50	22,58	0,23		5,13	17,23	0,18	3,91	20,26	0,20	
Gabungan		Tinggi	17	\bar{X}	8,35	75,82	0,74	3,24	83,29	0,82	13	4,23	69,85	0,69	4,38	73,38	0,73
				SD	5,80	8,83	0,09	7,28	16,38	0,17		5,72	11,01	0,11	7,35	17,71	0,18
		Sedang	23	\bar{X}	5,22	60,22	0,58	0,65	59,17	0,59	26	3,08	51,50	0,50	2,31	49,77	0,49
				SD	4,39	13,15	0,13	1,72	14,56	0,14		4,71	15,98	0,18	4,30	19,59	0,20
	Rendah	22	\bar{X}	1,36	38,73	0,38	1,82	40,68	0,40	23	0,87	30,30	0,30	1,30	18,65	0,18	
			SD	3,16	13,96	0,14	3,63	13,25	0,13		1,94	12,29	0,13	2,24	11,30	0,11	
	Total	62	\bar{X}	4,71	56,87	0,55	1,77	59,23	0,58	62	2,50	47,48	0,46	2,37	43,18	0,42	
			SD	5,20	19,31	0,19	4,54	22,20	0,22		4,32	20,19	0,21	4,62	26,55	0,27	

Catatan: KAM = kemampuan awal mahasiswa
n = jumlah subjek
KCaB = kemampuan membaca bukti
KSiB = kemampuan mengkonstruksi bukti
Pre = Pretes
Pos = Postes
Skor ideal 100

Dari data Tabel 4.1 akan disajikan uji statistik dan analisis terhadap: 1) Pencapaian dan Peningkatan KCaB dan KSiB berdasarkan Program Studi dan Pendekatan Pembelajaran, 2) Pencapaian dan Peningkatan KCaB dan KSiB berdasarkan Program Studi dan Kemampuan Awal Mahasiswa, 3) Pencapaian dan Peningkatan KCaB dan KSiB berdasarkan Kemampuan Awal Mahasiswa dan Pendekatan Pembelajaran, 4) Asosiasi antara KCaB dan KSiB, 5) Perbandingan Kemandirian Belajar Matematika (KBM) Mahasiswa berdasarkan Program Studi dan Pendekatan Pembelajaran, 6) Perbandingan Kemandirian Belajar Matematik (KBM) Mahasiswa berdasarkan Kemampuan Awal Mahasiswa dan Pendekatan Pembelajaran, dan 7) Perbandingan Kemandirian Belajar Matematika (KBM) Mahasiswa berdasarkan Kemampuan Awal Mahasiswa dan Program Studi.

1. KCaB dan KSiB berdasarkan Program Studi dan Pembelajaran

Pada bagian ini akan disajikan hasil analisis data penelitian berdasarkan program studi dan pendekatan pembelajaran. Dari Tabel 4.1 dapat dilihat bahwa ditinjau dari faktor pendekatan pembelajaran secara keseluruhan diperoleh bahwa skor rata-rata tes kemampuan membaca bukti (56,87) dengan pendekatan M-APOS lebih baik dari kelas dengan pendekatan konvensional (47,48). Demikian juga untuk skor rata-rata tes kemampuan mengkonstruksi bukti (59,23) kelas dengan pendekatan M-APOS lebih baik dari kelas dengan pendekatan konvensional (43,18). Demikian juga jika dilihat peningkatannya, kelas dengan pendekatan M-APOS lebih baik dari kelas konvensional. Jika dilihat dari faktor program studi terlihat bahwa Program Studi Matematika memperoleh skor rata-rata tes kemampuan mengkonstruksi bukti sedikit lebih tinggi dari Program Studi

Pendidikan Matematika, sedangkan skor rata-rata tes kemampuan membaca bukti Program Studi Pendidikan Matematika sedikit lebih tinggi dari Program Studi Matematika.

Untuk melihat seberapa besar keberartian (signifikansi) perbedaan dan peningkatan skor-skor tersebut, dilakukan analisis statistik ANOVA dua-jalur dan hasilnya dapat dilihat pada Tabel 4.2a dan Tabel 4.2b.

Tabel 4.2a. Hasil Anova Dua-Jalur Capaian Kemampuan Membaca Bukti dan Kemampuan Mengkonstruksi Bukti berdasarkan Faktor Program Studi dan Pembelajaran

Faktor	Capaian Tes KCaB			Capaian Tes KSiB		
	F	P	H _{0(Ca)}	F	P	H _{0(Si)}
Program Studi	0,002	0,964	Diterima	0,067	0,796	Diterima
Pembelajaran	6,967	0,009	Ditolak	13,144	0,000	Ditolak
Interaksi	1,455	0,230	Diterima	0,194	0,660	Diterima

H_{0(Ca)} : tidak terdapat perbedaan capaian KCaB antar kelompok mahasiswa berdasarkan program studi dan pendekatan pembelajaran

H_{1(Ca)} : terdapat perbedaan capaian KCaB antar kelompok mahasiswa berdasarkan program studi dan pendekatan pembelajaran

H_{0(Si)} : tidak terdapat perbedaan capaian KSiB antar kelompok mahasiswa berdasarkan program studi dan pendekatan pembelajaran

H_{1(Si)} : terdapat perbedaan capaian KSiB antar kelompok mahasiswa berdasarkan program studi dan pendekatan pembelajaran

H₀ : tidak terdapat interaksi antara program studi dan pembelajaran dalam pencapaian KCaB dan KSiB

H₁ : terdapat interaksi antara program studi dan pembelajaran dalam pencapaian KCaB dan KSiB

Dari Tabel 4.2a terlihat bahwa dari faktor program studi, H₀ untuk hasil capaian KCaB dan hasil capaian KSiB diterima. Hal ini menunjukkan bahwa rata-rata skor kemampuan membaca bukti dan kemampuan mengkonstruksi bukti yang diperoleh oleh mahasiswa Program Studi Pendidikan Matematika dan Program Studi Matematika.

Pendidikan Matematika tidak berbeda secara signifikan. Kemudian dari Tabel 4.2b terlihat bahwa dari faktor program studi, H_0 untuk hasil N-gain KCaB dan hasil N-gain KSiB diterima. Hal ini menunjukkan bahwa rata-rata N-gain kemampuan membaca bukti dan kemampuan mengkonstruksi bukti yang diperoleh oleh mahasiswa Program Studi Matematika dan Program Studi Pendidikan Matematika tidak berbeda secara signifikan.

Tabel 4.2b. Hasil Anova Dua-Jalur N-gain Skor Kemampuan Membaca Bukti dan Kemampuan Mengkonstruksi Bukti berdasarkan Faktor Program Studi dan Pembelajaran

Faktor	N-gain Tes KCaB			N-gain Tes KSiB		
	F	P	H_0	F	P	H_0
Program Studi	0,153	0,696	Diterima	0,224	0,637	Diterima
Pembelajaran	6,271	0,014	Ditolak	13,095	0,000	Ditolak
Interaksi	1,174	0,281	Diterima	0,260	0,611	Diterima

$H_{0(Ca)}$: tidak terdapat perbedaan N-gain KCaB antar kelompok mahasiswa berdasarkan program studi dan pendekatan pembelajaran

$H_{1(Ca)}$: terdapat perbedaan N-gain KCaB antar kelompok mahasiswa berdasarkan program studi dan pendekatan pembelajaran

$H_{0(Si)}$: tidak terdapat perbedaan N-gain KSiB antar kelompok mahasiswa berdasarkan program studi dan pendekatan pembelajaran

$H_{1(Si)}$: terdapat perbedaan N-gain KSiB antar kelompok mahasiswa berdasarkan program studi dan pendekatan pembelajaran

H_0 : tidak terdapat interaksi antara program studi dan pembelajaran dalam peningkatan KCaB dan KSiB

H_1 : terdapat interaksi antara program studi dan pembelajaran dalam peningkatan KCaB dan KSiB

Untuk faktor pembelajaran, H_0 untuk hasil capaian KCaB dan hasil capaian KSiB ditolak. Hal ini menunjukkan bahwa rata-rata skor kemampuan membaca bukti dan kemampuan mengkonstruksi bukti yang diperoleh oleh mahasiswa yang diajar dengan pendekatan M-APOS dan yang diajar dengan cara konvensional

berbeda secara signifikan. H_0 untuk hasil N-gain KCaB dan hasil N-gain KSiB ditolak. Hal ini menunjukkan bahwa rata-rata N-gain kemampuan membaca bukti dan kemampuan mengkonstruksi bukti yang diperoleh oleh mahasiswa yang diajar dengan pendekatan M-APOS dan yang diajar dengan cara konvensional berbeda secara signifikan.

Sementara itu, untuk interaksi antara program studi dan pembelajaran H_0 diterima untuk capaian dan N-gain, yang berarti tidak ada interaksi di antara keduanya. Hal ini menunjukkan bahwa interaksi antara program studi dan pembelajaran tidak memberikan pengaruh yang signifikan terhadap pencapaian dan N-gain kemampuan membaca bukti dan kemampuan mengkonstruksi bukti.

Untuk lebih rincinya akan dibahas tentang capaian dan N-gain kemampuan membaca bukti dan kemampuan mengkonstruksi bukti berdasarkan faktor program studi dan pendekatan pembelajaran secara terpisah. Pembahasan pertama tentang pencapaian dan N-gain kemampuan membaca bukti kemudian dilanjutkan dengan pencapaian dan N-gain kemampuan mengkonstruksi bukti.

a. KCaB Berdasarkan Program Studi dan Pembelajaran

Dari Tabel 4.2a telah diperoleh bahwa skor rata-rata kemampuan membaca bukti yang diperoleh oleh mahasiswa Program Studi Matematika dan Program Studi Pendidikan Matematika tidak berbeda secara signifikan. Walaupun dari rata-rata pada Tabel 4.1 kelihatannya skor rata-rata Program Studi Pendidikan Matematika lebih tinggi dari Program Studi Matematika. Untuk lebih jelasnya kita lakukan uji perbedaan rata-rata dan peningkatannya dengan uji t dengan tingkat

kepercayaan 95% untuk faktor program studi dan pembelajaran yang hasilnya terlihat pada Tabel 4.3a dan Tabel 4.3b.

Tabel 4.3a. Uji-t Perbedaan Rata-rata Kemampuan Membaca Bukti antar Program Studi dan antar Pendekatan Pembelajaran

Pengujian	t-test for Equality of Means				
	t	Sig. (2-tailed)	Mean Difference	95% Confidence Interval of the Difference	
				Lower	Upper
Pend Mat ><Mat	0,044	0,965	0,161	-7,062	7,384
M-APOS ><Konv	2,645	0,009	9,387	2,363	16,412

$H_{0(M)}$: tidak terdapat perbedaan capain KCaB antara Prodi Pendidikan Matematika dan Prodi Matematika

$H_{1(M)}$: terdapat perbedaan capain KCaB antara Prodi Pendidikan Matematika dan Prodi Matematika

$H_{0(P)}$: tidak terdapat perbedaan capaian KCaB antara kelompok yang diajar dengan pendekatan M-APOS dengan yang mendapat pembelajaran secara konvensional

$H_{1(P)}$: capaian KCaB kelompok yang diajar dengan pendekatan M-APOS lebih baik dari yang mendapat pembelajaran secara konvensional

Tabel 4.3b. Uji-t Perbedaan Rata-rata N-gain Kemampuan Membaca Bukti antar Program Studi dan antar Pendekatan Pembelajaran

Pengujian	t-test for Equality of Means				
	t	Sig. (2-tailed)	Mean Difference	95% Confidence Interval of the Difference	
				Lower	Upper
Pend Mat ><Mat	0,283	0,703	0,014	-0,059	0,087
M-APOS ><Konv	2,511	0,013	0,036	0,019	0,161

$H_{0(M)}$: tidak terdapat perbedaan N-gain KCaB antara Prodi Pendidikan Matematika dan Prodi Matematika

$H_{1(M)}$: terdapat perbedaan N-gain KCaB antara Prodi Pendidikan Matematika dan Prodi Matematika

$H_{0(P)}$: tidak terdapat perbedaan N-gain KCaB antara kelompok yang diajar dengan pendekatan M-APOS dengan yang mendapat pembelajaran

secara konvensional
 $H_{1(P)}$: N-gain KCaB kelompok yang diajar dengan pendekatan M-APOS lebih baik dari yang mendapat pembelajaran secara konvensional

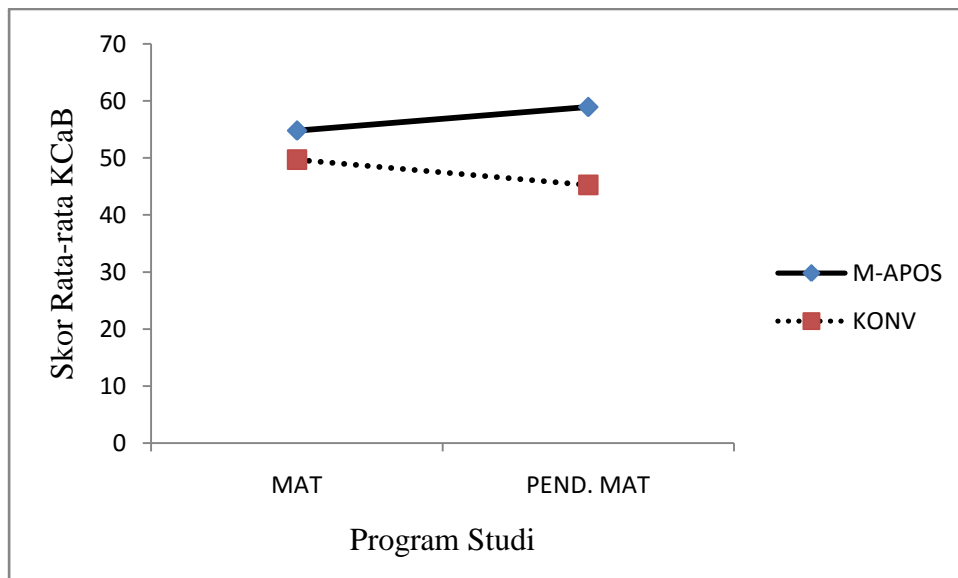
Dari hasil uji t diperoleh bahwa untuk faktor program studi untuk capaian nilai signifikansinya 0,965 dan untuk N-gain nilai signifikansinya 0,703 yang keduanya lebih besar dari nilai $\alpha = 0,05$. Hal ini menunjukkan bahwa skor rata-rata dan peningkatan kemampuan membaca bukti Program Studi Matematika dan Program Studi Pendidikan Matematika tidak berbeda secara signifikan pada tingkat kepercayaan 95%.

Sementara itu untuk faktor pembelajaran diperoleh untuk capaian nilai signifikansinya 0,009 dan untuk N-gain nilai signifikansinya 0,013 yang keduanya lebih kecil dari nilai $\alpha = 0,05$. Hal ini menunjukkan bahwa skor rata-rata peningkatan kemampuan membaca bukti kelas yang diajar dengan pendekatan M-APOS lebih tinggi dari kelas konvensional pada tingkat kepercayaan 95%.

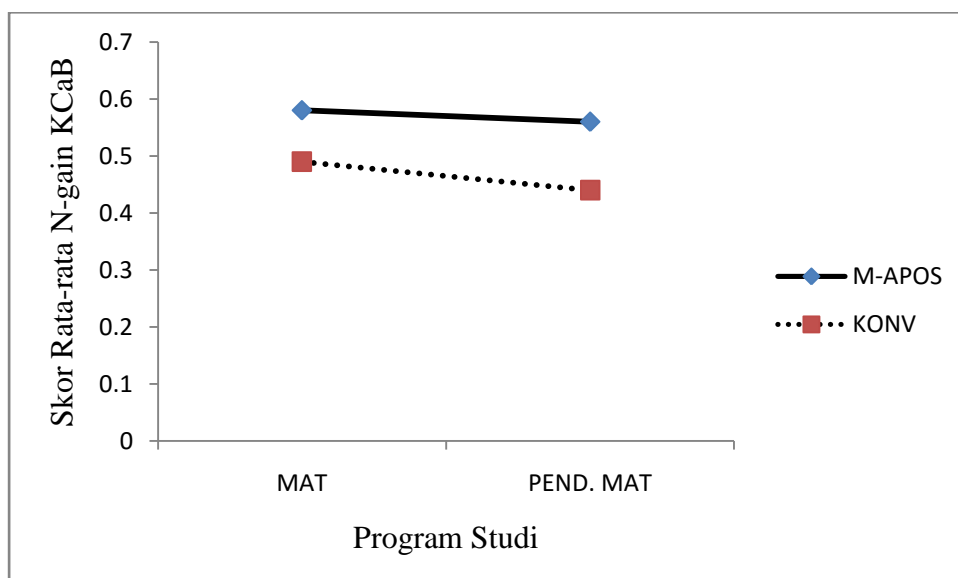
Sementara untuk interaksi antara program studi dan pembelajaran untuk capaian diperoleh nilai signifikansinya 0,230 dan untuk N-gain diperoleh nilai signifikansinya 0,238 yang keduanya lebih besar dari nilai $\alpha = 0,05$. Hal ini menunjukkan bahwa interaksi antara program studi dan pembelajaran tidak memberikan pengaruh yang signifikan terhadap pencapaian dan peningkatan kemampuan membaca bukti pada tingkat kepercayaan 95%. Diagram interaksi antara kedua faktor untuk tes kemampuan membaca bukti dapat dilihat pada Gambar 4.1a dan Gambar 4.1b.

Untuk mengetahui apakah terdapat perbedaan skor rata-rata dan peningkatan kemampuan membaca bukti antara mahasiswa Program Studi

Matematika dan Program Studi Pendidikan Matematika yang mendapatkan pendekatan pembelajaran yang sama, dilakukan uji-t. Hasil pengolahan Tes KCaB dengan uji-t disajikan pada Tabel 4.4a dan Tabel 4.4b.



Gambar 4. 1a Interaksi antara program studi dan pembelajaran terhadap pencapaian kemampuan membaca bukti



Gambar 4. 1b Interaksi antara program studi dan pembelajaran terhadap peningkatan kemampuan membaca bukti

Tabel 4.4a Uji t Perbedaan Rata-rata KCaB antar Program Studi yang Mendapat Pembelajaran dengan M-APOS dan Konvensional

Pengujian	t-test for Equality of Means				
	t	Sig. (2-tailed)	Mean Difference	95% Confidence Interval of the Difference	
				Lower	Upper
M-APOS	0,840	0,404	4,129	-5,706	13,965
Konvensional	0,866	0,390	4,452	-5,845	14,748

H_0 : tidak terdapat perbedaan capaian KCaB antara mahasiswa pada program studi yang berbeda dengan pembelajaran yang sama

H_1 : terdapat perbedaan capaian KCaB antara mahasiswa pada program studi yang berbeda dengan pembelajaran yang sama

Tabel 4.4b. Uji t Perbedaan Rata-rata N-gain KCaB antar Program Studi yang Mendapat Pembelajaran dengan M-APOS dan Konvensional

Pengujian	t-test for Equality of Means				
	t	Sig. (2-tailed)	Mean Difference	95% Confidence Interval of the Difference	
				Lower	Upper
M-APOS	-0,509	0,613	-0,025	-0,123	0,073
Konvensional	1,006	0,318	0,053	-0,052	0,158

H_0 : tidak terdapat perbedaan N-gain KCaB antara mahasiswa pada program studi yang berbeda dengan pembelajaran yang sama

H_1 : terdapat perbedaan N-gain KCaB antara mahasiswa pada program studi yang berbeda dengan pembelajaran yang sama

Dari Tabel 4.4a dan Tabel 4.4b diperoleh nilai signifikansi untuk capaian dari pendekatan M-APOS yaitu 0,404 dan nilai signifikansi untuk capaian dari pendekatan M-APOS yaitu 0,613. Kedua nilai ini lebih besar dari 0,05, sehingga dapat disimpulkan bahwa capaian dan peningkatan kemampuan membaca bukti mahasiswa Program Studi Matematika yang diajar dengan pendekatan M-APOS

tidak berbeda dibandingkan mahasiswa Program Studi Pendidikan Matematika yang diajar dengan pendekatan yang sama. Pada kelas konvensional diperoleh untuk capaian nilai signifikansinya 0,390 dan untuk N-gain nilai signifikansinya 0,318 yang juga lebih besar dari 0,05. Maka dapat disimpulkan bahwa capaian dan peningkatan kemampuan membaca bukti mahasiswa Program Studi Matematika yang diajar dengan pendekatan konvensional tidak berbeda dibandingkan mahasiswa Program Studi Pendidikan Matematika yang diajar dengan pendekatan yang sama.

Selanjutnya, untuk melihat apakah terdapat perbedaan capaian dan peningkatan kemampuan membaca bukti di masing-masing program studi antara mahasiswa yang diajar dengan pendekatan M-APOS dengan yang diajar secara konvensional dilakukan dengan uji-t yang hasilnya dapat dilihat pada Tabel 4.5a dan Tabel 4.5b berikut.

Tabel 4.5a. Uji t Perbedaan Rata-rata KCaB di antara Dua Pembelajaran di Masing-masing Program Studi

Pengujian	t-test for Equality of Means				
	t	Sig. (2-tailed)	Mean Difference	95% Confidence Interval of the Difference	
				Lower	Upper
Mat	0,959	0,342	5,097	-5,539	15,733
Pend. Mat	2,895	0,005	13,677	4,228	23,127

- H_0 : tidak terdapat perbedaan capaian KCaB antara mahasiswa yang memperoleh pembelajaran yang berbeda pada program studi yang sama
 H_1 : capaian KCaB mahasiswa yang diajar dengan pendekatan M-APOS lebih baik dari konvensional pada program studi yang sama

Tabel 4.5b. Uji t Perbedaan Rata-rata N-gain KCaB di antara Dua Pembelajaran di Masing-masing Program Studi

Pengujian	t-test for Equality of Means				
	t	Sig. (2-tailed)	Mean Difference	95% Confidence Interval of the Difference	
				Lower	Upper
Mat	0,966	0,338	0,051	-0,055	0,157
Pend. Mat	2,648	0,010	0,129	0,031	0,226

- H_0 : tidak terdapat perbedaan N-gain KCaB antara mahasiswa yang memperoleh pembelajaran yang berbeda pada program studi yang sama
 H_1 : N-gain KCaB mahasiswa yang diajar dengan pendekatan modifikasi M-APOS lebih baik dari konvensional pada program studi yang sama

Dari Tabel 4.5a dan Tabel 4.5b diperoleh nilai signifikansi untuk capaian dari faktor Program Studi Matematika adalah 0,342 dan untuk N-gain 0,338. Kedua nilai ini lebih besar dari 0,05, sehingga dapat disimpulkan bahwa capaian dan peningkatan kemampuan membaca bukti mahasiswa Program Studi Matematika yang diajar dengan pendekatan M-APOS tidak berbeda dibandingkan mahasiswa yang diajar dengan pendekatan konvensional. Untuk Program Studi Pendidikan Matematika diperoleh untuk capaian nilai signifikansinya 0,005 dan untuk N-gain nilai signifikansinya 0,010. Kedua nilai ini lebih kecil dari 0,05, sehingga dapat disimpulkan bahwa capaian dan peningkatan kemampuan membaca bukti mahasiswa Program Studi Pendidikan Matematika yang diajar dengan pendekatan pendekatan M-APOS lebih baik dibandingkan mahasiswa Program Studi Pendidikan Matematika yang diajar dengan pendekatan konvensional.

b. KSiB berdasarkan Program Studi dan Pembelajaran

Dari Tabel 4.2a dan Tabel 4.2b telah diperoleh bahwa capaian dan peningkatan kemampuan mengkonstruksi bukti yang diperoleh oleh mahasiswa Program Studi Matematika dan Program Studi Pendidikan Matematika tidak berbeda secara signifikan. Walaupun dari rata-rata pada Tabel 4.1 kelihatannya skor rata-rata Program Studi Pendidikan Matematika lebih tinggi dari Program Studi Matematika. Untuk lebih jelasnya kita lakukan uji perbedaan rata-rata dan peningkatannya dengan uji t dengan tingkat kepercayaan 95% untuk faktor program studi dan pembelajaran yang hasilnya terlihat pada Tabel 4.6a dan Tabel 4.6b.

Tabel 4.6a. Uji-t Perbedaan Rata-rata Kemampuan Mengkonstruksi Bukti antar Program Studi dan antar Pendekatan Pembelajaran

Pengujian	t-test for Equality of Means				
	t	Sig. (2-tailed)	Mean Difference	95% Confidence Interval of the Difference	
				Lower	Upper
Pend Mat ><Mat	-0,211	0,833	-0,984	-10,195	8,227
M-APOS ><Konv	3,590	0,000	15,887	7,125	24,649

$H_{0(M)}$: tidak terdapat perbedaan capaian KSiB antara Prodi Pendidikan Matematika dan Prodi Matematika

$H_{1(M)}$: terdapat perbedaan capaian KSiB antara Prodi Pendidikan Matematika dan Prodi Matematika

$H_{0(P)}$: tidak terdapat perbedaan capaian KSiB antara kelompok yang diajar dengan pendekatan M-APOS dengan yang mendapat pembelajaran secara konvensional

$H_{1(P)}$: capaian KSiB kelompok yang diajar dengan pendekatan M-APOS lebih baik dari yang mendapat pembelajaran secara konvensional

Tabel 4.6b. Uji-t Perbedaan Rata-rata N-gain Kemampuan Mengkonstruksi Bukti antar Program Studi dan antar Pendekatan Pembelajaran

Pengujian	t-test for Equality of Means				
	t	Sig. (2-tailed)	Mean Difference	95% Confidence Interval of the Difference	
				Lower	Upper
Pend Mat ><Mat	-0,453	0,651	-0,021	-0,113	0,071
M-APOS ><Konv	3,641	0,000	0,161	0,074	0,249

$H_{0(M)}$: tidak terdapat perbedaan N-gain KSiB antara Prodi Pendidikan Matematika dan Prodi Matematika

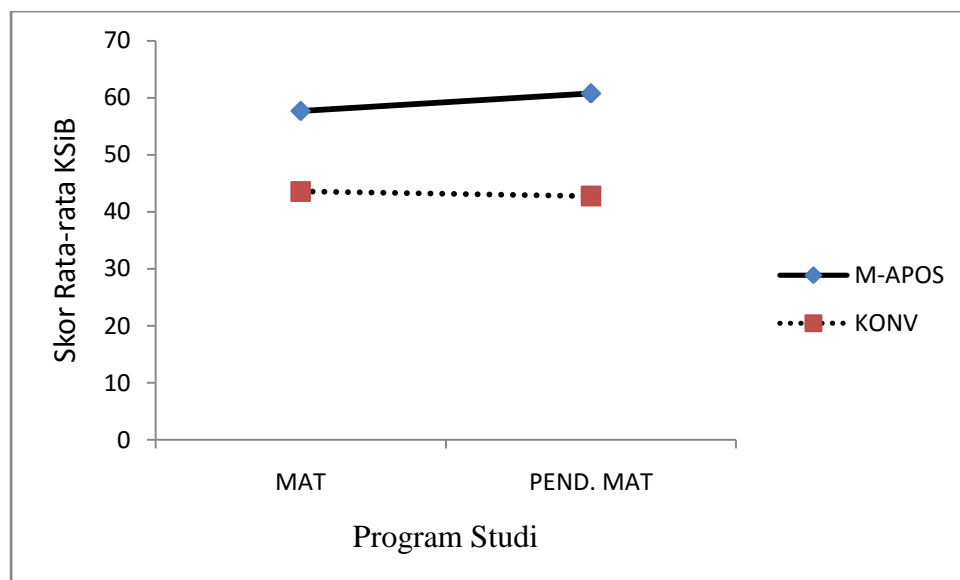
$H_{1(M)}$: terdapat perbedaan N-gain KSiB antara Prodi Pendidikan Matematika dan Prodi Matematika

$H_{0(P)}$: tidak terdapat perbedaan N-gain KSiB antara kelompok yang diajar dengan pendekatan M-APOS dengan yang mendapat pembelajaran secara konvensional

$H_{1(P)}$: N-gain KSiB kelompok yang diajar dengan pendekatan modifikasi APOS lebih baik dari yang mendapat pembelajaran secara konvensional

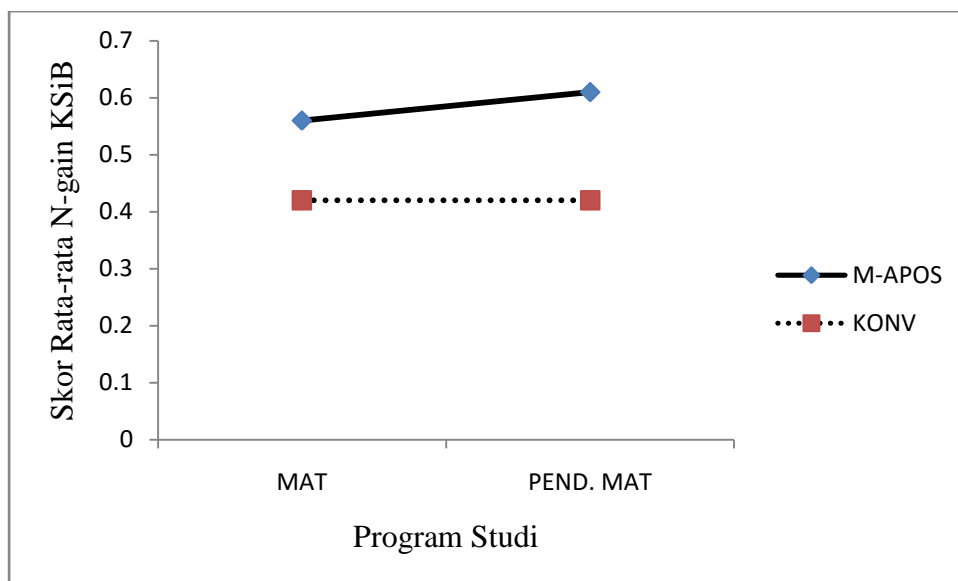
Dari hasil uji t diperoleh bahwa untuk faktor program studi untuk capaian nilai signifikansinya 0,833 dan untuk N-gain nilai signifikansinya 0,651. Kedua nilai tersebut lebih besar dari nilai $\alpha = 0,05$. Hal ini menunjukkan bahwa capaian dan peningkatan kemampuan mengkonstruksi bukti mahasiswa Program Studi Matematika dan Program Studi Pendidikan Matematika tidak berbeda secara signifikan pada tingkat kepercayaan 95%. Sementara itu untuk faktor pembelajaran diperoleh untuk capaian nilai signifikansinya 0,000 dan untuk N-gain nilai signifikansinya 0,000. Kedua nilai ini lebih kecil dari nilai $\alpha = 0,05$. Hal ini menunjukkan bahwa capaian dan peningkatan kemampuan mengkonstruksi bukti mahasiswa yang diajar dengan pendekatan M-APOS lebih tinggi dari kelas konvensional pada tingkat kepercayaan 95%.

