MAKALAH

MODEL ANALITIK PERSAMAAN GELOMBANG NONLINEAR J.S. RUSSELL DAN SOLUSINYA MELALUI TRANSFORMASI BACKLUND

OLEH

DRA. HIDAYATI,.M.Si

Staf Pengajar Jurusan Fisika
FMIPA UNP

Disampaikan pada Seminar Dan Rapat Tahunan (Semirata)
Koordinasi Bidang MIPA
Di Padang, tanggal 9-11 Juli 2006

Panitia Pelaksana
SEMIRATA BKS-PTN MIPA WILAYAH BARAT
Padang, 9 - 11 Juli 2006

SURAT KETERANGAN
No. 64/Semirata/BKS/VII/2006

Panitia Pelaksana Semirata BKS-PTN MIPA Wilayah Barat Tahun 2006, menerangkan bahwa :

Nama : **Hidayati**

Instansi : **Universitas Negeri Padang**

Telah menyajikan makalah dengan judul :

"Model Analitik Persamaan Gelombang Nonlinear John Scott Russell Dan Solusinya Melalui Transformasi Backlund"

pada seminar BKS-PTN MIPA Wilayah Barat pada tanggal 9 - 11 Juli 2006 di Padang.

Demikian surat keterangan dibuat untuk dapat dipergunakan sebagaimana mestinya.

Padang, 11 Juli 2006
Koordinator Seksi Ilmiah,

BKS - MIPA
SEMIRATA 06
WILAYAH BARAT

Drs. Hendra Syarifuddin, M.Si
NIP. 132051381

MODEL ANALITIK PERSAMAAN GELOMBANG NONLINEAR J.S. RUSSELL DAN SOLUSINYA MELALUI TRANSFORMASI BACKLUND

Hidayati
Staf Pengajar Jurusan Fisika FMIPA UNP

ABSTRAK
Dengan menggunakan persamaan-persamaan hidrodinamika yang berhubungan dengan gerak fluida, dapat menjelaskan eksperimen yang dilakukan oleh J.S. Russell untuk gelombang air dangkal. Dari persamaan-persamaan dasar ini diturunkan persamaan KdV. Fenomena persamaan KdV sangatlah menarik, mengingat persamaan ini sering dijumpai dalam banyak fenomena fisika. Walaupun persamaan KdV adalah persamaan nonlinier namun dalam pemecahannya dapat dipecahkan dengan metode pelinerisasian eksak Salah satu metoda yang dapat digunakan adalah metoda transformasi Backlund. Transformasi Backlund ini digunakan karena invariansi suatu persamaan diffrensial dibawah transformasi Backlund dapat digunakan untuk membangkit tak berhingga banyaknya solusi-solusi lain dari suatu solusi trivial yang telah diketahui melalui metode aljabar. Melalui transformasi Backlund diperoleh solusi soliton. Dengan bantuan diagram Bianchi untuk transformasi Backlund berkaitan, diperoleh solusi N-soliton. Selanjutnya ditinjau tumbukkan antar soliton. Terjadinya tumbukan antara dua soliton ditandai dengan adanya pergeseran fase antara keadaan soliton sebelum dan sesudah tumbukkan. Adanya pergeseran fase ini dapat dilihat dalam interaksi 2 soliton.

Kata Kunci : Nonlinier, Persamaan KdV, Transformasi Backlund, Soliton

1. PENDAHULUAN

Gelombang non linear pertama kali diperkenalkan oleh J.S. Russell. J.S. Russell mengamati gelombang yang sedang bergerak di kanal sempit tersebut. J.S.Russell memperhatikan bahwa gerakan gelombang di sekitar perahu yang melaju dan tiba-tiba berhenti. Air yang semula ikut bergerak bersama perahu tidak ikut terhenti melainkan terkumpul di sekitar haluan. Gelombang tersebut menjauh meninggalkan perahu dalam bentuk satu gelombang tunggal dengan kecepatan yang tinggi dan tanpa mengalami perubahan bentuk (Remoissenet, 1994).

