PENENTUAN SOLUSI GELOMBANG NONLINIER KORTEWEG DE VRIES MENGGUNAKAN METODE HIROTA

OLEH

Dra. HIDAYATI,.M.Si,

Disampaikan pada Seminar Nasional, Mubes
Ikatan Alumni FPMIPA-FMIPA UNP
Tanggal 13-14 November 2010

JURUSAN FISIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS NEGERI PADANG

2010

PENENTUAN SOLUSI GELOMBANG NONLINIER KORTEWEG DE VRIES MENGGUNAKAN METODE HIROTA

Hidayati

Jurusan Fisika FMIPA Universitas Negeri Padang

ABSTRAK

Berdasarkan persamaan-persamaan hidrodinamika yang berhubungan dengan gerak fluida, diperoleh persamaan Korteweg de Vries (KdV). Fenomena persamaan KdV sangatlah menarik, mengingat persamaan ini sering dijumpai dalam banyak fenomena fisika. Walaupun persamaan KdV adalah persamaan nonlinier namun dalam pemecahannya dapat dipecahkan dengan metode pelinerisasian eksak. Salah satu metoda yang dapat digunakan adalah metoda Hirota. Metoda ini digunakan karena dari suatu persamaan linier dari metoda Hirota dapat digunakan untuk membangkit solusi soliton lain. Melalui Hirota diperoleh solusi satu soliton. Dari solusi 1 soliton dapat dilihat sifat soliton yang menunjukkan bahwa laju rambat gelombangnya dipengaruhi oleh amplitudonya dan soliton mempunyai bentuk yang permanen

Kata Kunci : Nonlinier, Persamaan Korteweg de Vries, Hirota, Soliton

PENDAHULUAN

Gelombang merupakan suatu gejala gangguan *(disturbance)* yang merambat dalam selang waktu tertentu ke ruang sekitarnya. Sumber gangguan merupakan sesuatu yang bergetar *(vibrate)* atau berayun *(oscillate)* (Zahara, 1994). Perambatan getaran tidak disertai dengan perpindahan tempat yang permanen dari meteri-materi medium perantara, tetapi gelombang dalam perambatannya memindahkan energi. Berdasarkan bentuknya gelombang terdiri dari gelombang linear dan gelombang nonlinear.

Pada gelombang linear, besar kecilnya amplitudo tidak mempengaruhi cepat rambat gelombang, contohnya gelombang pada tali. Sedangkan gelombang nonlinear, cepat rambat gelombangnya dipengaruhi amplitudonya, salah satu contohnya adalah soliton.

Disampaikan pada Seminar Nasional, Mubes Ikatan Alumni FPMIPA-FMIPA UNP Tanggal 13-14 November 2010

Persamaan gelombang nonlinear banyak macamnya, salah satunya adalah persamaan yang dihasilkan oleh Korteweg dan de Vries ini dikenal dengan nama persamaan KdV. Solusi persamaan KdV lebih dikenal sebagai gelombang soliton. Solusi persamaan gelombang soliton ini dapat diselesaikan dengan menggunakan metoda aljabar, metoda hamburan balik, metoda Hirota, serta metoda transformasi Backlund (Hidayati, 1999).

Jika menggunakan metoda aljabar hanya diperoleh solusi 1 soliton, sedangkan jika digunakan metoda hamburan balik, bisa diperoleh solusi sampai N-soliton. Metode tersebut menggunakan metode differensial melalui persamaan-persamaan Marchenko dan Sturm Liouville. Pada metode Backlund dihasilkan sampai solusi N-soliton dengan menggunakan persamaan Cauchy-Rieman dan persamaan Ricatti (Hidayati, 2006). Pada metode Hirota yang menggunakan transformasi Cole-Hopf dan operator bilinear Hirota dapat diperoleh solusi 1 soliton sampai solusi N-soliton.

Soliton ini telah diamati dalam berbagai fenomena fisis, seperti pada air dangkal. Persamaan yang mendeskripsikan penjalaran gelombang soliton pada permukaan air diturunkan oleh Korteweg de Vries pada tahun 1895. Persamaan ini diturunkan berdasarkan fungsi hidrodinamika untuk fluida ideal, yaitu fluida yang mempunyai sifat tak rotasional, tak kompresibel dan invisid. Persamaan ini dinamakan soliton Korteweg de Vries, dapat ditulis sebagai berikut :

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0 \tag{1}$$

Metoda Hirota merupakan serangkaian langkah matematis yang digunakan untuk mencari solusi dari suatu persamaan non linier. Untuk mencari solusi persamaan KdV dengan metoda Hirota, langkah pertama yang harus dilakukan adalah dengan menerapkan transformasi Cole-Hopf pada persamaan KdV. Transformasi Cole-Hopf ini secara umum berbentuk (Drazin,1992) :

$$u(x,t) = a\frac{\partial}{\partial x} ln\theta(x,t) \tag{2}$$

Setelah dilakukan transformasi ini, diperoleh bentuk persamaan KdV yang pada setiap sukunya merupakan perkalian dari dua buah fungsi.