Sementara untuk interaksi antara program studi dan pembelajaran diperoleh untuk capain nilai signifikansinya 0,637 dan untuk N-gain nilai signifikansinya 0,611. Kedua nilai ini lebih besar dari nilai $\alpha = 0,05$, sehingga diperoleh bahwa interaksi antara program studi dan pembelajaran tidak memberikan pengaruh yang signifikan terhadap pencapaian dan peningkatan kemampuan mengkonstruksi bukti pada tingkat kepercayaan 95%. Diagram interaksi antara kedua faktor untuk tes kemampuan mengkonstruksi bukti dapat dilihat pada Gambar 4.2a dan Gambar 4.2b.



Gambar 4. 2a Interaksi antara program studi dan pembelajaran terhadap pencapaian kemampuan mengkonstruksi bukti

Untuk mengetahui apakah terdapat perbedaan skor rata-rata dan peningkatan kemampuan mengkonstruksi bukti antara mahasiswa Program Studi Matematika dan Program Studi Pendidikan Matematika yang mendapatkan pendekatan pembelajaran yang sama, dilakukan uji-t. Hasil pengolahan tes kemampuan mengkonstruksi bukti dengan uji-t disajikan pada Tabel 4.7a dan Tabel 4.7b.



Gambar 4.2b Interaksi antara program studi dan pembelajaran terhadap peningkatan kemampuan mengkonstruksi bukti

Tabel 4.7a. Uji t Perbedaan Rata-rata Kemampuan Mengkonstruksi Bukti antar Program Studi yang Mendapat Pembelajaran dengan M-APOS dan Konvensional

Pengujian	t-test for Equality of Means				
	t	Sig. (2-tailed)	Mean Difference	95% Confidence Interval of the Difference	
				Lower	Upper
M-APOS	0,546	0,587	3,097	-8,246	14,440
Konvensional	0,164	0,870	1,129	-12,632	14,890

H_0 : tidak terdapat perbedaan capaian KSiB antara mahasiswa pada program studi yang berbeda dengan pembelajaran yang sama

H_1 : terdapat perbedaan capaian KSiB antara mahasiswa pada program studi yang berbeda dengan pembelajaran yang sama

Dari Tabel 4.7a Tabel 4.7b diperoleh untuk capaian nilai signifikansi dari pendekatan M-APOS adalah 0,587 dan untuk N-gain nilai signifikansi dari pendekatan M-APOS adalah 0,446. Nilai ini lebih besar dari 0,05, sehingga dapat

disimpulkan bahwa capaian dan peningkatan kemampuan mengkonstruksi bukti mahasiswa Program Studi Matematika yang diajar dengan pendekatan M-APOS tidak berbeda dibandingkan mahasiswa Program Studi Pendidikan Matematika yang diajar dengan pendekatan yang sama. Pada kelas konvensional diperoleh untuk capaian nilai signifikansinya 0,870 dan untuk N-gain 0,981 yang juga lebih besar dari 0,05. Maka dapat disimpulkan bahwa capaian dan peningkatan kemampuan mengkonstruksi bukti mahasiswa Program Studi Matematika yang diajar dengan pendekatan konvensional tidak berbeda dibandingkan mahasiswa Program Studi Pendidikan Matematika yang diajar dengan pendekatan yang sama.

Tabel 4.7b. Uji t Perbedaan Rata-rata N-gain Kemampuan Mengkonstruksi Bukti antar Program Studi yang Mendapat Pembelajaran dengan M-APOS dan Konvensional

Pengujian	t-test for Equality of Means				
	t	Sig. (2-tailed)	Mean Difference	95% Confidence Interval of the Difference	
				Lower	Upper
M-APOS	-0,766	0,446	-0,044	-0,158	0,071
Konvensional	0,024	0,981	0,002	-0,135	0,139

H_0 : tidak terdapat perbedaan N-gain KSiB antara mahasiswa pada program studi yang berbeda dengan pembelajaran yang sama

H_1 : terdapat perbedaan N-gain KSiB antara mahasiswa pada program studi yang berbeda dengan pembelajaran yang sama

Selanjutnya, untuk melihat apakah terdapat perbedaan skor rata-rata dan peningkatan kemampuan mengkonstruksi bukti di masing-masing program studi antara mahasiswa yang diajar dengan pendekatan M-APOS dengan yang diajar secara konvensional dilakukan dengan uji-t yang hasilnya dapat dilihat pada Tabel 4.8a dan Tabel 4.8b berikut.

Tabel 4.8a. Uji t Perbedaan Rata-rata Kemampuan Mengkonstruksi Bukti diantara Dua Pembelajaran di Masing-masing Program Studi

Pengujian	t-test for Equality of Means				
	t	Sig. (2-tailed)	Mean Difference	95% Confidence Interval of the Difference	
				Lower	Upper
Mat	2,020	0,048	14,097	0,104	28,090
Pend Mat	3,303	0,002	18,000	7,100	28,900

- H_0 : tidak terdapat perbedaan capaian KSiB antara mahasiswa yang memperoleh pembelajaran yang berbeda pada program studi yang sama
 H_1 : capaian KSiB mahasiswa yang diajar dengan pendekatan M-APOS lebih baik dari konvensional pada program studi yang sama

Tabel 4.8b. Uji t Perbedaan Rata-rata N-gain Kemampuan Mengkonstruksi Bukti diantara Dua Pembelajaran di Masing-masing Program Studi

Pengujian	t-test for Equality of Means				
	t	Sig. (2-tailed)	Mean Difference	95% Confidence Interval of the Difference	
				Lower	Upper
Mat	1,964	0,055	0,139	-0,003	0,280
Pend Mat	3,378	0,001	0,184	0,075	0,293

- H_0 : tidak terdapat perbedaan N-gain KSiB antara mahasiswa yang memperoleh pembelajaran yang berbeda pada program studi yang sama
 H_1 : N-gain KSiB mahasiswa yang diajar dengan pendekatan modifikasi APOS lebih baik dari konvensional pada program studi yang sama

Dari Tabel 4.8a Tabel 4.8b diperoleh nilai signifikansi untuk capaian dari faktor Program Studi Matematika adalah 0,048 dan untuk N-gain nilai signifikansi 0,055. Nilai ini lebih besar dari 0,05, sehingga dapat disimpulkan bahwa capaian dan peningkatan kemampuan mengkonstruksi bukti mahasiswa Program Studi Matematika yang diajar dengan pendekatan M-APOS lebih tinggi secara signifikan dibandingkan mahasiswa yang diajar dengan pendekatan konvensional.

Pada Program Studi Pendidikan Matematika untuk capaian diperoleh nilai signifikansinya 0,002 dan untuk N-gain diperoleh nilai signifikansinyo,001 yang juga lebih kecil dari 0,05. Maka dapat disimpulkan bahwa capaian dan peningkatan kemampuan mengkonstruksi bukti mahasiswa Program Studi Pendidikan Matematika yang diajar dengan pendekatan pendekatan M-APOS lebih baik dibandingkan mahasiswa Program Studi Pendidikan Matematika yang diajar dengan pendekatan konvensional.

2. KCaB dan KSiB berdasarkan Program Studi dan Kemampuan Awal Mahasiswa

Pada bagian ini akan disajikan hasil analisis data penelitian berdasarkan program studi dan kemampuan awal mahasiswa. Untuk melihat gambaran umum tentang kualitas hasil belajar ditinjau dari faktor program studi dan kemampuan awal mahasiswa maka pada Tabel 4.9 ditampilkan rata-rata dan simpangan baku dari capaian dan peningkatan kemampuan membaca bukti (KCaB) dan kemampuan mengkonstruksi bukti (KSiB) berdasarkan program studi dan kemampuan awal mahasiswa. Dari Tabel 4.9 dapat kita lihat bahwa untuk setiap level kemampuan awal, skor rata-rata tes kemampuan membaca bukti Program Studi Pendidikan Matematika lebih rendah dari Program Studi Matematika. Sementara itu untuk skor rata-rata tes kemampuan mengkonstruksi bukti Program Studi Pendidikan Matematika juga lebih rendah dari Program Studi Matematika kecuali untuk level kemampuan awal rendah.

Tabel 4.9 Skor Rata-rata dan Simpangan Baku KCaB dan KSiB berdasarkan Program Studi dan Kemampuan Awal Mahasiswa

KAM	n	S t a t	Program Studi												
			Matematika						Pendidikan Matematika						
			KCaB			KSiB			n	KCaB			KSiB		
			Pre	Pos	N-N- gain	Pre	Pos	N-N- gain		Pre	Pos	N-N- gain	Pre	Pos	N-N- gain
Tinggi	10	\bar{X}	4,50	76,80	0,76	6,70	88,60	0,87	20	7,60	71,45	0,69	2,25	74,20	0,74
		SD	3,69	8,82	0,09	10,27	9,14	0,12		6,76	10,46	0,10	4,72	18,70	0,19
Sedang	24	\bar{X}	3,54	62,13	0,61	2,92	61,08	0,60	25	4,60	49,32	0,47	0,20	47,56	0,47
		SD	3,45	12,51	0,13	4,40	19,01	0,20		5,58	15,15	0,17	1,00	14,12	0,14
Rendah	28	\bar{X}	0,36	35,04	0,35	2,14	28,11	0,27	17	2,35	33,41	0,32	0,59	31,59	0,31
		SD	1,31	14,57	0,15	3,45	17,26	0,17		3,59	12,38	0,13	1,66	15,37	0,16
Total	62	\bar{X}	2,26	52,26	0,51	3,18	50,63	0,49	62	4,95	52,10	0,50	0,97	51,77	0,51
		SD	3,22	20,92	0,21	5,54	28,16	0,28		5,84	19,69	0,20	2,98	23,13	0,23

Catatan: KAM = kemampuan awal mahasiswa
SD = simpangan baku
n = jumlah subjek
KCaB = kemampuan membaca bukti
KSiB = kemampuan mengkonstruksi bukti
Pre = Pretes
Pos = Postes
Skor ideal 100

Untuk melihat seberapa besar keberartian (signifikansi) perbedaan skor-skor peningkatannya, dilakukan analisis statistik ANOVA dua-jalur dan hasilnya dapat dilihat pada Tabel 4.10a dan Tabel 4.10b.

Tabel 4.10a. Hasil Anova Dua-Jalur berdasarkan Faktor Kemampuan Awal dan Program Studi

Faktor	Capaian Tes KCaB			Capaian Tes KSiB		
	F	P	H _{0(Ca)}	F	P	H _{0(Si)}
Kemamp. Awal	79,673	0,000	Ditolak	80,432	0,000	Ditolak
Program Studi	7,052	0,009	Ditolak	6,686	0,111	Diterima

- $H_{0(Ca)}$: tidak terdapat perbedaan capaian KCaB antar kelompok mahasiswa berdasarkan kemampuan awal dan program studi
- $H_{1(Ca)}$: terdapat perbedaan capaian KCaB antar kelompok mahasiswa berdasarkan kemampuan awal dan program studi
- $H_{0(Si)}$: tidak terdapat perbedaan capaian KSiB antar kelompok mahasiswa berdasarkan kemampuan awal dan program studi
- $H_{1(Si)}$: terdapat perbedaan capaian KSiB antar kelompok mahasiswa berdasarkan kemampuan awal dan program studi

Tabel 4.10b. Hasil Anova Dua-Jalur N-gain berdasarkan Faktor Kemampuan Awal dan Program Studi

Faktor	Capaian Tes KCaB			Capaian Tes KSiB		
	F	P	$H_{0(Ca)}$	F	P	$H_{0(Si)}$
Kemamp. Awal	70,810	0,000	Ditolak	78,325	0,000	Ditolak
Program Studi	8,895	0,003	Ditolak	5,024	0,027	Ditolak

- $H_{0(Ca)}$: tidak terdapat perbedaan N-gain KCaB antar kelompok mahasiswa berdasarkan kemampuan awal dan program studi
- $H_{1(Ca)}$: terdapat perbedaan N-gain KCaB antar kelompok mahasiswa berdasarkan kemampuan awal dan program studi
- $H_{0(Si)}$: tidak terdapat perbedaan N-gain KSiB antar kelompok mahasiswa berdasarkan kemampuan awal dan program studi
- $H_{1(Si)}$: terdapat perbedaan N-gain KSiB antar kelompok mahasiswa berdasarkan kemampuan awal dan program studi

Dari Tabel 4.10a terlihat bahwa dari faktor program studi, H_0 untuk hasil capaian KCaB ditolak dan hasil capaian KSiB diterima. Hal ini menunjukkan bahwa rata-rata skor kemampuan membaca bukti yang diperoleh oleh mahasiswa Program Studi Matematika dan Program Studi Pendidikan Matematika berbeda secara signifikan. Sementara untuk kemampuan mengkonstruksi bukti capaian yang diperoleh oleh mahasiswa Program Studi Matematika dan Program Studi Pendidikan Matematika tidak berbeda secara signifikan. Kemudian dari Tabel 4.10b terlihat bahwa dari faktor program studi, H_0 untuk hasil N-gain KCaB

diterima dan hasil N-gain KSiB ditolak. Hal ini menunjukkan bahwa peningkatan kemampuan membaca bukti yang diperoleh oleh mahasiswa Program Studi Matematika dan Program Studi Pendidikan Matematika tidak berbeda secara signifikan. Untuk peningkatan kemampuan mengkonstruksi bukti yang diperoleh oleh mahasiswa Program Studi Matematika dan Program Studi Pendidikan Matematika berbeda secara signifikan.

Untuk faktor kemampuan awal, H_0 untuk hasil capaian KCaB dan hasil capaian KSiB ditolak. Hal ini menunjukkan bahwa capaian kemampuan membaca bukti dan kemampuan mengkonstruksi bukti yang diperoleh oleh mahasiswa yang mempunyai level kemampuan awal berbeda, berbeda secara signifikan. Kemudian H_0 untuk hasil N-gain KCaB dan hasil N-gain KSiB juga ditolak. Hal ini menunjukkan bahwa peningkatan kemampuan membaca bukti dan kemampuan mengkonstruksi bukti yang diperoleh oleh mahasiswa yang mempunyai level kemampuan awal berbeda, berbeda secara signifikan.

Sementara itu, untuk interaksi antara program studi dan kemampuan awal H_0 diterima untuk capaian dan peningkatan kemampuan membaca bukti, yang berarti tidak ada interaksi di antara keduanya. Hal ini menunjukkan bahwa interaksi antara program studi dan kemampuan awal tidak memberikan pengaruh yang signifikan terhadap pencapaian kemampuan membaca bukti. Sementara untuk capaian dan peningkatan kemampuan mengkonstruksi bukti H_0 ditolak. Hal ini menunjukkan bahwa interaksi antara program studi dan kemampuan awal memberikan pengaruh yang signifikan terhadap pencapaian kemampuan mengkonstruksi bukti.

Untuk lebih rincinya akan dibahas tentang capaian kemampuan membaca bukti dan kemampuan mengkonstruksi bukti berdasarkan faktor program studi dan kemampuan awal secara terpisah. Pembahasan pertama tentang pencapaian kemampuan membaca bukti kemudian dilanjutkan dengan pencapaian kemampuan mengkonstruksi bukti.

a. KCaB berdasarkan Program Studi dan Kemampuan Awal Mahasiswa

Ditinjau dari faktor program studi, secara keseluruhan dari Tabel 4.9 diperoleh bahwa secara statistik tidak terdapat perbedaan capaian dan peningkatan kemampuan membaca bukti antara Program Studi Matematika dan Program Studi Pendidikan Matematika. Rata-rata capaian kemampuan membaca bukti Program Studi Matematika sedikit lebih tinggi dari Program Studi Pendidikan Matematika. Jadi dapat dikatakan tidak terdapat perbedaan capaian dan peningkatan kemampuan membaca bukti dan mengkonstruksi bukti antara kedua program studi.

Ditinjau dari faktor program studi yang memperoleh pendekatan pembelajaran yang sama juga tidak terdapat perbedaan yang signifikan. Artinya tidak terdapat perbedaan capaian dan peningkatan kemampuan membaca bukti antara kedua program studi yang menggunakan pendekatan M-APOS. Demikian juga untuk kelas dengan pendekatan konvensional. Artinya capaian dan peningkatan kemampuan membaca bukti mahasiswa Program Studi Matematika yang diajar dengan pendekatan konvensional tidak berbeda dibandingkan mahasiswa Program Studi Pendidikan Matematika yang diajar dengan pendekatan yang sama.

Ditinjau dari faktor kemampuan awal mahasiswa, pada Tabel 4.9 terlihat bahwa mahasiswa skor rata-rata kemampuan membaca bukti mahasiswa dengan level kemampuan tinggi lebih baik dari mahasiswa dengan level kemampuan sedang dan rendah. Untuk mahasiswa dengan level kemampuan sedang lebih baik dari mahasiswa dengan level kemampuan rendah. Untuk mengetahui perbedaan skor rata-rata dan peningkatan kemampuan membaca bukti antar kemampuan awal dilakukan uji lanjutan Tukey. Rangkuman dari hasil pengujian tersebut dapat dilihat pada Tabel 4.11a dan Tabel 4.11b.

Tabel 4.11a. Uji Lanjutan Tukey Perbedaan Rata-rata KCaB antar Kemampuan Awal atas Program Studi

Pengujian	Tukey HSD-test			
	Mean Difference	Sig.	95% Confidence Interval of the Difference	
			Lower	Upper
Sedang >< Rendah	21,170	0,000	14,519	27,820
Tinggi >< Rendah	38,811	0,000	31,219	46,403
Tinggi >< Sedang	17,642	0,000	10,175	25,108

H_0 : tidak terdapat perbedaan capaian KCaB antara kelompok kemampuan awal yang diperbandingkan

H_1 : capaian KCaB mahasiswa dengan level yang lebih tinggi lebih baik dari level yang lebih rendah

Tabel 4.11b. Uji Lanjutan Tukey Perbedaan Rata-rata N-gain KCaB antar Kemampuan Awal atas Program Studi

Pengujian	Tukey HSD-test			
	Mean Difference	Sig.	95% Confidence Interval of the Difference	
			Lower	Upper
Sedang >< Rendah	0,200	0,000	0,131	0,270
Tinggi >< Rendah	0,379	0,000	0,299	0,458
Tinggi >< Sedang	0,178	0,000	0,100	0,256

- H_0 : tidak terdapat perbedaan N-gain KCaB antara kelompok kemampuan awal yang dibandingkan
 H_1 : N-gain KCaB mahasiswa dengan level yang lebih tinggi lebih baik dari level yang lebih rendah

Berdasarkan Tabel 4.11a dan Tabel 4.11b dapat disimpulkan bahwa ditinjau dari faktor kemampuan awal, secara keseluruhan diperoleh terdapat perbedaan capaian dan peningkatan kemampuan membaca bukti antar kemampuan awal yang berbeda. Mahasiswa dengan kemampuan awal level tinggi memperoleh capaian dan peningkatan kemampuan membaca bukti lebih tinggi dari level sedang dan rendah. Begitu juga untuk mahasiswa dengan kemampuan awal level sedang memperoleh capaian dan peningkatan kemampuan membaca bukti lebih tinggi dari level rendah.

Kemudian untuk mahasiswa dengan kemampuan awal level tinggi, secara statistik tidak terdapat perbedaan capaian dan peningkatan kemampuan membaca bukti antara mahasiswa yang diajar dengan pendekatan M-APOS dan mahasiswa yang diajar secara konvensional. Tapi dari capaian yang diperoleh mahasiswa yang diajar dengan pendekatan M-APOS memperoleh hasil yang tinggi untuk kemampuan membaca bukti.

Untuk mahasiswa dengan kemampuan awal level sedang dan rendah, capaian dan peningkatan kemampuan membaca bukti mahasiswa yang diajar dengan pendekatan M-APOS lebih tinggi dari mahasiswa yang diajar secara konvensional. Kemudian jika dilihat dari simpangan baku kelihatan bahwa simpangan baku kelas dengan pendekatan M-APOS lebih kecil dari kelas

konvensional. Hal ini berarti perbedaan nilai antar mahasiswa dalam kelompok tidak terlalu besar, sehingga kemampuan mereka lebih seragam.

Selanjutnya, untuk mengetahui apakah di masing-masing kelompok kemampuan awal terdapat perbedaan capaian dan peningkatan kemampuan membaca bukti antara mahasiswa yang diajar dengan pendekatan M-APOS dan mahasiswa yang diajar secara konvensional dilakukan uji-t. Rangkuman dari hasil pengujian tersebut dapat dilihat pada Tabel 4.12a dan Tabel 4.12b.

Tabel 4.12a Uji t Perbedaan Rata-rata KCaB diantara Dua Program Studi di Masing-masing Kemampuan Awal

Pengujian	t-test for Equality of Means				
	t	Sig. (2-tailed)	Mean Difference	95% Confidence Interval of the Difference	
				Lower	Upper
Tinggi	1,387	0,175	5,350	-2,550	13,250
Sedang	3,218	0,002	12,805	4,801	20,809
Rendah	1,453	0,157	8,150	-3,340	19,640

H_0 : tidak terdapat perbedaan capaian KCaB antara mahasiswa program studi berbeda pada kemampuan awal yang sama

H_1 : terdapat perbedaan capaian KCaB antara mahasiswa program studi berbeda pada kemampuan awal yang sama

Tabel 4.12b Uji t Perbedaan Rata-rata N-gain KCaB diantara Dua Program Studi di Masing-masing Kemampuan Awal

Pengujian	t-test for Equality of Means				
	t	Sig. (2-tailed)	Mean Difference	95% Confidence Interval of the Difference	
				Lower	Upper
Tinggi	1,622	0,166	0,063	-0,166	0,143
Sedang	3,271	0,002	0,139	0,053	0,224
Rendah	0,676	0,503	0,029	-0,058	0,117

- H_0 : tidak terdapat perbedaan N-gain KCaB antara mahasiswa program studi berbeda pada kemampuan awal yang sama
- H_1 : terdapat perbedaan N-gain KCaB antara mahasiswa program studi berbeda pada kemampuan awal yang sama

Dari Tabel 4.12a dan Tabel 4.12b diperoleh bahwa capaian untuk kelompok tinggi diperoleh nilai signifikansi 0,175 dan N-gain untuk kelompok tinggi diperoleh nilai signifikansi 0,166 yang lebih besar dari 0,05, sehingga H_0 diterima. Artinya untuk mahasiswa dengan kemampuan awal level tinggi, tidak terdapat perbedaan capaian dan peningkatan kemampuan membaca bukti antara mahasiswa Program Studi Matematika dan Program Studi Pendidikan Matematika. Pada kelompok sedang untuk capaian diperoleh nilai signifikansi 0,866 yang lebih besar dari 0,05, sehingga H_0 juga diterima. Artinya untuk mahasiswa dengan kemampuan awal level sedang, tidak terdapat perbedaan capaian kemampuan membaca bukti antara mahasiswa Program Studi Matematika dan Program Studi Pendidikan Matematika. Tapi untuk N-gain pada kelompok sedang diperoleh nilai signifikansi 0,002 yang lebih kecil dari 0,05, sehingga H_0 juga ditolak. Artinya untuk mahasiswa dengan kemampuan awal level sedang, terdapat perbedaan peningkatan kemampuan membaca bukti antara mahasiswa Program Studi Matematika dan Program Studi Pendidikan Matematika.

Begitu juga untuk mahasiswa dengan kemampuan awal level rendah, untuk capaian diperoleh nilai signifikansi 0,157 dan untuk N-gain diperoleh nilai signifikansi 0,503 yang lebih besar dari 0,05, sehingga H_0 juga diterima. Artinya untuk mahasiswa dengan kemampuan awal level rendah, tidak terdapat perbedaan

capaian dan peningkatan kemampuan membaca bukti antara mahasiswa Program Studi Matematika dan Program Studi Pendidikan Matematika.

Untuk mengetahui apakah di masing-masing kelompok kemampuan awal pada Program Studi Matematika terdapat perbedaan capaian dan peningkatan kemampuan membaca bukti antara mahasiswa yang diajar dengan pendekatan M-APOS dan mahasiswa yang diajar secara konvensional dilakukan uji-t. Rangkuman dari hasil pengujian tersebut dapat dilihat pada Tabel 4.12c dan Tabel 4.12d.

Tabel 4.12c Uji t Perbedaan Rata-rata KCaB diantara Dua Pendekatan Pembelajaran pada Program Studi Matematika di Masing-masing Kemampuan Awal

Pengujian	t-test for Equality of Means				
	t	Sig. (2-tailed)	Mean Difference	95% Confidence Interval of the Difference	
				Lower	Upper
Tinggi	-0,930	0,380	-5,333	-18,557	7,890
Sedang	-0,240	0,813	-1,250	-12,070	9,570
Rendah	1,534	0,137	8,262	-2,811	19,334

H_0 : tidak terdapat perbedaan capaian KCaB mahasiswa Program Studi Matematika antara dua pendekatan pembelajaran yang berbeda pada kemampuan awal yang sama

H_1 : capaian KCaB mahasiswa Program Studi Matematika yang memperoleh pembelajaran M-APOS lebih baik dari pembelajaran konvensional pada kemampuan awal yang sama

Dari Tabel 4.12c dan Tabel 4.12d diperoleh bahwa capaian untuk kelompok tinggi diperoleh nilai signifikansi 0,380 dan N-gain untuk kelompok tinggi diperoleh nilai signifikansi 0,393 yang lebih besar dari 0,05, sehingga H_0 diterima. Artinya untuk mahasiswa dengan kemampuan awal level tinggi, tidak

terdapat perbedaan capaian dan peningkatan kemampuan membaca bukti mahasiswa Program Studi Matematika antara yang diajar dengan pendekatan M-APOS dan yang diajar secara konvensional. Pada kelompok sedang untuk capaian diperoleh nilai signifikansi 0,813 dan untuk N-gain 0,757 yang lebih besar dari 0,05, sehingga H_0 juga diterima. Artinya untuk mahasiswa dengan kemampuan awal level sedang, tidak terdapat perbedaan capaian dan peningkatan kemampuan membaca bukti mahasiswa Program Studi Matematika antara yang diajar dengan pendekatan M-APOS dan yang diajar secara konvensional.

Tabel 4.12d Uji t Perbedaan Rata-rata N-gain KCaB diantara Dua Pendekatan Pembelajaran pada Program Studi Matematika di Masing-masing Kemampuan Awal

Pengujian	t-test for Equality of Means				
	t	Sig. (2-tailed)	Mean Difference	95% Confidence Interval of the Difference	
				Lower	Upper
Tinggi	-0,903	0,393	-0,055	-0,195	0,085
Sedang	-0,313	0,757	-0,017	-0,127	0,094
Rendah	0,603	0,121	0,088	-0,025	0,201

H_0 : tidak terdapat perbedaan N-gain KCaB mahasiswa Program Studi Matematika antara dua pendekatan pembelajaran yang berbeda pada kemampuan awal yang sama

H_1 : N-gain KCaB mahasiswa Program Studi Matematika yang memperoleh pembelajaran M-APOS lebih baik dari pembelajaran konvensional pada kemampuan awal yang sama

Begitu juga untuk mahasiswa dengan kemampuan awal level rendah, untuk capaian diperoleh nilai signifikansi 0,137 dan untuk N-gain diperoleh nilai signifikansi 0,121 yang lebih besar dari 0,05, sehingga H_0 juga diterima. Artinya untuk mahasiswa dengan kemampuan awal level rendah, tidak terdapat perbedaan

capaian dan peningkatan kemampuan membaca bukti mahasiswa Program Studi Matematika antara yang diajar dengan pendekatan M-APOS dan yang diajar secara konvensional.

Untuk mengetahui apakah di masing-masing kelompok kemampuan awal pada Program Studi Pendidikan Matematika terdapat perbedaan capaian dan peningkatan kemampuan membaca bukti antara mahasiswa yang diajar dengan pendekatan M-APOS dan mahasiswa yang diajar secara konvensional dilakukan uji-t. Rangkuman dari hasil pengujian tersebut dapat dilihat pada Tabel 4.12e dan Tabel 4.12f.

Tabel 4.12e Uji t Perbedaan Rata-rata KCaB diantara Dua Pendekatan Pembelajaran pada Program Studi Pendidikan Matematika di Masing-masing Kemampuan Awal

Pengujian	t-test for Equality of Means				
	t	Sig. (2-tailed)	Mean Difference	95% Confidence Interval of the Difference	
				Lower	Upper
Tinggi	2,743	0,013	11,121	2,603	19,639
Sedang	3,303	0,003	16,961	6,339	27,583
Rendah	1,570	0,137	9,042	-3,230	21,313

- H_0 : tidak terdapat perbedaan capaian KCaB mahasiswa Program Studi Pendidikan Matematika antara dua pendekatan pembelajaran yang berbeda pada kemampuan awal yang sama
- H_1 : capaian KCaB mahasiswa Program Studi Pendidikan Matematika yang memperoleh pembelajaran M-APOS lebih baik dari pembelajaran konvensional pada kemampuan awal yang sama

Dari Tabel 4.12e dan Tabel 4.12f diperoleh bahwa capaian untuk kelompok tinggi diperoleh nilai signifikansi 0,013 dan N-gain untuk kelompok tinggi diperoleh nilai signifikansi 0,027 yang lebih kecil dari 0,05, sehingga H_0 ditolak.