Dari pengamatan terhadap fenomena alam itu, akhirnya J.S. Russell melakukan eksperimen untuk mempelajari gejala gelombang tersebut, dan mendapatkan sifat bahwa cepat rambat gelombang tunggal sebanding dengan amplitudo, atau secara matematis dapat diungkapkan sebagai :

$$c^2 = g(h+a) \tag{1}$$

dimana g = percepatan gravitasi, h = kedalaman air tanpa gangguan, a = amplitudo gelombang, c=cepat rambat gelombang. Namun J.S.Russell sendiri tidak dapat memberikan model analitik yang dapat menerangkan gejala gelombang tersebut. Barulah pada tahun 1895 muncul model analitik yang dapat menerangkan gelombang J.S. Russell ini yang diusulkan oleh Koterweg dan de Vries.

Pada kenyataannya persamaan KdV ini sering ditemukan pada persoalan-persoalan fisika non linear yang lain, misalnya : persoalan FPU (Fermi, Pasta Ulam) yang mempertanyakan kenapa zat padat mempunyai konduktivitas panas berhingga. Selain itu persamaan KdV terdapat juga pada persamaan gelombang Rossby tunggal pada dinamika fluida geofisika.

Hal inilah yang membuat penulis merasa tertarik untuk mencoba membahas model analitik untuk dapat menerangkan gejala gelombang non linear tersebut. Penelitian ini akan melihat model analitik untuk persamaan gelombang non linear J.S.Russell serta menentukan bagaimana bentuk solusi dari persamaan gelombang tersebut.

2. PERSAMAAN HIDRODINAMIKA

Persamaan-persamaan dasar hidrodinamika yang akan ditinjau adalah dengan menganggap fluida bersifat sebagai fluida ideal. Aliran fluida ideal yaitu tak rotasional (tak berotasi), tak kompresibel (tak termampatkan), dan invisid (tak kental). Dengan menerapkan sifat fluida ideal diperoleh

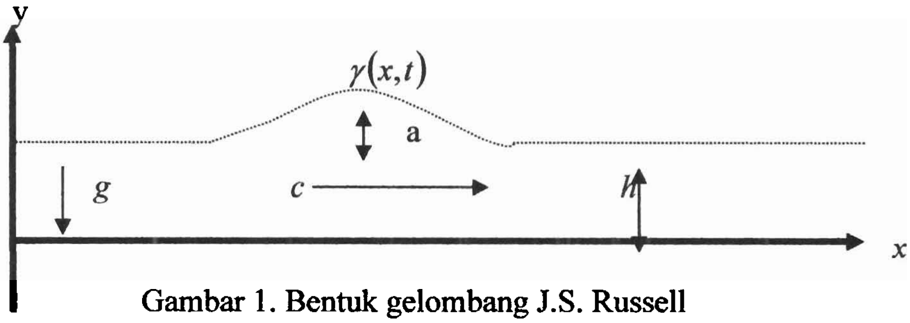
a.Persamaan Laplace : $\phi_{xx} + \phi_{zz} = 0$ (2)

b. Persamaan Bernoulli : $ga\gamma + \phi_t + \frac{1}{2}\left(\phi_x{}^2 + \phi_z{}^2\right) = 0$ (3)

c. Potensial kecepatan : $\phi_z = \frac{\partial z}{\partial t} + \phi_x \frac{\partial z}{\partial x}$ (4)

3. PENURUNAN PERSAMAAN KdV

Sesuai dengan gelombang yang digunakan J.S. Russell pada waktu eksperimen yaitu gelombang air dangkal (besar amplitudo gelombang sangat kecil dibandingkan panjang gelombang tersebut).