Persamaan dengan suku-suku yang terdiri dari perkalian dua fungsi ditulis dengan menggunakan definisi operator bilinear Hirota sebagai berikut:

$$D_t^m D_x^n(f.g) = \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t'}\right)^m \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x'}\right)^n f(x,t)g(x',t')\Big|_{\substack{x'=x \\ t'=t}} \qquad (3)$$

Operator pada persamaan (3) disebut bilinear, karena operator ini bekerja pada perkalian dua buah fungsi yang bersifat linier. Penggunakan operator Bilinear Hirota untuk persamaan KdV, diperoleh bentuk fungsi f untuk solusi 1 soliton sebagai berikut (Remoissenet, 1993), yakni :

$$f = 1 + exp\theta_1 \qquad (4)$$

METODOLOGI

Adapun langkah-langkah yang dilakukan untuk menyelesaikan persamaan KdV adalah menggunakan transformasi Cole-Hopf untuk mereduksi persamaan KdV selanjutnya mencari bentuk persamaan KdV baru dimana setiap sukunya merupakan perkalian dua buah fungsi. Persamaan KdV diubah kedalam bentuk persamaan dengan opertor bilinear Hirota. Berikutnya menghitung solusi 1 soliton melalui penyelesaian setiap suku dari deret yang merupakan penyelesaian dari persamaan yang berbentuk operator bilinear Hirota

HASIL DAN PEMBAHASAN

Bentuk umum dari penyelesaian persamaan soliton menggunakan metode Hirota adalah dengan mengambil fungsi f dalam bentuk deret dengan parameter ε sebagai berikut (Drazin,1992) :

$$f = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n f_n(x,t) \qquad (6)$$

dengan n adalah bilangan bulat. Persamaan (6) ini disubstitusikan ke persamaan (1) sehingga :

$$B(1.1) + \varepsilon B(f_1.1 + 1.f_1) + \varepsilon^2 B(f_2.1 + f_1.f_1 + 1.f_2) + \cdots +$$
$$\varepsilon^r B\left(\sum_{m=0}^{r} f_{r-m}.f_m\right) + \cdots = 0 \qquad (4)$$

dimana B merupakan operator bilinear yang dapat dituliskan sebagai berikut :

$$B = D_x(D_t + D_x^3) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial^3}{\partial x^3}\right)$$

Jika diambil n = 1, 2, dan 3 maka persamaan (1) menjadi :

$$f = 1 + \varepsilon^1 f_1 + \varepsilon^2 f_2 + \varepsilon^3 f_3 \qquad (5)$$

Selanjutnya persamaan (5) disubstitusikan ke persamaaan (3) sehingga diperoleh persaman :

$$D_x(D_t + D_x^3)(f.f) = 0$$

$$D_x(D_t + D_x^3)(1 + \varepsilon^1 f_1 + \varepsilon^2 f_2 + \varepsilon^3 f_3)(1 + \varepsilon^1 f_1 + \varepsilon^2 f_2 + \varepsilon^3 f_3) = 0$$

$$B(1.1) + \varepsilon^1 B(1.f_1 + f_1.1) + \varepsilon^2 B(1.f_2 + f_2.1 + f_1.f_1) + \varepsilon^3 B(1.f_3 + f_1.f_2 + f_2.f_1 + f_3.1) + \varepsilon^4 B(f_1.f_3 + f_2.f_2 + f_3.f_1) + \varepsilon^5 B(f_2.f_3 + f_3.f_2) + \varepsilon^6 B(f_3.f_3) = 0 \qquad (6)$$

Untuk memudahkan perhitungan dipilih setiap suku pada persamaan (6) berharga sama dengan nol, sehingga pencarian solusi 1 soliton persamaan KdV dapat dijelaskan sebagai berikut :

1. Suku Pertama :

   $B(1.1) = 0$

2. Suku Kedua :

   $B(1.f_1 + f_1.1) = 0$

   Dapat juga dituliskan dalam bentuk :

   $$Bf_1 = 0 \qquad (7)$$

Bentuk fungsi yang sederhana dan memenuhi persamaan (7) adalah dengan mengambil $f_1 = exp\theta_1$ untuk $\theta_1 = k_1 x - \omega_1 t + \alpha_1$. , Substitusikan harga f_1 ke persamaan (7) :

$$B(exp\theta_1) = 0 \qquad (8)$$

atau

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial^3}{\partial x^3}\right)\exp(k_1 x - \omega_1 t + \alpha_1) = 0$$

maka diperoleh :

$$\omega_1 = k_1^3 \qquad (9)$$

3. Suku Ketiga :

$$B(1.f_2 + f_2.1 + f_1.f_1) = 0$$

$$2B(1.f_2) = -B(f_1.f_1) \tag{10}$$

Melalui substitusi f_1 kepersamaan (10) diperoleh :

$$2B(1.f_2) = 0$$

$$Bf_2 = 0 \tag{11}$$

Agar lebih sederhana dipilih nilai $f_2 = 0$. Untuk menentukan solusi 1 soliton diambil $n = 1$ dan $f_1 = exp\theta_1$ dan $f_n = 0$ untuk $n = 2, 3, 4...$ sehingga :