Artinya untuk mahasiswa dengan kemampuan awal level tinggi, terdapat perbedaan capaian dan peningkatan kemampuan membaca bukti mahasiswa Program Studi Pendidikan Matematika antara yang diajar dengan pendekatan M-APOS dan yang diajar secara konvensional. Pada kelompok sedang untuk capaian diperoleh nilai signifikansi 0,003 dan untuk N-gain 0,010 yang lebih kecil dari 0,05, sehingga H_0 juga ditolak. Artinya untuk mahasiswa dengan kemampuan awal level sedang, terdapat perbedaan capaian dan peningkatan kemampuan membaca bukti mahasiswa Program Studi Pendidikan Matematika antara yang diajar dengan pendekatan M-APOS dan yang diajar secara konvensional.

Tabel 4.12f Uji t Perbedaan Rata-rata N-gain KCaB diantara Dua Pendekatan Pembelajaran pada Program Studi Pendidikan Matematika di Masing-masing Kemampuan Awal

Pengujian	t-test for Equality of Means				
	t	Sig. (2-tailed)	Mean Difference	95% Confidence Interval of the Difference	
				Lower	Upper
Tinggi	2,415	0,027	0,100	0,013	0,187
Sedang	2,829	0,010	0,166	0,045	0,288
Rendah	1,282	0,219	0,077	-0,051	0,205

- H_0 : tidak terdapat perbedaan N-gain KCaB mahasiswa Program Studi Pendidikan Matematika antara dua pendekatan pembelajaran yang berbeda pada kemampuan awal yang sama
- H_1 : N-gain KCaB mahasiswa Program Studi Pendidikan Matematika yang memperoleh pembelajaran M-APOS lebih baik dari pembelajaran konvensional pada kemampuan awal yang sama

Sementara untuk mahasiswa dengan kemampuan awal level rendah, untuk capaian diperoleh nilai signifikansi 0,137 dan untuk N-gain diperoleh nilai signifikansi 0,219 yang lebih besar dari 0,05, sehingga H_0 juga diterima. Artinya

untuk mahasiswa dengan kemampuan awal level rendah, tidak terdapat perbedaan capaian dan peningkatan kemampuan membaca bukti mahasiswa Program Studi Pendidikan Matematika antara yang diajar dengan pendekatan M-APOS dan yang diajar secara konvensional.

b. KSiB berdasarkan Program Studi dan Kemampuan Awal Mahasiswa

Ditinjau dari faktor program studi, secara keseluruhan telah diperoleh bahwa secara statistik tidak terdapat perbedaan capaian dan peningkatan mengkonstruksi bukti antara Program Studi Matematika dan Program Studi Pendidikan Matematika. Untuk rata-rata capaian kemampuan mengkonstruksi bukti Program Studi Pendidikan Matematika sedikit lebih tinggi dari Program Studi Matematika, tapi perbedaannya sangat tipis yaitu 1,14. Jadi dapat dikatakan tidak terdapat perbedaan capaian dan peningkatan mengkonstruksi bukti antara kedua program studi.

Ditinjau dari faktor program studi yang memperoleh pendekatan pembelajaran yang sama juga tidak terdapat perbedaan yang signifikan. Artinya tidak terdapat perbedaan capaian dan peningkatan capaian dan peningkatan kemampuan mengkonstruksi bukti antara kedua program studi yang menggunakan pendekatan M-APOS. Demikian juga untuk kelas dengan pendekatan konvensional. Artinya capaian dan peningkatan mengkonstruksi bukti mahasiswa Program Studi Matematika yang diajar dengan pendekatan konvensional tidak berbeda dibandingkan mahasiswa Program Studi Pendidikan Matematika yang diajar dengan pendekatan yang sama. Untuk kelas dengan pendekatan M-APOS, jumlah mahasiswa yang memperoleh nilai cukup ke atas lebih banyak Program

Studi Pendidikan Matematika dari pada Program Studi Matematika. Untuk kelas konvensional, jumlah mahasiswa yang memperoleh nilai cukup ke atas lebih banyak Program Studi Matematika dari pada Program Studi Pendidikan Matematika. Tetapi perbedaannya sangat tipis, sehingga secara umum dapat dikatakan tidak terdapat perbedaan antara kedua program studi.

Hasil ini tidak mengherankan, karena kedua program studi mempunyai kesamaan kurikulum sekitar 75%. Kedua program studi mempunyai mata kuliah Analisis Real. Kedua program studi dituntut untuk memperoleh kemampuan pembuktian matematis.

Dari Tabel 4.9 terlihat bahwa mahasiswa skor rata-rata kemampuan mengkonstruksi bukti mahasiswa dengan level kemampuan tinggi lebih baik dari mahasiswa dengan level kemampuan sedang dan rendah. Untuk mahasiswa dengan level kemampuan sedang lebih baik dari mahasiswa dengan level kemampuan rendah.

Untuk mengetahui perbedaan capaian dan N-gain kemampuan mengkonstruksi bukti antar kemampuan awal dilakukan uji lanjutan Tukey. Rangkuman dari hasil pengujian dapat dilihat pada Tabel 4.13a dan Tabel 4.13b.

Tabel 4.13a Uji Tukey Perbedaan Rata-rata KSiB antar Kemampuan Awal atas Program Studi

Pengujian	Tamhane-test			
	Mean Difference	Sig.	95% Confidence Interval of the Difference	
			Lower	Upper
Sedang >< Rendah	24,761	0,000	16,302	33,221
Tinggi >< Rendah	49,578	0,000	39,921	59,235
Tinggi >< Sedang	24,816	0,000	15,318	34,314

- H_0 : tidak terdapat perbedaan capaian KSiB antara kelompok kemampuan awal yang diperbandingkan
- H_1 : capaian KSiB mahasiswa dengan level yang lebih tinggi lebih baik dari level yang lebih rendah

Tabel 4.13b Uji Tukey Perbedaan Rata-rata N-gain KSiB antar Kemampuan Awal atas Program Studi

Pengujian	Tamhane-test			
	Mean Difference	Sig.	95% Confidence Interval of the Difference	
			Lower	Upper
Sedang >< Rendah	0,254	0,000	0,168	0,339
Tinggi >< Rendah	0,499	0,000	0,402	0,596
Tinggi >< Sedang	0,246	0,000	0,150	0,341

- H_0 : tidak terdapat perbedaan N-gain KSiB antara kelompok kemampuan awal yang diperbandingkan
- H_1 : N-gain KSiB mahasiswa dengan level yang lebih tinggi lebih baik dari level yang lebih rendah

Berdasarkan Tabel 4.13a dan Tabel 4.13b dapat disimpulkan bahwa terdapat perbedaan secara signifikan capaian dan peningkatan kemampuan mengkonstruksi bukti antar kemampuan awal berbeda pada kepercayaan 95%.

Selanjutnya, untuk mengetahui apakah di masing-masing kelompok kemampuan awal terdapat perbedaan capaian dan peningkatan kemampuan mengkonstruksi bukti antara mahasiswa yang diajar dengan pendekatan M-APOS dan mahasiswa yang diajar secara konvensional dilakukan uji-t. Rangkuman dari hasil pengujian tersebut dapat dilihat pada Tabel 4.14a dan Tabel 4.14b.

Dari Tabel 4.14a dan Tabel 4.14b diperoleh bahwa untuk capaian kelompok tinggi diperoleh nilai signifikansi 0,008 yang lebih kecil dari 0,05, sehingga H_0 ditolak. Artinya untuk mahasiswa dengan kemampuan awal level

tinggi, terdapat perbedaan capaian kemampuan mengkonstruksi bukti antara mahasiswa Program Studi Matematika dan Program Studi Pendidikan Matematika. Untuk N-gain kelompok tinggi diperoleh nilai signifikansi 0,051 yang lebih besar dari 0,05, sehingga H_0 diterima. Artinya untuk mahasiswa dengan kemampuan awal level tinggi, tidak terdapat perbedaan peningkatan kemampuan mengkonstruksi bukti antara mahasiswa Program Studi Matematika dan Program Studi Pendidikan Matematika.

Tabel 4.14a Uji t Perbedaan Rata-rata KSiB diantara Dua Program Studi di Masing-masing Kemampuan Awal

Pengujian	t-test for Equality of Means				
	t	Sig. (2-tailed)	Mean Difference	95% Confidence Interval of the Difference	
				Lower	Upper
Tinggi	2,832	0,008	14,400	3,985	24,815
Sedang	2,834	0,007	13,523	3,925	23,121
Rendah	3,839	0,001	20,900	9,749	32,051

H_0 : tidak terdapat perbedaan capaian KSiB antara mahasiswa program studi berbeda pada kemampuan awal yang sama

H_1 : terdapat perbedaan capaian KSiB antara mahasiswa program studi berbeda pada kemampuan awal yang sama

Tabel 4.14b. Uji t Perbedaan Rata-rata N-gain KSiB diantara Dua Program Studi di Masing-masing Kemampuan Awal

Pengujian	t-test for Equality of Means				
	t	Sig. (2-tailed)	Mean Difference	95% Confidence Interval of the Difference	
				Lower	Upper
Tinggi	2,039	0,051	0,133	-0,001	0,267
Sedang	2,620	0,012	0,127	0,030	0,225
Rendah	-0,885	0,381	-0,045	-0,148	0,058

- H_0 : tidak terdapat perbedaan N-gain KCaB antara mahasiswa program studi berbeda pada kemampuan awal yang sama
- H_1 : terdapat perbedaan N-gain KCaB antara mahasiswa program studi berbeda pada kemampuan awal yang sama

Sementara untuk capaian kelompok sedang diperoleh nilai signifikansi 0,400 yang lebih besar dari 0,05, sehingga H_0 diterima. Artinya untuk mahasiswa dengan kemampuan awal level sedang, tidak terdapat perbedaan capaian kemampuan mengkonstruksi bukti antara mahasiswa Program Studi Matematika dan Program Studi Pendidikan Matematika. Untuk N-gain kelompok sedang diperoleh nilai signifikansi 0,012 yang lebih kecil dari 0,05, sehingga H_0 ditolak. Artinya untuk mahasiswa dengan kemampuan awal level sedang, terdapat perbedaan peningkatan kemampuan mengkonstruksi bukti antara mahasiswa Program Studi Matematika dan Program Studi Pendidikan Matematika.

Sementara untuk capaian mahasiswa dengan kemampuan awal level rendah, diperoleh nilai signifikansi 0,001 yang lebih kecil dari 0,05, sehingga H_0 juga ditolak. Artinya untuk mahasiswa dengan kemampuan awal level rendah, terdapat perbedaan capaian kemampuan mengkonstruksi bukti antara mahasiswa Program Studi Matematika dan Program Studi Pendidikan Matematika. Untuk N-gain mahasiswa dengan kemampuan awal level rendah, diperoleh nilai signifikansi 0,381 yang lebih besar dari 0,05, sehingga H_0 juga diterima. Artinya untuk mahasiswa dengan kemampuan awal level rendah, tidak terdapat perbedaan peningkatan kemampuan mengkonstruksi bukti antara mahasiswa Program Studi Matematika dan Program Studi Pendidikan Matematika.

Untuk mengetahui apakah di masing-masing kelompok kemampuan awal pada Program Studi Matematika terdapat perbedaan capaian dan peningkatan kemampuan mengkonstruksi bukti antara mahasiswa yang diajar dengan pendekatan M-APOS dan mahasiswa yang diajar secara konvensional dilakukan uji-t. Rangkuman dari hasil pengujian tersebut dapat dilihat pada Tabel 4.14c dan Tabel 4.14d

Tabel 4.14c Uji t Perbedaan Rata-rata KSiB diantara Dua Pendekatan Pembelajaran pada Program Studi Matematika di Masing-masing Kemampuan Awal

Pengujian	t-test for Equality of Means				
	t	Sig. (2-tailed)	Mean Difference	95% Confidence Interval of the Difference	
				Lower	Upper
Tinggi	-0,173	0,867	-1,083	-15,492	13,325
Sedang	-0,063	0,950	-0,500	-16,959	15,959
Rendah	4,877	0,000	23,492	13,591	33,393

H_0 : tidak terdapat perbedaan capaian KSiB mahasiswa Program Studi Matematika antara dua pendekatan pembelajaran yang berbeda pada kemampuan awal yang sama

H_1 : capaian KSiB mahasiswa Program Studi Matematika yang memperoleh pembelajaran M-APOS lebih baik dari pembelajaran konvensional pada kemampuan awal yang sama

Tabel 4.14d Uji t Perbedaan Rata-rata N-gain KSiB diantara Dua Pendekatan Pembelajaran pada Program Studi Matematika di Masing-masing Kemampuan Awal

Pengujian	t-test for Equality of Means				
	t	Sig. (2-tailed)	Mean Difference	95% Confidence Interval of the Difference	
				Lower	Upper
Tinggi	-0,285	0,783	-0,023	-0,212	0,165
Sedang	0,061	0,952	0,005	-0,164	0,174
Rendah	4,653	0,000	0,226	0,126	0,325

- H_0 : tidak terdapat perbedaan N-gain KSiB mahasiswa Program Studi Matematika antara dua pendekatan pembelajaran yang berbeda pada kemampuan awal yang sama
- H_1 : N-gain KSiB mahasiswa Program Studi Matematika yang memperoleh pembelajaran M-APOS lebih baik dari pembelajaran konvensional pada kemampuan awal yang sama

Dari Tabel 4.14c dan Tabel 4.14d diperoleh bahwa capaian untuk kelompok tinggi diperoleh nilai signifikansi 0,867 dan N-gain untuk kelompok tinggi diperoleh nilai signifikansi 0,783 yang lebih besar dari 0,05, sehingga H_0 diterima. Artinya untuk mahasiswa dengan kemampuan awal level tinggi, tidak terdapat perbedaan capaian dan peningkatan kemampuan mengkonstruksi bukti mahasiswa Program Studi Matematika antara yang diajar dengan pendekatan M-APOS dan yang diajar secara konvensional. Pada kelompok sedang untuk capaian diperoleh nilai signifikansi 0,950 dan untuk N-gain 0,952 yang lebih besar dari 0,05, sehingga H_0 juga diterima. Artinya untuk mahasiswa dengan kemampuan awal level sedang, tidak terdapat perbedaan capaian dan peningkatan kemampuan mengkonstruksi bukti mahasiswa Program Studi Matematika antara yang diajar dengan pendekatan M-APOS dan yang diajar secara konvensional. Sementara itu untuk mahasiswa dengan kemampuan awal level rendah, untuk capaian dan N-gain diperoleh nilai signifikansi 0,000 yang lebih kecil dari 0,05, sehingga H_0 ditolak. Artinya untuk mahasiswa dengan kemampuan awal level rendah, terdapat perbedaan capaian dan peningkatan kemampuan mengkonstruksi bukti mahasiswa Program Studi Matematika antara yang diajar dengan pendekatan M-APOS dan yang diajar secara konvensional.

Untuk mengetahui apakah di masing-masing kelompok kemampuan awal pada Program Studi Pendidikan Matematika terdapat perbedaan capaian dan peningkatan kemampuan mengkonstruksi bukti antara mahasiswa yang diajar dengan pendekatan M-APOS dan mahasiswa yang diajar secara konvensional dilakukan uji-t. Rangkuman dari hasil pengujian tersebut dapat dilihat pada Tabel 4.12e dan Tabel 4.12f.

Tabel 4.14e Uji t Perbedaan Rata-rata KSiB diantara Dua Pendekatan Pembelajaran pada Program Studi Pendidikan Matematika di Masing-masing Kemampuan Awal

Pengujian	t-test for Equality of Means				
	t	Sig. (2-tailed)	Mean Difference	95% Confidence Interval of the Difference	
				Lower	Upper
Tinggi	1,799	0,089	14,303	-2,404	31,010
Sedang	3,872	0,001	17,506	8,153	26,860
Rendah	3,277	0,005	19,292	6,743	31,840

H_0 : tidak terdapat perbedaan capaian KCaB mahasiswa Program Studi Pendidikan Matematika antara dua pendekatan pembelajaran yang berbeda pada kemampuan awal yang sama

H_1 : capaian KCaB mahasiswa Program Studi Pendidikan Matematika yang memperoleh pembelajaran M-APOS lebih baik dari pembelajaran konvensional pada kemampuan awal yang sama

Tabel 4.14f Uji t Perbedaan Rata-rata N-gain KSiB diantara Dua Pendekatan Pembelajaran pada Program Studi Pendidikan Matematika di Masing-masing Kemampuan Awal

Pengujian	t-test for Equality of Means				
	t	Sig. (2-tailed)	Mean Difference	95% Confidence Interval of the Difference	
				Lower	Upper
Tinggi	1,841	0,082	0,146	-0,021	0,312
Sedang	3,918	0,001	0,177	0,084	0,271
Rendah	3,399	0,004	0,203	0,076	0,330

- H_0 : tidak terdapat perbedaan N-gain KSiB mahasiswa Program Studi Pendidikan Matematika antara dua pendekatan pembelajaran yang berbeda pada kemampuan awal yang sama
- H_1 : N-gain KSiB mahasiswa Program Studi Pendidikan Matematika yang memperoleh pembelajaran M-APOS lebih baik dari pembelajaran konvensional pada kemampuan awal yang sama

Dari Tabel 4.14e dan Tabel 4.14f diperoleh bahwa capaian untuk kelompok tinggi diperoleh nilai signifikansi 0,089 dan N-gain untuk kelompok tinggi diperoleh nilai signifikansi 0,082 yang lebih besar dari 0,05, sehingga H_0 diterima. Artinya untuk mahasiswa dengan kemampuan awal level tinggi, tidak terdapat perbedaan capaian dan peningkatan kemampuan mengkonstruksi bukti mahasiswa Program Studi Pendidikan Matematika antara yang diajar dengan pendekatan M-APOS dan yang diajar secara konvensional. Pada kelompok sedang untuk capaian diperoleh nilai signifikansi 0,001 dan untuk N-gain juga 0,001 yang lebih kecil dari 0,05, sehingga H_0 juga ditolak. Artinya untuk mahasiswa dengan kemampuan awal level sedang, terdapat perbedaan capaian dan peningkatan kemampuan mengkonstruksi bukti mahasiswa Program Studi Pendidikan Matematika antara yang diajar dengan pendekatan M-APOS dan yang diajar secara konvensional. Begitu juga untuk mahasiswa dengan kemampuan awal level rendah, untuk capaian diperoleh nilai signifikansi 0,005 dan untuk N-gain diperoleh nilai signifikansi 0,004 yang lebih kecil dari 0,05, sehingga H_0 juga ditolak. Artinya untuk mahasiswa dengan kemampuan awal level rendah, terdapat perbedaan capaian dan peningkatan kemampuan mengkonstruksi bukti mahasiswa Program Studi Pendidikan Matematika antara yang diajar dengan pendekatan M-APOS dan yang diajar secara konvensional.

3. KCaB dan KSiB berdasarkan Kemampuan Awal dan Pembelajaran

Pada bagian ini akan disajikan hasil analisis data penelitian berdasarkan kemampuan awal dan pendekatan pembelajaran Untuk melihat gambaran umum tentang hasil belajar berdasarkan faktor kemampuan awal dan pendekatan pembelajaran maka pada Tabel 4.15 ditampilkan rata-rata dan simpangan baku dari capaian dan peningkatan kemampuan membaca bukti (KCaB), dan kemampuan mengkonstruksi bukti (KSiB) berdasarkan kemampuan awal dan pendekatan pembelajaran.

Tabel 4.15 Skor Rata-rata dan Simpangan Baku Skor KCaB, KSiB, N-gain KCaB, dan N-gain KSiB berdasarkan Kemampuan Awal dan Pendekatan Pembelajaran

K A M	n	S t a t	Pendekatan Pembelajaran												
			M-APOS						Konvensional						
			KCaB			KSiB			n	KCaB			KSiB		
			Pre	Pos	N-gain	Pre	Pos	N-gain		Pre	Pos	N-gain	Pre	Pos	N-gain
Tinggi	17	\bar{X}	8,35	75,82	0,74	3,24	83,29	0,82	13	4,23	69,85	0,69	4,38	73,38	0,73
		SD	5,80	8,83	0,09	7,28	16,38	0,17		5,72	11,01	0,11	7,35	17,71	0,18
Sedang	23	\bar{X}	5,22	60,22	0,58	0,65	59,17	0,59	26	3,08	51,50	0,50	2,31	49,77	0,49
		SD	4,39	13,15	0,13	1,72	14,56	0,14		4,71	15,98	0,18	4,30	19,59	0,20
Rendah	22	\bar{X}	1,36	38,73	0,38	1,82	40,68	0,40	23	0,87	30,30	0,30	1,30	18,65	0,18
		SD	3,16	13,96	0,14	3,63	13,25	0,13		1,94	12,29	0,13	2,24	11,30	0,11
Total	62	\bar{X}	4,71	56,87	0,55	1,77	59,23	0,58	62	2,50	47,48	0,46	2,37	43,18	0,42
		SD	5,20	19,31	0,19	4,54	22,20	0,22		4,32	20,19	0,21	4,62	26,55	0,27

Catatan: KAM = kemampuan awal mahasiswa
 SD = simpangan baku
 n = jumlah subjek
 KCaB = kemampuan membaca bukti
 KSiB = kemampuan mengkonstruksi bukti
 Pre = Pretes
 Pos = Postes
 Stat = statistik
 Skor ideal 100

Dari Tabel 4.15 dapat kita lihat bahwa skor rata-rata tes kemampuan membaca bukti dan kemampuan mengkonstruksi bukti kelas eksperimen lebih tinggi dari kelas kontrol pada setiap level kemampuan awal. Hal ini berarti bahwa capaian kemampuan membaca bukti dan kemampuan mengkonstruksi bukti mahasiswa level tinggi yang diajar dengan M-APOS lebih tinggi dari mahasiswa level tinggi yang diajar secara konvensional. Hal yang sama juga terjadi pada level kemampuan awal sedang dan rendah.

Untuk melihat seberapa besar keberartian (signifikansi) perbedaan capaian dan peningkatannya, dilakukan analisis statistik ANOVA dua-jalur dan hasilnya dapat dilihat pada Tabel 4.16a dan Tabel 4.16b.

Tabel 4.16a Hasil Anova Dua-Jalur Capaian Kemampuan Membaca Bukti dan Kemampuan Mengkonstruksi Bukti berdasarkan Faktor Kemampuan Awal dan Pembelajaran

Faktor	Capaian Tes KCaB			Capaian Tes KSiB		
	F	P	H ₀	F	P	H ₀
Kemp. Awal	79,222	0,000	Ditolak	88,216	0,000	Ditolak
Pembelajaran	10,129	0,002	Ditolak	22,831	0,000	Ditolak
Interaksi	0,111	0,895	Diterima	2,264	0,108	Diterima

$H_{0(Ca)}$: tidak terdapat perbedaan capaian KCaB antar kelompok mahasiswa berdasarkan kemampuan awal dan pendekatan pembelajaran

$H_{1(Ca)}$: terdapat perbedaan capaian KCaB antar kelompok mahasiswa berdasarkan kemampuan awal dan pendekatan pembelajaran

$H_{0(ICa)}$: tidak terdapat interaksi antara pembelajaran dan kemampuan awal dalam pencapaian KCaB

$H_{1(ICa)}$: terdapat interaksi antara pembelajaran dan kemampuan awal dalam pencapaian KCaB

$H_{0(Si)}$: tidak terdapat perbedaan capaian KSiB antar kelompok mahasiswa berdasarkan kemampuan awal dan pendekatan pembelajaran

$H_{1(Si)}$: terdapat perbedaan capaian KSiB antar kelompok mahasiswa berdasarkan kemampuan awal dan pendekatan pembelajaran

$H_{0(ISi)}$: tidak terdapat interaksi antara pembelajaran dan kemampuan awal dalam

pencapaian KSiB
 $H_{1(1Si)}$: terdapat interaksi antara pembelajaran dan kemampuan awal dalam pencapaian KSiB

Tabel 4.16b. Hasil Anova Dua-Jalur N-gain Kemampuan Membaca Bukti dan Kemampuan Mengkonstruksi Bukti berdasarkan Faktor Kemampuan Awal dan Pembelajaran

Faktor	Capaian Tes KCaB			Capaian Tes KSiB		
	F	P	H ₀	F	P	H ₀
Kemp. Awal	67,322	0,000	Ditolak	87,975	0,000	Ditolak
Pembelajaran	8,089	0,005	Ditolak	22,515	0,000	Ditolak
Interaksi	0,138	0,871	Diterima	2,081	0,129	Diterima

$H_{0(Ca)}$: tidak terdapat perbedaan N-gain KCaB antar kelompok mahasiswa berdasarkan kemampuan awal dan pendekatan pembelajaran

$H_{1(Ca)}$: terdapat perbedaan N-gain KCaB antar kelompok mahasiswa berdasarkan kemampuan awal dan pendekatan pembelajaran

$H_{0(Si)}$: tidak terdapat perbedaan N-gain KSiB antar kelompok mahasiswa berdasarkan kemampuan awal dan pendekatan pembelajaran

$H_{1(Si)}$: terdapat perbedaan N-gain KSiB antar kelompok mahasiswa berdasarkan kemampuan awal dan pendekatan pembelajaran

Dari Tabel 4.16a dan Tabel 4.16b terlihat bahwa dari faktor kemampuan awal, H₀ untuk hasil capaian dan N-gain KCaB dan hasil capaian dan N-gain KSiB ditolak. Hal ini menunjukkan bahwa capaian dan peningkatan kemampuan membaca bukti dan kemampuan mengkonstruksi bukti yang diperoleh oleh mahasiswa dengan level kemampuan awal rendah, sedang, dan tinggi berbeda secara signifikan.

Untuk faktor pembelajaran, H₀ untuk hasil capaian dan peningkatan KCaB dan hasil capaian dan peningkatan KSiB ditolak. Hal ini menunjukkan bahwa capaian dan peningkatan kemampuan membaca bukti dan kemampuan mengkonstruksi bukti yang diperoleh oleh mahasiswa yang diajar dengan

pendekatan M-APOS dan yang diajar dengan cara konvensional berbeda secara signifikan. Sementara itu, untuk interaksi antara kemampuan awal dan pembelajaran H_0 diterima, yang berarti tidak ada interaksi di antara keduanya. Hal ini menunjukkan bahwa interaksi antara kemampuan awal dan pembelajaran tidak memberikan pengaruh yang signifikan terhadap pencapaian dan peningkatan kemampuan membaca bukti dan kemampuan mengkonstruksi bukti.

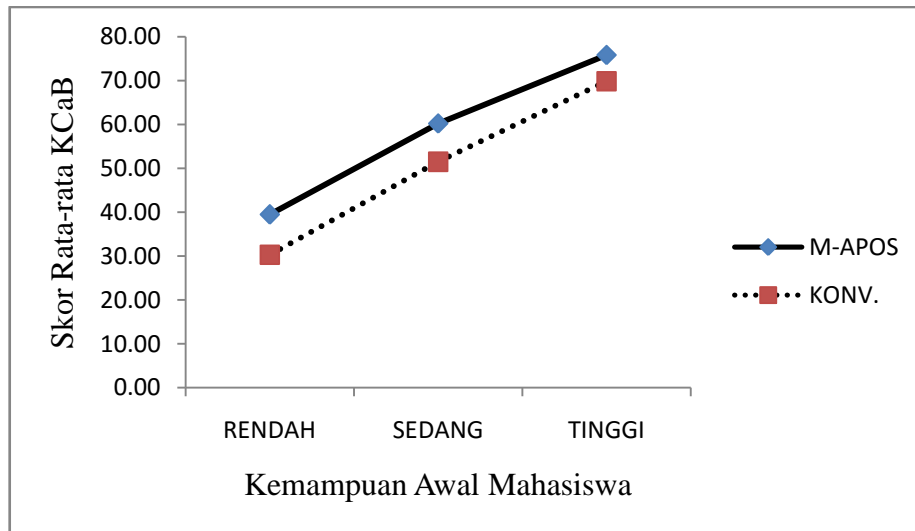
Untuk lebih rincinya akan dibahas tentang capaian dan peningkatan kemampuan membaca bukti dan kemampuan mengkonstruksi bukti berdasarkan faktor kemampuan awal dan pendekatan pembelajaran secara terpisah. Pembahasan pertama tentang pencapaian kemampuan membaca bukti kemudian dilanjutkan dengan pencapaian kemampuan mengkonstruksi bukti.

a. KCaB berdasarkan Kemampuan Awal dan Pembelajaran

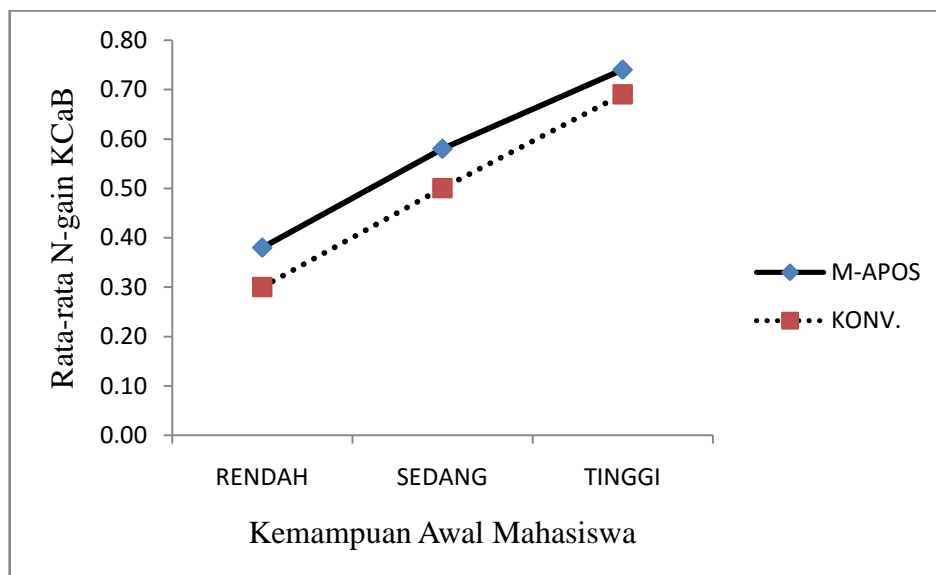
Dari Tabel 4.15 telah diperoleh bahwa skor rata-rata kemampuan membaca bukti yang diperoleh oleh mahasiswa yang diajar dengan pendekatan M-APOS pada setiap level kemampuan awal (tinggi, sedang, dan rendah) lebih tinggi dari mahasiswa yang diajar secara konvensional pada level kemampuan awal yang sama. Untuk faktor pembelajaran diperoleh bahwa rata-rata skor kemampuan membaca bukti yang diperoleh oleh mahasiswa yang diajar dengan pendekatan M-APOS dan yang diajar dengan cara konvensional berbeda secara signifikan.