Gambar 1. Bentuk gelombang J.S. Russell

keterangan gambar : a = amplitudo gelombang
g = percepatan gravitasi
h = kedalaman tanpa gangguan
c = cepat rambat gelombang

Persyaratan gelombang air dangkal yang digunakan adalah tak rotasional, tak kompresibel, invisid dan dibatasi oleh permukaan bebas pada bagian atas dan dibatasi oleh permukaan horizontal pada bagian bawah, sehingga diperoleh tiga persamaan dasar itu yaitu persamaan (2), (3), dan (4). Berdasarkan ketiga persamaan ini maka diperoleh bentuk

$$2\gamma_{0\tau} + 3\gamma_0\gamma_{0\xi} + \frac{1}{3}\gamma_{0\xi\xi\xi} = 0 \qquad (5)$$

Persamaan (5) ini merupakan persamaan KdV

4. Hubungan Persamaan KdV dengan Hasil Persamaan J.S. Russell

Pada bagian ini akan dilihat hubungan persamaan (5) dengan bentuk secanh kuadrat yang merupakan bentuk gelombang tunggal J.S. Russell sekaligus solusi persamaan KdV dengan mengambil koordinat yang diajukan oleh Koterweg dan de Vries (1895) seperti yang telah diberikan pada persamaan (5).

Fungsi gelombang γ_0 pada persamaan (5) merupakan fungsi ξ dan τ. Dengan mengambil $\gamma_0(\xi,\tau) = \gamma_0(\chi)$ maka berdasarkan persamaan (5) dapat diperoleh:

$$\gamma_0 = \frac{2c}{k}\sec h^2\left[\frac{1}{2}\chi\sqrt{\frac{6c}{k^3}}\right] \qquad (6)$$

Dengan mensubstitusikan nilai c dan k dari koordinat yang diajukan oleh Koterweg-de Vries (Drazin, 1992) pada persamaan (5), Maka persamaan bisa dituliskan menjadi :

$$\gamma_0 = 2(gh)^{1/2}\left(1+\frac{a}{2h}\right)\sec h^2\left[\frac{1}{2}\left\{6(gh)^{1/2}\left(1+\frac{a}{2h}\right)\right\}^{1/2}\left\{\xi-(gh)^{1/2}\left(1+\frac{a}{2h}\right)t\right\}\right] \quad (7)$$

Dari persamaan (7) terlihat bahwa :

$$c = (gh)^{1/2}\left(1+\frac{a}{2h}\right) \qquad \text{atau} \qquad c^2 \approx g(h+a) \qquad (8)$$

Persamaan (8) ini sama dengan persamaan (1).

Jadi, dapat disimpulkan bahwa solusi dari persamaan KdV menunjukkan bahwa cepat rambat gelombang akan semakin besar apabila amplitudo gelombang semakin besar, hal ini sesuai dengan hasil pengamatan yang dilakukan oleh J.S. Russell.

5. Hubungan Cepat Rambat Gelombang Dengan Amplitudo Gelombang

Dari persamaan (8) terlihat bahwa : cepat rambat gelombang (c) berbanding lurus dengan amplitudo gelombang (a), dengan kata lain jika cepat rambat gelombang besar maka amplitudo gelombang juga besar dan sebaliknya. Berarti dapat disimpulkan bahwa besar kecilnya amplitudo bergantung pada harga cepat rambat gelombang.

6. **Metode Transformasi Backlund.**

Metode transformasi Backlund berkembang pada tahun 1880, yang digunakan pada teori yang berhubungan dengan diferensial geometri dan persamaan diferensial. Teori ini timbul sebagai penyamarataan dari hubungan transformasi, seperti transformasi yang menggunakan dasar sebuah garis singgung disebuah titik dalam suatu jarak pada permukaan dengan jarak lainnya (Drazin, 1992)

Pada metode transformasi Backlund ini, akan diketahui hubungan antara invariant Galileo dan persamaan KdV. Invariant Galileo tersebut secara matematik ditulis dengan :