$$f = 1 + exp\theta_1,$$

atau

$$f = 1 + \exp{(k_1x - k_1^3t + \alpha_1)}\ . \tag{12}$$

Selanjutnya persamaan (12) digunakan pada transformasi Cole-Hopf, yaitu persamaan $w = -2\frac{f_x}{f}$, sehingga didapatkan :

$$w = -2\left(\frac{k_1exp\theta_1}{1+exp\theta_1}\right). \tag{13}$$

Bila $u = w_x$ maka persamaan (13) dapat juga dituliskan sebagai berikut:

$$u = -\frac{k_1^2}{2}\frac{4}{exp\theta_1+exp(-\theta_1)+2} \tag{14}$$

Dengan menggunakan fungsi hiperbolik maka pesamaan (14) mempunyai bentuk lain yakni :

$$u = -\frac{k_1^2}{2}sech^2\frac{\theta_1}{2}\ ,$$

atau

$$u = -\frac{1}{2}k_1^2sech^2\frac{1}{2}(k_1x - k_1^3t + \alpha_1)\ , \tag{15}$$

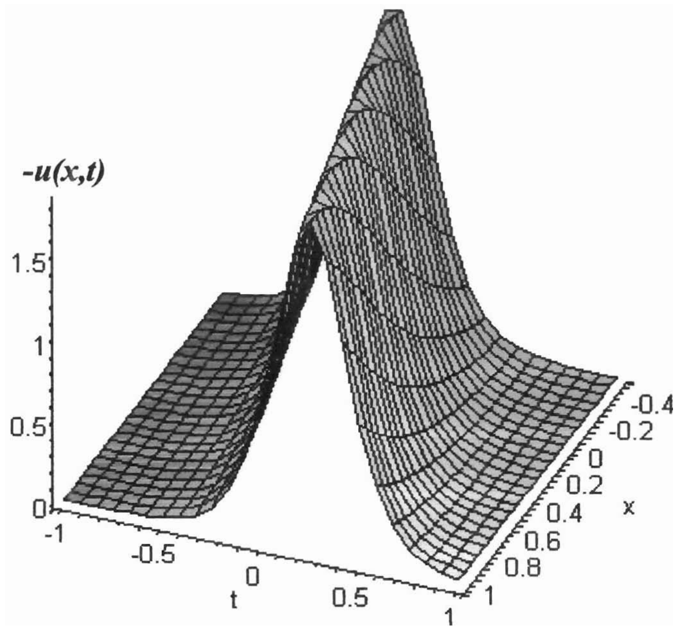
Persamaan (15) ini dikenal dengan solusi 1 soliton.

Jika dipilih $k_1 = 2$ dan $\alpha_1 = 0$, maka solusi 1 soliton pada persamaan (15) menjadi :

$$u = -2sech^2(x - 4t)\ . \tag{16}$$

Persamaan (16) sama dengan solusi 1 soliton yang telah diperoleh dengan metode integral yaitu pada persamaan (22).

Berdasarkan persamaan (16) dan dengan menggunakan program Maple dapat dibuat grafik untuk solusi 1 soliton dari persamaan KdV, seperti Gambar 5 berikut :



Gambar 1. Visualisasi Bentuk Gelombang Soliton

Berdasarkan Gambar 1 dapat dilihat gelombang mempunyai bentuk yang sama sepanjang lintasan perambatannya yang ditunjukkan olek sumbu *x*. Hal ini memperlihatkan sifat soliton di mana gelombang soliton mempunyai bentuk yang permanen jika merambat dalam medium yang sama.

KESIMPULAN

Metoda indeks efektif yaitu dengan melakukan aproksimasi geometri dari struktur dielektrik, sehingga sistem dua dimensi ini dipandang sebagai dua buah struktur satu dimensi secara bergantian. Perancangan piranti fotonik 2 dimensi untuk keperluan penapisan panjang gelombang tertentu dapat dilakukan dengan mengatur besaran parameter geometri dan parameter fisis. Melalui variasi parameter geometri (tebal lapisan dan jumlah lapisan) serta parameter fisis (indeks bias), dapat menentukan rentang panjang gelombang celah pita fotonik.

DAFTAR PUSTAKA

Boas, Mary L. 1983. *MatematicalMethods In The Physical Sciences second edition.* John Wiley & Sons, Canada.

Drazin, P G and Jhonson, R S. 1989. *Soliton : an introduction.* CambridgeUniversity, London.

Giancoli, Douglas C. 2001. *Physics Fifth Edition.* Erlangga, Jakarta.

Hadi, M. 2006. *Berkenalan Dengan Soliton.* http://www.fisik@net.com

Hidayati, 1999, *Interaksi Dalam Solusi Soliton Dari Medan Affine Toda*, Percikan, Volume 19, 81-90.

Hidayati, 2006 *Model Analitik Persamaan Gelombang Nonlinear J.S. Russell dan Solusinya Melalui Transformasi Backlund,* Makalah pada Seminar BKS PTN Indonesia Wilayah Barat, Padang, 11 Juli 2006

Remoissenet, M. 1993. *Waves Called Soliton.* Berlin Heidelberg New York.