Sementara untuk interaksi antara kemampuan awal dan pembelajaran untuk capaian diperoleh nilai signifikansinya 0,895 dan untuk N-gain 0,871 yang lebih besar dari nilai $\alpha = 0,05$. Hal ini menunjukkan bahwa interaksi antara kemampuan awal dan pembelajaran tidak memberikan pengaruh yang signifikan terhadap

pencapaian dan peningkatan kemampuan membaca bukti pada tingkat kepercayaan 95%. Diagram interaksi antara kedua faktor untuk tes kemampuan membaca bukti dapat dilihat pada Gambar 4.3a Gambar 4.3b.



Gambar 4. 3a Interaksi antara kemampuan awal dan pembelajaran terhadap pencapaian kemampuan membaca bukti



Gambar 4. 3b Interaksi antara kemampuan awal dan pembelajaran terhadap peningkatan kemampuan membaca bukti

Dari Tabel 4.15 terlihat bahwa mahasiswa skor rata-rata kemampuan membaca bukti mahasiswa dengan level kemampuan tinggi lebih baik dari mahasiswa dengan level kemampuan sedang dan rendah. Untuk mahasiswa dengan level kemampuan sedang lebih baik dari mahasiswa dengan level kemampuan rendah. Selanjutnya, untuk mengetahui apakah di masing-masing kelompok kemampuan awal terdapat perbedaan capaian dan peningkatan kemampuan membaca bukti antara mahasiswa yang diajar dengan pendekatan M-APOS dan mahasiswa yang diajar secara konvensional dilakukan uji-t. Rangkuman dari hasil pengujian tersebut dapat dilihat pada Tabel 4.17a Tabel 4.17b.

Tabel 4.17a. Uji t Perbedaan Rata-rata KCaB diantara Dua Pendekatan Pembelajaran di Masing-masing Kemampuan Awal

Pengujian	t-test for Equality of Means				
	t	Sig. (2-tailed)	Mean Difference	95% Confidence Interval of the Difference	
				Lower	Upper
Tinggi	1,651	0,110	5,977	-1,349	13,394
Sedang	2,068	0,044	8,717	0,338	17,097
Rendah	2,298	0,026	9,157	1,140	17,174

- H_0 : tidak terdapat perbedaan capaian KCaB antara mahasiswa yang memperoleh pembelajaran yang berbeda pada kemampuan awal yang sama
- H_1 : capaian KCaB mahasiswa yang memperoleh pembelajaran dengan M-APOS lebih baik dari konvensional pada kemampuan awal yang sama

Dari Tabel 4.17a dan Tabel 4.17b diperoleh bahwa untuk capaian kelompok tinggi diperoleh nilai signifikansi 0,110 dan untuk N-gain 0,173 yang lebih besar dari 0,05, sehingga H_0 diterima. Artinya untuk mahasiswa dengan kemampuan awal level tinggi, tidak terdapat perbedaan capaian dan peningkatan

kemampuan membaca bukti antara mahasiswa yang diajar dengan pendekatan M-APOS dan mahasiswa yang diajar secara konvensional.

Tabel 4.17b. Uji t Perbedaan Rata-rata N-gain KCaB diantara Dua Pendekatan Pembelajaran di Masing-masing Kemampuan Awal

Pengujian	t-test for Equality of Means				
	t	Sig. (2-tailed)	Mean Difference	95% Confidence Interval of the Difference	
				Lower	Upper
Tinggi	1,399	0,173	0,052	-0,024	0,129
Sedang	1,849	0,071	0,084	-0,007	0,175
Rendah	2,024	0,049	0,082	0,000	0,163

- H_0 : tidak terdapat perbedaan N-gain KCaB antara mahasiswa yang memperoleh pembelajaran yang berbeda pada kemampuan awal yang sama
 H_1 : N-gain KCaB mahasiswa yang memperoleh pembelajaran dengan M-APOS lebih baik dari konvensional pada kemampuan awal yang sama

Sementara untuk capaian kelompok sedang diperoleh nilai signifikansi 0,044 yang lebih kecil dari 0,05, sehingga H_0 ditolak. Artinya untuk mahasiswa dengan kemampuan awal level sedang, capaian kemampuan membaca bukti mahasiswa yang diajar dengan pendekatan M-APOS lebih tinggi dari mahasiswa yang diajar secara konvensional. Sementara untuk N-gain diperoleh nilai signifikansi 0,071 yang lebih besar dari 0,05, sehingga H_0 diterima. Artinya untuk mahasiswa dengan kemampuan awal level sedang, peningkatan kemampuan membaca bukti mahasiswa yang diajar dengan pendekatan M-APOS lebih tinggi dari mahasiswa yang diajar secara konvensional. Untuk mahasiswa dengan kemampuan awal level rendah, untuk capaian diperoleh nilai signifikansi 0,026 dan untuk N-gain 0,049 yang lebih kecil dari 0,05, sehingga H_0 ditolak. Artinya untuk mahasiswa dengan kemampuan awal level rendah, capaian dan peningkatan

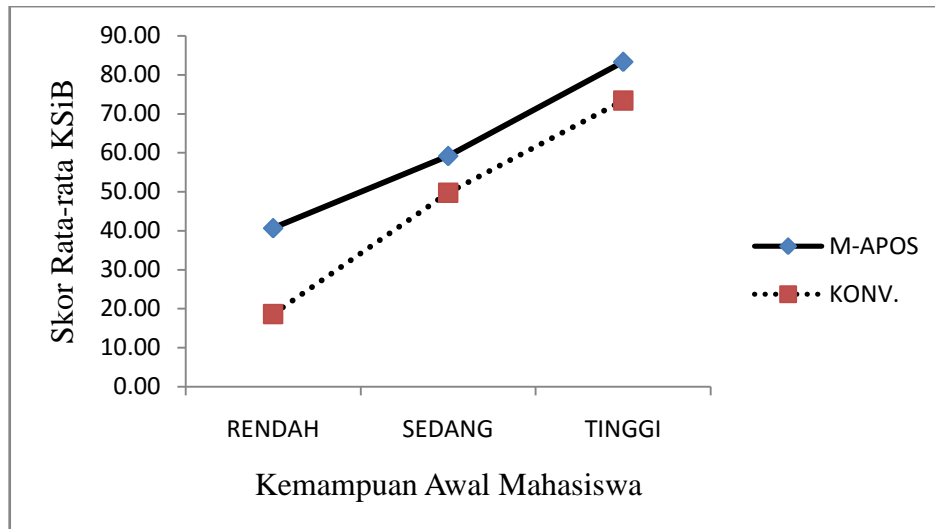
kemampuan membaca bukti mahasiswa yang diajar dengan pendekatan M-APOS lebih tinggi dari mahasiswa yang diajar secara konvensional.

b. KSiB berdasarkan Kemampuan Awal dan Pembelajaran

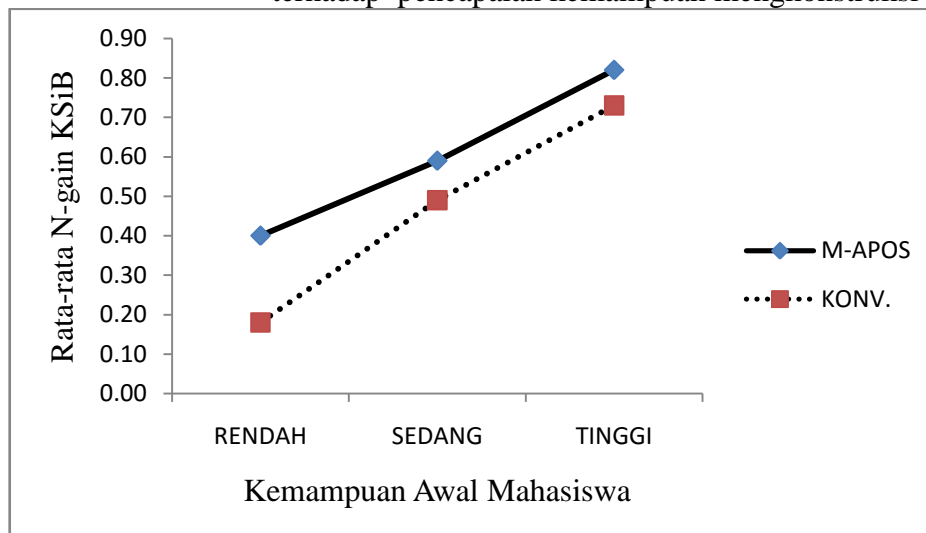
Dari Tabel 4.15 telah diperoleh bahwa skor rata-rata kemampuan mengkonstruksi bukti yang diperoleh oleh mahasiswa yang diajar dengan pendekatan M-APOS pada setiap level kemampuan awal (tinggi, sedang, dan rendah) lebih tinggi dari mahasiswa yang diajar secara konvensional pada level kemampuan awal yang sama. Untuk faktor pembelajaran diperoleh bahwa rata-rata skor kemampuan mengkonstruksi bukti yang diperoleh oleh mahasiswa yang diajar dengan pendekatan M-APOS dan yang diajar dengan cara konvensional berbeda secara signifikan.

Sementara untuk interaksi antara kemampuan awal dan pembelajaran untuk capaian diperoleh nilai signifikansinya 0,108 dan untuk N-gain diperoleh 0,129 yang lebih besar dari nilai $\alpha = 0,05$. Hal ini menunjukkan bahwa interaksi antara kemampuan awal dan pembelajaran tidak memberikan pengaruh yang signifikan terhadap pencapaian dan peningkatan kemampuan mengkonstruksi bukti pada tingkat kepercayaan 95%. Diagram interaksi antara kedua faktor untuk tes kemampuan mengkonstruksi bukti dapat dilihat pada Gambar 4.4a Gambar 4.4b.

Dari Tabel 4.15 terlihat bahwa mahasiswa skor rata-rata kemampuan mengkonstruksi bukti mahasiswa dengan level kemampuan tinggi lebih baik dari mahasiswa dengan level kemampuan sedang dan rendah. Untuk mahasiswa dengan level kemampuan sedang lebih baik dari mahasiswa dengan level kemampuan rendah.



Gambar 4. 4a Interaksi antara kemampuan awal dan pembelajaran terhadap pencapaian kemampuan mengkonstruksi bukti



Gambar 4. 4b Interaksi antara kemampuan awal dan pembelajaran terhadap peningkatan kemampuan mengkonstruksi bukti

Selanjutnya, untuk mengetahui apakah di masing-masing kelompok kemampuan awal terdapat perbedaan capaian dan peningkatan kemampuan mengkonstruksi bukti antara mahasiswa yang diajar dengan pendekatan M-APOS dan mahasiswa yang diajar secara konvensional dilakukan uji-t. Rangkuman dari hasil pengujian tersebut dapat dilihat pada Tabel 4.18a Tabel 4.18b.

Tabel 4.18a. Uji-t Perbedaan Rata-rata KSiB diantara Dua Pendekatan Pembelajaran di Masing-masing Kemampuan Awal

Pengujian	t-test for Equality of Means				
	t	Sig. (2-tailed)	Mean Difference	95% Confidence Interval of the Difference	
				Lower	Upper
Tinggi	1,585	0,124	9,910	-2,894	22,713
Sedang	1,886	0,065	9,404	-0,629	19,435
Rendah	6,637	0,000	22,040	15,360	28,720

- H_0 : tidak terdapat perbedaan capaian KSiB antara mahasiswa yang memperoleh pembelajaran yang berbeda pada kemampuan awal yang sama
- H_1 : capaian KSiB mahasiswa yang memperoleh pembelajaran dengan M-APOS lebih baik dari konvensional pada kemampuan awal yang sama

Tabel 4.18b. Uji-t Perbedaan Rata-rata N-gain KSiB diantara Dua Pendekatan Pembelajaran di Masing-masing Kemampuan Awal

Pengujian	t-test for Equality of Means				
	t	Sig. (2-tailed)	Mean Difference	95% Confidence Interval of the Difference	
				Lower	Upper
Tinggi	1,508	0,143	0,096	-0,035	0,227
Sedang	1,991	0,052	0,100	-0,001	0,200
Rendah	5,910	0,000	0,219	0,144	0,294

- H_0 : tidak terdapat perbedaan N-gain KSiB antara mahasiswa yang memperoleh pembelajaran yang berbeda pada kemampuan awal yang sama
- H_1 : N-gain KSiB mahasiswa yang memperoleh pembelajaran dengan M-APOS lebih baik dari konvensional pada kemampuan awal yang sama

Dari Tabel 4.18a dan Tabel 4.18b diperoleh bahwa untuk capaian kelompok tinggi diperoleh nilai signifikansi 0,124 dan untuk N-gain diperoleh 0,143 yang lebih besar dari 0,05, sehingga H_0 diterima. Artinya untuk mahasiswa dengan kemampuan awal level tinggi, tidak terdapat perbedaan capaian dan

peningkatan kemampuan mengkonstruksi bukti antara mahasiswa yang diajar dengan pendekatan M-APOS dan mahasiswa yang diajar secara konvensional. Sementara untuk capaian kelompok sedang diperoleh nilai signifikansi 0,065 dan untuk N-gain diperoleh 0,052 yang lebih besar dari 0,05, sehingga H_0 diterima. Artinya untuk mahasiswa dengan kemampuan awal level sedang, capaian dan peningkatan kemampuan mengkonstruksi bukti mahasiswa yang diajar dengan pendekatan M-APOS tidak berbeda dari mahasiswa yang diajar secara konvensional. Sementara itu untuk mahasiswa dengan kemampuan awal level rendah, untuk capaian diperoleh nilai signifikansi 0,000 dan untuk peningkatan diperoleh nilai signifikansi 0,000 yang lebih kecil dari 0,05, sehingga H_0 ditolak. Artinya untuk mahasiswa dengan kemampuan awal level rendah, capaian dan peningkatan kemampuan mengkonstruksi bukti mahasiswa yang diajar dengan pendekatan M-APOS lebih tinggi dari mahasiswa yang diajar secara konvensional.

4. Asosiasi antara KCaB, KSiB, dan Kemandirian Belajar Matematik

Untuk mengetahui apakah terdapat asosiasi antara membaca bukti, mengkonstruksi bukti, dan kemandirian belajar matematik digunakan asosiasi kontingensi. Supaya data yang diperlukan dapat digunakan untuk menentukan asosiasi, maka data kemampuan membaca bukti dan mengkonstruksi bukti diubah menjadi data nominal. Untuk itu kedua kelompok data diubah ke dalam kriteria kualifikasi tertentu. Kriteria tersebut adalah sebagai berikut.

Kriteria kualifikasi membaca bukti adalah

$$\text{KCaB Tinggi} > 75$$

$$55 < \text{KCaB Sedang} \leq 75$$

KCaB Rendah ≤ 55

Kriteria kualifikasi mengkonstruksi bukti adalah

KSiB Tinggi > 75

$55 < \text{KSiB Sedang} \leq 75$

KSiB Rendah ≤ 55

Hasil pengelompokan secara keseluruhan membaca bukti dan mengkonstruksi bukti dari mahasiswa berdasarkan kriteria di atas dapat dilihat pada Tabel 4.19a. Setelah dilakukan analisis statistik dengan menggunakan uji Pearson-Chi Kuadrat, diperoleh nilainya 46,475 dengan nilai signifikansi 0,000. Nilai ini lebih besar dari $\chi_{tab}^2 = 9,49$ dan nilai signifikansinya lebih kecil dari 0,05. Karena signifikansinya lebih kecil dari 0,05 maka dapat disimpulkan bahwa terdapat asosiasi antara membaca bukti dan mengkonstruksi bukti. Karena koefisien kontingensinya 0,522 maka dapat dikatakan bahwa terdapat asosiasi yang cukup antara membaca bukti dan mengkonstruksi bukti.

Tabel 4.19a. Jumlah Mahasiswa berdasarkan Kualifikasi Membaca Bukti dan Mengkonstruksi Bukti

KSiB \ KCaB	Tinggi	Sedang	Rendah	Jumlah
Tinggi	11	14	0	25
Sedang	2	13	10	25
Rendah	6	15	53	74
Jumlah	19	42	63	124

Hasil pengelompokan pada kelas dengan pendekatan M-APOS untuk kemampuan membaca bukti dan mengkonstruksi bukti dari mahasiswa berdasarkan kriteria yang ditetapkan dapat dilihat pada Tabel 4.19b.

Tabel 4.19b. Jumlah Mahasiswa Kelas M-APOS berdasarkan Kualifikasi Membaca Bukti dan Mengkonstruksi Bukti

KSiB \ KCaB	Tinggi	Sedang	Rendah	Jumlah
Tinggi	7	10	0	17
Sedang	1	7	7	15
Rendah	2	10	18	30
Jumlah	10	27	25	62

Setelah dilakukan analisis statistik dengan menggunakan uji Pearson-Chi Kuadrat, diperoleh nilainya 20,659 dengan nilai signifikansi 0,000. Nilai ini lebih besar dari $\chi_{tab}^2 = 9,49$ dan nilai signifikansinya lebih kecil dari 0,05. Karena signifikansinya lebih kecil dari 0,05 maka dapat disimpulkan bahwa terdapat asosiasi antara membaca bukti dan mengkonstruksi bukti. Karena koefisien kontingensinya 0,500 maka dapat dikatakan bahwa terdapat asosiasi yang cukup antara membaca bukti dan mengkonstruksi bukti pada kelas M-APOS.

Dari Tabel 4.19a dan Tabel 4.19b terlihat bahwa kebanyakan mahasiswa mempunyai kemampuan membaca bukti tergolong sedang. Mahasiswa yang mempunyai kemampuan mengkonstruksi bukti tinggi juga masih banyak yang mempunyai kemampuan membaca bukti sedang. Dari hasil ini dapat dikatakan bahwa kemampuan membaca bukti bukan prasyarat untuk kemampuan mengkonstruksi bukti.

Setelah dilakukan analisis statistik dengan menggunakan uji Pearson-Chi Kuadrat, diperoleh nilainya 34,264 dengan nilai signifikansi 0,000. Nilai ini lebih besar dari $\chi_{tab}^2 = 9,49$ dan nilai signifikansinya lebih kecil dari 0,05. Karena signifikansinya lebih kecil dari 0,05 maka dapat disimpulkan bahwa terdapat

asosiasi antara membaca bukti dan mengkonstruksi bukti. Karena koefisien kontingensinya 0,597 maka dapat dikatakan bahwa terdapat asosiasi yang cukup antara membaca bukti dan mengkonstruksi bukti pada kelas konvensional.

Tabel 4.19c. Jumlah Mahasiswa Kelas Konvensional berdasarkan Kualifikasi Membaca Bukti dan Mengkonstruksi Bukti

KSiB \ KCaB	Tinggi	Sedang	Rendah	Jumlah
Tinggi	4	4	0	8
Sedang	1	7	2	10
Rendah	2	6	36	44
Jumlah	7	17	38	62

Untuk kemandirian belajar matematik data diubah ke dalam kriteria kualifikasi sebagai berikut. KBM tergolong tinggi jika memperoleh skor lebih dari 75% skor ideal. KBM tergolong sedang jika memperoleh skor antara 55% dan 75% dari skor ideal. KBM tergolong rendah jika memperoleh skor lebih kecil dari 55% dari skor ideal. Hasil klasifikasinya adalah sebagai berikut.

$$\text{KBM Tinggi} > 168$$

$$123 < \text{KCaB Sedang} \leq 168$$

$$\text{KCaB Rendah} \leq 123$$

Selanjutnya hasil pengelompokan secara keseluruhan kemampuan membaca bukti dan kemandirian belajar matematik dari mahasiswa berdasarkan kriteria yang telah ditetapkan dapat dilihat pada Tabel 4.19d. Setelah dilakukan analisis statistik dengan menggunakan uji Pearson-Chi Kuadrat, diperoleh nilainya 8,556 dengan nilai signifikansi 0,073. Nilai ini lebih kecil dari $\chi_{tab}^2 = 9,49$ dan nilai signifikansinya lebih besar dari 0,05. Karena signifikansinya lebih besar

dari 0,05 maka dapat disimpulkan bahwa tidak terdapat asosiasi antara membaca bukti dan kemandirian belajar matematik. Karena koefisien kontingensinya 0,254 maka dapat dikatakan asosiasinya lemah.

Tabel 4.19d. Jumlah Mahasiswa berdasarkan Kualifikasi Membaca Bukti dan Kemandirian Belajar Matematik

KCaB \ KBM	Tinggi	Sedang	Rendah	Jumlah
Tinggi	2	12	1	15
Sedang	3	38	5	46
Rendah	1	46	16	63
Jumlah	6	96	22	124

Hasil pengelompokan pada kelas M-APOS kemampuan membaca bukti dan kemandirian belajar matematik dari mahasiswa berdasarkan kriteria yang ditetapkan dapat dilihat pada Tabel 4.19e. Setelah dilakukan analisis statistik dengan menggunakan uji Pearson-Chi Kuadrat, diperoleh nilainya 3,670 dengan nilai signifikansi 0,452. Nilai ini lebih kecil dari $\chi_{tab}^2 = 9,49$ dan nilai signifikansinya lebih besar dari 0,05. Karena signifikansinya lebih besar dari 0,05 maka dapat disimpulkan bahwa tidak terdapat asosiasi antara membaca bukti dan kemandirian belajar matematik pada kelas M-APOS. Karena koefisien kontingensinya 0,236 maka dapat dikatakan asosiasinya lemah.

Hasil pengelompokan pada kelas konvensional kemampuan membaca bukti dan kemandirian belajar matematik dari mahasiswa berdasarkan kriteria yang ditetapkan dapat dilihat pada Tabel 4.19f.

Tabel 4.19e. Jumlah Mahasiswa Kelas M-APOS berdasarkan Kualifikasi Membaca Bukti dan Kemandirian Belajar Matematik

KCaB \ KBM	Tinggi	Sedang	Rendah	Jumlah
Tinggi	1	8	0	9
Sedang	2	22	4	28
Rendah	0	22	3	25
Jumlah	3	52	7	62

Tabel 4.19f. Jumlah Mahasiswa Kelas Konvensional berdasarkan Kualifikasi Membaca Bukti dan Kemandirian Belajar Matematik

KCaB \ KBM	Tinggi	Sedang	Rendah	Jumlah
Tinggi	1	4	1	6
Sedang	1	17	1	19
Rendah	2	25	10	37
Jumlah	4	46	12	62

Setelah dilakukan analisis statistik dengan menggunakan uji Pearson-Chi Kuadrat, diperoleh nilainya 5,034 dengan nilai signifikansi 0,284. Nilai ini lebih kecil dari $\chi_{tab}^2 = 9,49$ dan nilai signifikansinya lebih besar dari 0,05. Karena signifikansinya lebih besar dari 0,05 maka dapat disimpulkan bahwa tidak terdapat asosiasi antara kemampuan membaca bukti dan kemandirian belajar matematik pada kelas konvensional. Karena koefisien kontingensinya 0,274 maka dapat dikatakan asosiasinya lemah.

Hasil pengelompokan secara keseluruhan kemampuan mengkonstruksi bukti dan kemandirian belajar matematik dari mahasiswa berdasarkan kriteria di

atas dapat dilihat pada Tabel 4.19g. Setelah dilakukan analisis statistik dengan menggunakan uji Pearson-Chi Kuadrat, diperoleh nilainya 12,222 dengan nilai signifikansi 0,016. Nilai ini lebih besar dari $\chi_{tab}^2 = 9,49$ dan nilai signifikansinya lebih kecil dari 0,05. Karena signifikansinya lebih kecil dari 0,05 maka dapat disimpulkan bahwa terdapat asosiasi antara kemampuan mengkonstruksi bukti dan kemandirian belajar matematik. Karena koefisien kontingensinya 0,300 maka dapat dikatakan asosiasinya lemah.

Tabel 4.19g. Jumlah Mahasiswa berdasarkan Kualifikasi Mengkonstruksi Bukti dan Kemandirian Belajar Matematik

KSiB \ KBM	Tinggi	Sedang	Rendah	Jumlah
Tinggi	3	20	2	25
Sedang	2	22	1	25
Rendah	1	54	19	74
Jumlah	6	96	22	124

Hasil pengelompokan pada kelas M-APOS kemampuan mengkonstruksi bukti dan kemandirian belajar matematik dari mahasiswa berdasarkan kriteria yang ditetapkan dapat dilihat pada Tabel 4.19h. Setelah dilakukan analisis statistik dengan menggunakan uji Pearson-Chi Kuadrat, diperoleh nilainya 9,254 dengan nilai signifikansi 0,055. Nilai ini lebih kecil dari $\chi_{tab}^2 = 9,49$ dan nilai signifikansinya lebih besar dari 0,05. Karena signifikansinya lebih besar dari 0,05 maka dapat disimpulkan bahwa tidak terdapat asosiasi antara kemampuan mengkonstruksi bukti dan kemandirian belajar matematik pada kelas M-APOS. Karena koefisien kontingensinya 0,360 maka dapat dikatakan asosiasinya lemah.

Tabel 4.19h. Jumlah Mahasiswa Kelas M-APOS berdasarkan Kualifikasi Mengkonstruksi Bukti dan Kemandirian Belajar Matematik

KSiB \ KBM	Tinggi	Sedang	Rendah	Jumlah
Tinggi	2	14	1	17
Sedang	2	14	0	16
Rendah	0	22	7	29
Jumlah	4	50	8	62

Hasil pengelompokan pada kelas konvensional mengkonstruksi bukti dan kemandirian belajar matematik dari mahasiswa berdasarkan kriteria yang ditetapkan dapat dilihat pada Tabel 4.19i.

Tabel 4.19i. Jumlah Mahasiswa Kelas Konvensional berdasarkan Kualifikasi Mengkonstruksi Bukti dan Kemandirian Belajar Matematik

KSiB \ KBM	Tinggi	Sedang	Rendah	Jumlah
Tinggi	1	6	1	8
Sedang	1	9	1	11
Rendah	2	29	12	43
Jumlah	4	44	14	62

Setelah dilakukan analisis statistik dengan menggunakan uji Pearson-Chi Kuadrat, diperoleh nilainya 2,851 dengan nilai signifikansi 0,583. Nilai ini lebih kecil dari $\chi_{tab}^2 = 9,49$ dan nilai signifikansinya lebih besar dari 0,05. Karena signifikansinya lebih besar dari 0,05 maka dapat disimpulkan bahwa tidak terdapat asosiasi antara kemampuan mengkonstruksi bukti dan kemandirian belajar matematik. Karena koefisien kontingensinya 0,210 maka dapat dikatakan asosiasinya lemah.

Dari hasil yang diperoleh di atas dapat terlihat bahwa secara umum bahwa terdapat asosiasi antara kemampuan membaca bukti dan mengkonstruksi bukti.

Tapi asosiasinya termasuk kategori cukup. Sementara itu diperoleh juga bahwa tidak terdapat asosiasi antara kemampuan membaca bukti dengan kemandirian belajar matematik baik secara keseluruhan maupun setiap kelas yang diteliti. Selanjutnya juga tidak terdapat asosiasi antara kemampuan mengkonstruksi bukti dengan kemandirian belajar matematik.

Dari hasil asosiasi antara kemampuan membaca bukti dengan KBM dan antara kemampuan mengkonstruksi bukti dengan KMB diperoleh tidak terdapat asosiasi. Pada umumnya mahasiswa mempunyai KBM sedang. Tapi mereka masih dapat memperoleh kemampuan membaca bukti dan kemampuan mengkonstruksi bukti yang tinggi. Hal ini dapat mereka peroleh berkat adanya intervensi dari pengajar yang selalu mendorong mereka untuk berusaha untuk mengerjakan tugas yang diberikan. Intervensi ini diberikan jika mereka sudah kehilangan motivasi untuk mengerjakan tugas yang diberikan. Secara teori memang butuh waktu lama untuk meningkatkan kemandirian belajar matematik.

B. Kemandirian Belajar Matematik

1. KBM berdasarkan Program Studi dan Pembelajaran

Untuk melihat gambaran umum tentang kemandirian belajar matematika (KBM) mahasiswa berdasarkan faktor program studi dan pendekatan pembelajaran maka pada Tabel 4.20 ditampilkan rata-rata dan simpangan baku dari KBM dan N-gainnya berdasarkan program studi dan pendekatan pembelajaran. Dari data Tabel 4.20 akan disajikan uji statistik dan analisis terhadap: 1) Perbandingan Kemandirian Belajar Matematika berdasarkan Program Studi dan Pendekatan Pembelajaran, 2) Perbandingan Kemandirian Belajar Matematika berdasarkan Program Studi dan Kemampuan Awal Mahasiswa, 3) Perbandingan Kemandirian Belajar Matematika berdasarkan Kemampuan Awal Mahasiswa dan Pendekatan Pembelajaran.