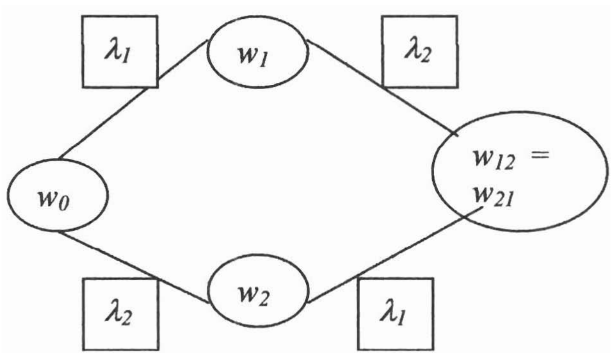
$u = \lambda + V^2 + V_x$ (Drazin, 1992)..(9)

dimana λ adalah parameter konstan, dan V adalah energi potensial.

Dengan mensubstitusikan invariant Galileo pada persamaan KdV, akan diperoleh suatu persamaan yang merupakan modifikasi dari persamaan KdV akibat pengaruh dari invariant Galileo tersebut.

$$u(x) = \lambda + V_x + V^2$$

Sedangkan untuk mencari solusi N soliton pada metode Transformasi Backlund ini, digunakan teorema perubahan dari diagram Bianchi (Eisenhart, 1909). Diagram Bianchi tersebut dapat diaplikasikan pada persamaan dasar dari transformasi Backlund yang telah diperoleh dari penerapan invariant Galileo pada persamaan KdV sebelumnya.



Gambar 2. *Diagram teorema Bianchi's (Eisenhart, 1909)*

Pada gambar 2 menunjukkan suatu skema yang merupakan alur yang saling terkait satu sama lain. w_0 menggambarkan komponen dasar dari solusi 0 soliton, w_1 dan w_2 menggambarkan komponen dasar dari solusi 1 soliton, sedangkan w_{12} dan w_{21} menggambarkan komponen dasar dari solusi 2 soliton. Kemudian masing-masing dari variabel w yang menggambarkan solusi soliton tersebut dipengaruhi oleh nilai λ yang berbeda yaitu λ_1 dan λ_2. Dari w_1 ke w_0 dipengaruhi oleh λ_1, dari w_2 ke w_0 dipengaruhi oleh λ_2, dari w_{12} ke w_1 dipengaruhi oleh λ_2, sedangkan dari w_{21} ke w_2 dipengaruhi oleh λ_2.

$$w_1 - w_2 = 2V \quad \text{dan} \quad 2\lambda + 2V^2 = (w_1 - w_2)_x \tag{10}$$

kemudian dengan mensubstitusikan persamaan (10), maka persamaan di atas dapat ditulis dengan :