Dari Tabel 4.20 dapat kita lihat bahwa ditinjau dari faktor pendekatan pembelajaran diperoleh bahwa skor rata-rata kemandirian belajar matematika dari kelas dengan pendekatan M-APOS lebih tinggi dari kelas dengan pendekatan konvensional. Jika dilihat dari faktor program studi terlihat bahwa untuk kelas M-APOS Program Studi Pendidikan Matematika memperoleh skor rata-rata kemandirian belajar matematika sedikit lebih tinggi dari Program Studi Matematika, sedangkan untuk kelas kontrol terjadi sebaliknya skor rata-rata kemandirian belajar matematika Program Studi Matematika sedikit lebih tinggi dari Program Studi Pendidikan Matematika.

Tabel 4.20 Skor Rata-rata dan Simpangan Baku KBM berdasarkan Program Studi, Pendekatan Pembelajaran dan Kemampuan Awal

Prog. Studi	Kemp. Awal	Pendekatan Pembelajaran								
		M-APOS				Konvensional				
		n	Stat	Pre	Pos	N-gain	n	Pre	Pos	N-gain
Mat.	Tinggi	6	\bar{X}	135,83	152,83	0,18	4	137,75	142,25	0,08
			SD	11,55	6,46	0,10		20,37	31,79	0,18
	Sedang	12	\bar{X}	134,67	143,08	0,10	12	134,75	146,25	0,13
			SD	10,63	12,72	0,07		16,29	16,84	0,09
	Rendah	13	\bar{X}	124,69	134,54	0,09	15	130,47	135,20	0,05
			SD	14,19	11,25	0,11		13,60	17,36	0,11
	Sub Total	31	\bar{X}	130,71	141,39	0,11	31	133,06	140,39	0,09
			SD	13,09	12,83	0,10		15,25	19,32	0,11
P Mat.	Tinggi	11	\bar{X}	137,55	153,82	0,19	9	143,78	149,33	0,06
			SD	12,45	13,70	0,11		16,14	15,64	0,09
	Sedang	11	\bar{X}	139,91	146,91	0,09	14	126,29	136,57	0,11
			SD	18,13	20,70	0,13		13,80	21,87	0,20
	Rendah	9	\bar{X}	135,44	148,22	0,14	8	128,75	125,25	-0,04
			SD	13,21	12,00	0,09		16,75	16,68	0,12
	Sub Total	31	\bar{X}	137,77	149,74	0,14	31	132,00	137,36	0,06
			SD	14,53	15,92	0,12		16,65	20,49	0,16
Gab.	Tinggi	17	\bar{X}	136,94	153,47	0,18	13	141,92	147,15	0,07
			SD	11,80	11,42	0,10		16,90	20,68	0,12
	Sedang	23	\bar{X}	137,17	144,91	0,09	26	130,19	141,04	0,12
			SD	14,60	16,71	0,10		15,31	19,94	0,16
	Rendah	22	\bar{X}	129,09	140,14	0,11	23	129,87	131,74	0,02
			SD	14,52	13,21	0,10		14,41	17,43	0,12
	Total	62	\bar{X}	134,24	145,56	0,12	62	132,53	138,87	0,07
			SD	14,17	14,94	0,10		15,84	19,81	0,14

Catatan: n = jumlah subjek
SD = simpangan baku
KBM = kemandirian belajar matematika
Pre = pretes
Pos = postes
Skor ideal 225

Untuk melihat seberapa besar keberartian (signifikansi) perbedaan skor-skor dan peningkatannya, dilakukan analisis statistik ANOVA dua-jalur dan hasilnya dapat dilihat pada Tabel 4.21a dan Tabel 4.21b.

Tabel 4.21a. Hasil Anova Dua-Jalur KBM berdasarkan Faktor Program Studi dan Pembelajaran

Faktor	Kemandirian Belajar Matematika		
	F	P	H ₀
Program Studi	0,705	0,403	Diterima
Pembelajaran	3,022	0,043	Diterima
Interaksi	1,687	0,197	Diterima

$H_{0(K)}$: Tidak terdapat perbedaan KBM antar kelompok mahasiswa berdasarkan program studi dan pendekatan pembelajaran

$H_{1(K)}$: Terdapat perbedaan KBM antar kelompok mahasiswa berdasarkan program studi dan pendekatan pembelajaran

$H_{0(I)}$: Tidak terdapat interaksi antara program studi dan pembelajaran dalam pencapaian KBM

$H_{1(I)}$: Terdapat interaksi antara program studi dan pembelajaran dalam pencapaian KBM

Tabel 4.21b. Hasil Anova Dua-Jalur N-gain KBM berdasarkan Faktor Program Studi dan Pembelajaran

Faktor	Kemandirian Belajar Matematika		
	F	P	H ₀
Program Studi	0,010	0,920	Diterima
Pembelajaran	5,430	0,021	Ditolak
Interaksi	1,566	0,213	Diterima

$H_{0(K)}$: Tidak terdapat perbedaan N-gain KBM antar kelompok mahasiswa berdasarkan program studi dan pendekatan pembelajaran

$H_{1(K)}$: Terdapat perbedaan N-gain KBM antar kelompok mahasiswa berdasarkan program studi dan pendekatan pembelajaran

$H_{0(I)}$: Tidak terdapat interaksi antara program studi dan pembelajaran dalam N-gain KBM

$H_{1(d)}$: Terdapat interaksi antara program studi dan pembelajaran dalam N-gain KBM

Dari Tabel 4.21a dan Tabel 4.21b terlihat bahwa dari faktor program studi, H_0 untuk hasil capaian dan N-gain kemandirian belajar matematika diterima. Hal ini menunjukkan bahwa rata-rata skor dan N-gain kemandirian belajar matematika yang diperoleh oleh mahasiswa Program Studi Matematika dan Program Studi Pendidikan Matematika tidak berbeda secara signifikan.

Untuk faktor pembelajaran, H_0 untuk hasil capaian dan peningkatan kemandirian belajar matematika ditolak. Hal ini menunjukkan bahwa capaian dan peningkatan kemandirian belajar matematika yang diperoleh oleh mahasiswa yang diajar dengan pendekatan M-APOS lebih baik dari yang diajar dengan konvensional. Sementara itu, untuk interaksi antara program studi dan pembelajaran H_0 diterima, yang berarti tidak ada interaksi di antara keduanya. Hal ini menunjukkan bahwa interaksi antara program studi dan pembelajaran tidak memberikan pengaruh yang signifikan terhadap kemandirian belajar matematika mahasiswa.

Dari Tabel 4.21a telah diperoleh bahwa capaian kemandirian belajar matematika yang diperoleh oleh mahasiswa Program Studi Matematika dan Program Studi Pendidikan Matematika tidak berbeda secara signifikan. Walaupun dari rata-rata pada Tabel 4.20 kelihatannya untuk kelas M-APOS skor rata-rata kemandirian belajar matematika Program Studi Pendidikan Matematika lebih tinggi dari Program Studi Matematika. Untuk lebih jelasnya kita lakukan uji perbedaan rata-rata dengan uji t dengan tingkat kepercayaan 95% untuk faktor

program studi dan pembelajaran yang hasilnya terlihat pada Tabel 4.22a dan Tabel 4.22b.

Tabel 4.22a. Uji-t Perbedaan Rata-rata KBM antar Program Studi dan antar Pendekatan Pembelajaran

Pengujian	t-test for Equality of Means				
	t	Sig. (2-tailed)	Mean Difference	95% Confidence Interval of the Difference	
				Lower	Upper
Pend Mat ><Mat	-0,832	0,407	-2,661	-8,996	3,674
M-APOS ><Konv	2,124	0,036	6,694	0,450	12,937

$H_{0(M)}$: tidak terdapat perbedaan KBM antara Prodi Pendidikan Matematika dan Prodi Matematika

$H_{1(M)}$: terdapat perbedaan KBM antara Prodi Pendidikan Matematika dan Prodi Matematika

$H_{0(P)}$: tidak terdapat perbedaan KBM antara Kelompok yang diajar dengan pendekatan M-APOS dengan yang mendapat pembelajaran secara konvensional

$H_{1(P)}$: KBM kelompok yang diajar dengan pendekatan M-APOS lebih baik dibandingkan dengan yang mendapat pembelajaran secara konvensional

Tabel 4.22 b. Uji-t Perbedaan Rata-rata N-N-gain KBM antar Program Studi dan antar Pendekatan Pembelajaran

Pengujian	t-test for Equality of Means				
	t	Sig. (2-tailed)	Mean Difference	95% Confidence Interval of the Difference	
				Lower	Upper
Pend Mat ><Mat	0,09	0,922	0,002	-0,043	0,048
M-APOS ><Konv	2,334	0,021	0,052	0,008	0,097

$H_{0(M)}$: tidak terdapat perbedaan N-gain KBM antara Prodi Pendidikan Matematika dan Prodi Matematika

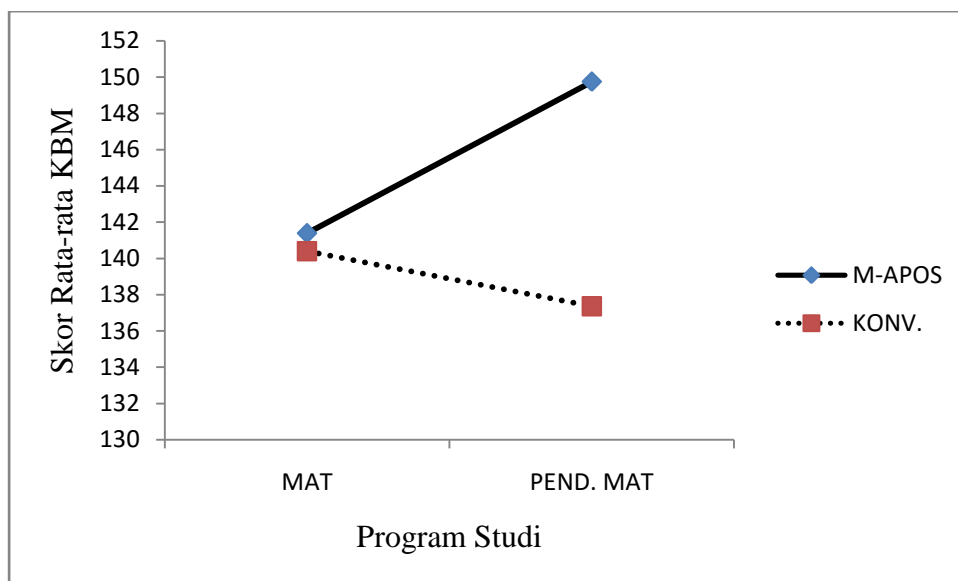
$H_{1(M)}$: terdapat perbedaan N-gain KBM antara Prodi Pendidikan Matematika dan Prodi Matematika

$H_{0(P)}$: tidak terdapat perbedaan N-gain KBM antara kelompok yang diajar dengan pendekatan M-APOS dengan yang mendapat pembelajaran secara konvensional

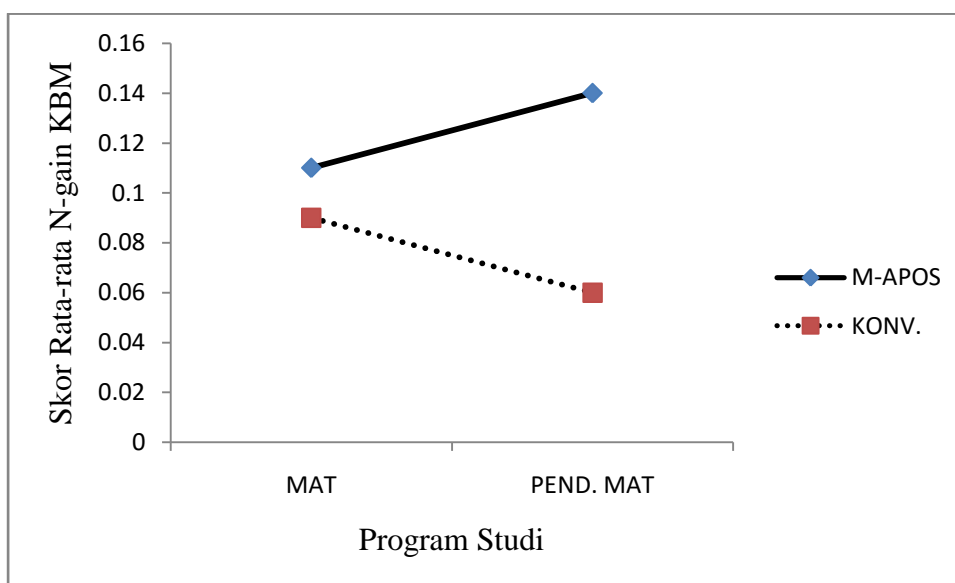
$H_{1(P)}$: N-gain KBM kelompok yang diajar dengan pendekatan Modifikasi APOS lebih baik dibandingkan dengan yang mendapat pembelajaran secara konvensional

Dari hasil uji t diperoleh bahwa untuk faktor program studi untuk capaian nilai signifikansinya 0,407 dan untuk N-gain nilainya 0,922 yang lebih besar dari nilai $\alpha = 0,05$. Hal ini menunjukkan bahwa skor rata-rata dan peningkatan kemandirian belajar matematika Program Studi Matematika dan Program Studi Pendidikan Matematika tidak berbeda secara signifikan pada tingkat kepercayaan 95%. Sementara itu untuk faktor pembelajaran diperoleh untuk capaian nilai signifikansinya 0,036 dan untuk N-gain diperoleh 0,021 yang lebih kecil dari nilai $\alpha = 0,05$. Hal ini menunjukkan bahwa skor rata-rata dan peningkatan kemandirian belajar matematika kelas yang diajar dengan pendekatan M-APOS lebih tinggi dari kelas konvensional pada tingkat kepercayaan 95%.

Sementara untuk interaksi antara program studi dan pembelajaran diperoleh untuk capaian nilai signifikansinya 0,197 dan untuk N-gain 0,213 yang lebih besar dari nilai $\alpha = 0,05$. Hal ini menunjukkan bahwa interaksi antara program studi dan pembelajaran tidak memberikan pengaruh yang signifikan terhadap kemandirian belajar matematika pada tingkat kepercayaan 95%. Diagram interaksi antara kedua faktor untuk kemandirian belajar matematika dapat dilihat pada Gambar 4.5a dan Gambar 4.5b.



Gambar 4. 5a Interaksi antara program studi dan pembelajaran terhadap capaian kemandirian belajar matematika



Gambar 4. 5b Interaksi antara program studi dan pembelajaran terhadap peningkatan kemandirian belajar matematika

Untuk mengetahui apakah terdapat perbedaan skor rata-rata dan peningkatan kemandirian belajar matematika antara mahasiswa Program Studi Matematika dan Program Studi Pendidikan Matematika yang mendapatkan pendekatan pembelajaran yang sama, dilakukan uji-t. Hasil pengolahan

kemandirian belajar matematika dengan uji-t disajikan pada Tabel 4.23a dan Tabel 4.23b berikut.

Tabel 4.23a. Uji t Perbedaan Rata-rata KBM antar Program Studi yang Mendapat Pembelajaran dengan M-APOS dan Konvensional

Pengujian	t-test for Equality of Means				
	t	Sig. (2-tailed)	Mean Difference	95% Confidence Interval of the Difference	
				Lower	Upper
M-APOS	-2,275	0,026	-8,355	-15,700	-1,010
Konvensional	0,599	0,551	3,032	-7,086	13,151

H_0 : tidak terdapat perbedaan KBM antara mahasiswa pada program studi yang berbeda dengan pembelajaran yang sama

H_1 : terdapat perbedaan KBM antara mahasiswa pada program studi yang berbeda dengan pembelajaran yang sama

Tabel 4.23b. Uji t Perbedaan Rata-rata N-N-gain KBM antar Program Studi yang Mendapat Pembelajaran dengan M-APOS dan Konvensional

Pengujian	t-test for Equality of Means				
	t	Sig. (2-tailed)	Mean Difference	95% Confidence Interval of the Difference	
				Lower	Upper
M-APOS	-0,951	0,345	0,026	-0,080	0,028
Konvensional	0,849	0,399	0,030	-0,041	0,102

H_0 : tidak terdapat perbedaan N-gain KBM antara mahasiswa pada program studi yang berbeda dengan pembelajaran yang sama

H_1 : terdapat perbedaan N-gain KBM antara mahasiswa pada program studi yang berbeda dengan pembelajaran yang sama

Dari Tabel 4.23a diperoleh untuk capaian nilai signifikansi dari pendekatan M-APOS adalah 0,026. Nilai ini lebih kecil dari 0,05, sehingga dapat disimpulkan bahwa skor rata-rata kemandirian belajar matematika mahasiswa Program Studi Matematika yang diajar dengan pendekatan M-APOS berbeda dibandingkan

mahasiswa Program Studi Pendidikan Matematika yang diajar dengan pendekatan yang sama. Dari Tabel 4.23b diperoleh untuk N-gain nilai signifikansi dari pendekatan M-APOS adalah 0,345. Nilai ini lebih besar dari 0,05, sehingga dapat disimpulkan bahwa peningkatan kemandirian belajar matematika mahasiswa Program Studi Matematika yang diajar dengan pendekatan M-APOS berbeda dibandingkan mahasiswa Program Studi Pendidikan Matematika yang diajar dengan pendekatan yang sama.

Pada kelas konvensional untuk capaian diperoleh nilai signifikansinya 0,551 dan untuk N-gain nilai signifikansinya 0,399 yang juga lebih besar dari 0,05. Maka dapat disimpulkan bahwa capaian dan peningkatan kemandirian belajar matematika mahasiswa Program Studi Matematika yang diajar dengan pendekatan konvensional tidak berbeda dibandingkan mahasiswa Program Studi Pendidikan Matematika yang diajar dengan pendekatan yang sama.

Selanjutnya, untuk melihat apakah terdapat perbedaan skor rata-rata dan peningkatan kemandirian belajar matematika di masing-masing program studi antara mahasiswa yang diajar dengan pendekatan M-APOS dengan yang diajar secara konvensional dilakukan dengan uji-t yang hasilnya dapat dilihat pada Tabel 4.24a dan Tabel 4.24b berikut.

Tabel 4.24a. Uji t Perbedaan Rata-rata KBM diantara Dua Pembelajaran di Masing-masing Program Studi

Pengujian	t-test for Equality of Means				
	t	Sig. (2-tailed)	Mean Difference	95% Confidence Interval of the Difference	
				Lower	Upper
Mat	0,240	0,811	1,000	-7,333	9,333
Pend. Mat	2,658	0,010	12,387	3,065	21,709

- H_0 : tidak terdapat perbedaan KBM antara mahasiswa yang memperoleh pembelajaran dengan pendekatan M-APOS dibanding dengan pendekatan konvensional pada program studi yang sama
- H_1 : KBM antara mahasiswa yang memperoleh pembelajaran dengan pendekatan M-APOS lebih baik dibanding dengan pendekatan konvensional pada program studi yang sama

Tabel 4.24b. Uji t Perbedaan Rata-rata N-gain KBM diantara Dua Pembelajaran di Masing-masing Program Studi

Pengujian	t-test for Equality of Means				
	t	Sig. (2-tailed)	Mean Difference	95% Confidence Interval of the Difference	
				Lower	Upper
Mat	0,898	0,373	0,024	-0,030	0,078
Pend. Mat	2,240	0,029	0,080	0,009	0,152

- H_0 : tidak terdapat perbedaan N-gain KBM antara mahasiswa yang memperoleh pembelajaran pendekatan M-APOS dibanding dengan pendekatan konvensional pada program studi yang sama
- H_1 : N-gain KBM antara mahasiswa yang memperoleh pembelajaran dengan pendekatan M-APOS lebih baik dibanding dengan pendekatan konvensional pada program studi yang sama

Dari Tabel 4.24a dan Tabel 4.24b diperoleh untuk capaian nilai signifikansi dari faktor Program Studi Matematika adalah 0,240 dan untuk N-gainnya 0,373. Nilai ini lebih besar dari 0,05, sehingga dapat disimpulkan bahwa skor rata-rata dan peningkatan kemandirian belajar matematika mahasiswa Program Studi Matematika yang diajar dengan pendekatan M-APOS tidak berbeda dibandingkan mahasiswa yang diajar dengan pendekatan konvensional. Untuk Program Studi Pendidikan Matematika diperoleh untuk capaian nilai signifikansinya 0,010 dan untuk N-gainnya 0,029 yang lebih kecil dari 0,05. Maka dapat disimpulkan bahwa skor rata-rata dan peningkatan kemandirian belajar matematika mahasiswa Program Studi Pendidikan Matematika yang diajar dengan pendekatan pendekatan

M-APOS lebih baik dibandingkan mahasiswa Program Studi Pendidikan Matematika yang diajar dengan pendekatan konvensional.

2. KBM berdasarkan Program Studi dan Kemampuan Awal Mahasiswa

Untuk melihat gambaran umum tentang kualitas hasil belajar ditinjau dari faktor program studi dan kemampuan awal mahasiswa maka pada Tabel 4.25 ditampilkan rata-rata dan simpangan baku dari skor kemandirian belajar matematika dan N-gain berdasarkan program studi dan kemampuan awal mahasiswa. Dari Tabel 4.25 dapat kita lihat bahwa untuk setiap level kemampuan awal, skor rata-rata kemandirian belajar matematika Program Studi Pendidikan Matematika lebih tinggi dari Program Studi Matematika.

Tabel 4.25 Skor Rata-rata dan Simpangan Baku KBM berdasarkan Program Studi dan Kemampuan Awal Mahasiswa

Kemp. Awal	Program Studi								
	Matematika					Pendidikan Matematika			
	n	Stat	Pre	Pos	N-gain	n	Pre	Pos	N-gain
Tinggi	10	\bar{X}	136,60	148,60	0,14	20	140,35	151,80	0,13
		SD	14,61	19,75	0,14		14,19	14,39	0,12
Sedang	24	\bar{X}	134,71	144,67	0,11	25	132,28	141,12	0,10
		SD	13,45	14,68	0,08		16,96	21,56	0,17
Rendah	28	\bar{X}	127,79	134,89	0,07	17	132,29	137,41	0,05
		SD	13,93	14,58	0,11		14,89	18,26	0,14
Total	62	\bar{X}	131,89	143,55	0,10	62	134,89	140,89	0,10
		SD	14,15	19,24	0,11		15,77	16,27	0,15

Catatan: n = jumlah subjek
 SD = simpangan baku
 KBM = kemandirian belajar matematik
 Pre = pretes
 Pos = postes
 Skor ideal 225

Untuk melihat seberapa besar keberartian (signifikansi) perbedaan skor-skor peningkatannya, dilakukan analisis statistik ANOVA dua-jalur dan hasilnya dapat dilihat pada Tabel 4.26a dan Tabel 4.26b.

Tabel 4.26a. Hasil Anova Dua-Jalur KBM berdasarkan Faktor Kemampuan Awal dan Program Studi

Faktor	Kemandirian Belajar Matematika		
	F	P	H ₀
Kemamp. Awal	5,582	0,005	Ditolak
Program Studi	0,049	0,825	Diterima

H₀ : tidak terdapat perbedaan KBM antar kelompok mahasiswa berdasarkan kemampuan awal dan program studi

H₁ : terdapat perbedaan KBM antar kelompok mahasiswa berdasarkan kemampuan awal dan program studi

Tabel 4.26b. Hasil Anova Dua-Jalur N-gain KBM berdasarkan Faktor Kemampuan Awal dan Program Studi

Faktor	Kemandirian Belajar Matematika		
	F	P	H ₀
Kemamp. Awal	3,090	0,049	Ditolak
Program Studi	0,367	0,546	Diterima

H₀ : tidak terdapat perbedaan N-gain KBM antar kelompok mahasiswa berdasarkan kemampuan awal dan program studi

H₁ : terdapat perbedaan N-gain KBM antar kelompok mahasiswa berdasarkan kemampuan awal dan program studi

Dari Tabel 4.26a dan Tabel 4.26b terlihat bahwa dari faktor program studi, untuk capaian diperoleh nilai signifikansinya 0,825 yang lebih besar dari 0,05 sehingga H₀ diterima. Demikian juga untuk N-gain diperoleh nilai signifikansinya

0,546 yang lebih besar dari 0,05 sehingga H_0 diterima. Hal ini menunjukkan bahwa capaian dan peningkatan kemandirian belajar matematika yang diperoleh oleh mahasiswa Program Studi Matematika dan Program Studi Pendidikan Matematika tidak berbeda secara signifikan.

Untuk faktor kemampuan awal, H_0 untuk hasil dan peningkatan kemandirian belajar matematika ditolak. Hal ini menunjukkan bahwa rata-rata skor dan peningkatan kemandirian belajar matematika yang diperoleh oleh mahasiswa yang mempunyai level kemampuan awal berbeda, berbeda secara signifikan. Sementara itu, untuk interaksi antara program studi dan kemampuan awal H_0 diterima, yang berarti tidak ada interaksi di antara keduanya. Hal ini menunjukkan bahwa interaksi antara program studi dan kemampuan awal tidak memberikan pengaruh yang signifikan terhadap kemandirian belajar matematika.

Dari Tabel 4. 26a dan Tabel 4. 26b dapat dilihat bahwa interaksi antara program studi dan kemampuan awal pada kemandirian belajar matematik, untuk capaian diperoleh nilai signifikansinya 0,613. Nilai ini lebih besar dari nilai $\alpha = 0,05$, sehingga dapat disimpulkan bahwa tidak terdapat interaksi antara program studi dan kemampuan awal terhadap pencapaian kemandirian belajar matematik pada tingkat kepercayaan 95%. Hal ini berarti bahwa bidang studi dan kemampuan awal tidak memberikan pengaruh bersama yang signifikan terhadap pencapaian kemandirian belajar matematika. Demikian juga untuk N-gain, dengan nilai signifikansi 0,992 yang lebih besar dari nilai $\alpha = 0,05$. Hal ini menunjukkan bahwa interaksi antara program studi dan kemampuan awal tidak memberikan

pengaruh yang signifikan terhadap peningkatan kemandirian belajar matematika pada tingkat kepercayaan 95%.

Dari Tabel 4.25 terlihat bahwa untuk kedua program studi capaian dan peningkatan kemandirian belajar matematik mahasiswa dengan level kemampuan tinggi lebih baik dari mahasiswa dengan level kemampuan sedang dan rendah. Untuk mahasiswa dengan level kemampuan sedang lebih baik dari mahasiswa dengan level kemampuan rendah.

Pada Program Studi Matematika, untuk level kemampuan tinggi memperoleh capaian 148,60 dan N-gain 0,14. Untuk mahasiswa dengan level kemampuan sedang memperoleh capaian 144,67 dan N-gain 0,11. Untuk mahasiswa dengan level kemampuan rendah memperoleh capaian 134,89 dan N-gain 0,07. Secara keseluruhan untuk Program Studi Matematika diperoleh capaian 143,55 dan N-gain 0,10.

Pada Program Studi Pendidikan Matematika, untuk level kemampuan tinggi memperoleh capaian 151,80 dan N-gain 0,13. Untuk mahasiswa dengan level kemampuan sedang memperoleh capaian 141,12 dan N-gain 0,10. Untuk mahasiswa dengan level kemampuan rendah memperoleh capaian 137,41 dan N-gain 0,05. Secara keseluruhan untuk Program Studi Pendidikan Matematika diperoleh capaian 140,89 dan N-gain 0,10. Dari hasil ini terlihat bahwa capaian dan peningkatan kemandirian belajar matematik mahasiswa Program Studi Matematika dengan Program Studi Pendidikan Matematika tidak berbeda secara signifikan.

Untuk mengetahui perbedaan capaian dan peningkatan kemandirian belajar matematik antar kemampuan awal dilakukan uji lanjutan Tukey. Rangkuman dari hasil pengujian tersebut dapat dilihat pada Tabel 4.27a dan Tabel 4.27b.

Tabel 4.27a. Uji Lanjutan Tukey Perbedaan Rata-rata KBM antar Kemampuan Awal atas Program Studi

Pengujian	Tukey HSD-test			
	Mean Difference	Sig.	95% Confidence Interval of the Difference	
			Lower	Upper
Sedang >< Rendah	7,01	0,117	-1,31	15,34
Tinggi >< Rendah	14,89	0,001	5,39	24,39
Tinggi >< Sedang	7,88	0,12	-1,47	17,22

- H_0 : tidak terdapat perbedaan KBM antara kelompok kemampuan awal yang diperbandingkan
 H_1 : KBM kelompok kemampuan awal level yang lebih tinggi lebih baik dari level yang lebih rendah

Tabel 4.27b. Uji Lanjutan Tukey Perbedaan Rata-rata N-gain KBM antar Kemampuan Awal atas Program Studi

Pengujian	Tukey HSD-test			
	Mean Difference	Sig.	95% Confidence Interval of the Difference	
			Lower	Upper
Sedang >< Rendah	0,042	0,240	-0,019	0,103
Tinggi >< Rendah	0,071	0,046	0,001	0,041
Tinggi >< Sedang	0,029	0,575	-0,040	0,098

- H_0 : tidak terdapat perbedaan N-gain KBM antara kelompok kemampuan awal yang diperbandingkan
 H_1 : KBM kelompok kemampuan awal level yang lebih tinggi lebih baik dari level yang lebih rendah

Berdasarkan Tabel 4.27a dapat disimpulkan bahwa perbedaan skor rata-rata kemandirian belajar matematika antar kemampuan awal tidak berbeda secara signifikan pada tingkat kepercayaan 95% kecuali untuk level tinggi dan rendah. Berdasarkan Tabel 4.27b dapat disimpulkan bahwa perbedaan skor rata-rata kemandirian belajar matematika antar kemampuan awal berbeda secara signifikan pada tingkat kepercayaan 95% kecuali untuk level tinggi dan rendah.

Selanjutnya, untuk mengetahui apakah di masing-masing kelompok kemampuan awal terdapat perbedaan skor rata-rata dan peningkatan kemandirian belajar matematika antara mahasiswa yang diajar dengan pendekatan M-APOS dan mahasiswa yang diajar secara konvensional dilakukan uji-t. Rangkuman dari hasil pengujian tersebut dapat dilihat pada Tabel 4.28a dan Tabel 4.28b.

Tabel 4.28a. Uji t Perbedaan Rata-rata KBM diantara Dua Program Studi di Masing-masing Kemampuan Awal

Pengujian	t-test for Equality of Means				
	t	Sig. (2-tailed)	Mean Difference	95% Confidence Interval of the Difference	
				Lower	Upper
Tinggi	0,507	0,616	3,200	-9,735	16,135
Sedang	0,670	0,506	3,547	-7,100	14,193
Rendah	0,510	0,612	2,519	-7,432	12,470

H_0 : tidak terdapat perbedaan KBM antara mahasiswa program studi yang berbeda pada kemampuan awal yang sama

H_1 : terdapat perbedaan KBM antara mahasiswa program studi yang berbeda pada kemampuan awal yang sama

Dari Tabel 4.28a dan Tabel 4.28b diperoleh bahwa untuk capaian kelompok tinggi diperoleh nilai signifikansi 0,616 dan N-gainnya 0,828 yang lebih besar dari 0,05, sehingga H_0 diterima.

Tabel 4.28b. Uji t Perbedaan Rata-rata N-gain KBM diantara Dua Program Studi di Masing-masing Kemampuan Awal

Pengujian	t-test for Equality of Means				
	t	Sig. (2-tailed)	Mean Difference	95% Confidence Interval of the Difference	
				Lower	Upper
Tinggi	0,219	0,828	0,011	-0,088	0,109
Sedang	0,391	0,697	0,015	-0,062	0,092
Rendah	0,496	0,622	0,018	-0,056	0,092

H_0 : tidak terdapat perbedaan N-gain KBM antara mahasiswa program studi yang berbeda pada kemampuan awal yang sama

H_1 : terdapat perbedaan N-gain KBM antara mahasiswa program studi yang berbeda pada kemampuan awal yang sama

Artinya untuk mahasiswa dengan kemampuan awal level tinggi, tidak terdapat perbedaan skor rata-rata dan peningkatan kemandirian belajar matematika antara mahasiswa Program Studi Matematika dan Program Studi Pendidikan Matematika. Sementara untuk kelompok sedang diperoleh untuk capaian nilai signifikansi 0,506 dan untuk N-gainnya 0,697 yang lebih besar dari 0,05, sehingga H_0 juga diterima. Artinya untuk mahasiswa dengan kemampuan awal level sedang, tidak terdapat perbedaan skor rata-rata dan peningkatan kemandirian belajar matematika antara mahasiswa Program Studi Matematika dan Program Studi Pendidikan Matematika. Begitu juga untuk mahasiswa dengan kemampuan awal level rendah, untuk capaian diperoleh nilai signifikansi 0,612 dan untuk N-gainnya 0,622 yang lebih besar dari 0,05, sehingga H_0 juga diterima. Artinya untuk mahasiswa dengan kemampuan awal level rendah, tidak terdapat perbedaan skor rata-rata dan peningkatan kemandirian belajar matematika antara mahasiswa Program Studi Matematika dan Program Studi Pendidikan Matematika.

Untuk mengetahui apakah di masing-masing kelompok kemampuan awal terdapat perbedaan skor rata-rata dan peningkatan kemandirian belajar matematika antara mahasiswa yang diajar dengan pendekatan M-APOS dan mahasiswa yang diajar secara konvensional pada Program Studi Matematika dilakukan uji-t. Rangkuman dari hasil pengujian tersebut dapat dilihat pada Tabel 4.28c dan Tabel 4.28d.

Tabel 4.28c. Uji t Perbedaan Rata-rata KBM di antara Dua Pembelajaran pada Program Studi Matematika di Masing-masing Kemampuan Awal

Pengujian	t-test for Equality of Means				
	t	Sig. (2-tailed)	Mean Difference	95% Confidence Interval of the Difference	
				Lower	Upper
Tinggi	0,815	0,439	10,583	-19,380	40,547
Sedang	-0,520	0,608	-3,167	-15,801	9,468
Rendah	-0,118	0,907	-0,662	-12,232	10,909

H_0 : tidak terdapat perbedaan KBM mahasiswa dengan pendekatan yang berbeda pada kemampuan awal yang sama

H_1 : KBM mahasiswa dengan pendekatan M-APOS lebih baik dari konvensional pada kemampuan awal yang sama

Tabel 4.28d. Uji t Perbedaan Rata-rata N-gain KBM di antara Dua Pembelajaran pada Program Studi Matematika di Masing-masing Kemampuan Awal

Pengujian	t-test for Equality of Means				
	t	Sig. (2-tailed)	Mean Difference	95% Confidence Interval of the Difference	
				Lower	Upper
Tinggi	1,114	0,286	0,102	-0,103	0,307
Sedang	-0,931	0,362	-0,032	-0,102	0,039
Rendah	0,891	0,381	0,036	-0,047	0,119

- H_0 : tidak terdapat perbedaan N-gain KBM mahasiswa dengan pendekatan yang berbeda pada kemampuan awal yang sama
 H_1 : N-gain KBM mahasiswa dengan pendekatan M-APOS lebih baik dari konvensional pada kemampuan awal yang sama

Dari Tabel 4.28c dan Tabel 4.28d diperoleh bahwa tidak terdapat perbedaan capaian dan peningkatan kemandirian belajar matematika antara mahasiswa yang diajar dengan pendekatan M-APOS dibanding mahasiswa yang diajar secara konvensional pada Program Studi Matematika untuk setiap level kemampuan awal. Artinya untuk level tinggi tidak terdapat perbedaan capaian dan peningkatan kemandirian belajar matematika antara mahasiswa yang diajar dengan pendekatan M-APOS dibanding mahasiswa yang diajar secara konvensional. Demikian juga untuk level sedang dan rendah.

Untuk mengetahui apakah di masing-masing kelompok kemampuan awal terdapat perbedaan skor rata-rata dan peningkatan kemandirian belajar matematika antara mahasiswa yang diajar dengan pendekatan M-APOS dan mahasiswa yang diajar secara konvensional pada Program Studi Pendidikan Matematika dilakukan uji-t. Rangkuman dari hasil pengujian tersebut dapat dilihat pada Tabel 4.28e dan Tabel 4.28f.

Tabel 4.28e. Uji t Perbedaan Rata-rata KBM di antara Dua Pembelajaran pada Program Studi Pendidikan Matematika di Masing-masing Kemampuan Awal

Pengujian	t-test for Equality of Means				
	t	Sig. (2-tailed)	Mean Difference	95% Confidence Interval of the Difference	
				Lower	Upper
Tinggi	0,684	0,503	4,485	-9,296	18,266
Sedang	1,201	0,242	10,338	-7,471	28,147
Rendah	3,289	0,005	22,972	8,085	37,859

- H_0 : tidak terdapat perbedaan KBM mahasiswa dengan pendekatan yang berbeda pada kemampuan awal yang sama
 H_1 : KBM mahasiswa dengan pendekatan M-APOS lebih baik dari konvensional pada kemampuan awal yang sama

Tabel 4.28f. Uji t Perbedaan Rata-rata N-N-gain KBM di antara Dua Pembelajaran pada Program Studi Pendidikan Matematika di Masing-masing Kemampuan Awal

Pengujian	t-test for Equality of Means				
	t	Sig. (2-tailed)	Mean Difference	95% Confidence Interval of the Difference	
				Lower	Upper
Tinggi	2,735	0,014	0,122	0,028	0,216
Sedang	-0,315	0,756	-0,022	-0,164	0,121
Rendah	3,449	0,004	0,180	0,069	0,292

- H_0 : tidak terdapat perbedaan N-gain KBM mahasiswa dengan pendekatan yang berbeda pada kemampuan awal yang sama
 H_1 : N-gain KBM mahasiswa dengan pendekatan M-APOS lebih baik dari konvensional pada kemampuan awal yang sama

Dari Tabel 4.28e dan Tabel 4.28f diperoleh bahwa tidak terdapat perbedaan capaian dan peningkatan kemandirian belajar matematika antara mahasiswa yang diajar dengan pendekatan M-APOS dibanding mahasiswa yang diajar secara konvensional pada Program Studi Matematika untuk level kemampuan awal sedang. Kemudian tidak terdapat perbedaan capaian kemandirian belajar matematika antara mahasiswa yang diajar dengan pendekatan M-APOS dibanding mahasiswa yang diajar secara konvensional untuk level kemampuan awal tinggi dan rendah. Tapi terdapat perbedaan peningkatan kemandirian belajar matematika antara mahasiswa yang diajar dengan pendekatan M-APOS dibanding mahasiswa yang diajar secara konvensional untuk level kemampuan awal tinggi dan rendah.

3. KBM berdasarkan Kemampuan Awal Mahasiswa dan Pembelajaran

Untuk melihat gambaran umum tentang KBM berdasarkan faktor kemampuan awal dan pendekatan pembelajaran maka pada Tabel 4.29 ditampilkan rata-rata dan simpangan baku dari kemandirian belajar matematika berdasarkan kemampuan awal dan pendekatan pembelajaran.

Tabel 4.29. Skor Rata-rata dan Simpangan Baku KBM berdasarkan Kemampuan Awal dan Pendekatan Pembelajaran

Kemp. Awal	Pendekatan Pembelajaran								
	M-APOS					Konvensional			
	n	Stat	Pre	Pos	N-gain	n	Pre	Pos	N-gain
Tinggi	17	\bar{X}	136,94	153,47	0,18	13	141,92	147,15	0,07
		SD	11,80	11,42	0,10		16,90	20,68	0,12
Sedang	23	\bar{X}	137,17	144,91	0,09	26	130,19	141,04	0,12
		SD	14,60	16,71	0,10		15,31	19,94	0,16
Rendah	22	\bar{X}	129,09	140,14	0,11	23	129,87	131,74	0,02
		SD	14,52	13,21	0,10		14,41	17,43	0,12
Total	62	\bar{X}	134,24	145,56	0,12	62	132,53	138,87	0,07
		SD	14,17	14,94	0,10		15,84	19,81	0,14

Catatan: n = jumlah subjek
 SD = simpangan baku
 KBM = kemandirian belajar matematika
 Pre = pretes
 Pos = postes
 Skor ideal 225

Dari Tabel 4.29 dapat kita lihat bahwa skor rata-rata kemandirian belajar matematika kelas eksperimen lebih tinggi dari kelas kontrol pada setiap level kemampuan awal. Hal ini berarti bahwa skor rata-rata kemandirian belajar matematika mahasiswa level tinggi yang diajar dengan M-APOS lebih tinggi dari mahasiswa level tinggi yang diajar secara konvensional. Hal yang sama juga terjadi pada level kemampuan awal sedang dan rendah.

Untuk melihat seberapa besar keberartian (signifikansi) perbedaan skor-skor dan peningkatannya, dilakukan analisis statistik ANOVA dua-jalur dan hasilnya dapat dilihat pada Tabel 4.30a dan Tabel 4.30b.

Tabel 4.30a. Hasil Anova Dua-Jalur KBM berdasarkan Faktor Kemampuan Awal dan Pembelajaran

Faktor	Kemandirian Belajar Matematika		
	F	P	H ₀
Kemamp. Awal	6,543	0,002	Ditolak
Pembelajaran	3,951	0,049	Ditolak
Interaksi	0,211	0,810	Diterima

$H_{0(K)}$: tidak terdapat perbedaan KBM antar kelompok mahasiswa berdasarkan kemampuan awal dan pendekatan pembelajaran

$H_{1(K)}$: terdapat perbedaan KBM antar kelompok mahasiswa berdasarkan kemampuan awal dan pendekatan pembelajaran

$H_{0(I)}$: tidak terdapat interaksi antara kemampuan awal dan pendekatan pembelajaran terhadap pencapaian KBM

$H_{1(I)}$: terdapat interaksi antara kemampuan awal dan pendekatan pembelajaran terhadap pencapaian KBM

Dari Tabel 4.30a terlihat bahwa dari faktor kemampuan awal, H₀ untuk hasil kemandirian belajar matematika ditolak. Hal ini menunjukkan bahwa rata-rata skor kemandirian belajar matematika yang diperoleh oleh mahasiswa dengan level kemampuan awal rendah, sedang, dan tinggi berbeda secara signifikan.

Tabel 4.30b. Hasil Anova Dua-Jalur N-gain KBM berdasarkan Faktor Kemampuan Awal dan Pembelajaran

Faktor	Kemandirian Belajar Matematika		
	F	P	H ₀
Kemamp. Awal	2,650	0,038	Ditolak
Pembelajaran	7,311	0,008	Ditolak
Interaksi	4,148	0,018	Ditolak

- $H_{0(K)}$: tidak terdapat perbedaan N-gain KBM antar kelompok mahasiswa Berdasarkan kemampuan awal dan pendekatan pembelajaran
 $H_{1(K)}$: terdapat perbedaan N-gain KBM antar kelompok mahasiswa berdasarkan kemampuan awal dan pendekatan pembelajaran
 $H_{0(I)}$: tidak terdapat interaksi antara kemampuan awal dan pendekatan pembelajaran terhadap N-gain KBM
 $H_{1(I)}$: terdapat interaksi antara kemampuan awal dan pendekatan pembelajaran terhadap N-gain KBM

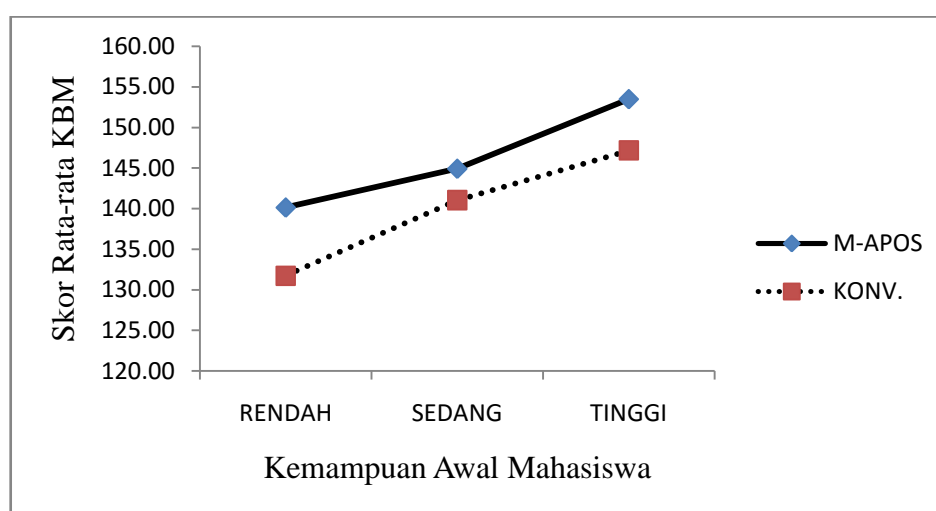
Dari Tabel 4.30b terlihat bahwa dari faktor kemampuan awal, H_0 untuk hasil kemandirian belajar matematika ditolak. Hal ini berarti bahwa peningkatan kemandirian belajar matematika yang diperoleh oleh mahasiswa dengan level kemampuan awal rendah, sedang, dan tinggi berbeda secara signifikan.

Untuk faktor pembelajaran, H_0 untuk hasil dan peningkatan kemandirian belajar matematika ditolak. Hal ini menunjukkan bahwa rata-rata skor dan peningkatan kemandirian belajar matematika yang diperoleh oleh mahasiswa yang diajar dengan pendekatan M-APOS dan yang diajar dengan cara konvensional berbeda secara signifikan. Sementara itu, untuk interaksi antara kemampuan awal dan pembelajaran untuk capaian H_0 diterima, yang berarti tidak ada interaksi di antara keduanya. Hal ini menunjukkan bahwa interaksi antara kemampuan awal dan pembelajaran tidak memberikan pengaruh yang signifikan terhadap kemandirian belajar matematika mahasiswa. Untuk interaksi antara kemampuan awal dan pembelajaran untuk N-gain H_0 ditolak, yang berarti ada interaksi di antara keduanya. Hal ini menunjukkan bahwa interaksi antara kemampuan awal dan pembelajaran memberikan pengaruh yang signifikan terhadap kemandirian belajar matematika mahasiswa.

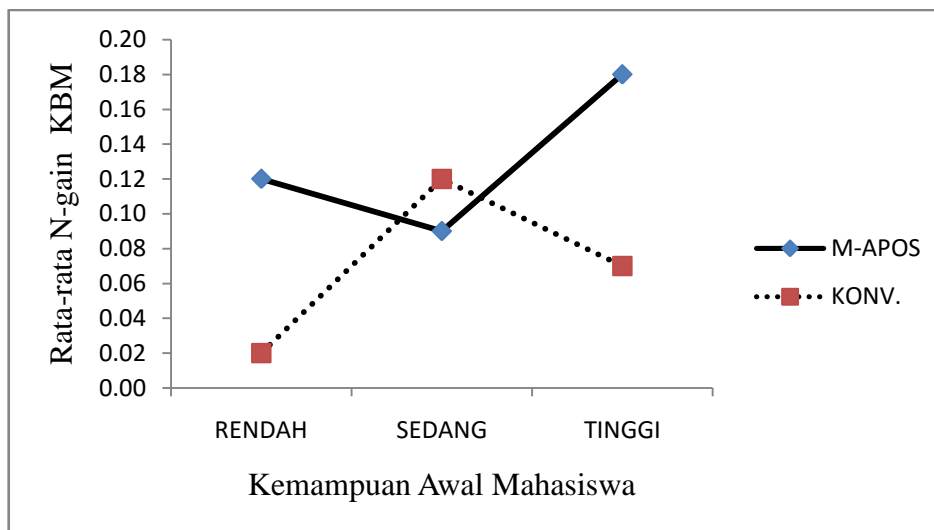
Dari Tabel 4.29 telah diperoleh bahwa skor rata-rata kemandirian belajar matematika yang diperoleh oleh mahasiswa yang diajar dengan pendekatan M-APOS pada setiap level kemampuan awal (tinggi, sedang, dan rendah) lebih tinggi dari mahasiswa yang diajar secara konvensional pada level kemampuan awal yang sama. Untuk faktor pembelajaran diperoleh bahwa rata-rata skor kemandirian belajar matematika yang diperoleh oleh mahasiswa yang diajar dengan pendekatan M-APOS dan yang diajar dengan cara konvensional tidak berbeda.

Dari Tabel 4.29 terlihat bahwa mahasiswa skor rata-rata kemandirian belajar matematika mahasiswa dengan level kemampuan tinggi lebih baik dari mahasiswa dengan level kemampuan sedang dan rendah. Untuk mahasiswa dengan level kemampuan sedang lebih baik dari mahasiswa dengan level kemampuan rendah.

Diagram interaksi antara kedua faktor untuk kemandirian belajar matematika dapat dilihat pada Gambar 4.6a dan Gambar 4.6b.



Gambar 4. 6a Interaksi antara kemampuan awal dan pembelajaran terhadap capaian kemandirian belajar matematika



Gambar 4. 6b Interaksi antara kemampuan awal dan pembelajaran terhadap peningkatan kemandirian belajar matematika

Selanjutnya, untuk mengetahui apakah di masing-masing kelompok kemampuan awal terdapat perbedaan skor rata-rata dan peningkatan kemandirian belajar matematika antara mahasiswa yang diajar dengan pendekatan M-APOS dan mahasiswa yang diajar secara konvensional dilakukan uji-t. Rangkuman dari hasil pengujian tersebut dapat dilihat pada Tabel 4.31a dan Tabel 4.31b.

Tabel 4.31a. Uji t Perbedaan Rata-rata KBM di antara Dua Pendekatan Pembelajaran di Masing-masing Kemampuan Awal

Pengujian	t-test for Equality of Means				
	t	Sig. (2-tailed)	Mean Difference	95% Confidence Interval of the Difference	
				Lower	Upper
Tinggi	0,992	0,335	6,317	-7,089	19,722
Sedang	0,732	0,468	3,875	-6,780	14,529
Rendah	1,815	0,076	8,397	-0,933	17,727

- H_0 : tidak terdapat perbedaan KBM antara mahasiswa yang memperoleh pembelajaran berbeda pada kemampuan awal yang sama
- H_1 : KBM mahasiswa dengan pendekatan M-APOS lebih baik dari konvensional pada kemampuan awal yang sama

Tabel 4.31b. Uji t Perbedaan Rata-rata N-gain KBM di antara Dua Pendekatan Pembelajaran di Masing-masing Kemampuan Awal

Pengujian	t-test for Equality of Means				
	t	Sig. (2-tailed)	Mean Difference	95% Confidence Interval of the Difference	
				Lower	Upper
Tinggi	2,891	0,007	0,116	0,034	0,198
Sedang	-0,674	0,504	-0,026	-0,102	0,051
Rendah	2,692	0,010	0,089	0,022	0,156

H_0 : tidak terdapat perbedaan N-gain KBM antara mahasiswa yang memperoleh pembelajaran berbeda pada kemampuan awal yang sama

H_1 : N-gain KBM mahasiswa dengan pendekatan M-APOS lebih baik dari konvensional pada kemampuan awal yang sama

Dari Tabel 4.31a diperoleh bahwa untuk capaian kelompok tinggi diperoleh nilai signifikansi 0,335 yang lebih besar dari 0,05, sehingga H_0 diterima. Artinya untuk mahasiswa dengan kemampuan awal level tinggi, tidak terdapat perbedaan skor rata-rata kemandirian belajar matematika antara mahasiswa yang diajar dengan pendekatan M-APOS dan mahasiswa yang diajar secara konvensional. Dari Tabel 4.31b diperoleh bahwa untuk N-gain kelompok tinggi diperoleh nilai signifikansi 0,007 yang lebih kecil dari 0,05, sehingga H_0 ditolak. Artinya untuk mahasiswa dengan kemampuan awal level tinggi, terdapat perbedaan peningkatan kemandirian belajar matematika antara mahasiswa yang diajar dengan pendekatan M-APOS dan mahasiswa yang diajar secara konvensional.

Sementara untuk kelompok sedang untuk capaian diperoleh nilai signifikansi 0,468 dan untuk N-gainnya 0,504 yang lebih besar dari 0,05, sehingga H_0 diterima. Artinya untuk mahasiswa dengan kemampuan awal level sedang, skor rata-rata dan peningkatan kemandirian belajar matematika mahasiswa yang diajar

dengan pendekatan M-APOS tidak berbeda dari mahasiswa yang diajar secara konvensional.

Begitu juga untuk mahasiswa dengan kemampuan awal level rendah, untuk capaian diperoleh nilai signifikansi 0,076 yang lebih besar dari 0,05, sehingga H_0 diterima. Artinya untuk mahasiswa dengan kemampuan awal level rendah, tidak terdapat perbedaan skor rata-rata kemandirian belajar matematika mahasiswa yang diajar dengan pendekatan M-APOS dan mahasiswa yang diajar secara konvensional. Untuk N-gain diperoleh nilai signifikansi 0,010 yang lebih kecil dari 0,05, sehingga H_0 ditolak. Artinya untuk mahasiswa dengan kemampuan awal level rendah, terdapat perbedaan skor rata-rata kemandirian belajar matematika mahasiswa yang diajar dengan pendekatan M-APOS dan mahasiswa yang diajar secara konvensional.

Dari hasil uji statistik diperoleh kesimpulan dengan diterima atau ditolaknya hipotesis nol. Pada Tabel 4.32a, Tabel 4.32b, dan Tabel 4.32c diberikan rangkuman dari hasil analisis data.

Tabel 4.32a Penerimaan Hipotesis Nol berdasarkan Faktor Program Studi dan Pembelajaran

Pengujian	Capaian			N-gain		
	KCaB	KSiB	KBM	KCaB	KSiB	KBM
Mat. >< P. Mat.	V	V	V	V	V	V
M-APOS >< Konv.	X	X	X	X	X	X
M-APOS Mat. >< M-APOS P. Mat	V	V	X	V	V	V
Konv.Mat >< Konv.P. Mat	V	V	V	V	V	V
M-APOS Mat. >< Konv. Mat	V	X	V	V	X	V
M-APOS P.Mat. >< Konv.P. Mat	X	X	X	X	X	X
Interaksi	V	V	V	V	V	V

Keterangan: V = terima H_0
X = tolak H_0

Dari Tabel 4.32a terlihat bahwa secara umum dugaan dari hipotesis penelitian sesuai dengan yang diprediksi pada awal penelitian, kecuali untuk kemampuan membaca bukti pada Program Studi Matematika dan kemandirian belajar matematik antar kedua program studi. Pada kemampuan membaca bukti untuk Program Studi Matematika tidak terdapat perbedaan capaian dan peningkatan yang signifikan antara mahasiswa yang diajar dengan pendekatan M-APOS dengan yang diajar dengan pendekatan konvensional. Tapi ada kecendrungan akan berbeda jika proses ini dilanjutkan. Kemudian untuk kemandirian belajar matematik terdapat perbedaan pada antara Prodi. Matematika dengan Prodi. Pendidikan Matematika.

Tabel 4.32b Penerimaan Hipotesis Nol berdasarkan Faktor Program Studi dan Kemampuan Awal Mahasiswa

Pengujian	Capaian			N-gain		
	KCaB	KSiB	KBM	KCaB	KSiB	KBM
Sedang >> Rendah	X	X	X	X	X	X
Tinggi >> Rendah	X	X	X	X	X	X
Tinggi >> Sedang	X	X	V	X	X	V
Mat. Tgg >> P.Mat.Tgg	V	X	V	V	X	V
Mat. Sdg >> P.Mat.Sdg	X	X	V	X	X	V
Mat. Rdh >> P.Mat.Rdh	V	X	V	V	V	V

Keterangan: V = terima H_0
X = tolak H_0

Dari Tabel 4.32b terlihat bahwa mahasiswa dengan kemampuan awal lebih tinggi memperoleh hasil yang lebih baik dari mahasiswa dengan kemampuan awal yang lebih rendah. Hasil capaian antar program studi pada kemampuan awal yang sama agak bervariasi. Tapi secara keseluruhan tidak terdapat perbedaan capaian dan peningkatan kemampuan pembuktian antar program studi.

Tabel 4.32c Penerimaan Hipotesis Nol berdasarkan Faktor Pendekatan Pembelajaran dan Kemampuan Awal Mahasiswa

Pengujian	Capaian			N-gain		
	KCaB	KSiB	KBM	KCaB	KSiB	KBM
M-APOS Tgg \gg Konv.Tgg	V	V	V	V	V	X
M-APOS Sdg \gg Konv.Sdg	X	X	V	X	X	V
M-APOS Rdh \gg Konv.Rdh	X	X	X	X	X	X
Interaksi	V	V	V	V	V	X

Keterangan: V = terima H_0
X = tolak H_0

Tabel 4.32d Penerimaan Hipotesis Nol berdasarkan Faktor Pendekatan Pembelajaran pada Program Studi Matematika di Masing-masing Kemampuan Awal

Pengujian	Capaian			N-gain		
	KCaB	KSiB	KBM	KCaB	KSiB	KBM
M-APOS Tgg \gg Konv.Tgg	V	V	V	V	V	V
M-APOS Sdg \gg Konv.Sdg	V	V	V	V	V	V
M-APOS Rdh \gg Konv.Rdh	V	X	V	V	X	V

Keterangan: V = terima H_0
X = tolak H_0

Tabel 4.32e Penerimaan Hipotesis Nol berdasarkan Faktor Pendekatan Pembelajaran pada Program Studi Pendidikan Matematika di Masing-masing Kemampuan Awal

Pengujian	Capaian			N-gain		
	KCaB	KSiB	KBM	KCaB	KSiB	KBM
M-APOS Tgg >> Konv.Tgg	X	X	V	X	X	X
M-APOS Sdg >> Konv.Sdg	X	X	V	X	X	V
M-APOS Rdh >> Konv.Rdh	V	X	X	V	X	X

Keterangan: V = terima H_0
X = tolak H_0

Dari Tabel 4.32c sampai Tabel 4.32e terlihat bahwa secara umum untuk kelompok kemampuan awal sedang dan rendah, kelas yang di ajar dengan pendekatan M-APOS memperoleh capaian dan peningkatan kemampuan pembuktian matematik yang lebih baik dari kelas konvensional. Sedangkan untuk kelompok tinggi tidak terdapat perbedaan capaian dan peningkatan kemampuan pembuktian matematik antara kedua pendekatan tersebut. Untuk kemandirian belajar matematik hasil yang diperoleh agak bervariasi. Hal ini disebabkan karena kemandirian belajar membutuhkan waktu yang lama untuk berkembang dengan baik.

4. Kualitas Membaca Bukti Dan Mengkonstruksi Bukti Mahasiswa

Untuk melihat kualitas pencapaian membaca bukti dan mengkonstruksi bukti mahasiswa, maka berikut ini ditampilkan jumlah dan persentase mahasiswa yang telah mencapai standar kelulusan yang telah ditetapkan. Mahasiswa dikatakan telah mencapai nilai cukup jika memperoleh skor lebih besar dari 55 (skor ideal

100). Pada Tabel 4. 33 disajikan jumlah dan persentase mahasiswa yang telah mencapai standar kelulusan yang telah ditetapkan, berdasarkan faktor program studi, pembelajaran dan kemampuan awal.