$$(w_1 + w_2)_x = 2\lambda + \frac{1}{2}(w_1 - w_2)^2 \quad \text{...(11)}$$

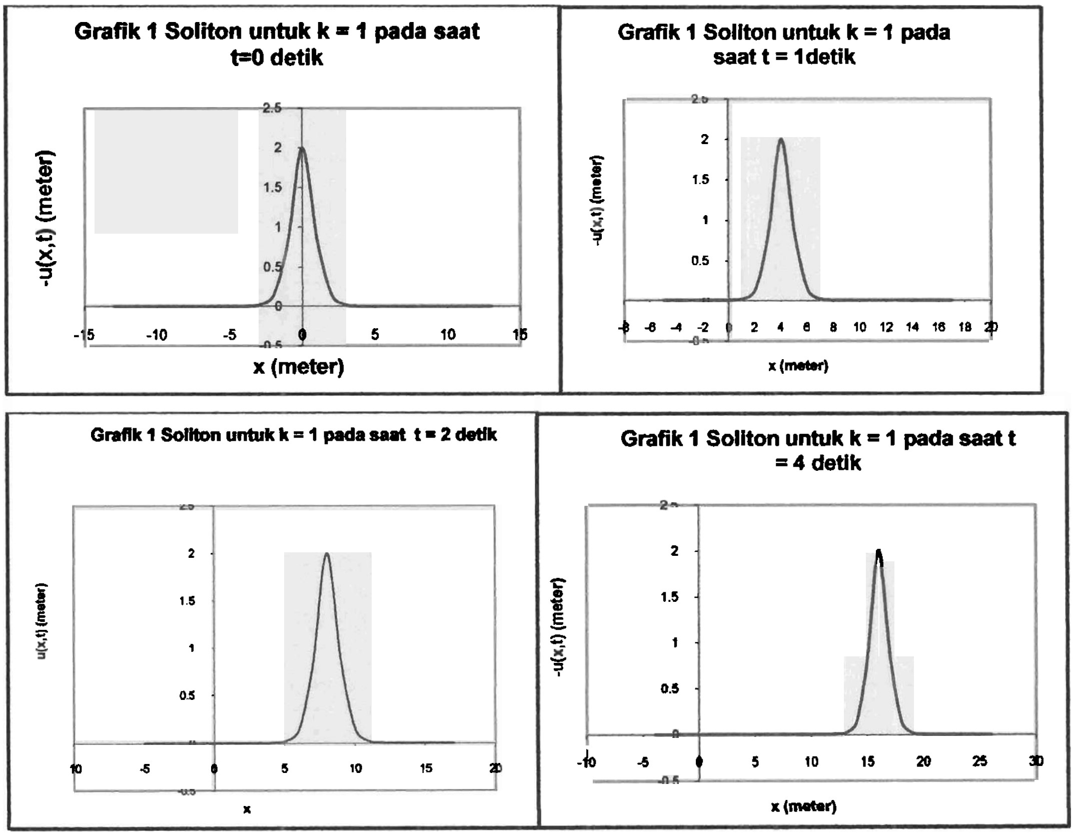
Persamaan (10) dan persamaan (11) merupakan persamaan dasar dari transformasi Backlund, yang akan digunakan untuk menentukan solusi soliton dari persamaan KdV pada penelitian ini.

a. **Solusi 1 Soliton dengan Metode Transformasi Backlund**

Untuk menentukan solusi 1 soliton, diambil solusi yang paling sederhana dengan menganggap nilai $u_2=0$ sehingga $w_2=0$ atau dengan kata lain nilai $w_2(x,t)=0$ untuk semua nilai *x* dan *t.* dengan mensubstitusikan syarat ini ke persamaan (11) diperoleh :

$$u_1(x,t) = -2k^2 \sec h^2 \{k(x - x_0 - 4k^2 t)\} \quad \text{....................................(14)}$$

Persamaan (14) merupakan persamaan yang menggambarkan solusi 1-soliton pada persamaan KdV. Secara grafik dapat dilihat sebagai berikut:

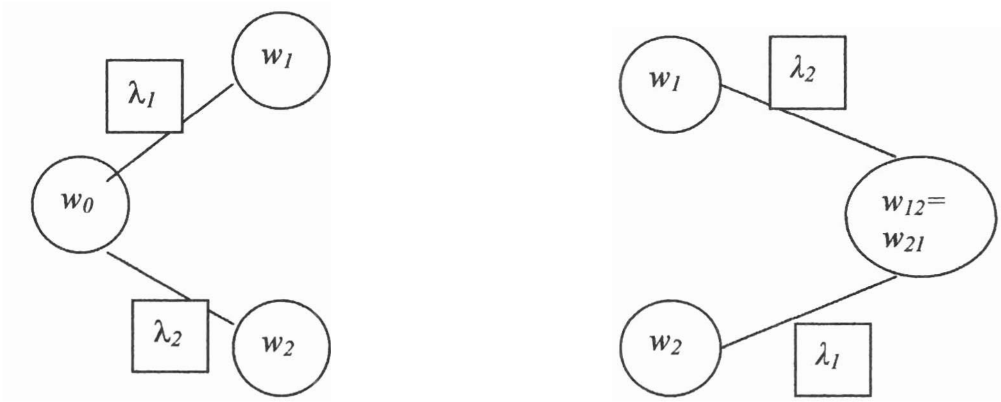


Gambar 3. *Grafik 1 soliton untuk k = 1*

Terlihat bahwa soliton yang merupakan gelombang nonlinier memiliki kriteria diantaranya yaitu semakin besar amplitudonya, maka cepat rambat gelombangnya juga semakin besar.