Dari Tabel 4.33 terlihat bahwa untuk faktor program studi, mahasiswa yang lulus untuk Program Studi Matematika juga lebih banyak dari Program Studi Pendidikan Matematika. Untuk Program Studi Matematika mahasiswa yang lulus ada sebanyak 31 orang atau 50%. Untuk Program Studi Pendidikan Matematika mahasiswa yang lulus ada sebanyak 30 orang atau 48%.

Tabel 4.33 Jumlah dan Persentase Mahasiswa yang telah Mencapai Standar Nilai Cukup berdasarkan Program Studi, Pendekatan Pembelajaran dan Kemampuan Awal

Prog. Studi	Kemp. Awal	Pendekatan Pembelajaran						Total	
		M-APOS			Konvensional				
		n	KCaB	KSiB	n	KCaB	KSiB	KCaB	KSiB
Mat.	Tinggi	6	6(100)	6(100)	4	4(100)	4(100)	10(100)	10(100)
	Sedang	12	9(75)	8(67)	12	9(75)	6(50)	18(75)	14(58)
	Rendah	13	2(15)	2(15)	15	1(6)	0(0)	3(11)	2(7)
	Sub Total	31	17(55)	16(62)	31	14(45)	10(32)	31(50)	26(42)
Pend. Mat.	Tinggi	11	11(100)	9(82)	9	8(89)	6(67)	19(95)	15(75)
	Sedang	11	8(73)	6(55)	14	2(14)	0(0)	10(40)	6(24)
	Rendah	9	1(11)	2(22)	8	0(0)	0(0)	1(6)	2(12)
	Sub Total	31	20(65)	17(55)	31	10(32)	6(19)	30(48)	23(37)
	Total	62	37(60)	33(53)	62	24(39)	16(26)	61(49)	49(40)

Catatan: n = jumlah subjek
 KCaB = kemampuan membaca bukti
 KSiB = kemampuan mengkonstruksi bukti

Sementara pada kemampuan mengkonstruksi bukti mahasiswa yang lulus untuk Program Studi Matematika juga lebih banyak dari Program Studi Pendidikan Matematika. Untuk Program Studi Matematika mahasiswa yang lulus ada sebanyak 26 orang atau 42 %. Untuk Program Studi Pendidikan Matematika mahasiswa yang lulus ada sebanyak 23 orang atau 37 %.

Berdasarkan faktor pembelajaran, pada kemampuan membaca bukti mahasiswa yang lulus untuk kelas dengan pendekatan M-APOS lebih banyak dari kelas konvensional. Untuk kelas dengan pendekatan M-APOS mahasiswa yang lulus ada sebanyak 37 orang atau 60%.

Untuk kelas konvensional mahasiswa yang lulus ada sebanyak 24 orang atau 39%. Sementara pada kemampuan mengkonstruksi bukti mahasiswa yang lulus untuk kelas dengan pendekatan M-APOS juga lebih banyak dari kelas konvensional. Untuk kelas dengan pendekatan M-APOS mahasiswa yang lulus ada sebanyak 33 orang atau 53%. Untuk kelas konvensional mahasiswa yang lulus ada sebanyak 16 orang atau 26%.

Berdasarkan faktor kemampuan awal, pada kemampuan membaca bukti mahasiswa yang lulus untuk mahasiswa dengan level kemampuan awal tinggi, lebih banyak dari mahasiswa dengan level kemampuan awal sedang dan rendah. Untuk mahasiswa dengan level kemampuan awal sedang, lebih banyak dari mahasiswa dengan level kemampuan awal rendah. Untuk mahasiswa dengan level kemampuan awal tinggi banyak mahasiswa yang lulus adalah 29 orang atau 97 %. Untuk mahasiswa dengan level kemampuan awal sedang banyak mahasiswa yang

lulus adalah 28 orang atau 57%. Untuk mahasiswa dengan level kemampuan awal rendah mahasiswa yang lulus 4 orang atau 9%.

Sementara itu pada kemampuan mengkonstruksi bukti mahasiswa yang lulus untuk mahasiswa dengan level kemampuan awal tinggi, lebih banyak dari mahasiswa dengan level kemampuan awal sedang dan rendah. Untuk mahasiswa dengan level kemampuan awal sedang, lebih banyak dari mahasiswa dengan level kemampuan awal rendah. Untuk mahasiswa dengan level kemampuan awal tinggi banyak mahasiswa yang lulus adalah 25 orang atau 83%. Untuk mahasiswa dengan level kemampuan awal sedang banyak mahasiswa yang lulus adalah 20 orang atau 41%. Untuk mahasiswa dengan level kemampuan awal rendah mahasiswa yang lulus hanya 4 orang atau 9%.

Dari hasil di atas dapat dikatakan bahwa jumlah mahasiswa yang memperoleh nilai cukup ke atas masih rendah, yaitu 49% untuk kemampuan membaca bukti dan 40% untuk kemampuan mengkonstruksi bukti. Berdasarkan observasi dan wawancara diperoleh informasi bahwa mahasiswa banyak mengalami kesulitan dalam belajar Analisis Real. Akibatnya ada mahasiswa yang merasa cemas selama mengikuti perkuliahan. Untuk itu perlu diadakan pendekatan tambahan sehingga mengurangi kecemasan dari mahasiswa tersebut.

B. Pembahasan

Dari hasil penelitian yang diperoleh maka akan dibahas hubungannya dengan tujuan yang telah ditetapkan. Pembahasan dilakukan berdasarkan beberapa faktor yaitu pendekatan pembelajaran, program studi, kemampuan awal, dan kemandirian belajar matematik.

1. Hasil Belajar

Ditinjau dari faktor pendekatan pembelajaran maka diperoleh secara keseluruhan bahwa capaian dan peningkatan kemampuan membaca bukti dan capaian dan peningkatan kemampuan mengkonstruksi bukti dari kelas dengan pendekatan M-APOS lebih tinggi dari kelas dengan pendekatan konvensional. Pada Tabel 4.1 dapat dilihat bahwa kelas dengan pendekatan M-APOS memperoleh rata-rata capaian kemampuan membaca bukti 56,87 dan rata-rata kemampuan mengkonstruksi bukti 59,23. Hasil ini lebih tinggi dari kelas konvensional yang memperoleh rata-rata capaian kemampuan membaca bukti 47,48 dan capaian kemampuan mengkonstruksi bukti 43,18. Hal ini juga terjadi pada peningkatan kemampuan membaca bukti dan kemampuan mengkonstruksi bukti. Untuk kelas dengan pendekatan M-APOS memperoleh rata-rata peningkatan kemampuan membaca bukti 0,55 dan rata-rata kemampuan mengkonstruksi bukti 0,58. Hasil ini lebih tinggi dari kelas konvensional yang memperoleh rata-rata peningkatan kemampuan membaca bukti 0,46 dan peningkatan kemampuan mengkonstruksi bukti 0,42. Jadi secara keseluruhan dapat dikatakan bahwa pendekatan M-APOS dapat meningkatkan kemampuan membaca bukti dan mengkonstruksi bukti, walaupun capaian yang diperoleh masih tergolong sedang.

Terdapat beberapa kesalahan yang dilakukan mahasiswa dalam menyelesaikan tes yang diberikan. Berikut diberikan beberapa contoh kesalahan yang dilakukan berdasarkan indikator yang ditetapkan.

Pada indikator menentukan kesalahan dan memperbaiki kesalahan tersebut kelas dengan pendekatan M-APOS memperoleh hasil yang lebih baik dari kelas konvensional. Sebanyak 29% mahasiswa kelas dengan pendekatan M-APOS memperoleh nilai sempurna dalam menentukan kesalahan dan memperbaikinya. Sedangkan kelas konvensional hanya 13% yang memperoleh nilai sempurna. Secara umumnya semua mahasiswa sudah dapat menentukan letak kesalahan dari bukti pernyataan yang diberikan. Tapi mereka masih banyak yang belum dapat memperbaikinya terutama mahasiswa kelas konvensional.

Mahasiswa pada umumnya melakukan kesalahan yang sama dalam memperbaiki kesalahan dari pembuktian pernyataan yang diberikan. Misalnya dalam memperbaiki kesalahan dari pembuktian soal berikut.

Misalkan fungsi f didefinisikan dengan $f(x) = \frac{(x^2-5x+1)}{x-2}$ untuk $3 \leq x \leq 4$.

Maka terdapat konstanta M sehingga $|f(x)| \leq M$ untuk semua x yang memenuhi $3 \leq x \leq 4$.

Bukti pernyataan

Perhatikan bahwa $|f(x)| = \frac{|x^2-5x+1|}{|x-2|}$. Dengan menggunakan ketaksamaan segitiga diperoleh

$$|x^2 - 5x + 1| \leq |x|^2 + 5|x| + 1 \text{ dan } |x - 2| \leq |x| + 2$$

Untuk $3 \leq x \leq 4$ diperoleh

$$|x^2 - 5x + 1| \leq |x|^2 + 5|x| + 1 \leq 4^2 + 5(4) + 1 = 37 \text{ dan}$$

$$|x - 2| \leq |x| + 2 \leq 4 + 2 = 6$$

Maka $|f(x)| = \frac{|x^2-5x+1|}{|x-2|} \leq \frac{37}{6}$. Pilih $M = \frac{37}{6}$.

Jadi terdapat $M = \frac{37}{6}$ sehingga $|f(x)| \leq M$ untuk x yang memenuhi $3 \leq x \leq 4$.

Pada umumnya mahasiswa sudah dapat menentukan bahwa kesalahan terletak pada penyebut dari fungsi rasional $f(x)$. Mereka sudah paham bahwa nilai dari $f(x)$ akan semakin besar jika nilai mutlak pembilangnya $(x^2 - 5x + 1)$ semakin besar dan nilai mutlak penyebutnya $(x - 2)$ semakin kecil. Letak kesalahan dari bukti pernyataan di atas adalah pada waktu menduga nilai terkecil yang mungkin untuk penyebutnya $(x - 2)$. Harusnya mereka menghasilkan bentuk $|x - 2| \geq |x| - 2 \geq 3 - 2 = 1$. Tapi banyak yang mengerjakan seperti ini $|x - 2| \leq |x| + 2 \leq 3 + 2 = 5$. Mereka menganggap bahwa nilai ini akan semakin kecil jika nilai x yang disubstitusikan adalah nilai x yang terkecil pada interval $3 \leq x \leq 4$. Mereka lupa bahwa bentuk ini adalah ketaksamaan dengan tanda " \leq ". Kesalahan ini juga dilakukan oleh beberapa mahasiswa level tinggi. Contoh kesalahan lainnya adalah $|x - 2| \leq |x| - 2 \leq 3 - 2 = 1$. Sepintas kelihatannya benar tapi tanda ketaksamaannya salah, sehingga kesimpulannya juga salah. Jadi mereka secara umum belum memiliki pemahaman yang baik tentang ketaksamaan.

Untuk indikator menentukan argumen pada setiap langkah pembuktian yang diberikan baik mahasiswa kelas dengan pendekatan M-APOS maupun kelas konvensional sudah memperoleh nilai yang baik. Nilai ini memberikan sumbangan yang besar terhadap kemampuan membaca bukti. Jadi secara umum capaian yang diperoleh oleh kelas dengan pendekatan M-APOS (56,87) termasuk kategori sedang sedangkan untuk kelas konvensional (47,48) termasuk rendah. Untuk jumlah mahasiswa yang memperoleh nilai cukup ke atas untuk kemampuan membaca bukti lebih banyak kelas yang diajar dengan pendekatan M-APOS dari

kelas dengan pendekatan konvensional. Kelas yang diajar dengan pendekatan M-APOS 60% dan kelas dengan pendekatan konvensional 39%.

Untuk indikator mengorganisasikan fakta untuk menunjukkan kebenaran suatu pernyataan, kelas dengan pendekatan M-APOS memperoleh hasil yang lebih baik dari kelas dengan pendekatan konvensional. Persentase mahasiswa kelas dengan pendekatan M-APOS yang memperoleh nilai sempurna adalah 40% sementara untuk kelas dengan pendekatan konvensional hanya 24% yang menjawab sempurna. Persentase mahasiswa kelas dengan pendekatan M-APOS yang memperoleh nilai nol adalah 3% sementara untuk kelas dengan pendekatan konvensional 7% yang memperoleh nilai nol.

Kesalahan pertama yang banyak dilakukan mahasiswa adalah tidak menggunakan fakta yang diketahui dalam mengkonstruksi bukti. Bahkan ada yang membuktikan secara terbalik, yaitu membuktikan fakta yang diberikan dengan menggunakan fakta yang ditanya. Hal ini terjadi karena kurang pemahamannya mereka terhadap premis dan konklusi.

Kesalahan kedua adalah kesalahan dalam melakukan proses manipulasi aljabar dari fakta yang diketahui. Diantara kesalahannya adalah, (1) $|a + b| = |a| + |b| = |a| + |-b| = ||a| - |b||$, (2) $|a + b| \leq -a + b$, dan (3) $|a - b|^2 = -(|a| + |b|)^2 = ||a| - |b||$. Kesalahan seperti ini juga terjadi pada soal sebelumnya.

Untuk indikator memanipulasi fakta yang diberikan untuk menunjukkan kebenaran suatu pernyataan, kelas dengan pendekatan M-APOS memperoleh hasil yang lebih baik dari kelas dengan pendekatan konvensional. Persentase mahasiswa kelas dengan pendekatan M-APOS yang memperoleh nilai sempurna adalah 29%

sementara untuk kelas dengan pendekatan konvensional hanya 8% yang menjawab sempurna. Persentase mahasiswa kelas dengan pendekatan M-APOS yang memperoleh nilai nol adalah 11% sementara untuk kelas dengan pendekatan konvensional 39% yang memperoleh nilai nol. Pada bagian ini banyak sekali mahasiswa mengalami kesulitan, sehingga masih perlu diperbaiki.

Peningkatan kemampuan mengkonstruksi bukti kelas yang diajar dengan pendekatan M-APOS lebih tinggi dari kelas dengan pendekatan konvensional. Peningkatan kemampuan mengkonstruksi bukti yang diperoleh oleh kelas dengan pendekatan M-APOS (0,58) termasuk kategori sedang sedangkan untuk kelas konvensional (0,42) termasuk rendah. Jadi secara umum capaian yang diperoleh oleh kelas dengan pendekatan M-APOS (56,87) termasuk kategori sedang sedangkan untuk kelas konvensional (47,48) termasuk rendah. Untuk persentase mahasiswa yang memperoleh nilai cukup ke atas untuk kemampuan mengkonstruksi bukti lebih banyak kelas yang diajar dengan pendekatan M-APOS dari kelas dengan pendekatan konvensional. Kelas yang diajar dengan pendekatan M-APOS 53% dan kelas dengan pendekatan konvensional 26%. Jadi pendekatan M-APOS dapat meningkatkan kemampuan mengkonstruksi bukti pada mahasiswa.

Ditinjau dari faktor program studi, secara keseluruhan dari Tabel 4.9 diperoleh bahwa secara statistik tidak terdapat perbedaan capaian dan peningkatan kemampuan membaca bukti dan mengkonstruksi bukti antara Program Studi Matematika dan Program Studi Pendidikan Matematika. Rata-rata capaian kemampuan membaca bukti Program Studi Matematika sedikit lebih tinggi dari Program Studi Pendidikan Matematika. Sementara untuk rata-rata capaian

kemampuan mengkonstruksi bukti Program Studi Pendidikan Matematika sedikit lebih tinggi dari Program Studi Matematika, tapi perbedaannya sangat tipis yaitu 1,14. Jadi dapat dikatakan tidak terdapat perbedaan capaian dan peningkatan kemampuan membaca bukti dan mengkonstruksi bukti antara kedua program studi.

Ditinjau dari faktor program studi yang memperoleh pendekatan pembelajaran yang sama juga tidak terdapat perbedaan yang signifikan. Artinya tidak terdapat perbedaan capaian dan peningkatan kemampuan membaca bukti dan capaian dan peningkatan kemampuan mengkonstruksi bukti antara kedua program studi yang menggunakan pendekatan M-APOS. Demikian juga untuk kelas dengan pendekatan konvensional. Artinya capaian dan peningkatan kemampuan membaca bukti dan mengkonstruksi bukti mahasiswa Program Studi Matematika yang diajar dengan pendekatan konvensional tidak berbeda dibandingkan mahasiswa Program Studi Pendidikan Matematika yang diajar dengan pendekatan yang sama. Untuk kelas dengan pendekatan M-APOS, jumlah mahasiswa yang memperoleh nilai cukup ke atas lebih banyak Program Studi Pendidikan Matematika dari pada Program Studi Matematika. Untuk kelas konvensional, jumlah mahasiswa yang memperoleh nilai cukup ke atas lebih banyak Program Studi Matematika dari pada Program Studi Pendidikan Matematika. Tetapi perbedaannya sangat tipis, sehingga secara umum dapat dikatakan tidak terdapat perbedaan antara kedua program studi.

Hasil ini tidak mengherankan, karena kedua program studi mempunyai kesamaan kurikulum sekitar 75%. Kedua program studi mempunyai mata kuliah Analisis Real. Kedua program studi dituntut untuk memperoleh kemampuan

pembuktian matematis. Dengan demikian pendekatan M-APOS cocok dipakai untuk kedua program studi.

Kemudian terdapat keadaan yang agak berbeda antara dua pendekatan pada program studi. Pada kelas dengan pendekatan M-APOS hasil yang diperoleh oleh Program Studi Pendidikan Matematika lebih tinggi dari Program Studi Matematika. Sementara untuk kelas konvensional hasil yang dicapai oleh Program Studi Matematika lebih tinggi dari Program Studi Pendidikan Matematika. Kelihatannya pendekatan M-APOS lebih cocok untuk Program Studi Pendidikan Matematika. Dari hasil wawancara memang diperoleh bahwa mahasiswa Program Studi Pendidikan Matematika lebih suka belajar kelompok yang merupakan karakteristik dari pendekatan M-APOS. Akibatnya mahasiswa Program Studi Pendidikan Matematika dapat mencapai perkembangan potensialnya melalui pembelajaran kelompok.

Ditinjau dari faktor pendekatan pembelajaran di masing-masing program studi diperoleh hasil yang agak berbeda. Untuk kemampuan membaca bukti pada Program Studi Matematika secara statistik tidak terdapat perbedaan capaian dan peningkatan antara kelas yang diajar dengan pendekatan M-APOS dengan kelas yang diajar dengan pendekatan konvensional. Dari hasil wawancara diperoleh informasi bahwa mahasiswa yang diajar dengan pendekatan konvensional senang dengan soal membaca bukti. Mereka sudah diberikan bukti dari suatu pernyataan, kemudian disuruh menentukan alasan dari setiap langkah pembuktian atau menentukan kesalahan suatu pembuktian dan memperbaikinya. Selain dari itu juga diperoleh bahwa antara kedua kelas mempunyai tingkat kemandirian belajar

matematik yang sama. Akibatnya hasil capaian dan peningkatan kemampuan membaca bukti mereka tidak berbeda dengan mahasiswa yang diajar dengan pendekatan M-APOS. Tapi secara rata-rata terlihat bahwa capaian dan peningkatan kemampuan membaca bukti kelas yang diajar dengan pendekatan M-APOS lebih tinggi dari kelas yang diajar dengan pendekatan konvensional. Kemudian persentase mahasiswa yang memperoleh nilai cukup ke atas lebih banyak kelas dengan pendekatan M-APOS. Jadi pendekatan M-APOS dapat meningkatkan kemampuan membaca bukti mahasiswa walaupun belum maksimal.

Sementara untuk kemampuan mengkonstruksi bukti pada Program Studi Matematika terdapat perbedaan capaian dan peningkatan kemampuan mengkonstruksi bukti antara kedua kelas. Persentase mahasiswa yang memperoleh nilai cukup ke atas lebih banyak kelas dengan pendekatan M-APOS dibandingkan dengan kelas yang diajar dengan pendekatan konvensional untuk kedua kemampuan yang diukur.

Pada Program Studi Pendidikan Matematika terdapat perbedaan capaian dan peningkatan kemampuan membaca bukti dan kemampuan mengkonstruksi bukti antara kelas yang menggunakan pendekatan M-APOS dengan kelas konvensional. Persentase mahasiswa yang memperoleh nilai cukup ke atas lebih banyak kelas dengan pendekatan M-APOS dibandingkan dengan kelas yang diajar dengan pendekatan konvensional untuk kedua kemampuan yang diukur.

Dari hasil ini dapat dikatakan bahwa penggunaan pendekatan M-APOS cukup efektif dalam hasil meningkatkan kemampuan pembuktian matematis. Pendekatan ini menuntut mahasiswa untuk mengkonstruksi sendiri

pengetahuannya melalui pengerjaan lembaran kerja terstruktur dan diskusi di kelompok dan di kelas. Dari hasil observasi dan wawancara diperoleh informasi bahwa penggunaan pendekatan ini sangat membantu mereka dalam memahami konsep yang akan diajarkan. Dengan adanya kerja kelompok maka mahasiswa level tinggi dapat membantu temannya pada level yang lebih rendah, sehingga memantapkan pemahamannya terhadap konsep tersebut. Sementara itu untuk mahasiswa level yang lebih rendah, mereka dapat bertanya tentang hal-hal yang tidak mereka mengerti. Akibatnya terjadi keuntungan timbal balik antara level mahasiswa tinggi dengan yang lebih rendah. Kemudian dilihat dari interaksi antara pembelajaran dengan program studi, diperoleh bahwa tidak terdapat interaksi antara keduanya. Hal ini menunjukkan bahwa pendekatan pembelajaran lebih dominan dari pada program studi dalam meningkatkan kemampuan membaca bukti dan mengkonstruksi bukti.

Ditinjau dari faktor kemampuan awal, secara keseluruhan diperoleh terdapat perbedaan capaian dan peningkatan kemampuan membaca bukti dan mengkonstruksi bukti antar kemampuan awal yang berbeda. Mahasiswa dengan kemampuan awal level tinggi memperoleh capaian dan peningkatan kemampuan membaca bukti dan mengkonstruksi bukti lebih tinggi dari level sedang dan rendah. Begitu juga untuk mahasiswa dengan kemampuan awal level sedang memperoleh capaian dan peningkatan kemampuan membaca bukti dan mengkonstruksi bukti lebih tinggi dari level rendah.

Kemudian untuk mahasiswa dengan kemampuan awal level tinggi, secara statistik tidak terdapat perbedaan capaian dan peningkatan kemampuan membaca

bukti dan mengkonstruksi bukti antara mahasiswa yang diajar dengan pendekatan M-APOS dan mahasiswa yang diajar secara konvensional. Tapi dari capaian yang diperoleh mahasiswa yang diajar dengan pendekatan M-APOS memperoleh hasil yang tinggi untuk kedua kemampuan yaitu 75,82 untuk kemampuan membaca bukti dan 83,29 untuk kemampuan mengkonstruksi bukti. Sementara untuk kelas konvensional hanya memperoleh capaian dalam kategori sedang untuk kedua kemampuan yaitu 69,85 untuk kemampuan membaca bukti dan 73,38 untuk kemampuan mengkonstruksi bukti. Walaupun secara statistik tidak berbeda tapi dari hasil yang diperoleh dapat dikatakan bahwa pendekatan M-APOS dapat meningkatkan kemampuan kemampuan membaca bukti dan mengkonstruksi bukti mahasiswa level tinggi.

Untuk mahasiswa dengan kemampuan awal level sedang, capaian dan peningkatan kemampuan membaca bukti dan mengkonstruksi bukti mahasiswa yang diajar dengan pendekatan M-APOS lebih tinggi dari mahasiswa yang diajar secara konvensional. Capaian dan peningkatan kemampuan membaca bukti dan mengkonstruksi bukti mahasiswa yang diajar dengan pendekatan M-APOS termasuk kategori sedang sedangkan kelas konvensional termasuk kategori rendah. Kemudian jika dilihat dari simpangan baku kelihatan bahwa simpangan baku kelas dengan pendekatan M-APOS lebih kecil dari kelas konvensional. Hal ini berarti perbedaan nilai antar mahasiswa dalam kelompok tidak terlalu besar, sehingga kemampuan mereka lebih seragam dari kelas konvensional. Jadi pendekatan M-APOS dapat meningkatkan kemampuan kemampuan membaca bukti dan mengkonstruksi bukti mahasiswa level sedang.

Demikian juga untuk mahasiswa dengan kemampuan awal level rendah, capaian dan peningkatan kemampuan membaca bukti dan mengkonstruksi bukti mahasiswa yang diajar dengan pendekatan M-APOS lebih tinggi dari mahasiswa yang diajar secara konvensional. Capaian dan peningkatan kemampuan membaca bukti dan mengkonstruksi bukti mahasiswa yang diajar dengan pendekatan M-APOS termasuk kategori rendah. Jadi ditinjau dari faktor kemampuan awal dan pendekatan pembelajaran dapat disimpulkan bahwa pendekatan M-APOS cocok untuk mahasiswa dengan level kemampuan awal sedang dan rendah.

Ditinjau dari faktor kemampuan awal dan program studi, diperoleh tidak terdapat perbedaan capaian dan peningkatan kemampuan membaca bukti dan mengkonstruksi bukti antara Program Studi Matematika dan Program Studi Pendidikan Matematika pada level kemampuan awal tinggi. Rata-rata capaian Program Studi Matematika lebih tinggi dari Program Studi Pendidikan Matematika untuk kedua kemampuan. Capaian yang diperoleh oleh Program Studi Matematika termasuk kategori tinggi sementara untuk Program Studi Pendidikan Matematika termasuk kategori sedang.

Untuk level kemampuan awal level sedang tidak terdapat perbedaan capaian kemampuan membaca bukti dan mengkonstruksi bukti antara Program Studi Matematika dan Program Studi Pendidikan Matematika. Capaian yang diperoleh oleh Program Studi Matematika termasuk kategori sedang sementara untuk Program Studi Pendidikan Matematika termasuk kategori rendah. Tetapi terdapat perbedaan peningkatan kemampuan membaca bukti dan mengkonstruksi

bukti antara Program Studi Matematika dan Program Studi Pendidikan Matematika.

Untuk level rendah, tidak terdapat perbedaan capaian dan peningkatan kemampuan membaca bukti dan mengkonstruksi bukti antara Program Studi Matematika dan Program Studi Pendidikan Matematika pada level kemampuan awal tinggi. Rata-rata capaian Program Studi Matematika lebih tinggi dari Program Studi Pendidikan Matematika untuk kemampuan membaca bukti. Untuk kemampuan mengkonstruksi bukti capaian Program Studi Pendidikan Matematika lebih tinggi dari Program Studi Matematika. Capaian yang diperoleh oleh Program Studi Matematika dan Program Studi Pendidikan Matematika termasuk kategori rendah.

Jika dilihat dari kemampuan awal pada Program Studi Matematika, maka diperoleh bahwa untuk level kemampuan awal tinggi dan sedang tidak terdapat perbedaan capaian dan peningkatan kemampuan membaca bukti dan mengkonstruksi bukti antara mahasiswa yang diajar dengan pendekatan M-APOS dan mahasiswa yang diajar secara konvensional. Walaupun secara kasat mata kelihatan capaian dan peningkatan kedua kemampuan lebih tinggi kelas konvensional, tapi secara statistik tidak berbeda. Hasil ini juga diperoleh dari jumlah mahasiswa yang sedikit, sehingga sulit untuk dibuat generalisasi. Dari hasil analisa diperoleh bahwa bahan ajar yang diberikan kurang mengakomodasi kebutuhan kelompok tinggi. Karena bahan ajar yang bersifat terstruktur kurang memberikan peluang pada mahasiswa level tinggi untuk mengembangkan

kreativitasnya. Mungkin pendekatan pembelajaran *open-ended* lebih cocok untuk mengakomodasi kebutuhan mahasiswa level tinggi.

Untuk level rendah pada capaian dan peningkatan kemampuan membaca bukti tidak terdapat perbedaan. Tapi terdapat perbedaan capaian dan peningkatan kemampuan mengkonstruksi bukti antara mahasiswa yang diajar dengan pendekatan M-APOS dan mahasiswa yang diajar secara konvensional. Capaian yang diperoleh untuk kedua kemampuan termasuk kategori rendah.

Jika dilihat dari kemampuan awal pada Program Studi Pendidikan Matematika, maka diperoleh bahwa untuk level kemampuan awal tinggi terdapat perbedaan capaian dan peningkatan kemampuan membaca bukti antara mahasiswa yang diajar dengan pendekatan M-APOS dan mahasiswa yang diajar secara konvensional. Untuk kemampuan mengkonstruksi bukti terdapat perbedaan capaian dan peningkatan antara keduanya, walaupun secara statistik tidak terdapat perbedaan. Capaian dan peningkatan kemampuan membaca bukti dan mengkonstruksi bukti mahasiswa yang diajar dengan pendekatan M-APOS termasuk kategori tinggi sedangkan kelas konvensional termasuk kategori sedang.

Untuk level sedang terdapat perbedaan capaian dan peningkatan kemampuan membaca bukti dan mengkonstruksi bukti antara mahasiswa yang diajar dengan pendekatan M-APOS dan mahasiswa yang diajar secara konvensional. Capaian dan peningkatan kemampuan membaca bukti dan mengkonstruksi bukti mahasiswa yang diajar dengan pendekatan M-APOS termasuk kategori sedang sedangkan kelas konvensional termasuk kategori rendah.

Untuk level kemampuan awal rendah terdapat perbedaan capaian dan peningkatan kemampuan membaca bukti antara mahasiswa yang diajar dengan pendekatan M-APOS dan mahasiswa yang diajar secara konvensional, walaupun secara statistik tidak terdapat perbedaan. Tapi terdapat perbedaan capaian dan peningkatan kemampuan mengkonstruksi bukti antara keduanya. Capaian dan peningkatan kemampuan membaca bukti dan mengkonstruksi bukti mahasiswa yang diajar dengan pendekatan M-APOS dan kelas konvensional termasuk kategori rendah.