b. Solusi 2 Soliton dengan Metode Transformasi Backlund

Untuk menentukan solusi 2 soliton, digunakan diagram perubahan dari teorema Bianchi (Eisenhart, 1909) yang diaplikasikan pada persamaan dasar dari transformasi Backlund



Gambar 4. *Diagram Bianchi dilihat dari kiri dan kanan*

Dengan mengaplikasikan persamaan (11) yang merupakan persamaan dasar dari transformasi Backlund dan berdasarkan pada gambar 13 di atas dapat diperoleh dua buah persamaan yaitu :

$$\left.\begin{aligned} &(w_2 + w_0)_x = 2\lambda_2 + \frac{1}{2}(w_2 - w_0)^2 \\ \text{dan} \\ &(w_1 + w_0)_x = 2\lambda_1 + \frac{1}{2}(w_1 - w_0)^2 \end{aligned}\right\} \qquad \text{.....................................(15)}$$

Sedangkan sudut pandang dari diagram Bianchi kanan didapatkan dua buah persamaan juga yaitu :

$$\left.\begin{aligned} &(w_{12} + w_1)_x = 2\lambda_2 + \frac{1}{2}(w_{12} - w_1)^2 \\ \text{dan} \\ &(w_{21} + w_2)_x = 2\lambda_1 + \frac{1}{2}(w_{21} - w_2)^2 \end{aligned}\right\} \qquad \text{.....................................(15)}$$

Karena $w_{21} = w_{12}$ maka persamaan di atas dapat ditulis :

$$(w_1 - w_2)_x = 2(\lambda_2 - \lambda_1) + \frac{1}{2}\left(-2w_{12}w_1 + w_1^2 + 2w_{21}w_2 - w_2^2\right) \quad \text{......................} (16)$$

Selanjutnya akan didapatkan :

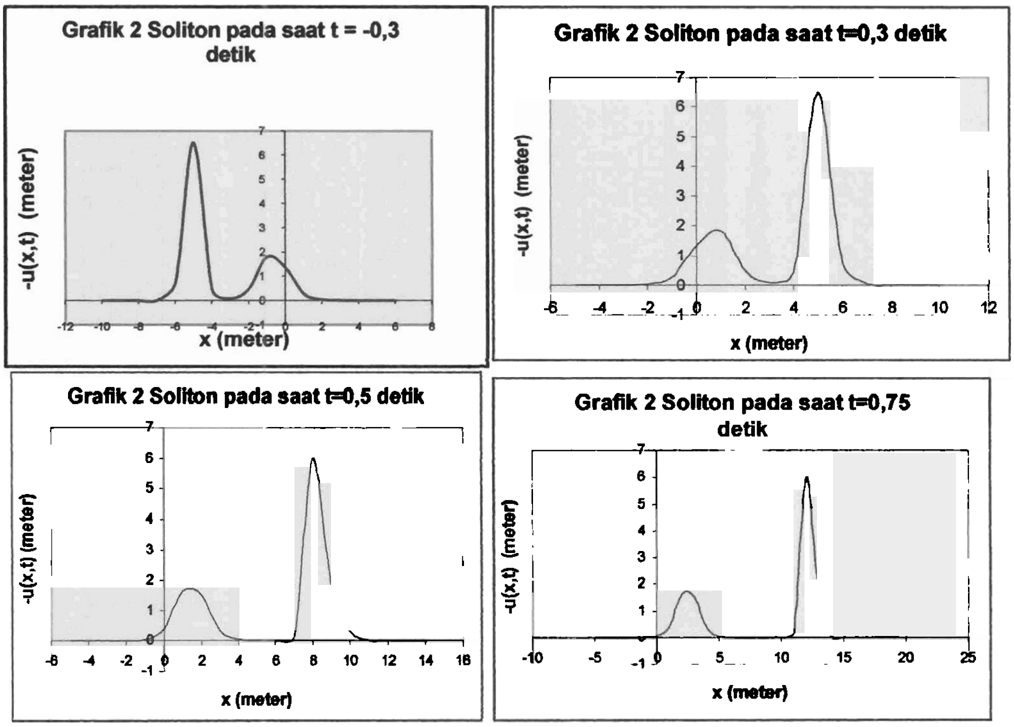
$$w_{12} = w_0 - 4\frac{(\lambda_1 - \lambda_2)}{w_1 - w_2} \quad \text{...} (17)$$