Dari hasil penelitian diperoleh bahwa pendekatan M-APOS cocok untuk level kemampuan awal sedang dan rendah. Hal ini disebabkan mereka dapat memperoleh bantuan dari temannya yang berkemampuan tinggi. Bantuan ini mereka peroleh melalui kerja kelompok. Dari hasil wawancara diperoleh bahwa pada umumnya mereka senang belajar kelompok. Kemudian dilihat dari interaksi antara pembelajaran dengan kemampuan awal, diperoleh bahwa tidak terdapat interaksi antara keduanya. Hal ini menunjukkan bahwa pendekatan pembelajaran lebih dominan dari pada kemampuan awal mahasiswa dalam meningkatkan kemampuan membaca bukti dan mengkonstruksi bukti.

2. Kemandirian Belajar Matematik

Ditinjau dari faktor pendekatan pembelajaran maka diperoleh secara keseluruhan bahwa capaian dan peningkatan kemandirian belajar matematik dari kelas dengan pendekatan M-APOS lebih tinggi dari kelas dengan pendekatan konvensional. Ditinjau dari faktor program studi, secara keseluruhan diperoleh

tidak terdapat perbedaan capaian dan peningkatan kemandirian belajar matematik antara Program Studi Matematika dan Program Studi Pendidikan Matematika.

Ditinjau dari faktor program studi yang memperoleh pendekatan pembelajaran yang sama terdapat perbedaan yang signifikan untuk capaian tapi tidak terdapat perbedaan untuk gain. Artinya terdapat perbedaan capaian kemandirian belajar matematik antara kedua program studi yang menggunakan pendekatan M-APOS tapi tidak terdapat perbedaan untuk gain. Untuk kelas dengan pendekatan konvensional tidak terdapat perbedaan capaian dan peningkatan kemandirian belajar matematik mahasiswa Program Studi Matematika yang diajar dengan pendekatan konvensional dibandingkan mahasiswa Program Studi Pendidikan Matematika yang diajar dengan pendekatan yang sama.

Ditinjau dari faktor pendekatan pembelajaran di masing-masing program studi diperoleh hasil yang agak berbeda. Untuk Program Studi Matematika tidak terdapat perbedaan capaian dan peningkatan kemandirian belajar matematik antara kelas yang diajar dengan pendekatan M-APOS dengan kelas yang diajar dengan pendekatan konvensional. Untuk Program Studi Pendidikan Matematika terjadi sebaliknya yaitu terdapat perbedaan capaian dan peningkatan kemandirian belajar matematik antara kelas yang diajar dengan pendekatan M-APOS dengan kelas yang diajar dengan pendekatan konvensional.

Ditinjau dari faktor kemampuan awal, secara keseluruhan diperoleh terdapat perbedaan capaian kemandirian belajar matematik antar kemampuan awal yang berbeda kecuali tinggi dengan sedang. Mahasiswa dengan kemampuan awal level tinggi memperoleh capaian kemandirian belajar matematik lebih tinggi dari

level rendah. Begitu juga untuk mahasiswa dengan kemampuan awal level sedang memperoleh capaian dan peningkatan kemandirian belajar matematik lebih tinggi dari level rendah.

Kemudian untuk mahasiswa dengan kemampuan awal level tinggi, tidak terdapat perbedaan capaian dan peningkatan kemandirian belajar matematik antara mahasiswa yang diajar dengan pendekatan M-APOS dan mahasiswa yang diajar secara konvensional. Untuk mahasiswa dengan kemampuan awal level sedang, tidak terdapat perbedaan capaian dan peningkatan kemandirian belajar matematik mahasiswa yang diajar dengan pendekatan M-APOS dibanding mahasiswa yang diajar secara konvensional. Untuk mahasiswa dengan kemampuan awal level rendah, tidak terdapat perbedaan capaian kemandirian belajar matematik mahasiswa yang diajar dengan pendekatan M-APOS dibanding mahasiswa yang diajar secara konvensional. Ditinjau dari faktor kemampuan awal dan program studi, diperoleh tidak terdapat perbedaan capaian dan peningkatan kemandirian belajar matematik antara Program Studi Matematika dan Program Studi Pendidikan Matematika pada semua level kemampuan awal tinggi.

Secara umum dapat dikatakan bahwa kemandirian belajar matematik mahasiswa yang diajar dengan pendekatan M-APOS sedikit lebih baik dibanding mahasiswa yang diajar secara konvensional. Walaupun pada bagian tertentu kelas konvensional lebih baik, tapi secara statistik tidak berbeda. Kemandirian belajar matematik mahasiswa masih tergolong dalam kategori sedang. Perlu waktu yang lama bagi mahasiswa untuk memperoleh kemandirian belajar yang baik.

3. Kesulitan Mahasiswa dalam Analisis Real

Secara umum dapat dikatakan bahwa mahasiswa mengalami banyak kesulitan dalam belajar dengan pembuktian. Mereka merasa cemas dan pesimis jika sudah berhadapan dengan pembuktian. Bahkan ada yang menjadi frustrasi menghadapi mata kuliah yang berhubungan dengan pembuktian. Dari hasil observasi dan wawancara diperoleh beberapa kesulitan yang menonjol dalam perkuliahan Analisis Real.

Kesulitan yang paling menonjol adalah dalam memahami suatu definisi atau teorema. Mereka belum terbiasa memahami definisi atau teorema seperti dalam Analisis Real. Mereka kesulitan membuat ilustrasi dari definisi atau teorema tersebut, sehingga mereka hanya menghafal definisi atau teorema. Akibatnya definisi atau teorema tersebut tidak bermakna bagi mereka.

Kesulitan kedua adalah memulai pembuktian dan menentukan langkah-langkah pembuktian. Ini adalah akibat dari ketidakpahaman terhadap definisi dan teorema yang ada. Sehingga mereka tidak dapat menentukan urutan logis dari pembuktian suatu pernyataan. Hal ini juga akibat dari latar belakang mereka yang belum terbiasa dalam menyusun suatu pembuktian matematis.

Kesulitan ketiga adalah menuangkan ide yang ada dalam pikiran ke dalam bahasa matematik. Kadang mereka dapat menjelaskan idenya secara lisan, tapi tidak dapat menuliskannya. Hal ini terjadi karena tidak terbiasa dalam menyusun bukti matematis.

Kesulitan lainnya adalah: 1) kurangnya referensi yang dapat digunakan terutama yang berbahasa Indonesia, 2) menentukan teorema yang cocok untuk

membuktikan suatu pernyataan, 3) memanipulasi premis atau pernyataan sehingga cocok dengan teorema atau definisi yang akan digunakan, dan 4) menentukan kebenaran dari suatu bukti yang telah disusun. Disamping itu mereka juga menyadari bahwa hal ini terjadi karena kurang latihan. Waktu belajar di kelas mereka mengerti tapi setelah belajar di rumah bingung lagi.

BAB V

KESIMPULAN, IMPLIKASI, DAN REKOMENDASI

A. Kesimpulan

Dari hasil penelitian yang telah dilakukan, diperoleh kesimpulan sebagai berikut:

1. Yang berkaitan dengan membaca bukti
 - a. Secara keseluruhan kemampuan membaca bukti mahasiswa Program Studi Matematika dan Program Studi Pendidikan Matematika tidak berbeda secara signifikan. Kemudian juga tidak terdapat perbedaan kemampuan membaca bukti antara mahasiswa Program Studi Matematika dan Program Studi Pendidikan Matematika yang memperoleh pendekatan pembelajaran yang sama.
 - b. Secara keseluruhan kemampuan membaca bukti kelas yang diajar dengan pendekatan M-APOS lebih tinggi dari kelas konvensional. Untuk Program Studi Matematika tidak terdapat perbedaan kemampuan membaca bukti kelas yang diajar dengan pendekatan M-APOS dibandingkan dengan kelas konvensional. Sementara itu untuk Program Studi Pendidikan Matematika kemampuan membaca bukti kelas yang diajar dengan pendekatan M-APOS lebih tinggi dari kelas konvensional.
 - c. Secara keseluruhan kemampuan membaca bukti antar kemampuan awal berbeda secara signifikan. Mahasiswa level tinggi kemampuan membaca buktinya lebih baik dari level sedang dan level rendah.

Mahasiswa level sedang kemampuan membaca buktinya lebih baik dari dan level rendah. Tidak terdapat perbedaan kemampuan membaca bukti antara mahasiswa Program Studi Matematika dan Program Studi Pendidikan Matematika yang mempunyai level kemampuan awal yang sama.

- d. Pada kemampuan membaca bukti banyaknya mahasiswa yang memperoleh nilai cukup ke atas untuk Program Studi Matematika dan Program Studi Pendidikan Matematika adalah sama. Jumlah mahasiswa yang memperoleh nilai cukup ke atas pada kemampuan membaca bukti untuk kelas M-APOS lebih banyak dari kelas konvensional. Jumlah mahasiswa yang memperoleh nilai cukup ke atas pada kemampuan membaca bukti untuk mahasiswa dengan level kemampuan awal tinggi, lebih banyak dari mahasiswa dengan level kemampuan awal sedang dan rendah. Untuk mahasiswa dengan level kemampuan awal sedang, lebih banyak dari mahasiswa dengan level kemampuan awal rendah.
 - e. Capaian kemampuan membaca bukti yang diperoleh mahasiswa masih dalam kategori sedang.
2. Yang berkaitan dengan mengkonstruksi bukti
 - a. Secara keseluruhan kemampuan mengkonstruksi bukti mahasiswa Program Studi Matematika dan Program Studi Pendidikan Matematika tidak berbeda secara signifikan. Kemudian juga tidak terdapat perbedaan kemampuan mengkonstruksi bukti antara mahasiswa

Program Studi Matematika dan Program Studi Pendidikan Matematika yang memperoleh pendekatan pembelajaran yang sama.

- b. Secara keseluruhan kemampuan mengkonstruksi bukti kelas yang diajar dengan pendekatan M-APOS lebih tinggi dari kelas konvensional. Sementara itu untuk Program Studi Matematika dan Program Studi Pendidikan Matematika kemampuan mengkonstruksi bukti kelas yang diajar dengan pendekatan M-APOS lebih tinggi dari kelas konvensional.
- c. Secara keseluruhan kemampuan mengkonstruksi bukti antar kemampuan awal berbeda secara signifikan. Mahasiswa level tinggi kemampuan mengkonstruksi buktinya lebih baik dari level sedang dan level rendah. Mahasiswa level sedang kemampuan mengkonstruksi buktinya lebih baik dari dan level rendah. Tidak terdapat perbedaan kemampuan mengkonstruksi bukti antara mahasiswa Program Studi Matematika dan Program Studi Pendidikan Matematika yang mempunyai level kemampuan awal yang sama.
- d. Pada kemampuan mengkonstruksi bukti jumlah mahasiswa yang memperoleh nilai cukup ke atas untuk Program Studi Matematika lebih banyak dari Program Studi Pendidikan Matematika. Jumlah mahasiswa yang memperoleh nilai cukup ke atas pada kemampuan mengkonstruksi bukti untuk kelas M-APOS lebih banyak dari kelas konvensional. Jumlah mahasiswa yang memperoleh nilai cukup ke atas pada kemampuan mengkonstruksi bukti untuk mahasiswa dengan level

- kemampuan awal tinggi, lebih banyak dari mahasiswa dengan level kemampuan awal sedang dan rendah. Untuk mahasiswa dengan level kemampuan awal sedang, lebih banyak dari mahasiswa dengan level kemampuan awal rendah.
- e. Capaian kemampuan mengkonstruksi bukti yang diperoleh mahasiswa masih dalam kategori sedang.
 - f. Terdapat asosiasi antara membaca bukti dan mengkonstruksi bukti.
3. Yang berkaitan dengan kemandirian belajar matematika
- a. Secara keseluruhan kemandirian belajar matematika mahasiswa Program Studi Matematika dan Program Studi Pendidikan Matematika tidak berbeda secara signifikan. Sementara itu kemandirian belajar matematika mahasiswa Program Studi Matematika yang diajar dengan pendekatan M-APOS berbeda dibandingkan mahasiswa Program Studi Pendidikan Matematika yang diajar dengan pendekatan yang sama.
 - b. Secara keseluruhan kemandirian belajar matematika mahasiswa yang diajar dengan pendekatan M-APOS lebih tinggi dari kelas konvensional. Hal yang sama juga berlaku untuk Program Studi Pendidikan Matematika yaitu kemandirian belajar matematika mahasiswa yang diajar dengan pendekatan M-APOS lebih tinggi dari kelas konvensional. Sementara itu untuk Program Studi Matematika kemandirian belajar matematika kelas yang diajar dengan pendekatan M-APOS tidak berbeda dengan kelas konvensional.

B. Implikasi

Secara umum dari penelitian diperoleh bahwa pembelajaran dengan pendekatan M-APOS dapat meningkatkan kemampuan membaca bukti dan mengkonstruksi bukti. Pembelajaran dengan pendekatan M-APOS dilakukan dalam tiga fase yaitu aktivitas pemberian tugas, fase diskusi kelas, dan fase latihan.

Pada fase aktivitas, mahasiswa diberikan tugas secara berkelompok atau individu yang menggiring mereka untuk memperoleh pengetahuan yang cukup untuk memahami konsep baru yang akan diberikan. Tugas ini dirancang sedemikian sehingga dapat mendorong mahasiswa untuk dapat mempelajari dan memahami masalah, memecahkan masalah, mengkomunikasikannya, serta aturan logis dari suatu konsep. Dengan adanya tugas ini akan terjadi aksi mental pada diri mahasiswa untuk memecahkan permasalahan yang diberikan. Jika mahasiswa tidak mampu menjelaskan keterkaitan objek mental yang berhubungan dengan masalah yang diberikan maka dosen melakukan intervensi tidak langsung berupa dorongan untuk terjadinya interaksi antar mahasiswa melalui teknik *scaffolding*. Menurut Suryadi (2005) pendekatan pembelajaran bersifat tidak langsung dapat meningkatkan kemampuan berpikir tingkat tinggi siswa atau mahasiswa.

Dalam memberikan tugas hendaknya diperhatikan seperti yang dikemukakan Sumarmo (2010) yaitu: topik-topik matematika yang relevan, pemahaman, minat, dan pengalaman belajar siswa yang sebelumnya, dan mendorong tercapainya belajar bermakna. Pemilihan tugas ditujukan untuk: mengembangkan pemahaman dan keterampilan matematik, menstimulasi tersusunnya hubungan matematik (*mathematical connection*), mendorong untuk

formulasi masalah, pemecahan masalah (*mathematical problem solving*), dan penalaran matematik (*mathematical reasoning*), memajukan komunikasi matematik (*mathematical communication*), menggambarkan matematika sebagai kegiatan manusia (*mathematics as human activity*), mendorong tumbuhnya disposisi matematik (*mathematical disposition*).

Dari hasil penelitian diperoleh bahwa pemberian tugas sebelum mempelajari konsep yang baru dapat meningkatkan pemahaman mahasiswa terhadap konsep tersebut. Dengan tugas ini mahasiswa dapat mengkaji, melakukan eksplorasi, menyusun argumen, dan mengkonstruksi pengetahuan sendiri. Nurlaelah (2009) menyebut kegiatan pra perkuliahan ini sebagai aktivitas mandiri (*Self Activities*). Aktivitas mandiri ini menjadi sangat penting diberikan untuk mendorong mahasiswa supaya mempersiapkan diri sebelum mengikuti perkuliahan tatap muka dengan dosen, terutama pada mata kuliah yang memuat materi yang dianggap sulit oleh mahasiswa. Melalui berbagai aktivitas yang diberikan pada pra perkuliahan, mahasiswa akan memiliki bekal pengetahuan untuk dibawa pada pertemuan di kelas. Akibat logis dari pemberian aktivitas tersebut, secara fisik, mental, maupun pengetahuan mahasiswa menjadi siap sehingga mereka akan terlibat dan aktif dalam pertemuan tatap muka dengan dosen di kelas.

Pada fase diskusi kelas, mahasiswa diberikan kesempatan untuk menunjukkan potensi dirinya dalam berargumentasi dan mengkomunikasikan pengetahuannya. Bagi mahasiswa dengan kemampuan awal tinggi, hal ini merupakan sebuah tantangan. Mereka dapat menyampaikan berbagai ide dan

argumentasinya dalam diskusi kelas. Bagi mahasiswa level sedang dan rendah, dapat memperoleh pengetahuan baru dan dapat menjadi sumber belajar dalam memahami suatu konsep. Fase diskusi ini bertujuan untuk memantapkan pengetahuan yang telah mereka peroleh selama aktivitas mengerjakan tugas terstruktur. Dalam fase ini dosen membantu mahasiswa ketika ditemukan kendala. Dengan dapat mengajukan pertanyaan yang mendorong mahasiswa berpikir dan menemukan jawaban sendiri dari masalah yang dihadapi. Jika mahasiswa tidak mampu menjelaskan keterkaitan objek mental yang berhubungan dengan masalah yang diberikan maka dosen kembali dapat melakukan intervensi tidak langsung melalui teknik *scaffolding*. Teknik *scaffolding* dapat digunakan untuk memberikan stimulus lanjutan sehingga aksi mental yang diharapkan dapat terjadi dengan baik.

Melalui interaksi antar mahasiswa diharapkan terjadi pertukaran pengalaman belajar berbeda sehingga aksi mental dapat terus berlanjut sesuai dengan yang diharapkan. Aktivitas seperti ini terus berlanjut sampai siswa memiliki kemampuan untuk melakukan refleksi terhadap aksi yang telah dilakukan, sehingga mahasiswa dapat mencapai tahap *perkembangan potensial*. Menurut teori ZPD dari Vygotsky, perkembangan kemampuan kognitif anak terbagi ke dalam dua tahap yaitu tahap *perkembangan aktual* dan tahap *perkembangan potensial*.

Pada fase latihan, mahasiswa diberikan berbagai persoalan yang sesuai dengan topik yang dipelajari, sehingga tambah memantapkan konsep yang telah diperoleh. Pada fase ini mahasiswa diharapkan dapat memperoleh pengetahuan yang maksimal.

C. Rekomendasi

Berdasarkan hasil temuan penelitian maka berikut diajukan beberapa rekomendasi.

1. Pembelajaran dengan pendekatan M-APOS lebih baik secara signifikan dari pada pembelajaran konvensional dalam meningkatkan kemampuan membuktikan. Karena itu, pembelajaran ini dapat dijadikan sebagai alternatif model pembelajaran dalam mata kuliah yang memerlukan pembuktian di perguruan tinggi.
2. Pemberian tugas yang menuntun siswa untuk menguasai suatu konsep baru yang akan diajarkan hendaknya lebih dimaksimalkan.
3. Pembelajaran dengan pendekatan M-APOS untuk pembuktian lebih cocok untuk level kemampuan awal sedang dan rendah. Karena itu perlu ada modifikasi lebih lanjut untuk level kemampuan tinggi misalnya dengan memberikan soal yang bersifat *open-ended*, karena lembaran kerja yang diberikan terlalu menuntun sehingga mahasiswa level tinggi tidak tertantang dengan masalah yang diberikan.
4. Dalam setiap pembelajaran hendaknya pengajar selalu menggunakan pendekatan yang menuntun siswa mengkonstruksi sendiri pengetahuannya.
5. Dalam penelitian ini yang dibandingkan adalah antara kelas M-APOS dengan kelas konvensional, hendaknya ada penelitian yang membandingkan kelas M-APOS dengan APOS untuk kemampuan pembuktian matematik pada mata kuliah Analisis Real.

6. Kemampuan yang diteliti pada penelitian ini adalah kemampuan membaca bukti dan mengkonstruksi bukti, hendaknya diteliti pula kemampuan merekonstruksi bukti.
7. Selama pembelajaran banyak mahasiswa mengalami kesulitan dalam membuktikan sehingga terjadi kecemasan dalam diri mahasiswa. Untuk perlu ada penelitian lanjutan tentang kecemasan yang dialami mahasiswa selama mengikuti pembelajaran mata kuliah yang menuntut kemampuan membuktikan.

DAFTAR PUSTAKA

- Arnawa, M. (2006). *Meningkatkan Kemampuan Pembuktian Mahasiswa dalam Aljabar Abstrak Melalui Pembelajaran Berdasarkan Teori APOS*. Disertasi pada Universitas Pendidikan Indonesia: tidak diterbitkan.
- Asiala, M *et al.* (1997). "The development of students' graphical understanding of the derivative". *Journal of Mathematical Behavior*, 16(4), 399-431.
- Bartle, R. G. dan Sherbert, D. R. (1992). *Introduction to Real Analysis, Second Edition*, New York: John Willey & Son.
- Bloch, E.D. (2000). *Proof and Fundamental: A First Course in Abstract Mathematics*. Boston: Birkhauser.
- Cappetta, R. W. (2007). "Reflective Abstraction And The Concept Of Limit: A Quasi-Experimental Study To Improve Student Performance in College Calculus By Promoting Reflective Abstraction Through Individual, Peer, Instructor And Curriculum Initiates" Makalah pada AMATYC 33rd Annual Conference, Minneapolis, 2007.
- Depdiknas. (2002). *Kurikulum dan Hasil Belajar: Kompetensi Dasar Mata Pelajaran Matematika Sekolah Menengah Atas dan Madrasah Aliyah*. Jakarta: Depdiknas.
- Dickerson, D. S. (2008). *High School Mathematics Teachers' Understandings of the Purposes of Mathematical Proof*, Disertasi pada Syracuse University: Tidak dipublikasikan.
- Dubinsky, E dan Tall, D. (2002). "Reflective abstraction in advanced mathematical thinking". Dalam Tall, D., *Advanced mathematical thinking*. Boston: Kluwer
- Fathani, A. H. (2009). *Matematika Hakikat & Logika*, Yogyakarta: Ar-ruzz Media.
- Findel, B.R. (2001). *Learning and Understanding in Abstract Algebra*. Disertasi. New Hampshire: Tidak diterbitkan.
- Fraenkel, J. R. dan Wallen, N. E. (2007). *How to Design and Evaluate Research in Education*, New York: Mc Graw Hill.
- Gunawan, H dan Widjaya, J. (2009). *Portfolio Perkuliahan MA3231 Pengantar Analisis Real Semester II 2008/2009*. [Online]. Tersedia : <http://personal.fmipa.itb.ac.id/hgunawan/files/2009/02/silabus-ma3231.pdf>. [15 Maret 2010].

- Hanna, G. (1991). "Mathematical Proof". Dalam D. Tall (ed.). *Advanced Mathematical Thinking*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Hernadi, J. (2009). *Metoda Pembuktian Dalam Matematika*. [Online]. Tersedia : <http://www.julanhernadi.files.wordpress.com/2009/12-methods-of-proof.pdf> [15 Maret 2010].
- Knuth, E.J.(2002). "Secondary School Mathematics Teacher's Conception of Proof". *Journal for Research in Mathematics Education*. 33 (5), 379-405.
- Kusnandi. (2008). *Pembelajaran Matematika dengan Strategi Abduktif-Deduktif untuk Menumbuhkembangkan Kemampuan Membuktikan pada Mahasiswa: Disertasi pada Universitas Pendidikan Indonesia: Tidak diterbitkan.*
- NCTM. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics, Inc.
- Nichols, S. R. (2008). *Student-to-Student Discussions: The Role of the Instructor and Students in Discussions in an Inquiry-Oriented Transition to Proof Course*, Disertasi pada The University of Texas at Austin: Tidak dipublikasikan.
- Nurlaelah, E. (2009). *Pencapaian Daya dan Kreativitas Matematik Mahasiswa Calon Guru Melalui Pembelajaran Berdasarkan Teori APOS: Disertasi pada Universitas Pendidikan Indonesia: tidak diterbitkan.*
- Prawironegoro, P. (1985). *Evaluasi Hasil Belajar Khusus Analisis Soal untuk Bidang StudiM matematika*. Jakarta : CV. Fortuna.
- Qohar, A. (2010). *Mengembangkan Kemampuan Pemahaman, Koneksi dan Komunikasi Matematis Serta Kemandirian Belajar Matematika Siswa SMP Melalui Reciprocal Teaching: Disertasi pada Universitas Pendidikan Indonesia: Tidak diterbitkan.*
- Raman, M. (2003). Key Ideas: What are They and How Can They Help us Understand Haow People View Proof : *Education Studies in Mathematics* 52: 319 – 325.
- Ratnaningsih, N. (2007). *Pengaruh Pembelajaran Kontekstual terhadap Kemampuan Berpikir Kritis dan Kreatif Matematik serta Kemandirian Belajar Siswa SMA: Disertasi pada Universitas Pendidikan Indonesia: Tidak diterbitkan.*

- Sumarmo, U. (2003). *Pembelajaran Keterampilan Membaca Matematika Pada Siswa Sekolah Menengah*. Disampaikan pada Seminar Nasional Pendidikan MIPA di FPMIPA UPI.
- (2004). *Kemandirian Belajar: Apa, Mengapa dan Bagaimana Dikembangkan pada Peserta Didik*. Makalah disajikan pada Seminar Pendidikan Matematika di Jurusan Pendidikan Matematika FMIPA Universitas Negeri Yogyakarta, tanggal 8 Juli 2004. Tidak diterbitkan.
- (2010). *Berfikir Dan Disposisi Matematik: Apa, Mengapa, Dan Bagaimana Dikembangkan Pada Peserta Didik*, Makalah FPMIPA UPI.
- Suryadi, D. (2005). *Penggunaan Pendekatan Pembelajaran Tidak Langsung serta Pendekatan Gabungan Langsung dan Tidak Langsung dalam Rangka Meningkatkan Kemampuan Berpikir Matematik Tingkat Tinggi Siswa SLTP* (Disertasi). Bandung: Universitas Pendidikan Indonesia.
- Tall, D. (1989). The Nature of Mathematical Proof. *Mathematics Teaching*. 127, 23-32.
- , (1991). *Advanced Mathematical Thinking*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Tucker, T. W. (1999). "On the Role of Proof in Calculus Courses". *Contemporary Issues in Mathematics Education*, 36, 31 – 36.
- VanSpronsen, H. D. (2008). *Proof Processes of Novice Mathematics Proof Writers*. Disertasi pada The University of Montana Missoula: Tidak dipublikasikan.
- Weber, K. (2002). *Instrumental and relational understanding of advanced mathematical concepts and their role in constructing proofs about group isomorphisms*. Makalah disampaikan pada The 2nd International Conference on the Teaching of Mathematics (at the undergraduate level), Hersonisoss, Greece.
- (2003). *Students' Difficulties with Proof*. [online]. Tersedia: http://www.Maa.org/t_and_l/sampler/rs_8.html.
- Yoo, S. (2008). *Effects of Traditional and Problem-Based Instruction on Conceptions of Proof and Pedagogy in Undergraduates and Prospective Mathematics Teachers*, Disertasi pada The University of Texas at Austin: Tidak dipublikasikan.

**MENINGKATKAN KEMAMPUAN PEMBUKTIAN
MATEMATIS DENGAN PENDEKATAN
M-APOS PADA MAHASISWA**

DRAFT DISERTASI



Oleh:

Yerizon

NIM. 0809591

SEKOLAH PASCASARJANA
UNIVERSITAS PENDIDIKAN INDONESIA
BANDUNG
2011

Menurut Suryadi (2005) pendekatan tak langsung dapat secara efektif meningkatkan kemampuan matematik tingkat tinggi siswa.

Menurut Suryadi (2005), untuk mendorong terjadinya suatu aksi mental, maka proses pembelajaran harus disajikan masalah yang memuat tantangan bagi siswa untuk berpikir. Masalah tersebut dapat berkaitan dengan penemuan konsep, prosedur, strategi penyelesaian masalah tidak rutin, atau aturan-aturan dalam matematika. Jika aksi mental yang diharapkan tidak terjadi, yakni ditandai ketidakmampuan siswa menjelaskan keterkaitan antar objek mental yang berhubungan dengan masalah yang dihadapi, maka guru dapat melakukan intervensi tidak langsung berupa dorongan untuk terjadinya interaksi antar siswa atau melalui teknik *scaffolding*.

Melalui interaksi antar siswa diharapkan terjadi pertukaran pengalaman belajar berbeda sehingga aksi mental dapat terus berlanjut sesuai dengan yang diharapkan. Teknik *scaffolding* dapat digunakan untuk memberikan stimulus lanjutan sehingga aksi mental yang diharapkan dapat terjadi dengan baik. Aktivitas seperti ini terus berlanjut sampai siswa memiliki kemampuan untuk melakukan refleksi terhadap aksi yang telah dilakukan. (Proses)

Untuk mendorong aksi-aksi mental sehingga terjadi proses, maka guru dapat melakukan intervensi tidak langsung. Melalui intervensi siswa diarahkan agar

memiliki kemampuan untuk melakukan refleksi atas sejumlah proses mental yang telah dilakukan sehingga mereka mampu merangkumnya (*encapsulate*) menjadi suatu objek mental yang baru. Hal ini dapat dilakukan dengan meminta mahasiswa menjelaskan kinerja mereka melalui diskusi kelas. Dengan intervensi mahasiswa juga dapat didorong untuk memiliki kemampuan mengurai kembali (*de-encapsulate*) suatu objek mental baru menjadi bagian-bagiannya.

Sebagai ilustrasi.....

Menurut teori ZPD dari Vygotsky, perkembangan kemampuan kognitif anak terbagi ke dalam dua tahap yaitu tahap *perkembangan aktual* dan tahap *perkembangan potensial*. Perkembangan aktual diperoleh melalui upaya sendiri pada saat melakukan pemecahan suatu masalah. Perkembangan potensial didapat melalui interaksi dengan pihak lain yang mempunyai kemampuan lebih. Jarak antara dua tahap perkembangan tersebut disebut *Zone of Proximal Development* (ZPD).