$$w_1(x,t) = -2\tanh(x - 4t) \text{ dan } w_2(x,t) = -4\coth(2x - 32t)$$

Sehingga :

$$u_{12}(x,t) = -12\left[\frac{3 + 4\cosh(2x - 8t) - \cosh(4x - 64t)}{\{3\cosh(x - 28t) - \cosh(3x - 36t)\}^2}\right] \quad \text{..............................} (18)$$

Persamaan (18) merupakan persamaan untuk solusi 2 soliton, bila diplot akan terbentuk grafik sebagai berikut :



Gambar 5. *Grafik 2 soliton*

Terlihat soliton kedua tersebut didalam penjalarannya selalu mempertahankan bentuknya, walaupun soliton tersebut berinteraksi dengan soliton lain dan dapat dilihat soliton kedua yang memiliki amplitudo yang besar akan lebih cepat perambatannya dibanding perambatan pada soliton pertama yang memiliki amplitudo yang lebih kecil dari amplitudo soliton kedua.

KESIMPULAN

1. Persamaan KdV merupakan persamaan yang membahas model analitik dari gelombang nonlinier yang dikemukakan oleh John Scott Russell.
2. Metode transformasi Backlund merupakan salah satu metode yang dapat digunakan untuk menentukan solusi soliton dari persamaan KdV.:
3. Untuk menentukan persamaan dari solusi 2 soliton, selain menggunakan persamaan dari invariant Galileo, juga dengan menerapkan diagram Bianchi
4. Soliton didalam melakukan perambatannya tidak mempengaruhi bentuknya, dengan kata lain bentuk soliton akan selalu tetap walaupun soliton melakukan perambatan yaitu pada *t* yang berbeda. Soliton juga dapat berunteraksi dengan soliton lain dengan selalu mempertahankan bentuknya setelah mengalami interaksi.

DAFTAR PUSTAKA

Drazin and R.S Johnson. 1992. *Soliton and Introduction.* Cambridge. University of London. England.

Eilenberger. 1983. *"Mathematical Methods for Physicists"*. Springer-Verlog Berling Heidelberg. Germany.

Erwin Kreyzig. 1993. *Advence Engineering Mathematic. Seventh Edition.* John Wiley and Sons, Inc Singapore. Singapore.

Frank Ayres, Jr. 1981. *Theori and Problem of Differential and Integral In si Metric Units.* Schaum's Outline Series, McGraw-Hill International Book Company. Singapore.

http://math.cofc. Edu/Faculty/Kasman/Solitonpics/KdV.html.2004

Hidayati. 1999. Interaksi *Dalam Solusi Soliton Teori Medan Affine Toda*, Tesis ITB Bandung

Louis A P, Lawrence R. Harvill. 1991. *Matematika Terapan Untuk Para Insinyur Fisikawan II, Edisi Ketiga.* Gajah Mada University Press.Yogyakarta

Micheal Remoissenet. 1994. *Wave Called Solitons. Concepts and Experiment.*, Springer-Verlag Berlin Hedelberg. Germany.

R.K Dad, J.C Eilbeck. 1982. *"Solutions and Nonlinier Wave Equation"*. Akademic press London. England